Tutoraggio Ricerca Operativa 2019/2020
4. Programmazione Lineare:
Metodo delle due fasi

Alice Raffaele, Romeo Rizzi

Università degli Studi di Verona

28 aprile 2020

Sommario

Problema non a origine ammissibile

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -6x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 2x_1 - x_2 \geq 1 \\
& 3x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Portiamo innanzitutto il problema in forma standard, introducendo le variabili di *slack* e di *surplus* per ottenere le uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -6x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - s_1 = 1 \\
& 2x_1 - x_2 - s_2 = 1 \\
& 3x_2 + s_3 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

La soluzione con in base s_1, s_2 e s_3 non è ammissibile: come impostare il primo tableau?

Il metodo delle due fasi

Si utilizza il *Metodo delle due fasi*, dove:

- **Fase 1**: si introduce il cosiddetto **problema ausiliario**, il cui scopo è di *ottenere una soluzione di base di partenza*:
  - Nota: se non si trova, allora il problema originario è impossibile.
- **Fase 2**: una volta definita la soluzione di base da cui partire, si applica il Simplesso normalmente per risolvere il problema.

Fase 1 - Problema ausilario

- Si introduce una variabile ausiliaria y_i (detta anche "*di colla*") per ogni vincolo non rispettato;
- La funzione obiettivo del problema ausilario consiste nel minimizzare la somma di queste variabili ausiliarie:
  - Se il problema ausiliario ammette soluzione, allora all'ottimo le variabili di colla varranno zero (stiamo minimizzando);
  - Tutti i vincoli saranno rispettati grazie ai valori assunti dalle altre variabili in base $\rightarrow$ Ciò ci darà la soluzione di base di partenza per la Fase 2.

Formuliamo il problema ausiliario del nostro problema originario:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 + y_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - s_1 + y_1 = 1 \\
& 2x_1 - x_2 - s_2 + y_2 = 1 \\
& 3x_2 + s_3 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Fase 1 - Problema ausiliario in forma standard

Riscriviamo la funzione obiettivo come espressione da massimizzare:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -y_1 - y_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - s_1 + y_1 = 1 \\
& 2x_1 - x_2 - s_2 + y_2 = 1 \\
& 3x_2 + s_3 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Siamo pronti per compilare il primo tableau della Fase 1:

	x1	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**	**y1**	**y2**	
y1	1	1	-1	0	0	1	0	1
y2	2	-1	0	-1	0	0	1	1
s3	0	3	0	0	1	0	0	2
	0	0	0	0	0	1	1	0

Fase 1 - Problema ausiliario e funzione obiettivo da riscrivere: Tableau 1

- Le variabili y_1 e y_2 sono in base, quindi i loro coefficienti di costo ridotto dovrebbero essere zero, non positivi!
- Dobbiamo esprimere le due variabili di colla in funzione delle variabili non in base (come tra l'altro accade sempre, implicitamente, quando avviamo il Simplesso con la soluzione di base data dall'origine):
  - $y_1 = -x_1 - x_2 + s_1 + 1$
  - $y_2 = -2x_1 + x_2 + s_2 + 1$
- Sostituiamo $-y_1 - y_2 = 3x_1 - s1 - s2 - 2$:

	x1	x2	s1	s2	s3	y1	y2	
y1	1	1	-1	0	0	1	0	1
y2	2	-1	0	-1	0	0	1	1
s3	0	3	0	0	1	0	0	2
	3	0	-1	-1	0	0	0	2

- Nota: l'ultima cella contiene il valore opposto della funzione obiettivo (infatti c'è 2 e non -2).

Fase 1 - Risolviamo il problema ausiliario: Tableau 2

- Facciamo entrare x_1 e uscire y_2:

	x1	x2	s1	s2	s3	y1	y2	
y1	1	1	-1	0	0	1	0	1
y2	2	-1	0	-1	0	0	1	1
s3	0	3	0	0	1	0	0	2
	3	0	-1	-1	0	0	0	2

- Normalizziamo la riga di pivot dividendo per 2 e incominciamo a compilare il Tableau 2:

	x1	x2	s1	s2	s3	y1	y2	
y1	0				0	1		
x1	1	-1/2	0	-1/2	0	0	1/2	1/2
s3	0				1	0		
	0				0	0		

- Calcoliamo le altre righe:

	x1	x2	s1	s2	s3	y1	y2	
y1	0	3/2	-1	1/2	0	1	-1/2	1/2
x1	1	-1/2	0	-1/2	0	0	1/2	1/2
s3	0	3	0	0	1	0	0	2
	0	3/2	-1	1/2	0	0	-3/2	1/2

Fase 1 - Risolviamo il problema ausiliario: Tableau 3

- Non siamo ancora all'ottimo perché i coefficienti di costo ridotto di x_2 e s_2 sono positivi $\rightarrow$ Entra in base x_2 $(3/2 > 1/2)$ ed esce y_1:

	x1	x2	s1	s2	s3	y1	y2	
y1	0	3/2	-1	1/2	0	1	-1/2	1/2
x1	1	-1/2	0	-1/2	0	0	1/2	1/2
s3	0	3	0	0	1	0	0	2
	0	3/2	-1	1/2	0	0	-3/2	1/2

- Normalizziamo la riga di pivot dividendo per $3/2$ e incominciamo a compilare il Tableau 3:

	x1	x2	s1	s2	s3	y1	y2	
x2	0	1	-2/3	1/3	0	2/3	-1/3	1/3
x1	1	0			0			
s3	0	0			1			
	0	0			0			

- Calcoliamo le altre righe:

	x1	x2	s1	s2	s3	y1	y2	
x2	0	1	-2/3	1/3	0	2/3	-1/3	1/3
x1	1	0	-1/3	-1/3	0	1/3	1/3	2/3
s3	0	0	2	-1	1	-2	1	1
	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Fase 1 - Soluzione ottima del problema ausiliario

	x1	x2	s1	s2	s3	y1	y2	
x2	0	1	-2/3	1/3	0	2/3	-1/3	1/3
x1	1	0	-1/3	-1/3	0	1/3	1/3	2/3
s3	0	0	2	-1	1	-2	1	1
	0	0	0	0	0	-1	-1	0

- **Variabili in base**: x_2, x_1 e s_3
- **Variabili fuori base**: s_1, s_2, y_1 e y_2
- **Funzione obiettivo**: 0.
- **Siamo all'ottimo?**
  - Sì, i coefficienti di costo ridotto sono tutti 0 per le variabili in base e negativi per quelle fuori base;
  - Le variabili di colla y_1 e y_2 sono pari a zero.

Come procediamo ora per passare alla Fase 2?

1. Rimuoviamo le colonne di y_1 e y_2 dal tableau;
2. Riscriviamo la funzione obiettivo del problema originario.

Fase 2 - Tableau 1

1. Rimuoviamo le colonne di y_1 e y_2 dal tableau;

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	-2/3	1/3	0	1/3
x1	1	0	-1/3	-1/3	0	2/3
s3	0	0	2	-1	1	1
	0	0	0	0	0	0

2. La funzione obiettivo del problema originario era $z = -6x_1 - 3x_2$, ma ora x_1 e x_2 sono in base, quindi sono da esprimere in funzione delle variabili fuori base:
   - $x_1 = \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{2}{3}$
   - $x_2 = \frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{3}$

$$z = -6x_1 - 3x_2 = -6\left(\frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{2}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{3}\right) = -4s_1 - s_2 - 5$$

Fase 2 - Soluzione ottima del problema originario

Una volta aggiornata la funzione obiettivo, verifichiamo se la soluzione sia ottima controllando i coefficienti di costo ridotto:

	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	-2/3	1/3	0	1/3
x1	1	0	-1/3	-1/3	0	2/3
s3	0	0	2	-1	1	1
	0	0	-4	-1	0	5

- **Variabili in base**: x_2, x_1 e s_3
- **Variabili fuori base**: s_1, s_2
- **Funzione obiettivo**: $-5 = -6 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3}$;
- **Siamo all'ottimo?** Sì.

Nota: è un caso fortuito che la soluzione della Fase 1 sia ottima per il problema originario; se non lo fosse, proseguiremmo col Simplesso.

Bibliografia

Matteo Fischetti, *Introduction to Mathematical Optimization*, Kindle Direct Publishing, 2019
https://www.amazon.it/Introduction-Mathematical-Optimization-Matteo-Fischetti/dp/1692792024

Robert J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Springer Nature, 4th edition, 2013
https://www.springer.com/gp/book/9781461476290