Tutoraggio Ricerca Operativa 2019/2020
7. Teoria dei Grafi: Nozioni base, alberi ricoprenti e cammini minimi

Alice Raffaele, Romeo Rizzi

Università degli Studi di Verona

19 maggio 2020

Teoria dei Grafi

Un matematico prestato alla Disney
(Link: *http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/archivio-presentazioni-multimediali/un-matematico-prestato-alla-disney-episodio-9-i-ponti-di-quackenberg-i-ponti-di-konigsberg/*)

Nozioni base

- **Grafo**: configurazione formata da un insieme di punti (*vertici* o *nodi*) e un insieme di linee (*lati* o *archi*) che uniscono coppie di nodi;
  - **Indiretto**: quando i *lati* non sono orientati; si indica con $G = (V, E)$;
  - **Diretto**: quando gli *archi* sono orientati; si indica con $G = (V, A)$.
- **Grafo pesato**: a ogni lato/arco è associato un valore, detto *peso*; esiste quindi una funzione $f : E \to R$ che associa a ogni arco e un valore p;
- **Grafo connesso**: quando tutti i vertici sono collegati tra loro (i.e., esiste un percorso che collega tutte le coppie di nodi);
- **Grafo completo**: quando ogni vertice è direttamente collegato con un lato a tutti gli altri;
- **Vertici adiacenti**: se esiste un lato/arco che li collega direttamente;
- **Ciclo**: sottografo i cui vertici formano un ciclo (un percorso chiuso).
- **Taglio**: dato un insieme $S \subseteq V$, il taglio $\delta(S)$ è l'insieme dei lati/archi del grafo che hanno esattamente una estremità in S;
- **Albero**: grafo connesso e aciclico.

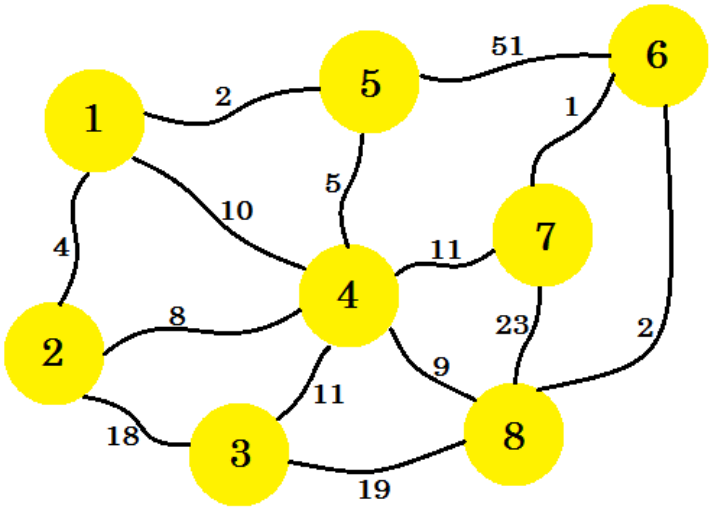
Il problema dell'albero ricoprente di costo minimo (Minimum Spanning Tree)

Consideriamo un grafo $G = (V, E, w)$ indiretto, connesso e pesato.
Un *albero ricoprente* di G è un sottografo $T = (V, E' \subseteq E)$ di G tale che:

- T è un albero;
- T contiene tutti i vertici di G.

Il minimo albero ricoprente (MST) è un albero ricoprente a costo minimo.

Esempio: consideriamo 8 case e i loro possibili collegamenti con i loro relativi costi; come possiamo collegarle in modo che il costo complessivo sia il minimo?



L'algoritmo di Kruskal

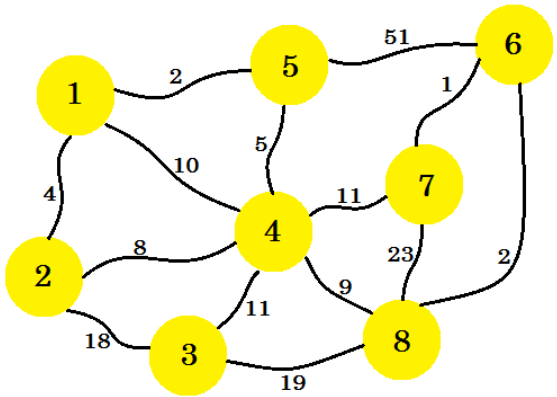
Algoritmo proposto dal matematico americano **Joseph Kruskal** nel 1956.

Procedimento:

1. Ordinare i lati in base al loro peso, in modo non decrescente;
2. Prendere i primi $n-1$ lati tali da:
   - Ottenere un sottografo connesso;
   - Non avere cicli.

Strategia: mantiene un sottografo non per forza connesso di un MST (all'inizio tutti i vertici del grafo e nessun lato).

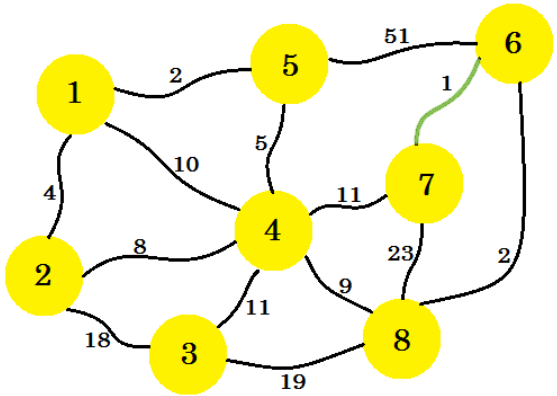
Risoluzione esercizio con Kruskal (I)



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (II)

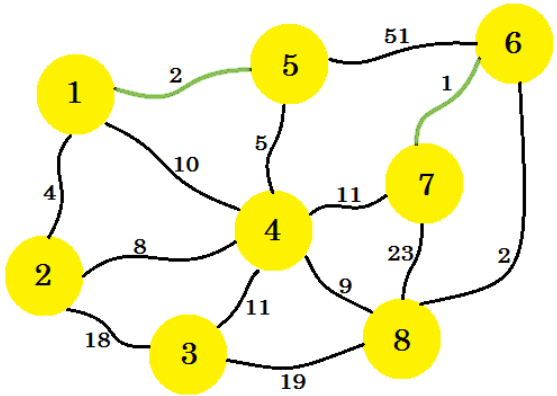
Inserisco in soluzione il lato $(6, 7) \rightarrow$ **Costo parziale**: 1



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (III)

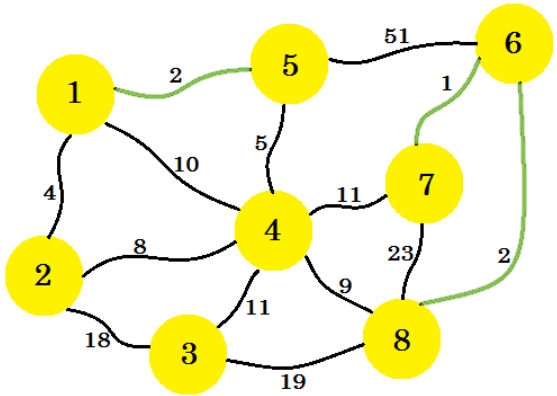
Inserisco in soluzione il lato $(1, 5) \rightarrow$ **Costo parziale**: 3



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (IV)

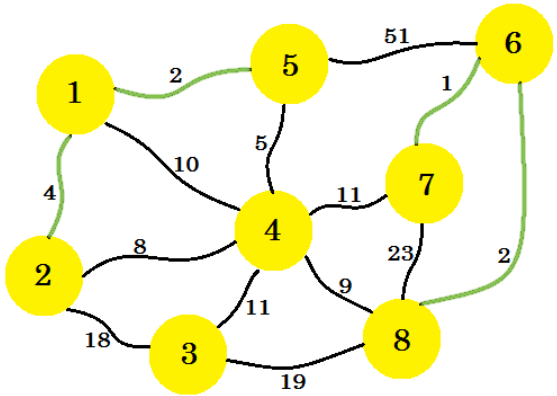
Inserisco in soluzione il lato $(6, 8) \rightarrow$ **Costo parziale**: 5



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (V)

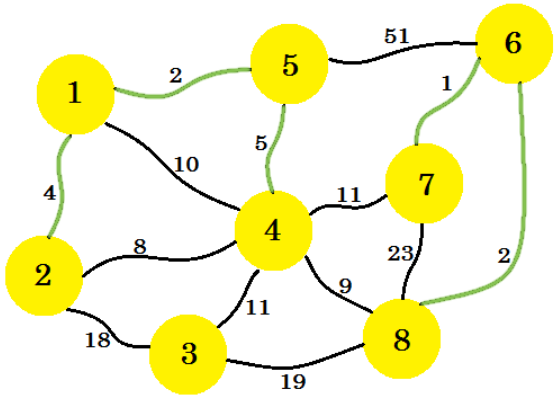
Inserisco in soluzione il lato $(1, 2) \rightarrow$ **Costo parziale**: 9



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (VI)

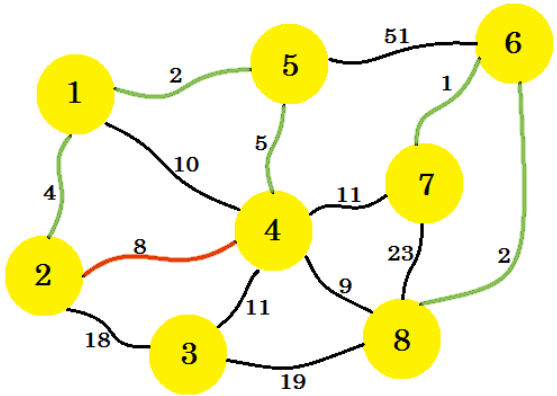
Inserisco in soluzione il lato $(4, 5) \rightarrow$ **Costo parziale**: 14



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (VII)

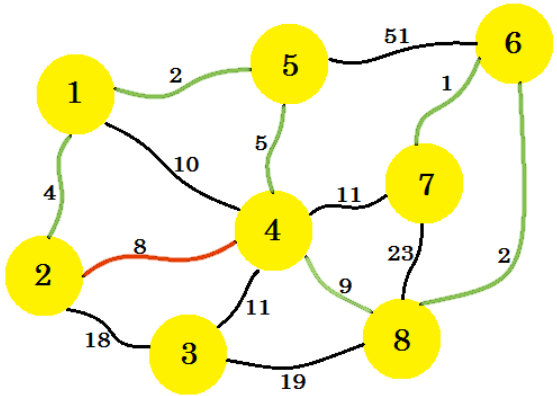
Inserisco in soluzione il lato $(2, 4) \rightarrow$ **NO!** Si formerebbe il ciclo 1-2-4-5.



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (VIII)

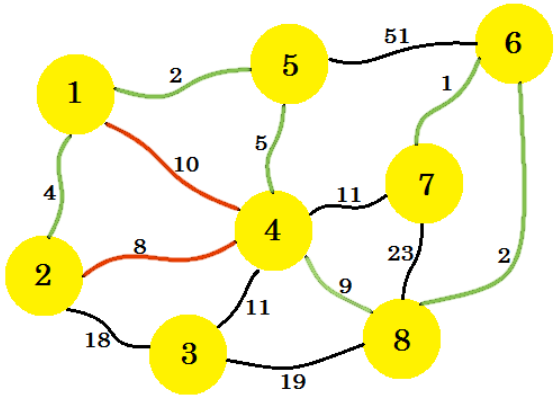
Inserisco in soluzione il lato $(4, 9)$ $\rightarrow$ **Costo parziale**: 23



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (IX)

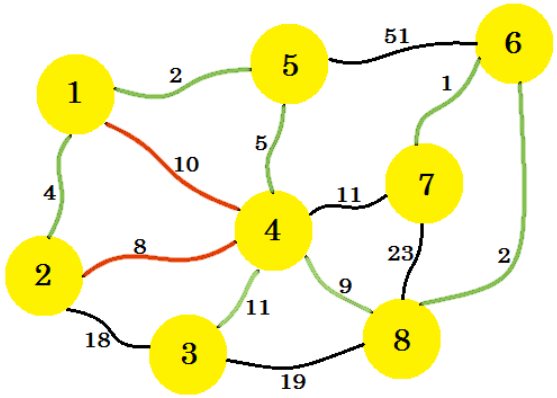
Inserisco in soluzione il lato $(1, 4) \rightarrow$ **NO!** Si formerebbe il ciclo 1-4-5.



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal (X)

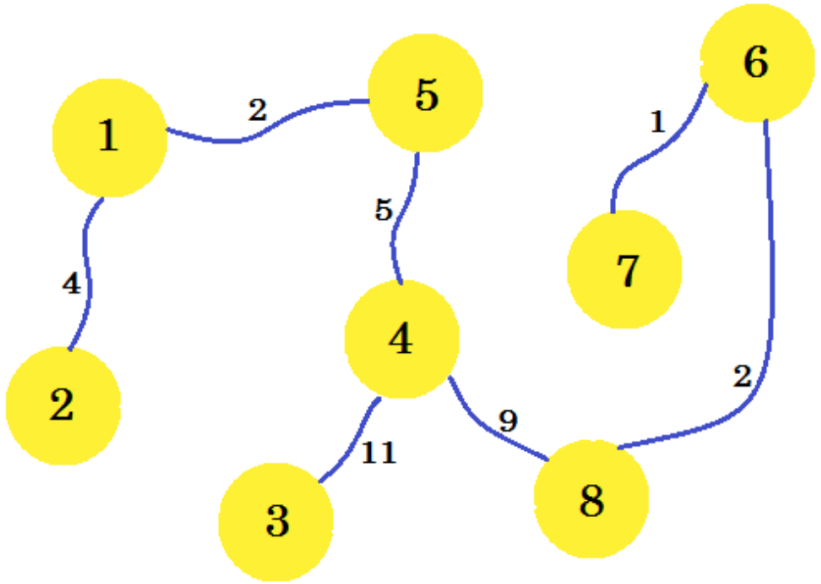
Inserisco in soluzione il lato $(3, 4)$ $\rightarrow$ **Costo parziale**: 34



1. $(6, 7)$ 1
2. $(1, 5)$ 2
3. $(6, 8)$ 2
4. $(1, 2)$ 4
5. $(4, 5)$ 5
6. $(2, 4)$ 8
7. $(4, 8)$ 9
8. $(1, 4)$ 10
9. $(3, 4)$ 11
10. $(4, 7)$ 11
11. $(2, 3)$ 18
12. $(3, 8)$ 19
13. $(7, 8)$ 23
14. $(5, 6)$ 51

Risoluzione esercizio con Kruskal - Soluzione

In soluzione ci sono $n - 1 = 7$ lati $\rightarrow$ **Costo totale MST**: 34



Note:

- Se al posto del lato $(3, 4)$ avessimo inserito il lato $(4, 7)$, si sarebbe formato il ciclo 4-5-6-7;
- L'algoritmo di Kruskal è *ottimo*: trova sempre la soluzione migliore;

Complessità: si può dimostrare che sia $O(|E| \log |E|)$ o $O(|E| \log |V|)$.

L'algoritmo di Prim

Fu originariamente sviluppato nel 1930 dal matematico ceco **Vojtěch Jarník** e indipendentemente dall'informatico **Robert C. Prim** nel 1957. Nel 1959 venne riscoperto da **Edsger Dijkstra**.

Procedimento:

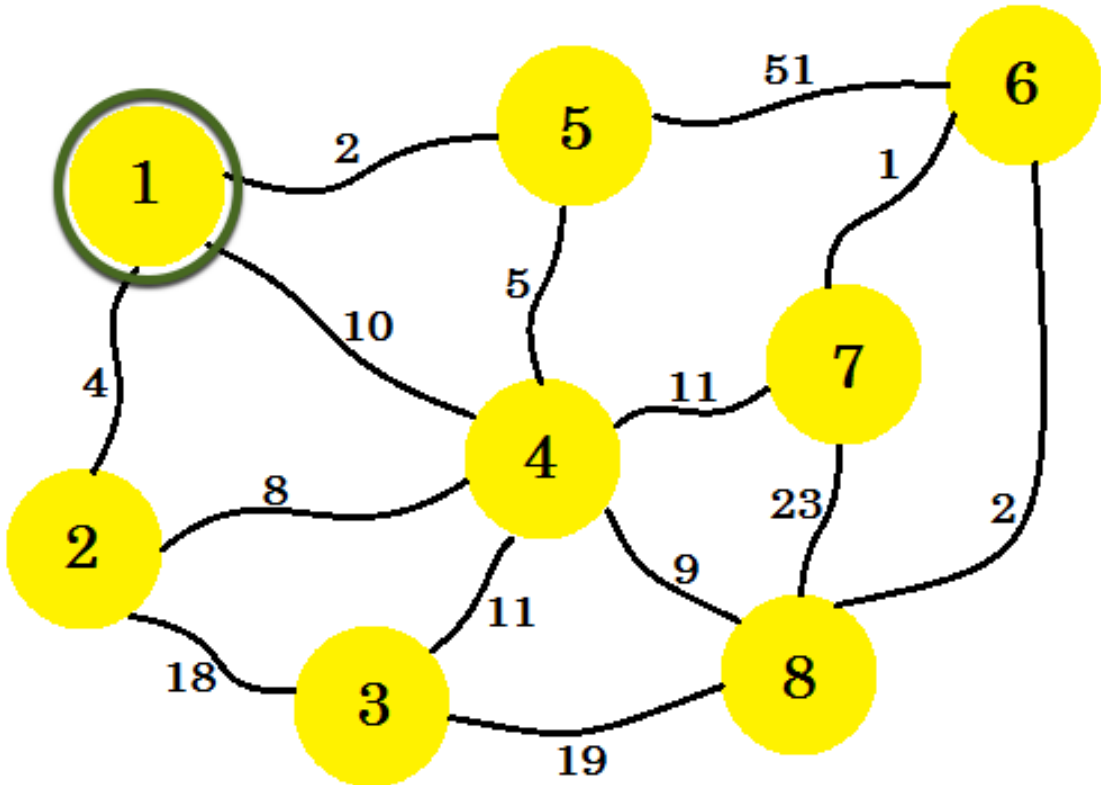
1. Selezionare un nodo di origine e inserirlo in un insieme S;
2. Aggiungere il lato (u, v) di costo minimo adiacente a un nodo in S (i.e., $u \in S$, $v \in V \setminus S$);
3. Inserire v in S e ripetere dallo Step 2, finché la cardinalità di S non è pari a n.

Strategia: costruisce un albero connesso e aciclico (all'inizio fa parte della soluzione solo il nodo di origine).

Complessità: $O(|E| \log |V|)$.

Risoluzione esercizio con Prim (I)

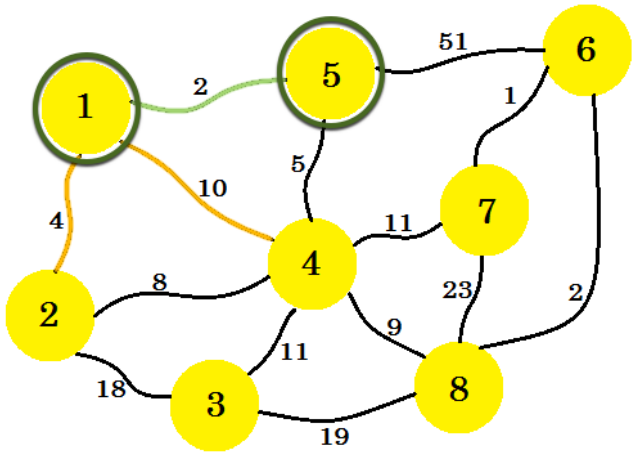
Risolviamo lo stesso esercizio con l'algoritmo di Prim.



Selezioniamo come nodo origine il vertice 1 e inseriamolo in S.

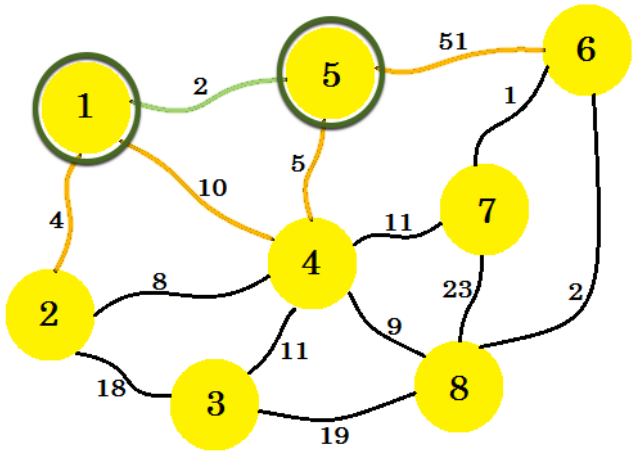
Risoluzione esercizio con Prim (II)

Vertici già visitati: $S = \{1\}$;
Lati selezionabili:
$\{(1,2),(1,4),(1,5)\}$;
Costo parziale: 0.



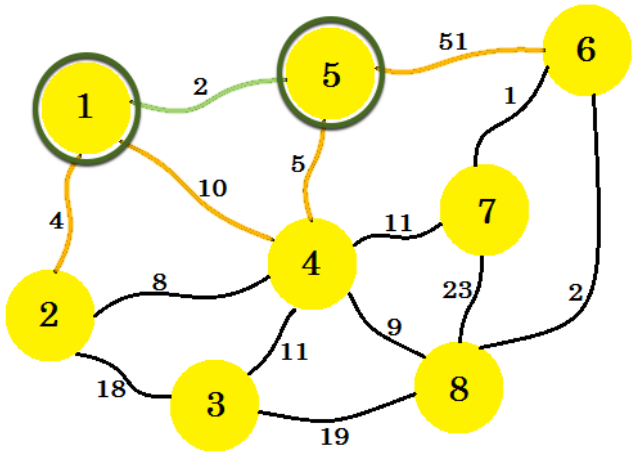
Scegliendo il lato $(1,5)$, inseriamo il vertice 5 in S e aggiungiamo i lati a esso adiacenti tra quelli selezionabili:

Vertici già visitati: $S = \{1,5\}$;
Lati in soluzione: $\{(1,5)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1,4),(1,5),(4,5),(5,6)\}$;
Costo parziale: 2.



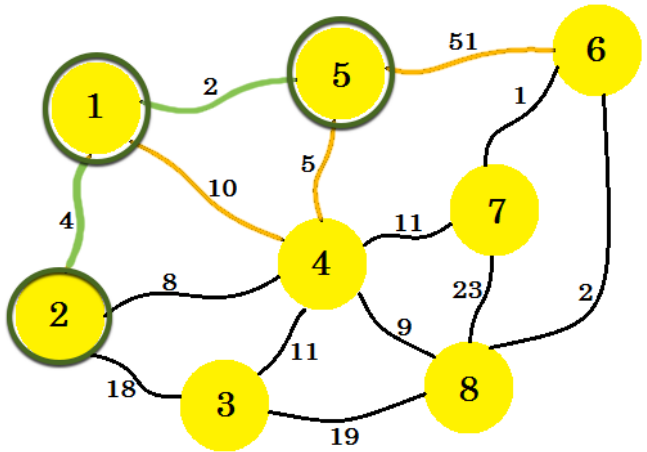
Risoluzione esercizio con Prim (III)

Vertici già visitati: $S = \{1, 5\}$;
Lati in soluzione: $\{(1, 5)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1, 2), (1, 5), (4, 5), (5, 6)\}$;
Costo parziale: 2.



Selezioniamo il lato $(1, 2)$ e aggiungiamo a S il vertice 2:

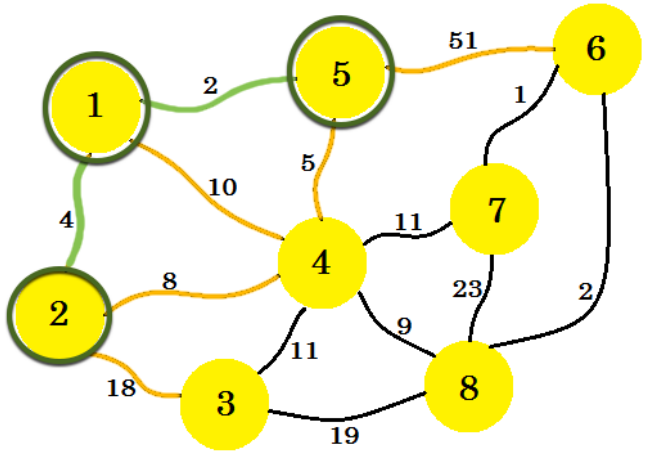
Vertici già visitati: $S = \{1, 5, 2\}$;
Lati in soluzione: $\{(1, 5), (1, 2)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1, 4), (4, 5), (5, 6)\}$;
Costo parziale: 6.



Risoluzione esercizio con Prim (IV)

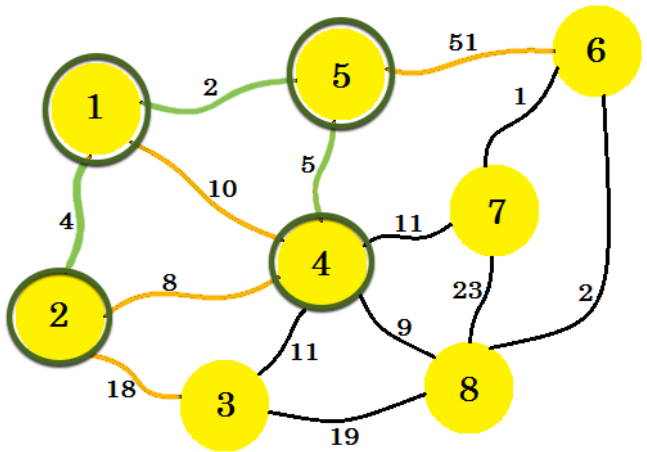
Aggiungiamo i lati adiacenti al vertice 2:

Vertici già visitati: $S = \{1, 5, 2\}$;
Lati in soluzione: $\{(1, 5), (1, 2)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1, 5), (4, 5), (5, 6), (2, 3), (2, 4)\}$;
Costo parziale: 6.



Selezioniamo il lato $(4, 5)$ e aggiungiamo a S il vertice 4:

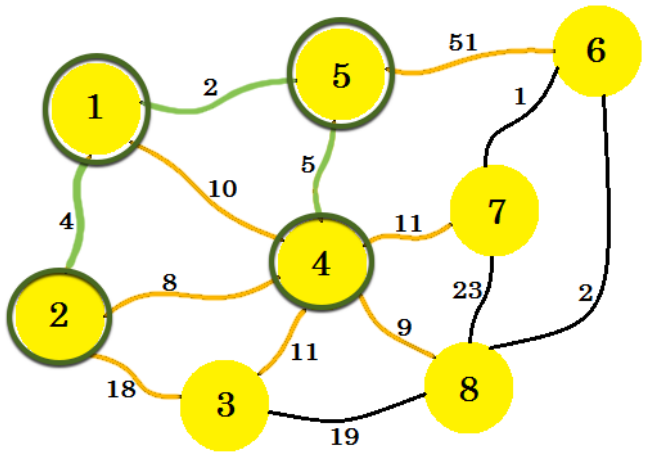
Vertici già visitati: $S = \{1, 5, 2, 4\}$;
Lati in soluzione:
$\{(1, 5), (1, 2), (4, 5)\}$ **Lati selezionabili**:
$\{(1, 5), (5, 6), (2, 3), (2, 4)\}$;
Costo parziale: 11.



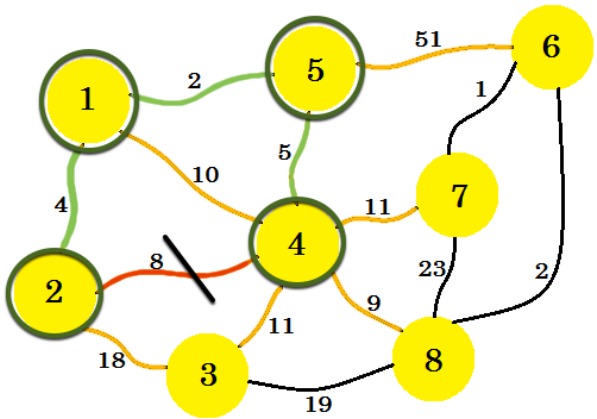
Risoluzione esercizio con Prim (V)

Aggiungiamo i lati adiacenti al vertice 4:

Vertici già visitati: $S = \{1, 5, 2, 4\}$;
Lati in soluzione:
$\{(1,5),(1,2),(4,5)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1,5),(5,6),(2,3),(2,4),(3,4),(4,7),$
Costo parziale: 11.

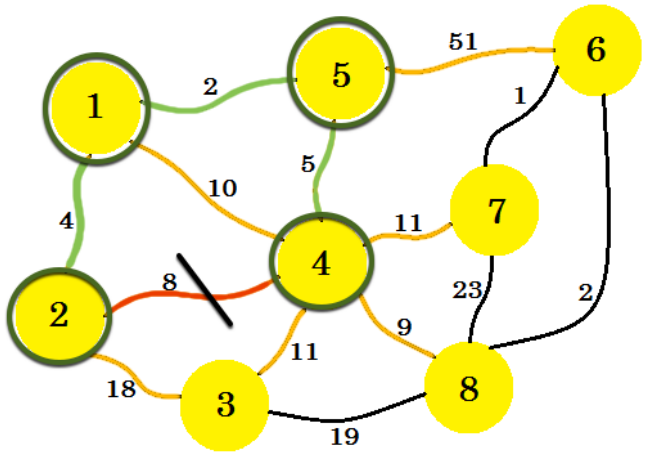


Non possiamo selezionare il lato $(2,4)$ perché si formerebbe un ciclo tra i nodi 1-2-4-5.

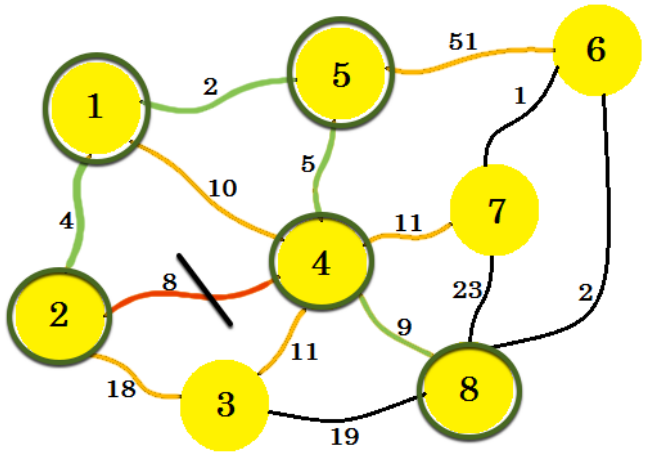


Risoluzione esercizio con Prim (VI)

Vertici già visitati: $S = \{1, 5, 2, 4\}$;
Lati in soluzione:
$\{(1, 5), (1, 2), (4, 5)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1, 5), (5, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 7), (4, 8)\}$
Costo parziale: 11.



Selezioniamo il lato $(4, 8)$ e aggiungiamo a S il vertice 8:
Vertici già visitati:
$S = \{1, 5, 2, 4, 8\}$;
Lati in soluzione:
$\{(1, 5), (1, 2), (4, 5), (4, 8)\}$ **Lati selezionabili**:
$\{(1, 5), (5, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 7)\}$;
Costo parziale: 20.



Risoluzione esercizio con Prim (VII)

Aggiungiamo i lati adiacenti al vertice 8:

Vertici già visitati:

$S = \{1, 5, 2, 4, 8\}$;

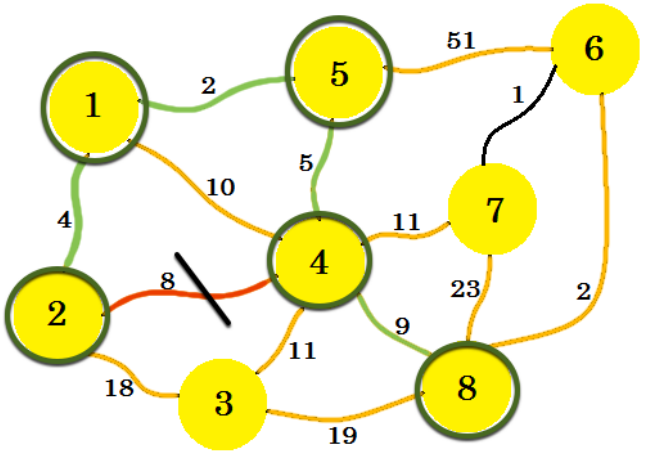
Lati in soluzione:

$\{(1, 5), (1, 2), (4, 5), (4, 8)\}$

Lati selezionabili:

$\{(1, 5), (5, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 7), (6, 8),$

Costo parziale: 20.



Selezioniamo il lato $(6, 8)$ e aggiungiamo a S il vertice 6:

Vertici già visitati:

$S = \{1, 5, 2, 4, 8, 6\}$;

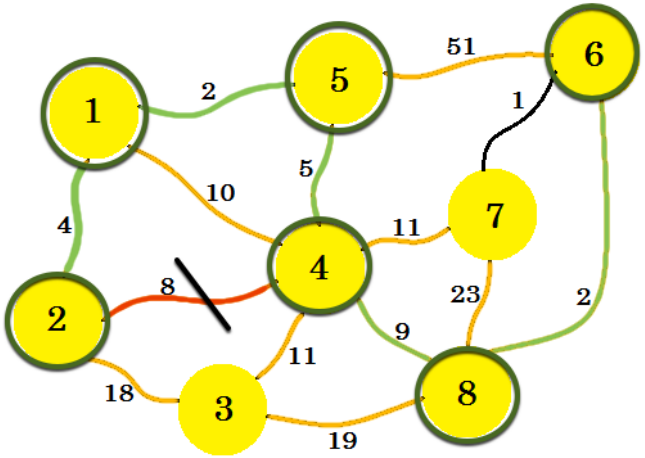
Lati in soluzione:

$\{(1, 5), (1, 2), (4, 5), (4, 8), (6, 8)\}$

Lati selezionabili:

$\{(1, 5), (5, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 7), (7, 8)\}$

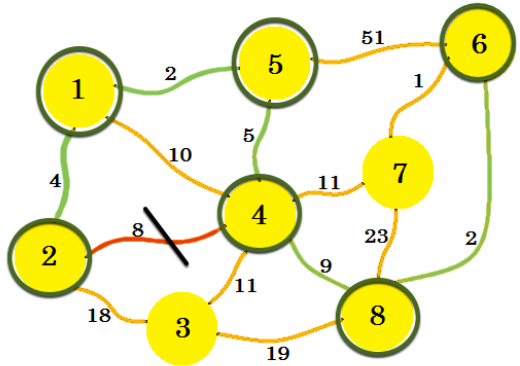
Costo parziale: 22.



Risoluzione esercizio con Prim (VIII)

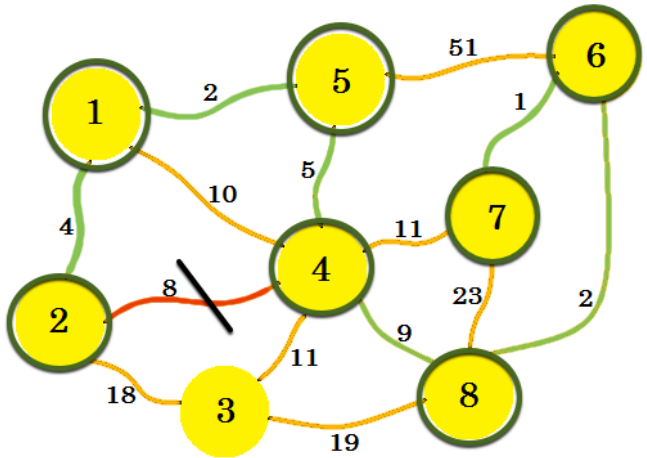
Aggiungiamo i lati adiacenti al vertice 6:

Vertici già visitati: $S = \{1, 5, 2, 4, 8, 6\}$;
Lati in soluzione:
$\{(1, 5), (1, 2), (4, 5), (4, 8), (6, 8)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1, 5), (5, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 7), (7, 8), (6, 7)\}$;
Costo parziale: 22.



Selezioniamo il lato $(6, 7)$ e aggiungiamo a S il vertice 7:

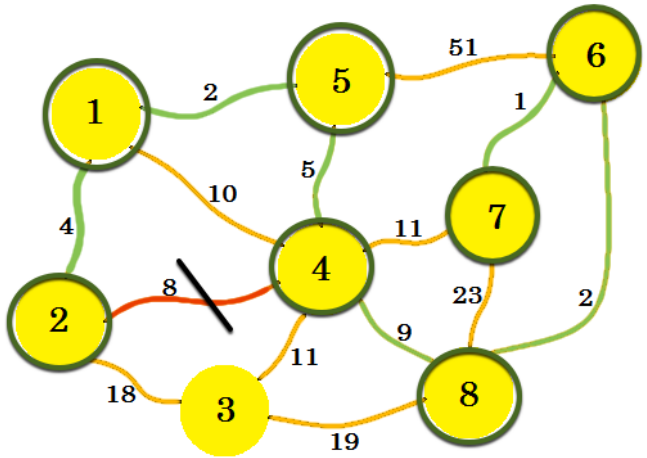
Vertici già visitati:
$S = \{1, 5, 2, 4, 8, 6, 7\}$;
Lati in soluzione:
$\{(1, 5), (1, 2), (4, 5), (4, 8), (6, 8), (6, 7)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1, 5), (5, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 7), (7, 8)\}$;
Costo parziale: 23.



Risoluzione esercizio con Prim (IX)

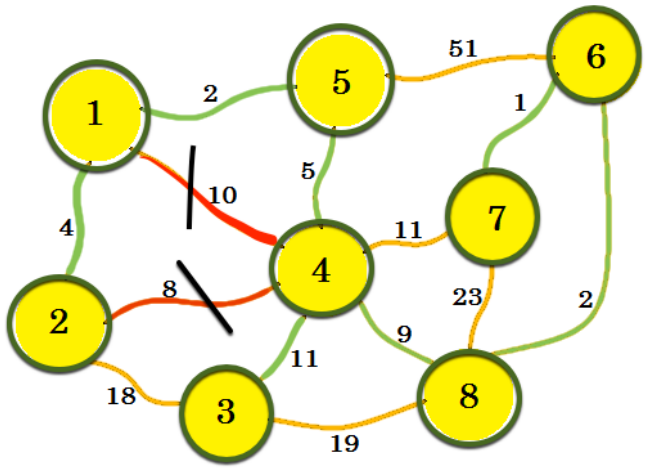
Tutti i lati adiacenti al vertice 7 sono già tra i selezionabili:

Vertici già visitati:
$S = \{1, 5, 2, 4, 8, 6, 7\}$;
Lati in soluzione:
$\{(1,5), (1,2), (4,5), (4,8), (6,8), (6,7)\}$
Lati selezionabili:
$\{(1,5), (5,6), (2,3), (3,4), (4,7), (7,8)\}$;
Costo parziale: 22.



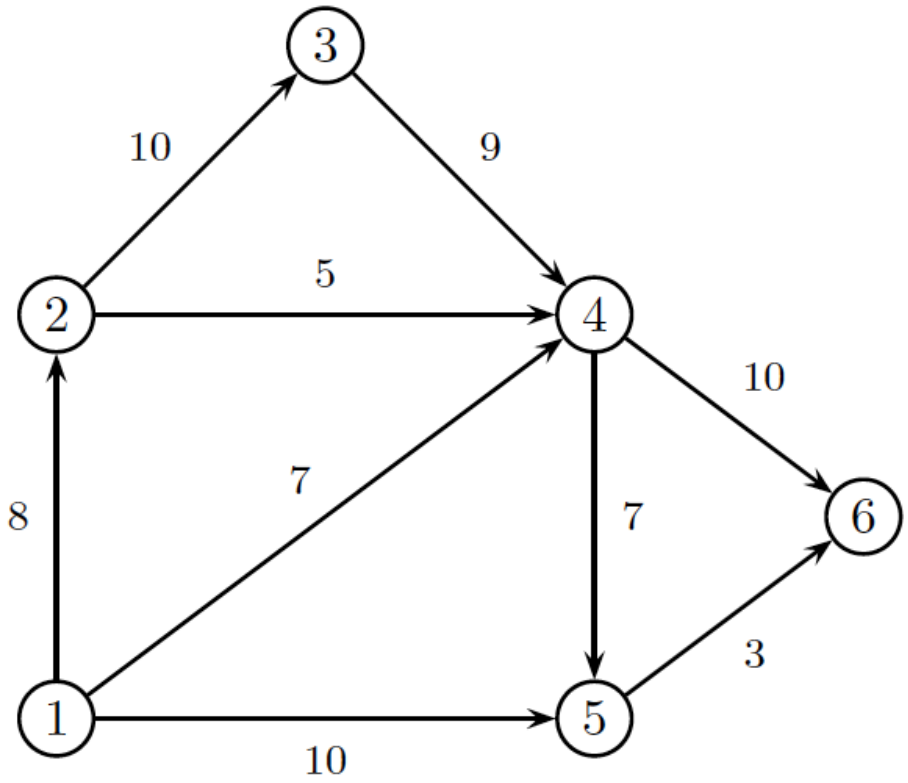
Non possiamo selezionare il lato $(1,4)$ altrimenti otterremmo il ciclo 1-4-5.
Selezioniamo il lato $(3,4)$ e aggiungiamo a S il vertice 3:

Vertici già visitati:
$S = \{1, 5, 2, 4, 8, 6, 7, 3\}$;
Lati in soluzione:
$\{(1,5), (1,2), (4,5), (4,8), (6,8), (6,7), (3,$
Lati selezionabili:
$\{(1,5), (5,6), (2,3), (4,7), (7,8)\}$;
Costo totale: 34.



Il problema dei cammini minimi (*Shortest Path*)

Consideriamo un grafo $G = (V, A, w)$ diretto, connesso e pesato (pesi non negativi).
Dato un vertice di partenza s, si vuole calcolare la lunghezza (il costo) di tutti i cammini minimi per raggiungere gli altri vertici.



L'algoritmo di Dijkstra (I)

"Nel 1956 Dijkstra aveva bisogno di scrivere un programma per dimostrare le capacità di un nuovo computer sviluppato dal suo istituto. Pensò che sarebbe stato bello avere un computer per trovare collegamenti per viaggiare tra due città dei Paesi Bassi. Ha progettato l'algoritmo in 20 minuti. Ha creato un grafico di 64 città con alcune semplificazioni (perché il suo computer era a 6 bit) e ha scritto il codice per questo computer del 1956. Tuttavia non ha pubblicato il suo algoritmo perché in primo luogo non c'erano riviste di informatica e pensava che questo potesse non essere molto importante. L'anno successivo è venuto a conoscenza del problema del collegamento dei terminali di nuovi computer in modo da ridurre al minimo la lunghezza dei cavi. Pensò a questo problema e riscoprì l'algoritmo di Jarník/Prim che utilizza ancora la stessa tecnica dell'algoritmo del percorso più breve che aveva scoperto un anno prima. Ha menzionato che entrambi i suoi algoritmi sono stati progettati senza usare carta o penna. Nel 1959 pubblicò entrambi gli algoritmi in un paper che è lungo solo 2 pagine e mezzo." (Fonte: it-swarm.dev)

L'algoritmo di Dijkstra (II)

Indichiamo con $d[u]$ il valore del cammino minimo da s al nodo u; segniamo il nodo di provenienza tra parentesi (e.g., se il parent di 4 è 1, allora scriveremo $d[4]$ (1)).

Procedimento:

1. Inizializzazione:
   - selezionare un nodo di origine s, inserirlo in un insieme S e impostare $d[s] := 0$;
   - per ogni nodo $u \neq s$, impostare $d[u] := \infty$ (nil).
2. Finché S non è vuoto:
   - visitare (i.e., rimuovere) il nodo u in S avente distanza minore;
   - inserire i nodi raggiungibili da u in S e aggiornare le loro distanze, calcolando $\min\{d[v], d[u] + w(u, v)\}$, dove v è raggiungibile da u.

Strategia: anche Dijkstra costruisce un albero connesso e aciclico (all'inizio fa parte della soluzione solo il nodo di origine s).

Complessità: $\Theta(|E| + |V| \log |V|)$, usando come strutture dati heap di Fibonacci, adatte alle code di priorità.

Risoluzione esercizio con Dijkstra (I)

Impostiamo $s = 1$ e costruiamo una tabella che, iterazione dopo iterazione, aggiorneremo:

NODO	ITER 0 DIST. (PADRE)	ITER 1 DIST. (PADRE)	ITER 2 DIST. (PADRE)	ITER 3 DIST. (PADRE)	ITER 4 DIST. (PADRE)	ITER 5 DIST. (PADRE)
2	∞ (nil)					
3	∞ (nil)					
4	∞ (nil)					
5	∞ (nil)					
6	∞ (nil)					

All'inizio impostiamo per tutti i nodi la distanza ∞ e come nodo padre *nil* (i.e., nulla).

Risoluzione esercizio con Dijkstra (II)

Nodi visitati: $\{1\}$.
I nodi raggiungibili dal nodo 1 sono 2, 4 e 5 $\rightarrow$ Aggiorniamo i loro valori nella tabella:

NODO	ITER 0 DIST. (PADRE)	ITER 1 DIST. (PADRE)	ITER 2 DIST. (PADRE)	ITER 3 DIST. (PADRE)	ITER 4 DIST. (PADRE)	ITER 5 DIST. (PADRE)
2	∞ (nil)	8 (1)				
3	∞ (nil)	∞ (nil)				
4	∞ (nil)	7 (1)				
5	∞ (nil)	10 (1)				
6	∞ (nil)	∞ (nil)				

Ora che abbiamo usato il nodo 1, selezioniamo il nodo più vicino, ossia il nodo 4. Dovremo:

- considerare i nodi raggiungibili da 4;
- eventualmente aggiornare le loro distanze.

Risoluzione esercizio con Dijkstra (III)

Nodi visitati: $\{1, 4\}$.
I nodi raggiungibili dal nodo 4 sono 5 e 6 $\rightarrow$ Aggiorniamo i loro valori nella tabella:

NODO	ITER 0 DIST. (PADRE)	ITER 1 DIST. (PADRE)	ITER 2 DIST. (PADRE)	ITER 3 DIST. (PADRE)	ITER 4 DIST. (PADRE)	ITER 5 DIST. (PADRE)
2	∞ (nil)	8 (1)	8 (1)			
3	∞ (nil)	∞ (nil)	∞ (nil)			
4	∞ (nil)	7 (1)	7 (1)			
5	∞ (nil)	10 (1)	10 (1)			
6	∞ (nil)	∞ (nil)	17 (4)			

Nota:

- Per aggiornare il valore del nodo 5, abbiamo calcolato $\min\{d[5], w(4,5) + d[4]\} = \min\{10, 7 + 7\} = 10 \rightarrow$ Conviene ancora partire da 1 per arrivare a 5.

Iteriamo ancora selezionando il nodo più vicino, ossia il nodo 2.
Come prima:

- Consideriamo i nodi raggiungibili da 2;
- Eventualmente aggiorniamo le loro distanze.

Risoluzione esercizio con Dijkstra (IV)

Nodi visitati: $\{1, 4, 2\}$.
I nodi raggiungibili dal nodo 2 sono 3 e 4 $\rightarrow$ 4 è già stato visitato, quindi aggiorniamo solo il valore relativo al 3:

NODO	ITER 0 DIST. (PADRE)	ITER 1 DIST. (PADRE)	ITER 2 DIST. (PADRE)	ITER 3 DIST. (PADRE)	ITER 4 DIST. (PADRE)	ITER 5 DIST. (PADRE)
2	∞ (nil)	8 (1)	8 (1)	8 (1)		
3	∞ (nil)	∞ (nil)	∞ (nil)	18 (2)		
4	∞ (nil)	7 (1)	7 (1)	7 (1)		
5	∞ (nil)	10 (1)	10 (1)	10 (1)		
6	∞ (nil)	∞ (nil)	17 (4)	17 (4)		

Continuiamo selezionando ora il nodo 5.

Risoluzione esercizio con Dijkstra (V)

Nodi visitati: $\{1, 4, 2, 5\}$.

Il nodo 5 può raggiungere solo il nodo 6 $\rightarrow$ Aggiorniamone il valore.

NODO	ITER 0 DIST. (PADRE)	ITER 1 DIST. (PADRE)	ITER 2 DIST. (PADRE)	ITER 3 DIST. (PADRE)	ITER 4 DIST. (PADRE)	ITER 5 DIST. (PADRE)
2	∞ (nil)	8 (1)	8 (1)	8 (1)	8 (1)	
3	∞ (nil)	∞ (nil)	∞ (nil)	18 (2)	18 (2)	
4	∞ (nil)	7 (1)	7 (1)	7 (1)	7 (1)	
5	∞ (nil)	10 (1)	10 (1)	10 (1)	10 (1)	
6	∞ (nil)	∞ (nil)	17 (4)	17 (4)	13 (5)	

Ora toccherebbe allo stesso nodo 6, ma non può raggiungere niente quindi lo riteniamo visitato e passiamo all'ultimo nodo rimasto, ossia il 3.

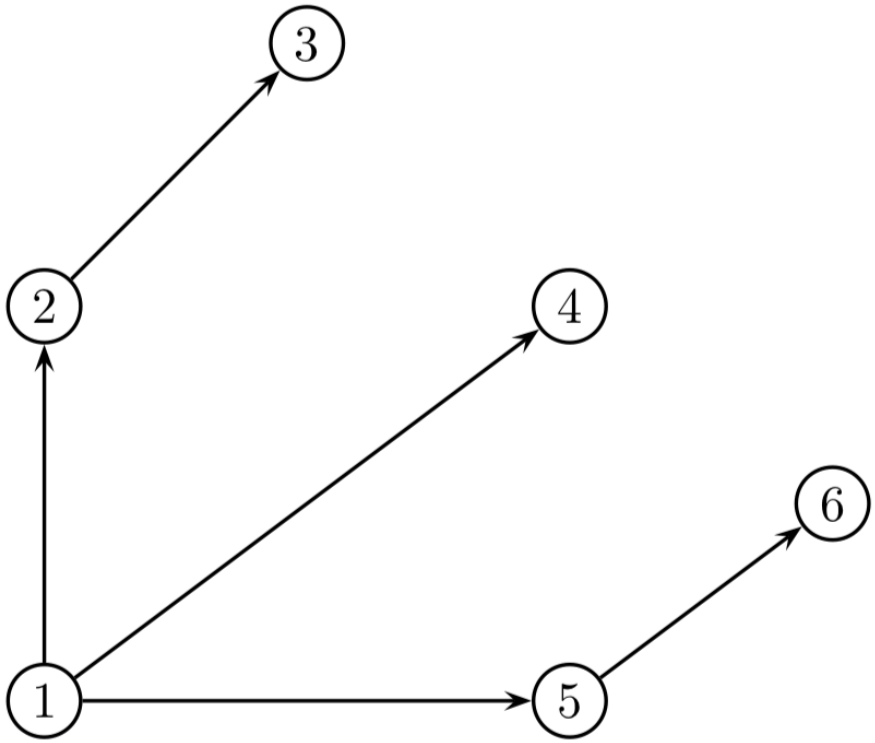
NODO	ITER 0 DIST. (PADRE)	ITER 1 DIST. (PADRE)	ITER 2 DIST. (PADRE)	ITER 3 DIST. (PADRE)	ITER 4 DIST. (PADRE)	ITER 5 DIST. (PADRE)
2	∞ (nil)	8 (1)	8 (1)	8 (1)	8 (1)	8 (1)
3	∞ (nil)	∞ (nil)	∞ (nil)	18 (2)	18 (2)	18 (2)
4	∞ (nil)	7 (1)	7 (1)	7 (1)	7 (1)	7 (1)
5	∞ (nil)	10 (1)	10 (1)	10 (1)	10 (1)	10 (1)
6	∞ (nil)	∞ (nil)	17 (4)	17 (4)	13 (5)	13 (5)

Nodi visitati: $\{1, 4, 2, 5, 6, 3\}$.

Risoluzione esercizio con Dijkstra (VI)

Nodi visitati: $\{1, 4, 2, 5, 6, 3\}$.

Albero dei cammini minimi:



Bibliografia e sitografia

- Wikipedia, *Algoritmo di Kruskal*, `https://it.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_di_Kruskal`
- Wolfram MathWorld, *Kruskal's Algorithm*, `https://mathworld.wolfram.com/KruskalsAlgorithm.html`
- RIP Tutorial, *Introduzione all'algoritmo di Prim*, `https://riptutorial.com/it/algorithm/example/24246/introduzione-all-algoritmo-di-prim`
- it-swarm-dev, *Qual è la differenza tra l'algoritmo di Dijkstra e Prim?*, `https://www.it-swarm.dev/it/algorithm/qual-e-la-differenza-tra-lalgoritmo-di-dijkstra-e-prim/1070017448/`
- Università di Pisa, *Esercizi di PL su grafi* `http://groups.di.unipi.it/~a006137/esercizi1_pl_grafi.pdf`