Interpretazione economica delle variabili duali

Per molti problemi di Programmazione Lineare (PL) che derivano dalle applicazioni, alle variabili del problema duale possono essere attribuite delle interpretazioni significative e feconde. Questa interpretazione è la porta per dare concretezza al problema duale, controparte dialettica ed alter ego intimo del problema originalmente formulato nella veste di problema primale. Importanti sviluppi nell'economia (macroeconomia e teoria dell'equilibrio economico) hanno preso avvio dallo studio di questa intima relazione.

Anche se si è soliti parlare di interpretazione economica delle variabili duali (spesso il titolo di uno dei capitoli entro un libro di PL), in verità l'interpretazione di cui risulti più opportuno rivestire le variabili duali dipende dal problema formulato e dal suo contesto applicativo. Esistono delle regole meccaniche che consentono di produrre il problema duale di un dato problema di PL, e queste regole non dipendono in alcun modo dal significato rivestito dalle variabili primali. Occorre quindi restituire semantica al problema duale cui si perviene per mera applicazione di queste regole meccaniche. In generale, una prima indicazione sul modo in cui queste variabili duali dovrebbero essere interpretate viene da un argomento euristico che viene usato occasionalmente in fisica elementare ad è conosciuto come "analisi dimensionale". Illustreremo questo modo di procedere su due casi paradigmatici. Il primo parte da un problema primale in forma standard rivestito da un'iterpretazione importante e di ampia valenza. Questo problema costituisce probabilmente il modello di PL pù importante nella applicazioni: "il problema di gestire la produzione massimizzando i profitti". Il secondo parte da un problema primale in forma duale standard, rivestito da un'interpretazione che costituisce il celebre e rilevante modello noto come "il problema della dieta".

Pianificare la produzione massimizzando i profitti entro il limite delle risorse

In questa sezione trattiamo di un problema primale in forma standard, ossia:

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{soggetto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \tag{1}$$

Per procedere con questo esempio e caso paradigmatico promuoviamo il freddo problema matematico a modello rivestendolo della seguente semantica e contestualizzazione. Si veda (1) come il problema di massimizzare il profitto in una fabbrica (volendo essere più concreti, anche se non necessario contestualizzare oltre, si pensi ad una fabbrica che produce mobili). Ciascuna variabile primale x_j indica la quantità di j-esima tipologia di prodotto (ad esempio scrivanie o sedie) da prodursi, ogni b_i specifica la disponibilità della i-esima risorsa (come legno o metallo). Abbiamo concretizzato il problema, ora esso ha un suo sapore specifico.

Possiamo partire ora con l'analisi dimensionale applicandola per meglio afferrare la natura dei vari elementi, prima del problema primale, poi anche quelli del problema in forma duale. Notiamo che ogni a_{ij} è espresso in unità di risorsa i per unità di prodotto j (infatti, ogni a_{ij}

è l'ammontare di risorsa i richiesta per realizzare una unità di prodotto j) e che ogni c_j è in dollari per unità di prodotto j (infatti, ogni c_j è il profitto **netto** che deriva dalla produzione di un'unità di prodotto j). È molto opportuna questa accortezza di aver elaborato i dati in modo che i coefficienti c_j si riferiscano ai profitti *netti*. In particolare, anche se delle varie risorse abbiamo a disposizione quantità prefissate come specificate dalle b_i, ciò non significa che quelle risorse non abbiano un valore di mercato (non a caso la teoria dell'equilibrio economico postula si possa sempre vendere od acquistare un bene al suo valore di mercato) ed i coefficienti c_j devono tener conto dei valori di mercato delle risorse impiegate e sottrarli ai meri realizzi alla vendita.

Il duale di un problema in forma standard come quello sopra è il seguente problema in forma duale standard nelle variabili $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (una per ogni vincolo del primale.)

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{soggetto a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ & y_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{array} \tag{2}$$

Il problema duale trova giustificazione come tentativo di produrre degli upper bounds al valore ottimo del primale. Assumiamo il lettore abbia già fatto conoscenza della teoria della dualità.

Nel problema duale, per rendere confrontabili la parte sinistra, $\sum a_{ij} y_i$, e la parte destra c_j, dobbiamo esprimere ogni y_i in dollari per unità di risorsa i. In questo modo, si è portati a sospettare che ciascun y_i misuri il valore unitario della risorsa i-esima. Il teorema esposto più sotto dà corpo e sostanza a questo sospetto.

Teorema. (degli scarti complementari). Siano $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ rispettivamente una soluzione primale estesa ammissibile e una soluzione duale estesa ammissibile. Allora $\tilde{x}$ ed $\tilde{y}$ sono ottime per i rispettivi problemi se e solo se

$$\begin{aligned} x_j y_{m+j} &= 0 \quad j = 1, \ldots, n \\ x_{n+i} y_i &= 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

o in termini vettoriali

$$\tilde{x} \perp \tilde{y}$$

Lemma. Se (1) ammette almeno una soluzione di base ottima non degenere allora il suo duale ammette un'unica soluzione ottima.

Dimostrazione. Che il duale ammetta almeno una soluzione ottima segue dal teorema della dualità forte. L'unicità disegue invece dal teorema degli scarti complementari considerando che la non-degeneratività della soluzione primale implica che gli m termini noti nel dizionario as essa associato siano tutti non nulli, imponendo m condizioni indipendenti su y. $\square$

Teorema. Sia x una soluzione di base ottima non degenere di (1), ed y la soluzione ottima del duale. Esiste allora un valore $\epsilon > 0$ tale che: se $|t_i| \leq \epsilon$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$, allora il problema

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + t_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \text{soggetto a} & & \\ & x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) & \end{array} \tag{3}$$

ha una soluzione ottima e il suo valore ottimo vale

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i$$

con z^* valore ottimo di (1) e con $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ soluzione ottima del corrispondente duale.

Dimostrazione. "$\leq$": Se B è una soluzione di base ottima per (1), tale che $y^* = (c^T B^{-1})^T$ è la soluzione ottima del duale di (1), il valore ottimo è $z^* = c^T B^{-1} b$.
Per il teorema della dualità forte, $y = (c^T B^{-1})^T$ è una soluzione ammissibile del duale e $by = y^T b = z^*$ e y è soluzione ammissibile del duale di (2), poichè non sono stati modificati nè gli a_{ij} nè i c_j. Il valore della funzione obbiettivo di y nel duale di (2) è

$$(b + t)y = by + ty = z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i$$

e per dualità debole ogni soluzione del primale non può avere valore maggiore.
"$\geq$": La soluzione di base di (2) è $x = B^{-1}(b + t)$ e il valore della funzione obbiettivo è

$$cx = (c^T B^{-1})(b + t) = c^T B^{-1} b + c^T B^{-1} t = z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i.$$

Quindi, avendo soluzioni ammissibili di (2) e poichè il primale (2) ha lo stesso valore di funzione obbiettivo del corrispondente duale, la soluzione è ottima.
Il fatto che esista $\epsilon > 0$ segue dall'ipotesi di non degeneratività della soluzione di base ottima. □

Questo teorema rivela gli effetti di piccole variazioni nei rifornimenti di risorse sul profitto totale netto della fabbrica. Con ogni unità extra di risorsa i, il profitto incrementa di y_i^* dollari. Quindi, y_i^* specifica il massimo ammontare che l'azienda dovrebbe essere disposta a pagare, oltre all'attuale prezzo di scambio, per ogni unità extra di risorsa i. Per questo motivo, y_i^* è spesso chiamata *valore marginale* dell'i-esima risorsa, l'aggettivo "marginale" si riferisce alla differenza tra il prezzo di scambio e il valore attuale della risorsa. Un altro termine comune usato per y_i^* è *prezzo ombra* della risorsa i-esima.

Esempio 1

Per chiarire queste osservazioni, immaginiamo un boscaiolo che ha a disposizione 100 acri di latifoglie. L'abbattimento degli alberi e la rigenerazione dell'area costa \$10 per acre in risorse immediate e porta un profitto successivo di \$50 per acre. In alternativa, si potrebbero abbattere le latifoglie e piantare nell'area dei pini: questo costerebbe \$50 per acre e un ritorno successivo di \$120 per acre. Dunque, il profitto netto risultante dai due trattamenti è di \$40 e \$70 per acre, rispettivamente. Sfortunatamente, il trattamento che porta più profitti non può essere applicato all'intera area dato che solo \$4000 sono disponibili per affrontare i costi immediati. Il problema del boscaiolo è quindi

$$\begin{array}{ll} \max & 40x_1 + 70x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 100 \\ \text{soggetto a} & 10x_1 + 50x_2 \leq 4000 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \tag{4}$$

La soluzione ottima è $x_1^* = 25$ e $x_2^* = 75$. Quindi, il boscaiolo dovrebbe disboscare l'intera area, lasciare che 25 acri si rigenerino e piantare i rimanenti 75 acri con dei pini. In accordo con questo programma, l'investimento iniziale di \$4000 porta un profitto netto di \$6250. Evidentemente, il capitale iniziale rappresenta una risorsa importante. Infatti, il boscaiolo potrebbe ricevere il consiglio di incrementare il livello di questa risorsa chiedendo un prestito a breve tempo; il risultante extra profitto potrebbe anche portare un tasso di interesse svantaggioso. Per esempio, sopponiamo che il boscaiolo possa farsi prestare \$100 ora e restituire \$180 in seguito; lo dovrebbe fare? Oppure, potrebbe essere tentato di spostare i suoi \$4000 verso altre aziende. Per esempio, supponiamo che potrebbe investire oggi \$100 e guadagnare \$180, dovrebbe farlo? In accordo con il teorema, la risposta è nascosta nella soluzione ottima
$y_1^* = 32.5, y_2^* = 0.75$ del problema duale: il boscaiolo dovrebbe chiedere un prestito se e solo se l'interesse fosse più basso di 75 cent per dollaro e dovrebbe fare piccoli investimenti se e solo se il profitto fosse maggiore di 75 cent per dollaro. Queste affermazioni, le quali validità sono garantite dal teorema, sono facili da giustificare direttamente. Avendo preso in prestito t dollari, il boscaiolo mira a

$$\begin{array}{ll} \max & 40x_1 + 70x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 100 \\ \text{soggetto a} & 10x_1 + 50x_2 \leq 4000 + t \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \tag{5}$$

Ogni soluzione ammissibile x_1, x_2 di questo problema soddisfa le disuguaglianze

$$40x_1 + 70x_2 = 32.5(x_1 + x_2) + 0.75(10x_1 + 50x_2) \leq 3250 + 0.75(4000 + t) = 6250 + 0.75t \tag{6}$$

e quindi l'extra profitto non eccederà mai 0.75t. Infatti, se $t \leq 1000$, allora il boscaiolo può realizzare un profitto addizionale di $0.75t$ ponendo

$$x_1 = 25 - 0.025t, x_2 = 75 + 0.025t. \tag{7}$$

Gli investimenti in altre aziende possono portare a valori negativi di t in (4); come risultato di un tale investimento il profitto netto dall'azienda originale diminuisce. Se $-t$ dollari sono usati per altri investimenti ($-t$ è positivo!) allora, per (5) il profitto dall'azienda che abbatte le latifoglie calerà di $0.75(-t)$ o anche più. Infatti, se $-t \leq 3000$, allora il calo può essere limitato a solo $0.75(-t)$ scegliendo x_1 e x_2 in accordo con (6). Forse dovrebbe essere enfatizzato il fatto che il teorema ha a che fare con piccoli cambiamenti t_i nel livello della risorsa; la sua conclusione può fallire quando i t_i sono grandi. Per esempio, il nostro boscaiolo non può usare prestiti superiori a \$1000 e, potrebbe voler investire tutti i suoi \$4000 in un'altra impresa, oppure ricevere un consiglio sbagliato e chedere solo 75 cents di profitto per ogni dollaro. (Una parte del Teorema può essere usata anche se i t_i sono grandi).

Ora supponiamo che il boscaiolo abbia una nuova possibilità che prima non era disponibile, abbattere le latifoglie e piantare nell'area delle conifere. Per fare una veloce valutazione dell'attività, il boscaiolo potrebbe far ricorso al valore marginale delle sue risorse: \$32.5 per acre di latifoglia e \$0.75 per dollaro di capitale. Se la nuova attività richiede a dollari per acre, allora le risorse consumate da questa attività per acre sono valutate come $\$(32.5 + 0.75a)$ e quindi vale la pena considerare l'attività se e solo se il suo profitto netto per acre supera questo schema.

Problema della dieta

Come il problema di pianificazione della produzione costituisce l'indiscusso archetipo per l'interpretazione economica di problemi di PL con primale in forma primale standard, così il problema della dieta costituisce un possibile riferimento per l'interpretazione economica di problemi con primale in forma duale standard.

Il problema della dieta è il seguente:

> un allevatore deve preparare una miscela alimentare per il suo bestiame garantendo un apporto di b_i unità per ogni sostanza nutritiva (vitamine, proteine, carboidrati etc.). Il mercato mette a disposizione degli alimenti, corrispondenti ai mangimi di diverse case produttrici: ogni unità di alimento j ha un costo c_j e un apporto di a_{ij} unità della sostanza nutritiva i. L'allevatore vuole determinare le quantità di alimenti da acquistare per soddisfare a costo minimo i requisiti di sostanze nutritive.

Se abbiamo n alimenti e m sostanze nutritive, il problema della dieta, dal punto di vista dell'allevatore, è formulabile con il seguente modello di programmazione lineare.
Parametri:

- c_j costo unitario alimento $j (j = 1, \ldots, n)$
- a_{ij} tasso di presenza della sostanza $i (i = 1, \ldots, m)$ nell'alimento j (ad es. grammi per unità di alimento
- b_j fabbisogno minimo sostanza i (ad es. in grammi).

Variabili decisionali

- x_j quantità dell'alimento j da acquistare.

Modello:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \text{(minimizzazione dei costi)} \\
\text{soggetto a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) & \text{(soddisfazione dei fabbisogni nutritivi)} \\
 & x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) &
\end{array} \tag{8}$$

Introducendo le variabili duali y_i associate ad ogni vincolo per la sostanza nutritiva i, il corrispondente problema duale è:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{soggetto a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) & \\
 & x_j \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) &
\end{array}
\tag{9}
$$

Possiamo vedere la funzione obiettivo come la massimizzazione di un profitto derivante dalla vendita di b_i unità della sostanza nutritiva i. Le variabili duali y_i rappresentano quindi il prezzo di vendita unitario della sostanza i.
Il problema duale può essere infatti interpretato considerando un'azienda chimica che decide di immettere sul mercato i nutrienti puri (proteine, vitamine, carboidrati etc.). Essa vuole determinare il prezzo di vendita unitario di ciascun nutriente in modo da massimizzare il suo profitto.
La funzione obiettivo del problema duale utilizza i termini noti dei vincoli primali: l'allevatore acquista la quantità di sostanza i di cui necessita, cioè b_i unità al prezzo unitario y_i. I vincoli del problema duale esprimono dei criteri di competitività dei prezzi y_i, rispetto all'attuale fornitore dell'allevatore: ad esempio, affinchè l'allevatore decida di fornirsi dal nuovo produttore, è sufficiente che il costo sostenuto per ricostituire tutti gli apporti nutritivi di una unità della miscela j a partire dalle sostanze acquistate ($\sum a_{ij} y_i$) non sia maggiore del costo per ottenere gli stessi apporti acquistando direttamente il prodotto j (costo c_j). Se non fossero rispettati questi vincoli, l'allevatore potrebbe preferire continuare ad acquistare i prodotti "compositi".

Esempio 2

In un allevamento di polli si usano per il mangime due tipi di cereali, A e B . Il mangime dev e soddisfare certi requisiti nutritivi: deve contenere almeno 8 unità a di carboidrati, 15 unità a di proteine e 3 unità a di vitamine per unità a di peso. Il contenuto unitario di carboidrati, proteine e vitamine ed il costo unitario di A e B sono riportati nella seguente tabella insieme ai requisiti minimi giornalieri.

	A	B	min. giornaliero
carboidrati	5	7	8
proteine	4	2	15
vitamine	2	1	3
costo unitario	1200	750	

Siano x_1 ed x_2 rispettivamen te il numero di unità a di cereale A e B impiegate nel mangime, il numero di unità di carboidrati presenti nel mangime è dato da $5x_1+7x_2$, e poichè il fabbisogno minimo di carboidrati è di 8 unità, deve risultare $5x_1 + 7x_2 \geq 8$; analogamente, per le unità di proteine deve risultare $4x_1 + 2x_2 \geq 15$ e per le unità di vitamine $2x_1 + x_2 \geq 3$. Ai tre vincoli precedenti si devono aggiungere le ovvie condizioni di non negatività a delle variabili, $x_1; x_2 \geq 0$; infine la funzione obiettivo è $1200x_1 + 750x_2$. La dieta di costo minimo è data dunque da una soluzione del seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
\min \qquad & 1200x_1 + 750x_2 \\
& 65x_1 + 7x_2 \geq 8 \\
& 4x_1 + 2x_2 \geq 15 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Al problema in esame è *naturalmente* associato un altro problema che chiameremo il problema del venditore di pillole per polli: si tratta di stabilire i prezzi di vendita di pillole rispettivamente di carboidrati, proteine e vitamine in modo che il ricavato della vendita sia massimo e che i prezzi siano competitivi, ossia che l'allevatore di polli ritenga non svantaggioso acquistare le pillole invece dei cereali A e B. Supponiamo che ciascuna pillola contenga un'unità del corrispondente elemento nutritivo, e siano y_1; y_2 e y_3 i prezzi rispettivamente di una pillola di carboidrati, proteine e vitamine: poichè l'allevatore deve percepire la dieta a base di pillole non più costosa della dieta a base di cereali dovrà risultare $5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1200$, cioè il costo dell'equivalente (da un punto di vista nutritivo) in pillole del cereale A deve essere non superiore a 1200 euro. Analogamente, per il cereale B si ottiene $7y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 750$. I prezzi di vendita dev ono essere non negativi ed il ricavato della vendita è dato $8y_1 + 15y_2 + 3y_3$ (dato che 8, 15 e 3 sono il minimo numero di pillole di carboidrati, proteine e vitamine necessari alla corretta alimentazione del pollo): il problema del venditore di pillole per polli è dunque

$$
\begin{aligned}
\max \qquad & 8y_1 + 15y_2 + 3y_3 \\
& 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1200 \\
& 7y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 750 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

I due problemi sono riassunti nella seguente tabella

	x_1	x_2		max
y_1	5	7		8
y_2	4	2	$\geq$	15
y_3	2	1		3
	$\leq$			
min	1200	750		

La coppia di problemi appena costruita gode di un'importante proprietà: comunque si scelgano i prezzi y_1 , y_2 e y_3 delle pillole, il ricavo del venditore di pillole è sicuramente minore o uguale al costo di qualsiasi dieta ammissibile che l'allevatore di polli possa ottenere dai due mangimi. Infatti, i vincoli del venditore di pillole assicurano che le pillole siano più convenienti dei singoli mangimi, e quindi anche di ogni loro combinazione. La proprietà può essere vericata algebricamente nel seguente modo: moltiplicando per x_1 e x_2 i due vincoli del problema del venditore di pillole e sommando le due diseguaglianze così ottenute, si ha

$$x_1(5y_1 + 4y_2 + 2y_3) + x_2(7y_1 + 2y_2 + y_3) \leq 1200x_1 + 750x_2$$

Riordinando i termini in mo do da mattere in evidenza le variabili y_i, si ottiene

$$y_1(5x_1 + 7x_2) + y_2(4x_1 + 2x_2) + y_3(2x_1 + x_2) \leq 1200x_1 + 750x_2.$$

A questo punto possiamo utilizzare i vincoli del problema della dieta per minorare le quantità tra parentesi, ottenendo

$$8y_1 + 15y_2 + 3y_3 \leq 1200x_1 + 750x_2.$$

Il costo di qualsiasi dieta ammissibile fornisce quindi una valutazione superiore del massimo ricavo del venditore di pillole e analogamente qualsiasi ricavo ammissibile per il venditore di pillole fornisce una valutazione inferiore del costo della miglior dieta possibile. Ciascuno dei due problemi fornisce quindi, attra verso il costo di qualsiasi soluzione ammissibile, una valutazione (inferiore o superiore) del valore ottimo dell'altro problema.

Come abbiamo visto, la formulazione del problema duale, ci permette di considerare lo stesso problema dell'approvvigionamento delle sostanze necessarie all'allevatore dal punto di vista alternativo (duale) di un produttore interessato ad agire come venditore (e non come acquirente) nello stesso mercato.

Spesso, i modelli di economia cadono nel regno della programmazione lineare. In particolare, molti teoremi riguardo l'equilibrio economico possono essere dedotti dal Teorema della Dualità e dal Teorema degli Scarti Complementari.