Tutoraggio Ricerca Operativa 2019/2020
5. Programmazione Lineare:
Teoria della dualità e Analisi di sensitività

Alice Raffaele, Romeo Rizzi

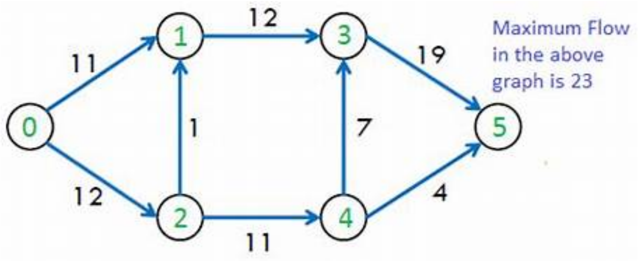
Università degli Studi di Verona

28 aprile 2020
05 maggio 2020

Sommario

1 Teoria della dualità

Ogni problema **primale** di massimo, è associato a un problema **duale** di minimo:



Dal Primale (max) al Duale (min)

P

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -6x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 2x_1 - x_2 \geq 1 \\
& 3x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

D

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + 2y_2 \geq -6 \\
& y_1 - y_2 + 3y_3 \geq -3 \\
& y_1, y_2 \leq 0 \\
& y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Si introduce in **D** una variabile y_i per ogni vincolo in **P**;
2. I coefficienti della funzione obiettivo di **D** sono i termini noti di **P**;
3. I termini noti di **D** sono i coefficienti della funzione di obiettivo di **P**;
4. La matrice A di **D** corrisponde alla matrice A^T di **P**;
5. I segni delle variabili di **D** sono opposti ai segni dei vincoli di **P**:
   - Se il vincolo i è $\leq$, la variabile y_i sarà ≥ 0;
   - Se il vincolo i è $\geq$, la variabile y_i sarà ≤ 0;
   - Se il vincolo i è $=$, la variabile y_i sarà libera in segno.
6. I segni dei vincoli di D corrispondono a quelli delle variabili $\mathbf{x}$ in **P**.

Dal Primale (min) al Duale (max)

P

$$\begin{aligned} \min \quad & 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + 2y_2 \geq -6 \\ & y_1 - y_2 + 3y_3 \geq -3 \\ & y_1, y_2 \leq 0 \\ & y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

D

$$\begin{aligned} \max \quad & -6x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ & 3x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Si introduce in **D** una variabile y_i per ogni vincolo in **P**;
2. I coefficienti della funzione obiettivo di **D** sono i termini noti di **P**;
3. I termini noti di **D** sono i coefficienti della funzione di obiettivo di **P**;
4. La matrice A di **D** corrisponde alla matrice A^T di **P**;
5. I segni delle variabili di **D** corrispondono a quelli dei vincoli di **P**;
6. I segni dei vincoli di D sono opposti a quelli delle variabili **x** in **P**:
   - Se la variabile x_i è $\leq$, il vincolo i sarà ≥ 0;
   - Se la variabile x_i è $\geq$, il vincolo i sarà ≤ 0;
   - Se la variabile x_i è libera in segno, il vincolo i sarà $=$.

Esercizio sul passaggio tra **P** e **D**

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 - x_2 \leq -3 \\
& 17x_1 + 3x_3 \geq 8 \\
& 4x_2 + 12x_3 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_3 \text{ libera}
\end{aligned}
$$

Esercizio sul passaggio tra **P** e **D** - Soluzione

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 4y_4 \\
\text{s.t.} \quad & 3y_1 + 17y_2 + y_4 \geq 2 \\
& -y_1 + 4y_3 + y_4 \geq 3 \\
& 3y_2 + 12y_3 + y_4 = -4 \\
& y_1, y_3 \geq 0 \\
& y_2 \leq 0 \\
& y_4 \text{ libera}
\end{aligned}
$$

Teoremi della dualità

Dato il problema primale $P : \max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ t.c. $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ e il suo duale $D : \min \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ t.c. $A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0$:

- Il duale del duale D è il primale P stesso;
- **Teorema della dualità in forma debole**: $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.
- **Teorema della dualità in forma forte**: P una soluzione ottima finita se e solo se anche D ce l'ha e il valore delle due funzioni obiettivo coincide $\rightarrow \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

Relazione tra Primale e Duale

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI