Tutoraggio Ricerca Operativa 2019/2020
10. Altri esercizi: Sottosequenza crescente più lunga (Programmazione Dinamica) e Planarità (Teoria dei Grafi)

Alice Raffaele, Romeo Rizzi

Università degli Studi di Verona

09 giugno 2020

TE 18 febbraio 2020 - Esercizio 4

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali:

34	**42**	**44**	**49**	**41**	**52**	**63**	**69**	**40**	**60**	**86**	**45**	**66**	**54**	**79**	**81**	**43**	**46**	**38**	**61**	**80**	**48**	**64**	**73**	**47**

Sfruttiamo una tabella di Programmazione Dinamica per rispondere alle varie richieste dell'esercizio:

- Sottoproblemi: le sottosequenze possibili di varie lunghezze, da 1 a n;
- Vale la seguente relazione:

$$L[i] = \begin{cases} 1 + \max\{L[j]\}, & \text{per } 0 < j < i \text{ e } s[j] < s[i] \\ 1 & \text{se non esiste tale } j \end{cases}$$

La tabella ha tre righe: la centrale è occupata dai numeri della sequenza; nella riga sotto scriveremo i risultati dei vari sottoproblemi leggendo la sequenza da sinistra a destra; nella riga sopra invece procederemo al contrario, partendo dalla fine.

Esercizio 4 (I)

1. Trovare una sottosequenza **crescente** che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	**42**	**44**	**49**	**41**	**52**	**63**	**69**	**40**	**60**	**86**	**45**	**66**	**54**	**79**	**81**	**43**	**46**	**38**	**61**	**80**	**48**	**64**	**73**	**47**
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	6

Il numero più alto che leggiamo sia sopra sia sotto è 9 e ce n'è più di uno
$\rightarrow$ Ci sono soluzioni ottime multiple. Una di queste è:

34 - 42 - 44 - 49 - 52 - 63 - 69 - 79 - 81

Esercizio 4 (II)

2. Una sequenza è detta una *N-sequenza*, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice *i* tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'*i*-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga *N*-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	**42**	**44**	**49**	**41**	**52**	**63**	**69**	**40**	**60**	**86**	**45**	**66**	**54**	**79**	**81**	**43**	**46**	**38**	**61**	**80**	**48**	**64**	**73**	**47**
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	6

- Ripensamento: a un certo punto *i* possiamo avere un numero minore del precedente e da lì in poi ricominciare a crescere;
- Solo il numero in prima posizione e quello nella *i* non rispettano la regola di essere strettamente crescenti del numero che li precede:
  - In una sottosequenza tradizionale tale regola implica anche che valga per tutti gli altri precedenti;
  - Nella N-sequenza, non avendo precedenti, 34 è un'eccezione; invece 43 è il nostro ripensamento, eccezione per definizione.

Esercizio 4 (III)

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	**42**	**44**	**49**	**41**	**52**	**63**	**69**	**40**	**60**	**86**	**45**	**66**	**54**	**79**	**81**	**43**	**46**	**38**	**61**	**80**	**48**	**64**	**73**	**47**
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	6

- E' come se la sequenza di numeri fosse divisa in due, a un certo punto i, e per ottenere una massima N-sequenza si spezzasse in due il problema: massimizzando prima e dopo i;
- A questo punto, come fare a capire qual è l'elemento i?
- Proviamo a massimizzare prima la stringa da 1 a i-1: converrebbe perciò considerare la prima sottosequenza di lunghezza massima (ossia 9), che si ottiene con 34 - 42 - 44 - 49 - 52 - 63 - 69 - 79 - 81.
- L'elemento i sarebbe quindi il numero 43; a questo punto possiamo calcolare la più lunga sottosequenza crescente nel sottoproblema rimasto, ottenendo 5 come lunghezza:

43	**46**	**38**	**61**	**80**	**48**	**64**	**73**	**47**
1	2	1	3	4	3	4	5	3

- La N-sottosequenza sarebbe lunga $9+5 = 14$.

Esercizio 4 (IV)

- In questo caso siamo fortunati e il risultato è giusto, ma sarebbe più corretto procedere considerando anche la prima riga;
- Infatti noi vogliamo massimizzare **allo stesso tempo** la sottosequenza da 1 a i-1 e quella da i alla fine;
- Non è detto che partendo dalla soluzione migliore della richiesta 1 si arrivi sempre alla soluzione ottima che sia una N-sequenza;
- Come possiamo fare?
  - Sfruttiamo sia la prima sia l'ultima riga;
  - Gli 1 nella prima riga: vuol dire che lì c'è stata un'interruzione e si è dovuti ripartire;
  - Nella riga sotto, per quel numero avremo un numero 'alto', nel senso che quello successivo sarà per forza più basso;
  - Sommiamo il numero rosso in posizione $i-1$ con quello verde in posizione i e cerchiamo la somma massima: avremo ottenuto così il nostro elemento i.
- Nell'esercizio in questione, la somma massima $(9+5)$ si ottiene con $i = 17$ e il valore dell'i-esimo elemento è 43.

Esercizio 4 (V)

3. Trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 40. Specificare quanto è lunga e fornirla.

- Il 40 è il secondo elemento partendo da 34;
- Rifaccio i conti per la sottosequenza di numeri dal 40 in poi, ottenendo:

40	**60**	**86**	**45**	**66**	**54**	**79**	**81**	**43**	**46**	**38**	**61**	**80**	**48**	**64**	**73**	**47**
1	2	3	2	3	3	4	5	2	3	1	4	5	4	5	6	4

- Quindi la soluzione alla richiesta ha lunghezza 7 e vale:

34 - 40 - 43 - 46 - 48 - 64- 73

Esercizio 4 (VI)

4. Trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	**42**	**44**	**49**	**41**	**52**	**63**	**69**	**40**	**60**	**86**	**45**	**66**	**54**	**79**	**81**	**43**	**46**	**38**	**61**	**80**	**48**	**64**	**73**	**47**
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	6

- Per risolvere questo punto, è sufficiente scartare i primi quattro elementi e guardare nella prima riga il numero più alto;
- In questo caso, abbiamo due soluzioni ottime entrambe lunghe 6, e una è la seguente:

41 - 52 - 63 - 69 - 79 - 81

Esercizio 4 (VII)

5. Trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	**42**	**44**	**49**	**41**	**52**	**63**	**69**	**40**	**60**	**86**	**45**	**43**	**46**	**38**	**61**	**80**	**48**	**64**	**73**	**47**
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	3	5	2	7	8	6	8	9	6

- Si tolgono gli elementi indicati e si ricompila la parte della tabella dal 17esimo elemento in poi, ottenendo una soluzione con lunghezza 9:

$$34 - 42 - 44 - 49 - 52 - 60 - 61 - 64 - 73$$

Esercizio 4 (VIII)

6. Fornire un minimo numero di sottosequenze decrescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

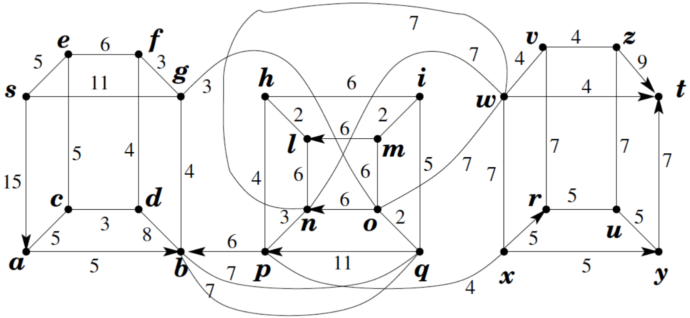
- Se due numeri nella sequenza hanno lo stesso numero assegnato nell'ultima riga, vuol dire che il secondo non è più grande del primo;
- Possiamo quindi costruire delle sottosequenze decrescenti mettendo assieme tutti gli elementi che hanno lo stesso numero;
- Otteniamo quindi 9 sottosequenze decrescenti, così composte: $\{34\}$ - $\{42, 41, 40, 38\}$ - $\{44, 43\}$ - $\{49, 45\}$ - $\{52, 46\}$ - $\{63, 60, 54, 48, 47\}$ - $\{69, 66, 61\}$ - $\{86, 79, 64\}$ - $\{81, 80, 73\}$

Grafi planari

Cosa ci serve sapere:

- Un grafo è *planare* quando può essere disegnato senza che nessuno dei suoi archi si intersechi con gli altri;
- **Certificato del SI' per la planarità**: fornire un *planar embedding*, i.e., disegnare il grafo spostando nodi e archi in modo da mostrare che il grafo sia planare;
- **Certificato del NO per la planarità**: se vale il teorema di Kuratowski;
- **Teorema di Kuratowski (1930)**: un grafo è planare a meno che non contenga una suddivisione di $K_{3,3}$ o una suddivisione di K_5 come sottografo;
- Un minore di grafo G è un qualsiasi grafo che posso ottenere da G con opportune operazioni di *deletion* e *contraction*;
- Un grafo è planare a meno che non si possa ottenerne un $K_{3,3}$ o un K_5 con una sequenza di deletion e contraction (i.e., è planare se non ha né un $K_{3,3}$ né un K_5 minor);
- **Lemma di Wagner (1931)**: se G contiene una suddivisione di H, allora ha H come minore.

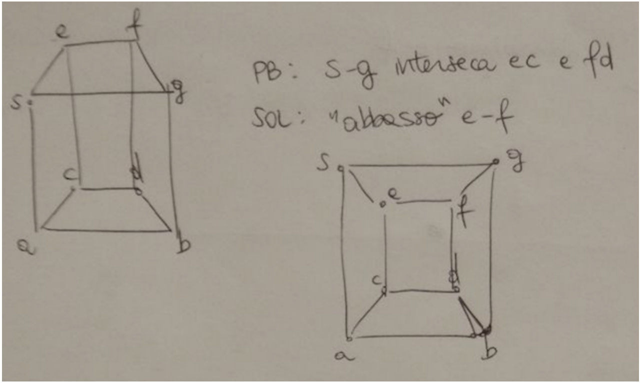
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura:



1. Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh è planare oppure no.

Esercizio 5 (I)

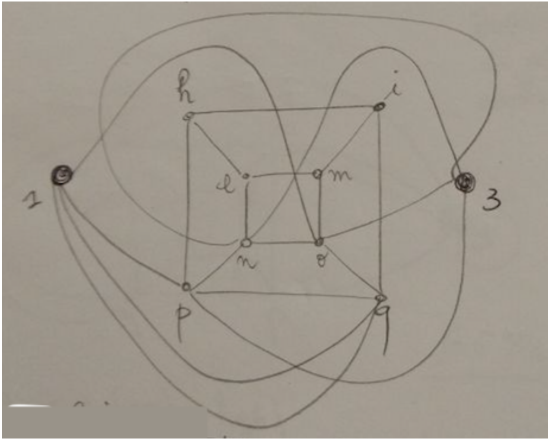
Possiamo pensare G come composto da tre blocchi diversi.
Nel blocco più a sinistra, l'arco sg interseca ec e fd:



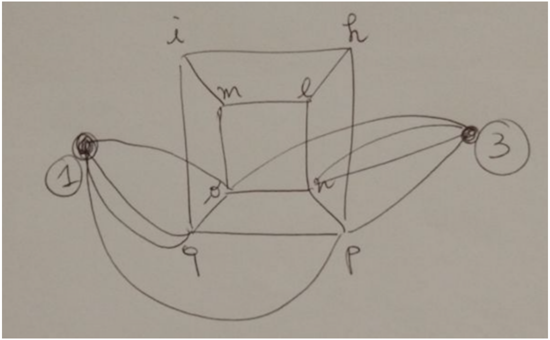
"Abbassando" il lato ef si risolve il blocco a sinistra; analogamente si può fare per il blocco più a destra.

Esercizio 5 (II)

Collassiamo i blocchi più a sinistra e più a destra in due macronodi 1 e 3:

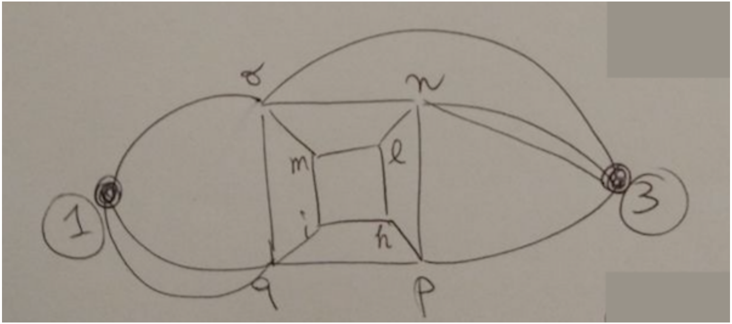


Proviamo a invertire tra loro p e q:



n e o hanno collegamenti verso i macronodi 1 e 3 $\rightarrow$
Dobbiamo cercare di portarli all'esterno.

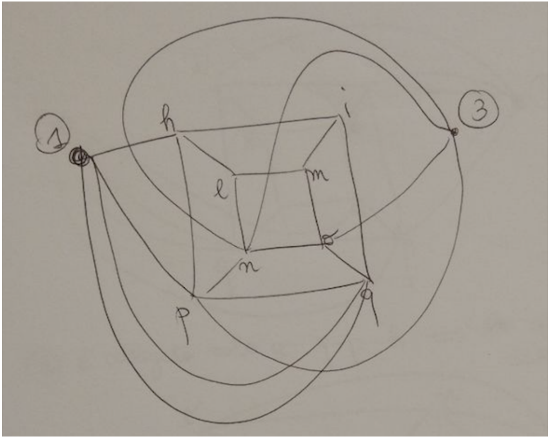
Esercizio 5 (IV)



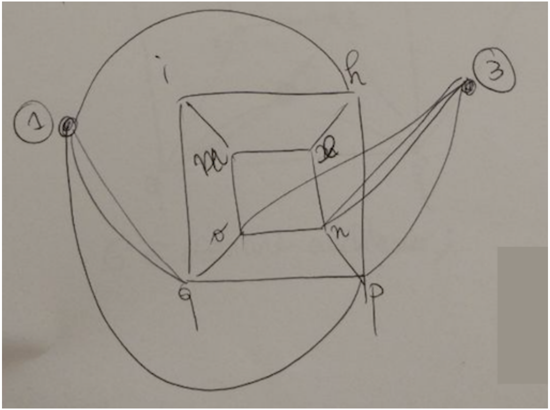
Il grafo G è planare e questo è un suo planar embedding (pur con i macronodi 1 e 3).

Esercizio 5 (V)

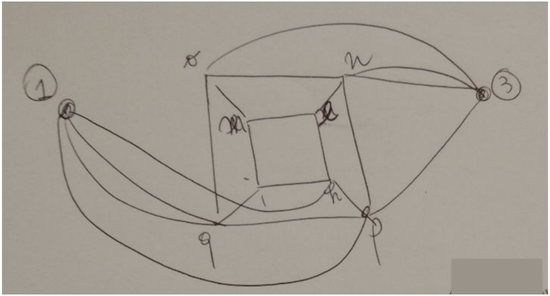
Consideriamo ora il grafo G' ottenuto rimpiazzando l'arco *go* con l'arco *gh*. Anche qui, possiamo collassare i nodi in due macronodi 1 e 3 perché l'arco *gh* è nel blocco centrale; gli altri due sono a posto.



Invertiamo, come prima, i nodi p e q:



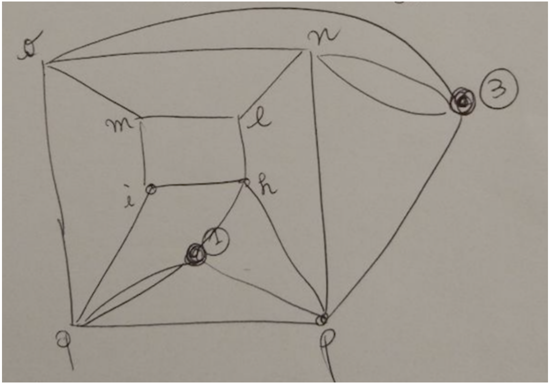
Il problema sono ancora i nodi n e o; portiamoli all'esterno:



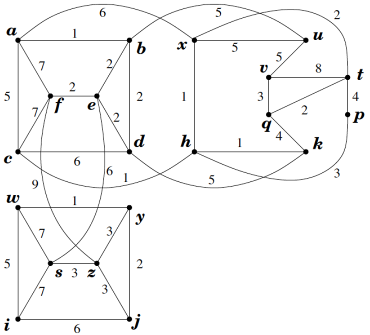
Notiamo che il macronodo 1 è collegato solo a q, p e h $\rightarrow$ Spostiamolo all'interno del blocco 2.

Esercizio 5 (VIII)

Anche il grafo G' è planare:



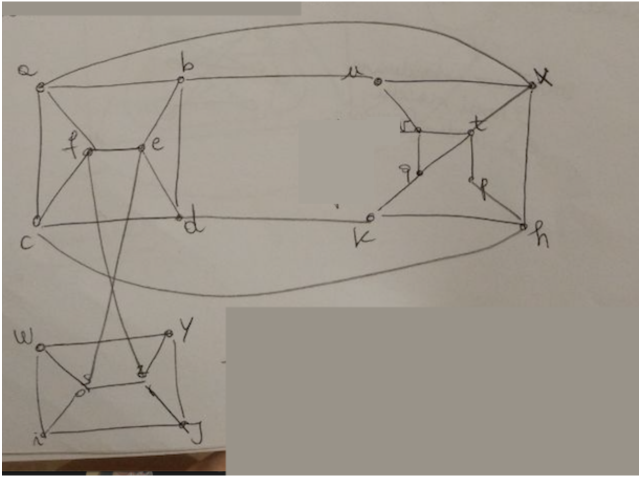
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura:



1. Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

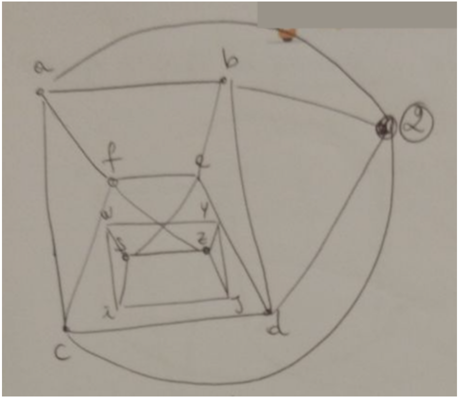
Esercizio 6 (I)

Invertiamo u con x e k con h:



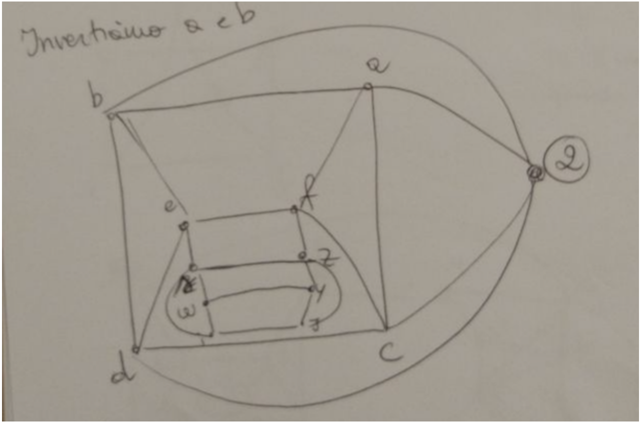
Esercizio 6 (II)

Possiamo spostare il blocco più sotto all'interno del blocco in alto a sinistra e collassare il blocco in alto a destra nel macronodo 2:

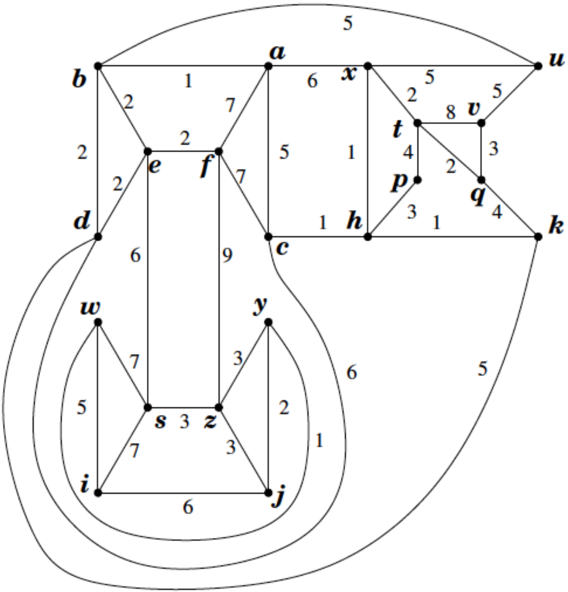


Esercizio 6 (III)

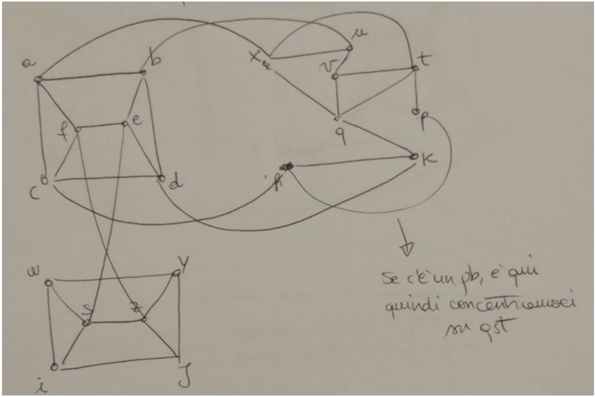
Invertiamo a con b, c con d ed e con f:



Sistemiamo anche il blocco 3, facendo uscire il lato sz e ridisegnando gli altri archi da e verso w, i, j e y $\rightarrow$ G è planare.


5
a
u
b
1
6
x
5
2
5
7
2
8
v
t
2
2
5
1
4
3
e
f
7
p
2
2
q
d
1
h
3
1
4
k
c
6
9
w
y
7
3
6
5
5
2
s
3
z
1
7
3
i
j
6

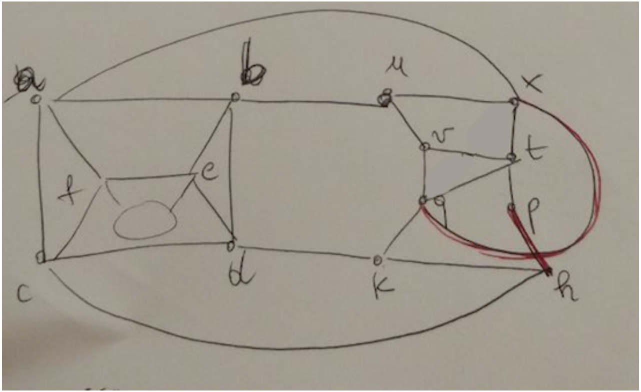
2. Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco hx con un arco qx sia planare oppure no.



Concentriamoci sul blocco 2.

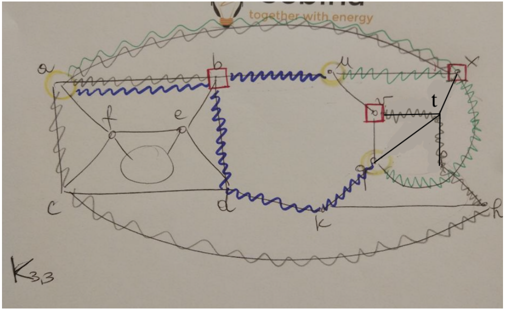
Esercizio 6 (V)

Invertendo u con x e k con h, il problema non si risolve perché gli archi qx e ph continuano a intersecarsi:



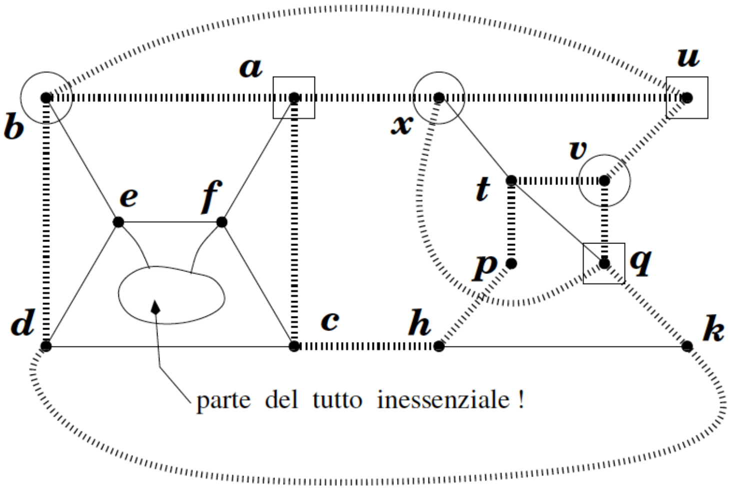
Anche rovesciando altri archi o spostando altri nodi, la situazione non si sgarbuglia → Proviamo a verificare se vale il Teorema di Kuratowski.

Proviamo a cercare un $K_{3,3}$:



- **Partizione A**: $\{a, q, u\}$
- **Partizione B**: $\{b, v, x\}$

Nota: oltre a mostrare i tre nodi per parte, nel certificato bisogna far vedere i collegamenti (i.e., i cammini distinti) tra le due partizioni.


a
u
b
x
v
t
e
f
p
q
d
c
h
k
parte del tutto inessenziale !

Esempi di errori comuni sulla non-planarità

- **Incrocio di archi**: evidenziare che due archi si incrociano non equivale a dare un certificato di non-planarità;
- **Mancanza del certificato**: affermare che un grafo non sia planare senza mostrare il K_5 minor o il $K_{3,3}$ minor non è valido;
- **Cammini tra i 6 nodi del $K_{3,3}$ non specificati**: il certificato risulterebbe incompleto se fossero elencati solo i nodi del $K_{3,3}$;
- **Cammini con nodi interni in comune**: se si consentisse alle suddivisioni di K_5 o $K_{3,3}$ di condividere nodi interni ai cammini, allora essere non funzionerebbero più come strumento per certificare la non-planarità.