Tutoraggio Ricerca Operativa 2019/2020
5. Programmazione Lineare:
Teoria della dualità e Analisi di sensitività

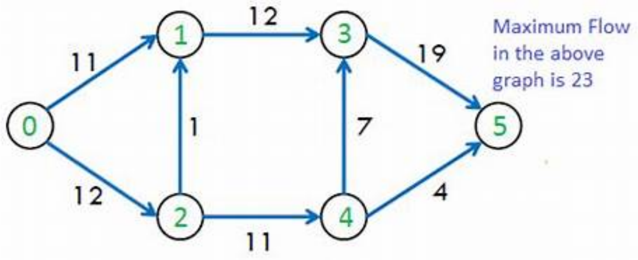
Alice Raffaele, Romeo Rizzi

Università degli Studi di Verona

28 aprile 2020
05 maggio 2020

Sommario

Ogni problema **primale** di massimo, è associato a un problema **duale** di minimo:



Dal Primale (max) al Duale (min)

P

$$\begin{aligned} \max \quad & -6x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ & 3x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D

$$\begin{aligned} \min \quad & 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + 2y_2 \geq -6 \\ & y_1 - y_2 + 3y_3 \geq -3 \\ & y_1, y_2 \leq 0 \\ & y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Si introduce in **D** una variabile y_i per ogni vincolo in **P**;
2. I coefficienti della funzione obiettivo di **D** sono i termini noti di **P**;
3. I termini noti di **D** sono i coefficienti della funzione di obiettivo di **P**;
4. La matrice A di **D** corrisponde alla matrice A^T di **P**;
5. I segni delle variabili di **D** sono opposti ai segni dei vincoli di **P**:
   - Se il vincolo i è $\leq$, la variabile y_i sarà ≥ 0;
   - Se il vincolo i è $\geq$, la variabile y_i sarà ≤ 0;
   - Se il vincolo i è $=$, la variabile y_i sarà libera in segno.
6. I segni dei vincoli di D corrispondono a quelli delle variabili $\mathbf{x}$ in **P**.

Dal Primale (min) al Duale (max)

P

$$\begin{aligned} \min \quad & 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + 2y_2 \geq -6 \\ & y_1 - y_2 + 3y_3 \geq -3 \\ & y_1, y_2 \leq 0 \\ & y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

D

$$\begin{aligned} \max \quad & -6x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ & 3x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Si introduce in **D** una variabile y_i per ogni vincolo in **P**;
2. I coefficienti della funzione obiettivo di **D** sono i termini noti di **P**;
3. I termini noti di **D** sono i coefficienti della funzione di obiettivo di **P**;
4. La matrice A di **D** corrisponde alla matrice A^T di **P**;
5. I segni delle variabili di **D** corrispondono a quelli dei vincoli di **P**;
6. I segni dei vincoli di D sono opposti a quelli delle variabili **x** in **P**:
   - Se la variabile x_i è $\leq$, il vincolo i sarà ≥ 0;
   - Se la variabile x_i è $\geq$, il vincolo i sarà ≤ 0;
   - Se la variabile x_i è libera in segno, il vincolo i sarà $=$.

Esercizio sul passaggio tra **P** e **D**

$$\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 - x_2 \leq -3 \\
& 17x_1 + 3x_3 \geq 8 \\
& 4x_2 + 12x_3 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_3 \text{ libera}
\end{aligned}$$

Esercizio sul passaggio tra **P** e **D** - Soluzione

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 4y_4 \\
\text{s.t.} \quad & 3y_1 + 17y_2 + y_4 \geq 2 \\
& -y_1 + 4y_3 + y_4 \geq 3 \\
& 3y_2 + 12y_3 + y_4 = -4 \\
& y_1, y_3 \geq 0 \\
& y_2 \leq 0 \\
& y_4 \text{ libera}
\end{aligned}
$$

Teoremi della dualità

Dato il problema primale $P : \max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ t.c. $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ e il suo duale $D : \min \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ t.c. $A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0$:

- Il duale del duale D è il primale P stesso;
- **Teorema della dualità in forma debole**: $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.
- **Teorema della dualità in forma forte**: P una soluzione ottima finita se e solo se anche D ce l'ha e il valore delle due funzioni obiettivo coincide $\rightarrow \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

Relazione tra Primale e Duale

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO INFERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO SUPERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

Condizioni di ottimalità

I vettori $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ sono ottimi rispettivamente per il primale P e per il duale D se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1. $A\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}, \bar{\mathbf{x}} \geq 0$ (ammissibilità del primale)
2. $\mathbf{c}^T \geq \bar{\mathbf{y}}^T A, \bar{\mathbf{y}} \geq 0$ (ammissibilità del duale)
3. $\bar{\mathbf{y}}^T (A\bar{\mathbf{x}} - b) = 0$ (scarti complementari - *complementary slackness*)
4. $(\mathbf{c}^T - \bar{\mathbf{y}}^T A)\bar{\mathbf{x}} = 0$ (scarti complementari - *complementary slackness*)

Interpretazione economica e prezzi ombra

Si considerino un problema primale **P** in forma standard ed il suo duale **D**:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} = b \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & b^T\mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^T\mathbf{y} \geq c \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Sia B una base ottima di **P** e siano x^* e y^* le corrispondenti soluzioni ottime di **P** e **D**. Allora ciascuna variabile duale y_i^* indica di quanto varierebbe il valore ottimo se il termine noto del corrispondente vincolo primale b_i aumentasse di un'unità e la base ottima restasse la stessa.

- Questa interpretazione è valida solo se la base ottima rimane la stessa quando il termine noto del primale viene perturbato (si vedano le slides 18-22 sull'*analisi di sensitività*);
- Variabili duali come *prezzi di equilibrio*: il valore di y_i dice quanto si sarebbe disposti a pagare per incrementare di una unità il termine noto b_i (ammesso che la base ottima B resti la stessa);
- Altro link utile: `http://www.swappa.it/wiki/Uni/RO-Prezzi-Ombra`

TE 19/06/2014 - Es. 3: Ammissibilità

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = x_7 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema:

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & x_1 + 6x_2 & +C_3x_3 + 19x_4 & +10x_5 + C_6x_6 & +C_7x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 & +x_3 + x_4 & +x_5 + x_6 & +x_7 & \leq & 36 \\
 & & +x_3 + x_4 & & +x_7 & \leq & 10 \\
 & & & +x_5 + x_6 & +x_7 & \leq & 14 \\
 & x_1 & +x_3 & +x_5 & & \leq & 20 \\
 & \quad + x_2 & \quad + x_4 & \quad + x_6 & & \leq & 15
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

1. Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

È sufficiente sostituire i valori delle variabili in soluzione e controllare che tutti i vincoli siano soddisfatti.

TE 19/06/2014 - Es. 3: Duale

2. Scrivere il problema duale.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 36y_1 + 10y_2 & +14y_3 + 20y_4 & +15y_5 & \\
\text{s.t.} & y_1 & +y_4 & & \geq 1 \\
& y_1 & & +y_5 & \geq 6 \\
& y_1 + y_2 & + y_4 & & \geq C_3 \\
& y_1 + y_2 & & +y_5 & \geq 19 \\
& y_1 & +y_3 + y_4 & & \geq 10 \\
& y_1 & +y_3 & +y_5 & \geq C_6 \\
& y_1 + y_2 & +y_3 & & \geq C_7
\end{array}
$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

TE 19/06/2014 - Es. 3: Scarti complementari

3. Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari

Cosa vale agli scarti complementari?

- $\bar{\mathbf{y}}^T(A\bar{\mathbf{x}} - b) = 0$
- $(\mathbf{c}^T - \bar{\mathbf{y}}^T A)\bar{\mathbf{x}} = 0$

Usiamo la soluzione $\mathbf{x} = (6, 5, 0, 10, 14, 0, 0)$:

- $x_1 \neq 0 \rightarrow$ Il primo vincolo del duale dovrà essere soddisfatto a uguaglianza:
  - $y_1 + y_4 = 1$
- La stessa cosa vale per il secondo, il quarto e il quinto vincolo sempre del duale (associati rispettivamente a x_2, x_4 e x_5):
  - $y_1 + y_5 = 6$
  - $y_1 + y_2 + y_5 = 19$
  - $y_1 + y_3 + y_4 = 10$
- Sostituendo $\mathbf{x}$ nei vincoli del primale, il primo vincolo non è attivo (i.e., non è soddisfatto a uguaglianza):
  - $y_1 = 0$

TE 19/06/2014 - Es. 3: Soluzione duale

Otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{aligned} y_4 &= 1 \\ y_5 &= 6 \\ y_2 + y_5 &= 19 \\ y_3 + y_4 &= 10 \end{aligned}$$

4. Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare a quella fornita.

Il duale ammette un'unica soluzione $\mathbf{y} = (0, 13, 9, 1, 6)$: è ammissibile? Sostituisco questi valori in tutti i vincoli del duale e verifico.

TE 19/06/2014 - Es. 3: Valori dei parametri C_3, C_6 e C_7

5. Per quali valori dei parametri C_3, C_6 e C_7 la soluzione primale assegnata è ottima? Indicare con chiarezza le verifiche da compiere.

Sappiamo che alcune condizioni agli scarti complementari sono soddisfatte, dobbiamo ora verificare che valgano anche per il terzo, sesto e settimo vincolo del duale:

- (3): $x_3(y_1 + y_2 + y_4 - C_3) = 0$
- (6): $x_6(y_1 + y_3 + y_5 - C_6) = 0$
- (7): $x_7(y_1 + y_2 + y_3 - C_7) = 0$

$x_3 = x_6 = x_7 = 0$, è sufficiente che i vincoli del duale siano rispettati:

- (3): $y_1 + y_2 + y_4 = 14 \geq C_3$
- (6): $y_1 + y_3 + y_5 = 15 \geq C_6$
- (7): $y_1 + y_2 + y_3 = 22 \geq C_7$

Se $C_3 \leq 14$, $C_6 \leq 15$ e $C_7 \leq 22$, la soluzione primale fornita è ottima, oltre che ammissibile.

TE 19/06/2014 - Es. 3: Prezzi ombra

6. Per $C_3 = C_6 = C_7 = 10$, quanto si sarebbe disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto di ciascuno dei 5 vincoli?

Usando $C_3 = C_6 = C_7 = 10$, la soluzione fornita del problema primale è ancora ottima. Il prezzo da pagare per ogni incremento di un'unità del termine noto di ogni vincolo (i.e., il prezzo ombra) lo indicano proprio i valori che assumono le variabili del duale all'ottimo: $(0, 13, 9, 1, 6)$.

Analisi di sensitività

Una volta che otteniamo la funzione obiettivo, abbiamo davvero concluso?

- Potremmo investigare quanto sia *stabile* la soluzione, rispetto a piccole variazioni dei parametri in ingresso;
- Non dimentichiamoci che stiamo risolvendo un **modello** del problema, non il problema stesso! Perciò meno sensibile è la soluzione, più affidabile sarà il modello;
- **Analisi di sensitività**: studio delle perturbazioni dei dati iniziali quando:
  - $B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ (ammissibilità del primale per $\bar{\mathbf{x}}$);
  - $\bar{\mathbf{c}}^T := \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} A \geq 0^T$ (ammissibilità del duale per $\bar{\mathbf{y}}$, dove $\bar{\mathbf{y}}^T := \mathbf{c}_B^T B^{-1}$).
- La base B rimane ottima (ma non la soluzione $\mathbf{x}$).
- Vedremo tre casi:
  - Variazione dei termini noti;
  - Variazione dei costi delle variabili fuori base;
  - Variazione dei costi delle variabili in base.

Analisi di sensitività - Variazione dei termini noti

Consideriamo la variazione $\Delta \mathbf{b}$:

- $B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) \geq 0$
- $\bar{\mathbf{c}}^T := \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} A \geq 0^T$ (invariato).

La base B rimane ammissibile e ottima se e solo se:

$$B^{-1}\mathbf{b} \geq -B^{-1}\Delta \mathbf{b}$$

La soluzione ottima varia da $\mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}_B^T B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) \rightarrow$
$\Delta z := (\mathbf{c}_B^T B^{-1})\Delta \mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}}^T \Delta \mathbf{b}$

Le variabili duali $\bar{y}_i$, $i = 1, \ldots, m$, misurano la **sensitività** del valore ottimo della funzione obiettivo, rispetto a piccoli cambiamenti Δb_i nei termini noti.

Analisi di sensitività - Variazione costi variabili fuori base

Consideriamo ora $\Delta \mathbf{c}_N^T$ e siano $\mathbf{c}$ e $\widetilde{\mathbf{c}}$ i vettori dei costi ridotto prima e dopo la variazione $\Delta \mathbf{c}_N^T$.

- $B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ (invariato);
- $\widetilde{\mathbf{c}}^T := [\widetilde{\mathbf{c}}_B^T, \widetilde{\mathbf{c}}_N^T] = [0^T, (\mathbf{c}_N^T + \Delta \mathbf{c}_N^T) - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N] \geq 0^T$.

Come prima, vogliamo che B rimanga ottima, e ciò accade se e solo se:

$$\widetilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N + \Delta \mathbf{c}_N^T = \bar{\mathbf{c}}_N^T + \Delta \mathbf{c}_N^T \geq 0 \iff \Delta \mathbf{c}_N \geq -\bar{\mathbf{c}}_N.$$

Otteniamo quindi $n - m$ disuguaglianze indipendenti l'una dall'altra:

$$\Delta c_j \geq -\bar{c}_j, \forall x_j \text{ fuori base}$$

Il costo ridotto $\bar{c}_j \geq 0$ può essere interpretato come il massimo **calo** del costo c_j per cui la base B rimane ottima.

Analisi di sensitività - Variazione costi variabili in base

Infine consideriamo la variazione $\Delta \mathbf{c}_B^T$ e, come nel caso precedente, siano $\mathbf{c}$ e $\widetilde{\mathbf{c}}$ i vettori dei costi ridotto prima e dopo la variazione $\Delta \mathbf{c}_B^T$.

- $B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ (invariato);
- $\widetilde{\mathbf{c}}^T := [\widetilde{\mathbf{c}}_B^T, \widetilde{\mathbf{c}}_N^T] = [0^T, \mathbf{c}_N^T - (\mathbf{c}_B^T + \Delta \mathbf{c}_B^T)B^{-1}N] \geq 0^T$.

Perciò B rimane ottima se e solo se:

$$\widetilde{\mathbf{c}}_N^T := \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1}N - \Delta \mathbf{c}_B^T B^{-1}N \geq 0^T \iff \Delta \mathbf{c}_B^T B^{-1}N \leq \bar{\mathbf{c}}_N^T$$

Abbiamo ottenuto un sistema che definisce un poliedro in $\mathbb{R}^m$, i cui punti corrispondono ai vettori $\Delta \mathbf{c}_B$ per cui B non cambia.

Bibliografia

Marco Di Summa, *Corso di Ottimizzazione Discreta, Interpretazione economica della dualità*
https://www.math.unipd.it/ disumma/OD-Cap4b.pdf

Matteo Fischetti, *Introduction to Mathematical Optimization*, Kindle Direct Publishing, 2019
https://www.amazon.it/Introduction-Mathematical-Optimization-Matteo-Fischetti/dp/1692792024

Robert J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Springer Nature, 4th edition, 2013
https://www.springer.com/gp/book/9781461476290