Università degli studi di Padova

Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi Triennale

Alcune proprietà della trasformata di Mellin

Relatore:
Ch.mo Prof.
Alessandro Languasco

Laureando:
Giovanni Domenico Di Salvo
Matricola: 575158

Anno Accademico 2011/2012

A chi mi ha sostenuto;
non dev'essere stato facile.

Indice

Capitolo 1

La trasformata di Mellin

1.1 Generalità

1.1.1 Definizione

Consideriamo una funzione f che sia localmente integrabile nell'intervallo $]0,+\infty[$.

Definizione 1.1.1 (Trasformata di Mellin)**.** La **trasformata di Mellin di** f è definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx \,,\; s = \sigma + it \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$

quando l'integrale converge, cosa che chiaramente dipenderà dalle proprietà analitiche di f.

La trasformata di Mellin è intimamente collegata con la trasformata di Laplace, dalla quale eredita le principali proprietà.
Ricordiamo che la trasformata di Laplace di una funzione g è data da

$$\Lambda g(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} g(\tau)\, d\tau \;,\; s \in \mathbb{C} \;,$$

ove si suppone $g(\tau) = \begin{cases} O(e^{(a+\epsilon)\tau}) \text{ per } \tau \longrightarrow +\infty \\ O(e^{(b-\epsilon)\tau}) \text{ per } \tau \longrightarrow -\infty \end{cases}$, con $a < b$, per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo. In tal modo l'integrale converge assolutamente e definisce quindi una funzione olomorfa in $S_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \;:\; a < \Re(z) < b\}$.

Osserviamo che il generico numero complesso $s \in \mathbb{C}$ verrà nel seguito denotato con $s = \sigma + it$, ove chiaramente $\sigma = \Re(s)$ e $t = \Im(s)$ sono numeri reali.

Vediamo che l'integrale effettivamente converge assolutamente per $\tau \longrightarrow -\infty$. Sia $M \in \mathbb{R}$ tale che $|g(\tau)| \leq Ke^{(b-\epsilon)\tau}$ per $\tau < M$; si ha dunque

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{M} e^{-s\tau} g(\tau)\, d\tau\right| \leq & \int_{-\infty}^{M} |e^{-s\tau}||g(\tau)|\, d\tau \\ \leq & K\int_{-\infty}^{M} e^{-\sigma\tau} e^{(b-\epsilon)\tau}\, d\tau \\ = & K\int_{-\infty}^{M} e^{(b-\sigma-\epsilon)\tau}\, d\tau < +\infty \ ,\end{aligned}$$

essendo $\sigma < b$ ed $\epsilon > 0$ tale che $(b-\sigma-\epsilon) > 0$.

Il legame tra le due trasformate avviene col cambio di variabile $\tau = -\log x$, infatti

$$\begin{aligned}\Lambda g(s) = & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} g(\tau)\, d\tau \\ = & \int_{0}^{+\infty} e^{s\log x} g(-\log x)\frac{1}{x}\, dx \\ = & \int_{0}^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx \\ = & F(s) \ ,\end{aligned}$$

ove si è posto $f(x) = g(-\log x)$. Deduciamo da ciò le proprietà analitiche di f affinchè l'integrale che definisce la sua trasformata di Mellin $F(s)$ abbia senso: essendo $g(\tau) = O(e^{(b-\epsilon)\tau})$ per $\tau \longrightarrow -\infty$, col cambio di variabile si avrà quindi $f(x = O(e^{(b-\epsilon)(-\log x)}) = O(\frac{1}{x^{b-\epsilon}})$ per $x \longrightarrow +\infty$. Analogamente si avrà $f = O(\frac{1}{x^{a+\epsilon}})$ per $x \longrightarrow 0^+$.
In tal modo, imitando il conto fatto sopra, si vede che una funzione f t.c.

$$f(x) = \begin{cases} \mathcal{R}_{loc}(]0,+\infty[) \\ O(\frac{1}{x^{a+\epsilon}}) \text{ per } x \longrightarrow 0^+ \\ O(\frac{1}{x^{b-\epsilon}}) \text{ per } x \longrightarrow +\infty \quad , \end{cases} \tag{1.2}$$

ammette trasformata di Mellin nella striscia $S_{a,b}$. Tale striscia è detta *striscia di analiticità di* F.

A questo punto, è naturale investigare sul procedimento inverso: data la trasformata, determinare la trasformata di Mellin inversa (o antitrasformata di Mellin).

Data la formula che determina l'antitrasformata di Laplace:

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} e^{s\tau}\Lambda g(s)\, ds \ \text{ per qualche } \ a < c < b \ ,$$

operando il solito cambio di variabile $\tau = -\log x$ e ponendo infine $g(-\log x) = f(x)$, si perviene ad una formula che restituisce l'antitrasformata di Mellin di F:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{-s} F(s)\, ds\ , \text{ per qualche } \ a < c < b. \tag{1.3}$$

Tale formula di inversione è valida $\forall x > 0$ ove f è continua.

Questo risultato era noto già a B. Riemann che lo adoperò nel suo celeberrimo lavoro sui numeri primi del 1859, nonostante la prima dimostrazione rigorosa si sia avuta solo 37 anni più tardi grazie appunto a Mellin.

Richiamiamo la definizione di *funzione a variazione limitata*, limitandoci a ricordare la nozione per funzioni a valori reali: sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. Sia $I = [\xi, \eta]$ e sia $\mathcal{T} = (a_i)_{i=0}^n$ una sua suddivisione. Definiamo quindi

$$V(f, \mathcal{T}) := \sum_{i=0}^{n} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \quad .$$

Ora, f si dice *rettificabile* se $\sup_{\mathcal{T}} V(f, \mathcal{T}) < +\infty$, ove $\mathcal{T}$ varia tra tutte le possibili suddivisioni di I. Tale sup è detto *lunghezza della curva*.
Se f non è continua, ha ancora senso considerare le $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui il precedente sup è finito e in tal caso si dice che f è a variazione limitata (tale sup è detto *variazione totale* di f su I).

Supponiamo ora che f sia discontinua in un punto $x_0 \in I$ e che l'integrale in (1.1) sia assolutamente convergente sulla retta $\sigma = c$. Sia inoltre f a variazione limitata attorno al punto x_0. In questo caso la formula di inversione (1.3) prende la seguente forma:

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to +\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} x_0^{-s} F(s)\, ds\ . \tag{1.4}$$

1.1.2 Cenni alla funzione Γ di Eulero

Dal momento che sarà ripetutamente usata nel seguito, è opportuno aprire una breve parentesi su questa importantissima funzione.

La *Funzione Gamma di Eulero* è definita da

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx, \quad \sigma > 0\ .$$

Tale funzione è stata introdotta da L. Eulero nel 1729 in risposta ad una lettera di C. Goldbach, nella quale si poneva un problema più specifico della mera interpolazione del fattoriale sugli interi positivi; si chiedeva infatti di determinare una funzione continua $\Gamma :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,, \forall x \in]0,+\infty[$.
Siffatta funzione si può subito estendere a $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > 0\}$ essendo ivi l'integrale assolutamente convergente. Integrando per parti si vede subito che in tale semipiano è verificata $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, nota come *equazione funzionale della funzione* Γ. Tale equazione si rivela utile anche per prolungare la funzione Γ al semipiano $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \leq 0\}$, ove possibile.
Ovviamente anche in questo semipiano l'equazione funzionale dovrà continuare a sussistere.

Sia dunque $w \in \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \leq 0\}$. Chiaramente esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\Re(w+m) > 0$ (basta prendere $m > -\Re(w)$). Si ha che

$$\Gamma(w+m) = (w+m-1)\Gamma(w+m-1) \ ,$$

ammesso che Γ sia definita in $w+m-1$. Ammettendo che lo sia, si itera il procedimento sfruttando l'equazione funzionale (che per definizione di Γ, deve valere ovunque essa è definita) e si perviene a

$$\Gamma(w+m) = \Gamma(w)\prod_{j=0}^{m-1}(w+j) \iff \Gamma(w) = \frac{\Gamma(w+m)}{\prod_{j=0}^{m-1}(w+j)} \ .$$

Notiamo che tale formula è ben definita, infatti $\forall m, n > -\Re(w)$ (senza perdita di generalità supponiamo $n > m$), si ha che:

$$\frac{\Gamma(w+n)}{\prod_{j=0}^{n-1}(w+j)} = \prod_{i=m}^{n-1}(w+i)\frac{\Gamma(w+m)}{\prod_{j=0}^{n-1}(w+j)} = \frac{\Gamma(w+m)}{\prod_{j=0}^{m-1}(w+j)} \ ,$$

da cui, oltre ad una prova della bontà del prolungamento, si hanno anche informazioni circa il nuovo dominio, che è evidentemente $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.

Concludiamo la breve parentesi sulla Γ, osservando che data una singolarità $-k \in \mathbb{Z}_-$, essa è polo semplice di residuo $\frac{(-1)^k}{k!}$, infatti

$$Res(\Gamma, -k) = \lim_{w \to -k}(w+k)\frac{\Gamma(w+n)}{w \cdots (w+k) \cdots (w+n-1)}$$

$$= \frac{\Gamma(n-k)}{\underbrace{(-k)(-k+1)\cdots\underbrace{(-k+(k-1))}_{-1}}_{(-1)^k k!}\underbrace{\underbrace{(-k+(k+1))}_{1}\cdots(-k+n-1)}_{\Gamma(n-k)}} = \frac{(-1)^k}{k!} \ .$$

1.1.3 Prime proprietà

Come altre trasformate integrali, anche la trasformata di Mellin gode di svariate proprietà che si rivelano utili nel caso di trasformazioni di funzioni complicate.
Indichiamo ora $F(s) = M[f(x); s] = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx$.
Sempre supponendo che f sia come in (1.2), valgono le seguenti:

$$\left.\begin{array}{l}
(a)\ M[f(as); s] = a^{-s}F(s), a > 0 \\
(b)\ M[x^a f(x); s] = F(s + a) \\
(c)\ M[f(x^a); s] = a^{-1}F(\frac{s}{a}), a > 0 \\
(d)\ M[f(x^{-a}); s] = a^{-1}F(\frac{-s}{a}), a > 0 \\
(e)\ M[x^\alpha f(x^{-\mu}); s] = \mu^{-1}F(\frac{s+\alpha}{\mu}), \mu > 0 \\
(f)\ M[x^\alpha f(x^{-\mu}); s] = \mu^{-1}F(\frac{-(s+\alpha)}{\mu}), \mu > 0 \\
(g)\ M[(\log x)^n f(x); s] = F^{(n)}(s), n \in \mathbb{N}
\end{array}\right\} \tag{1.5}$$

La verifica è immediata per tutte tranne che per la (g), per la quale è opportuno fare qualche considerazione.
Ammettiamo di poter passare passare l'operatore di derivazione sotto il segno di integrale. Allora avremmo $\frac{d}{ds}F(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \log x f(x)\, dx$; iterando la derivazione si ottiene quindi la (g).
Vediamo però che il passaggio sotto il segno di integrale è lecito, mostrando che le ipotesi del Teorema 9.22.2 pag. 436 di [DM] sono verificate.

Sia $E = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \sigma < b\} \subset \mathbb{C}$ aperto, $\mathbb{C}$ spazio normato dal modulo. Sia poi $D =]0, +\infty[$.
Considero allora $h : E \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $h(s, x) := x^{s-1} f(x)$.
Sia allora $u = 1 \in \mathbb{C}$, che nell'isomorfismo $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ corrisponde al versore $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ora, $\partial_u h(s, x) = \partial_\sigma h(\sigma + it, x) = \frac{d}{ds}h(s, x) = x^{s-1} \log x f(x)$: per tale u, fissato $s \in E$, questa funzione esiste $\forall x \in D$.
Fissiamo ora $w \in E$, $w = \xi + i\eta$ e consideriamo un suo intorno in E, $U = \mathbb{B}_E(w, \frac{r}{3}[$ ove $r = dist(w, \partial E)$. Definiamo allora $\gamma_w(x) := (x^{\xi+\frac{r}{2}-1} + x^{\xi-\frac{r}{2}-1})|f(x)||\log x|$, osservando che $\gamma_w \in L^1(D, \mathbb{C})$ e $|\partial_u h(s, x)| \leq \gamma_w(x)\ \ \forall s \in U$ e $\forall x \in D$. Allora il Teorema sopracitato afferma che $\partial_u F(s)$ esiste ed eguaglia $\int_D \partial_u h(s, x) dx$, che è quanto si voleva.

Ci sono poi relazioni di carattere differenziale; supponiamo che f sia derivabile su $\mathbb{R}_{\geq 0}$ e f' sia ivi continua. Allora:

$$\begin{aligned}
M[f'(x); s] &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} f'(x)\, dx \\
&= \left[x^{s-1} f(x)\right]_0^{+\infty} - (s - 1) \int_0^{+\infty} x^{s-2} f(x)\, dx\ .
\end{aligned}$$

Sfruttando la (1.2) si ottiene

$$\begin{aligned}
|x^{s-1}f(x)| \leq& Kx^{\sigma-1}\frac{1}{x^{a+\epsilon}} \\
=& Kx^{\sigma-a-1-\epsilon} \longrightarrow 0 \;\text{ per }\; x \longrightarrow 0 \;\forall\epsilon > 0 \\
\Longleftrightarrow& \sigma - a - 1 - \epsilon > 0 \;\; \forall\epsilon > 0 \\
\Longleftrightarrow& \sigma - 1 > a + \epsilon \;\; .
\end{aligned}$$

Analogamente, l'altro limite si annullerà per $x \longrightarrow +\infty$ se e solo se $\sigma - 1 < b - \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Quindi si ha che

$$M[f'(x); s] = -(s-1)F(s-1) \;\text{ per }\; a < \sigma - 1 < b.$$

Denotiamo con $f^{(r)}$ la derivata r-esima di f, posto che esista e sia continua. Supponendo poi $x^{s-n+r}f^{(r)}(x) \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow 0, +\infty$, $\forall r = 0, 1, 2, \dots, n$, per induzione è facile verificare che

$$M[f^{(n)}; s] = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} F(s-n) \;\text{ per }\; a < \sigma - n < b \;\; .$$

1.1.4 Il caso $a \geq b$

Finora abbiamo tacitamente assunto che in (1.2) fosse $a < b$; basta però considerare la funzione $f(x) = (1+x)^\nu$, $\nu > 0$ per rendersi conto che non sempre è $a < b$.
È chiaro che $f \in \mathcal{R}_{loc}(]0, +\infty[)$; determiniamo quindi le costanti a e b (sono le migliori per cui (1.2) è verificata i.e. l'inf tra tutte le a e il sup tra tutte le b che verificano (1.2), di modo da avere la striscia di analiticità più ampia possibile).

$$\left| \frac{(1+x)^\nu}{\frac{1}{x^{a+\epsilon}}} \right| = \left| x^{a+\epsilon}(1+x)^\nu \right| \leq K \;\text{ per }\; x \longrightarrow 0^+ \;\; ;$$

ciò vale se e solo se $a + \epsilon \geq 0 \;\; \forall\epsilon > 0$, quindi si vede che deve per forza essere $a \geq 0$, dunque la più piccola delle costanti a che rende vera (1.2) è $a = 0$. Poi:

$$\left| \frac{(1+x)^\nu}{\frac{1}{x^{b-\epsilon}}} \right| = \left| x^{b-\epsilon}(1+x)^\nu \right| \sim_{+\infty} x^{b+\nu-\epsilon} \leq K \;\text{ per }\; x \longrightarrow +\infty \;\; ;$$

ma questo accade se e solo se $b + \nu - \epsilon \leq 0$, da cui $b + \nu \leq 0$ i.e. $b \leq -\nu$. Il sup (che qui è anche un max) delle costanti che rispettano la (1.2) è quindi $b = -\nu$.
Siamo quindi nel caso $a \geq b$, per cui la striscia di analiticità non è definita e quindi

la rappresentazione integrale della trasformata di Mellin di f non esiste. Vorremmo quindi aggirare questo ostacolo e dare una definizione di trasformata per le funzioni che rispettano (1.2) in cui però $a \geq b$, che abbia una ragionevole attinenza con quella data in (1.1).

Anzitutto si decompone la funzione f in questione, in due funzioni f_1 ed f_2 definite su intervalli disgiunti che ricoprono $\mathbb{R}_+$, diciamo $]0,1[$ e $[1,+\infty[$ rispettivamente. Pongo allora

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & x \in]0,1[\\ 0 & x \in [1,+\infty[\end{cases} \qquad f_2(x) := \begin{cases} 0 & x \in]0,1[\\ f(x) & x \in [1,+\infty[\end{cases} .$$

A questo punto, si definisce la *trasformata di Mellin generalizzata* come

$$M[f;s] := M[f_1;s]\chi_{\{\sigma>a\}}(s) + M[f_2;s]\chi_{\{\sigma<b\}}(s) \text{ per } \sigma \in \mathbb{R} \setminus [b,a] .$$

1.1.5 La formula di Parseval

Un risultato importante nella teoria della trasformata di Mellin è la *formula di Parseval.*
Supponiamo di avere due funzioni f e g tali che l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

esista. Assumiamo che $F(1-s)$ e $G(s)$ abbiano una comune striscia di analiticità (in questo caso si avrà I assolutamente convergente).

Prendiamo c in tale striscia e consideriamo la retta verticale di equazione $\sigma = c$. Allora, almeno formalmente si ha che

$$\begin{aligned} J =& \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(s)F(1-s)\,ds \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(1-s)\left\{\int_0^{+\infty} x^{s-1}g(x)\,dx\right\} ds \\ =& \int_0^{+\infty} g(x)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}F(1-s)\,ds\right\} dx \ . \end{aligned}$$

Gli scambi degli integrali sono giustificati per convergenza assoluta delle integrande: $t \longmapsto F(1-c-it) \in L(\mathbb{R})$ (infatti per $a < c < b$ l'antitrasformata di Mellin esiste, quindi $t \longmapsto |x^{c-it-1}F(1-c-it)| = x^{c-1}|F(1-c-it)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$) e $x \longmapsto x^{c-1}g(x) \in L(]0,+\infty[)$ (ragionamento simile: si tratta dell'argomento dell'integrale che definisce G, che esiste per ipotesi).

Quindi $J = I$ e abbiamo esattamente la formula di Parseval:

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(1-s)G(s)\,ds \ . \tag{1.6}$$

Menzioniamo qualche integrale di convoluzione; si tratta di varianti della formula di Parseval di facile verifica grazie alle (1.5):

$$\int_0^{+\infty} f(\alpha x)g(\beta x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(1-s)G(s)\alpha^{s-1}\beta^{-s}\,ds \ \ , \ \ \alpha,\beta > 0 \ ,$$

$$\int_0^{+\infty} f(u/x)g(x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(s)u^{-s}\,ds \ \ , \ \ u > 0 \ ,$$

e concludiamo con una generalizzazione della formula di Parseval:

$$\begin{aligned} M[f(x)g(x);z] &= \int_0^{+\infty} f(x)g(x)x^{z-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(z-s)\,ds \ \ , \ \ z \in \mathbb{C} \ ; \end{aligned}$$

da cui, ponendo $z = 1$, si ha di nuovo la (1.6).

Supponiamo adesso $f \equiv g$, a valori reali e poniamo $\begin{cases} z = 2c \\ \sigma = c \end{cases}$. Allora l'ultima equazione diventa

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f^2(x)x^{2\sigma-1}\,dx &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(2\sigma-s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(c+it)F(c-it)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(c+it)|^2\,dt \ , \end{aligned}$$

avendo posto $s = c + it$ nella seconda uguaglianza e, nella terza, avendo sfruttato il fatto che $F(\bar{s}) = \overline{F(s)}$ (si tratta di un facile conto).

1.1.6 Una formula di Ramanujan

Esiste una formula dovuta al matematico indiano S. Ramanujan che esprime la trasformata di Mellin di una funzione del tipo $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\phi(n)x^n$, con ϕ funzione arbitraria.

Per la precisione, suddetta formula afferma che

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} \left\{ \phi(0) - x\phi(1) + x^2\phi(2) - ... \right\} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \phi(-s) . \tag{1.7}$$

Ora, osserviamo che, per poter essere scritta così com'è, f è supposta analitica ed è quindi rappresentata nel suo sviluppo in serie di potenze (attorno a 0), che avrà raggio di convergenza R, ove $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\phi(n)|}$ (Criterio di Cauchy-Hadamard).

All'interno del disco di convergenza D la serie di potenze converge assolutamente e su ogni compatto $K \subset D$ strettamente contenuto nel disco di convergenza, la serie di potenze converge uniformemente. Allora, per il Teorema dello scambio dei limiti (cf. TEOREMA 1.5.14 pag. 28 di [DM]), essendo ovviamente $0 \in D$ (anche se sarebbe bastato $0 \in \overline{D}$) siamo autorizzati a passare al limite per $x \to 0$ sotto il segno di serie, i.e. si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) =& \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \phi(n) x^n \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to 0} (-1)^n \phi(n) x^n \\ =& \phi(0) \ , \end{aligned}$$

da cui si evince che $f = O(1)$ per $x \to 0$ e quindi $f = O(\frac{1}{x^\epsilon})$ (sempre per $x \to 0$); supponendo poi che sia $f = O(\frac{1}{x^{a+\epsilon}})$ per $x \to +\infty$ $(a > 0)$, allora è chiaro che la striscia di analiticità per f risulta essere $0 < \sigma < a$.

Se $\phi(s)$ è una funzione olomorfa di variabile complessa s t.c $-\alpha \leq \arg s \leq \alpha$ ove $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ e t.c. soddisfi la stima $|\phi(s)| < Ae^{\beta|s|}$, per qualche costante $A \in \mathbb{R}$ e $\beta < \pi$, allora (1.7) è verificata.

Verifichiamo la (1.7) con un semplice esempio. Consideriamo $\phi(s) = 1/\Gamma(s+1)$. Per prima cosa si osserva che, almeno per $\sigma > 0$, $\Gamma(s)$ non si annulla mai e quindi $\phi(s)$ è ivi definita. Poi vediamo che $\phi(s)$ rispetta le ipotesi di validità di (1.7): la condizione di olomorfia è verificata $\forall \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, anche se a noi, dovendo dapprima considerare ϕ sui reali positivi, basta $\sigma \geq 0$. Successivamente, il valore $\phi(-s)$ che compare in (1.7) sarà dunque univocamente determinato, permettendo di prolungare $\phi(s)$ (in questo caso $1/\Gamma(s+1)$).

Infine la stima è rispettata se e solo se esistono una costante $A \in \mathbb{R}$ e $\beta < \pi$ tali che

$$\frac{1}{|\Gamma(s+1)|} < Ae^{\beta|s|} \iff |\Gamma(s+1)| \, Ae^{\beta|s|} > 1 \ .$$

Ricordiamo la *formula di Stirling*

$$\Gamma(s) = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \frac{s^s}{e^s} \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \quad \text{per} \quad |s| \to +\infty \ , \tag{1.8}$$

uniformemente in $|\arg s| \leq \pi - \epsilon$. Si ha quindi che

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(s+1)|e^{\beta|s|} =& \frac{\sqrt{2\pi}}{|\sqrt{s+1}|} \frac{|s+1||(s+1)^s|}{e|e^s|}|a(s+1)|e^{\beta|s|} \\
=& \frac{\sqrt{2\pi}}{e} \frac{|s+1||(|s+1|e^{i\theta})^{\sigma+it}|}{\sqrt{|s+1|}e^{\sigma}}|a(s+1)|e^{\beta|s|} \\
=& \frac{\sqrt{2\pi}}{e} \frac{\sqrt{|s+1|}|s+1|^{\sigma}e^{-\theta t}}{e^{\sigma}}|a(s+1)|e^{\beta|s|} \\
=& \frac{\sqrt{2\pi}}{e} \left(((\sigma+1)^2+t^2)^{\frac{2\sigma+1}{4}}\right) \frac{e^{\beta\sqrt{\sigma^2+t^2}}}{e^{\sigma+\theta t}}|a(s+1)| \ ,
\end{aligned}
$$

ove nel secondo passaggio si è usato il fatto che $|\sqrt{s}| = \sqrt{|s|}\ \ \forall s \in \mathbb{C}$ e nel resto si è chiaramente posto $\theta = \arg(s+1)$; inoltre la (1.8) assicura l'esistenza, per $|s|$ sufficientemente grande, di una funzione $a(s)$ che tenda a $1_{\mathbb{C}}$ per $|s| \longrightarrow +\infty$ e $|\theta| < \pi$; noi, considerando $\sigma \geq 0$, avremo $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.
Scegliamo a questo punto $\beta > \max\{1, \theta\}$ (cosa lecita, essendo $\beta < \pi$ l'unica restrizione su β).
Il conto appena svolto, mostra che $|\Gamma(s+1)|e^{\beta|s|} \longrightarrow +\infty$ per $s \to \infty_{\mathbb{C}}$, $|\theta| < \pi$ e quindi a maggior ragione per $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Esiste quindi $M > 0$ tale che $\inf_{|s|>M} |\Gamma(s+1)|e^{\beta|s|} = \delta_1 > 0$. Consideriamo poi il compatto $K = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \ |z| \leq M,\ |\arg z| \leq \pi/2\}$.
Ora, $|\Gamma(s+1)|e^{\beta|s|}$ è continua per $\sigma \geq 0$ (essendolo $\Gamma(s)$ per $\sigma > 0$) e quindi anche su K. Quindi il teorema di Weierstrass assicura che $\exists \min_K |\Gamma(s+1)|e^{\beta|s|} = \delta_2$.
Essendo poi $\Gamma(s) \neq 0$ per $\sigma > 0$, a maggior ragione sarà $\Gamma(s+1) \neq 0$ per $\sigma \geq 0$, quindi $|\Gamma(s+1)|e^{\beta|s|} > 0$ su K.
A questo punto risulta chiaro che $\delta_2 > 0$.

Sarà quindi $\inf_{\sigma>0} |\Gamma(s+1)|e^{\beta|s|} = \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ e ponendo $A = \frac{1}{\delta} + 1$, si conclude.

Ora, per $s = n \in \mathbb{N}$, si ha che $\phi(n) = 1/n!$, da cui subito si vede che $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\phi(n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n/n! = e^{-x}$.
Ma allora

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^{s-1} \left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\phi(n)x^n\right\} dx =& \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx \\
=& M[e^{-x}; s] \\
=& \Gamma(s) \ ,
\end{aligned}
$$

da cui, una volta nota la *Formula dei complementi* per la Γ

$$
\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \ \ ,\ \ s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \ , \tag{1.9}
$$

si ricava la (1.7).

1.2 Proprietà Analitiche della trasformata di Mellin

Ci proponiamo ora di discutere le proprietà analitiche della trasformata di Mellin $F(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx$ (con f come in (1.2)) come funzione di variabile complessa.

1.2.1 Comportamento asintotico di $F(s)$ per $t \to \pm\infty$

L'integrale che definisce $F(s)$, come già detto, è assolutamente convergente nella striscia di analiticità $S_{a,b}$ e definisce quindi una funzione olomorfa in tale regione.

Il comportamento della trasformata per $t \to \pm\infty$ è descritto dal seguente

Lemma 1.2.1.

$$F(\sigma + it) \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad t \to \pm\infty \tag{1.10}$$

uniformemente per $\sigma \in]a, b[$.

Dimostrazione. Limitiamoci a mostrare la validità del teorema per $t \to +\infty$.

Operando il cambio di variabile $\log x = y$ si ha

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\sigma-1} f(x) e^{i(t \log x)}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\sigma y} f(e^y)) e^{i(ty)}\, dy \ , \end{aligned}$$

Sia ora $h(y) := e^{\sigma y} f(e^y)$. Essendo f definita come in (1.2), si ha che $h \in L^1(\mathbb{R})$. Pongo poi $p(\xi) := e^{i\xi}$, $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ e osserviamo che si tratta di una funzione periodica di periodo $\tau = 2\pi$, limitata e localmente sommabile. È immediato osservare che la media di p sul suo periodo è nulla, essendo $\mu = \frac{1}{\tau} \int_{(\tau)} p(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} [e^{i\xi}]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i}(1 - 1) = 0$.

Ora, il lemma di Riemann-Lebesgue assicura che (cf. Lemma 13.1.1 pag. 615 di [DM]) $\lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(y) p(ty)\, dy = \mu \int_{\mathbb{R}} h(y)\, dy$ ed essendo $\mu = 0$ si conclude. □

Imponendo ulteriori condizioni sul comportamento di f, possiamo essere più precisi circa il comportamento di $F(s)$ per $t \to \pm\infty$:

Lemma 1.2.2. Sia $f(w)$ funzione di variabile complessa, olomorfa nel settore $\Omega_{\alpha,\beta} := \{z \in \mathbb{C} : \ -\alpha < \arg z < \beta\}$, con $\alpha, \beta \in]0, \pi]$, tale che

$$f(w) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{|w|^{a+\epsilon}}\right) & \text{per } w \longrightarrow 0_{\mathbb{C}} \\ O\left(\frac{1}{|w|^{b-\epsilon}}\right) & \text{per } w \longrightarrow \infty_{\mathbb{C}} \end{cases} \ , \ a < b, \tag{1.11}$$

uniformemente in ogni settore contenuto in $\Omega_{\alpha,\beta}$.

Allora $F(s)$ è una funzione olomorfa in $S_{a,b}$ e vale la stima

$$F(s) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{e^{(\beta-\epsilon)t}}\right) \text{ per } t \longrightarrow +\infty \\ O\left(\frac{1}{e^{(-\alpha+\epsilon)t}}\right) \text{ per } t \longrightarrow -\infty \end{cases} , \tag{1.12}$$

uniformemente in ogni striscia contenuta in $S_{a,b}$, per ogni $\epsilon > 0$, sufficientemente piccolo.

Dimostrazione. Si veda [T2], pag. 47. □

Osserviamo che, a differenza di quanto fatto finora, stiamo adesso considerando f di variabile complessa. Il fatto che venga integrata su $\mathbb{R}_{\geq 0}$, può far apparire poco chiaro il legame del decadimento di $F(s)$ col dominio di olomorfia di $f(w)$.
Questo fatto trova una spiegazione in quanto segue.
Se anzichè integrare su $\mathbb{R}_{\geq 0}$, il cammino d'integrazione venisse sostituito dal sostegno di una funzione $\gamma : [0, +\infty[\longrightarrow \Omega_{\alpha,\beta}$ (che considereremo continua, iniettiva e $\mathcal{C}^1$ a tratti), tale che $\gamma(0) = 0_{\mathbb{C}}$ e $\lim_{\lambda \to +\infty} \gamma(\lambda) = \infty_{\Omega_{\alpha,\beta}}$, l'integrale continuerebbe ad aver senso.

La cosa interessante è che tale integrale risulta essere invariante rispetto a cammini di questo tipo. Vediamolo.

Osserviamo dapprima che $w \mapsto w^{s-1}f(w)$ è analitica in $\Omega_{\alpha,\beta}$, quindi il teorema dei Residui assicura che

$$\oint w^{s-1} f(w)\, dw = 0$$

per ogni circuito contenuto nel settore.

Adesso, consideriamo due punti del cammino descritto da γ, i.e. $z_1, z_2 \in \gamma([0, +\infty[)$; diciamo $|z_1| = r$, $|z_2| = R$ (senza perdita di generalità possiamo supporre $0 < r < R$).

Ora, è chiaro che $r \to 0^+ \iff z_1 \to 0_{\mathbb{C}}$; analogamente $R \to +\infty \iff z_2 \to \infty_{\Omega_{\alpha,\beta}}$.

Chiamiamo adesso γ_{z_1,z_2} il tratto di cammino che γ descrive andando da z_1 a z_2.

Poi chiamiamo τ_1 l'arco di circonferenza centrato in $0_{\mathbb{C}}$, di raggio r congiungente i punti z_1 ed r (in senso orario se $\Im(z_1) > 0$, antiorario altrimenti).
Analogamente vogliamo denotare con τ_2 l'arco di circonferenza centrata in $0_{\mathbb{C}}$, di raggio R, congiungente i punti R e z_2 (in senso antiorario se $\Im(z_2) > 0$, orario altrimenti).
Sia infine ρ il segmento di $\mathbb{R}$ che unisce r a R, i.e. $[r, R]$.

Adesso, l'unione dei quattro pezzi appena definiti (ma con $-\gamma_{z_1,z_2}$ in luogo di γ_{z_1,z_2}), forma un circuito contenuto in $\Omega_{\alpha,\beta}$ che chiamiamo $\widetilde{\gamma}$. Per quanto detto sopra, si ha quindi $\int_{\widetilde{\gamma}} g(w)\, dw = 0$ (abbiamo posto $g(w) = w^{s-1}f(w)$), cioè:

$$\int_{\gamma_{z1,z2}} g(w)\, dw = \int_{\tau_1} g(w)\, dw + \int_{\rho} g(w)\, dw + \int_{\tau_2} g(w)\, dw \ .$$

Ora, osservo che $g(w)$ è olomorfa su τ_1, quindi $\exists \sup_{\tau_1} |g| = \|g\|_{\tau_1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\forall r > 0$ fissato. Inoltre, osservando che per $r \to 0^+$ l'arco τ_1 si riduce al punto $0_{\mathbb{C}}$ (e quindi la sua lunghezza tende a 0), è chiaro che $\lim_{r\to 0^+} \|g\|_{\tau_1} = \lim_{w\to 0_{\mathbb{C}}} g(w) = 0$.

Si ha quindi $\left|\int_{\tau_1} g(w)\,dw\right| \leq \|g\|_{\tau_1} V(\tau_1) \xrightarrow{r\to 0^+} 0$, avendo denominato $V(\tau_1)$ la lunghezza di τ_1 (prodotto di quantità infinitesime per $r \to 0^+$). Quindi questo integrale è infinitesimo per $r \longrightarrow 0^+$.

Vediamo adesso che anche il contributo dato dall'integrale su τ_2 è infinitesimo, per $R \longrightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\tau_2} w^{s-1} f(w)\,dw\right| \leq & \int_{\tau_2} |w|^{\sigma-1} |f(w)||dw| \\ \leq & R^{\sigma-1} \int_{\tau_2} K \frac{1}{|w|^{b-\epsilon}} |dw| \\ = & R^{\sigma-1} K \frac{1}{R^{b-\epsilon}} \int_{\tau_2} |dw| \\ = & K \frac{1}{R^{b-\epsilon-\sigma+1}} \vartheta R \\ = & K\vartheta \frac{1}{R^{b-\epsilon-\sigma}} \xrightarrow{R\to+\infty} 0 \ ,\end{aligned}$$

ove $\vartheta \in [0, \max\{\alpha, \beta\}[$. Adesso, passando al limite per $r \to 0^+$ e $R \to +\infty$ nell'equazione $\int_{\tilde{\gamma}} g(w)\,dw = 0$, si ottiene

$$\int_{\gamma} w^{s-1} f(w)\,dw = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\,dx$$

per ogni cammino γ come sopra. Questo era esattamente ciò che si voleva mostrare.

Quando si calcola la trasformata di Mellin di una funzione di variabile complessa che goda delle proprietà descritte nel lemma, tale trasformata prende il nome di *trasformata di Mellin complessa.*

Vediamo quindi un'applicazione di quest'ultimo lemma a due funzioni: e^{-w} e $(1+w)^{-1}$. Sono semplici esempi di decadimento rispettivamente esponenziale e polinomiale per $\Re(w) \to +\infty$.

Come già visto, $M[e^{-w}; s] = \Gamma(s)$, $\sigma > 0$, quindi la striscia di analiticità è $S_{0,+\infty}$. Con questi valori di a e b, si calcolano facilmente α e β in modo che e^{-w} rispetti la (1.11): $\alpha = \beta = \pi/2$.

Per quanto riguarda l'altra funzione, in seguito si vedrà che dato $z \in \mathbb{C}$, si ha che

$$M[(1+w)^{-z}; s] = \frac{\Gamma(s)\Gamma(z-s)}{\Gamma(z)}$$

con $0 < \sigma < \Re(z)$. Quindi, sfruttando la (1.9), $z = 1$ porge

$$M[(1+w)^{-1}; s] = \frac{\pi}{\sin \pi s} \ , \ 0 < \sigma < 1 \ ,$$

quindi la striscia di analiticità adesso risulta essere $S_{0,1}$. A questo punto si osserva che la funzione $(1+w)^{-1}$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ e ivi rispetta la (1.11); quindi il settore sarà $\Omega_{-\pi,\pi}$, i.e. $\alpha = \beta = \pi$.

L'ultimo lemma assicura allora che il decadimento delle trasformate di Mellin delle due funzioni considerate è controllato da $O(e^{-\frac{\pi}{2}|t|})$ e $O(e^{-\pi|t|})$ rispettivamente.

Verifichiamo quindi a titolo d'esempio che $\Gamma(s) = O(e^{-(\beta-\epsilon)t})$ per $t \to +\infty$. Per effettuare questa verifica ci avvaliamo di una variante della formula di Stirling per la funzione Γ: la *formula di Stirling sulle strisce verticali*, la quale asserisce che comunque fissati $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, allora nella striscia $S_{a,b}$, uniformemente in σ, sussiste la seguente stima:

$$|\Gamma(\sigma+it)| = \sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \ , \ |t| \to +\infty \ . \tag{1.13}$$

Vediamo una dimostrazione.
Una formulazione leggermente più generale della (1.8) è la seguente: per ogni $z \in \mathbb{C}$ fissato, si ha

$$\log\Gamma(s+z) = \left(s + z - \frac{1}{2}\right)\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \ , \ |s| \to +\infty \ ,$$

uniformemente in $|\arg s| \leq \pi - \epsilon$.
Ponendo $z = 0$, si ottiene quindi

$$\log\Gamma(\sigma+it) = \left(\sigma - \frac{1}{2} + it\right)\log(\sigma+it) - (\sigma+it) + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \ .$$

Osserviamo che l'ultimo termine è cambiato da $O\left(\frac{1}{|s|}\right)$ a $O\left(\frac{1}{|t|}\right)$, in quanto nella striscia $S_{a,b}$, un numero quello complesso cresce in modulo indefinitamente se e solo se la sua parte immaginaria fa altrettanto. Ora, per definizione di logaritmo complesso si ha che

$$\begin{aligned}\log|\Gamma(\sigma+it)| =& \Re\left(\log\Gamma(\sigma+it)\right)\\ =& \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log|\sigma+it| - t\arg(\sigma+it) - \sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \ .\end{aligned}$$

Ora però

$$\begin{aligned}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log|\sigma+it| =& \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\left[\log t^2 + \log\left(1 + \frac{\sigma^2}{t^2}\right)\right]\\ =& \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log|t| + O\left(\frac{1}{|t|^2}\right) \ .\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è valido in quanto $\frac{\log\left(1+\frac{\sigma^2}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^2}}$ è una quantità chiaramente limitata per $t \to \pm\infty$ (si ricordi il limite notevole $\lim_{\xi\to 0^+} \frac{\log(1+\xi)}{\xi} = 1$). Inoltre, per definizione di argomento principale, per $t \neq 0$ vale

$$\arg(s) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t - \arctan\left(\frac{\sigma}{t}\right) .$$

Quindi si ha che

$$\begin{aligned} -t\arg(\sigma+it) &= -\, t\left(\pm\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sigma}{t}\right) \\ &= \mp\,\frac{\pi}{2}|t| + \sigma + O\left(\frac{1}{|t|^2}\right) , \end{aligned}$$

per $t \to \pm\infty$ (infatti $\arctan\frac{\sigma}{t} = \frac{\sigma}{t} + O(1/|t|^2)$), e quindi

$$-t\arg(\sigma+it) = -\frac{\pi}{2}|t| + \sigma + \left(\frac{1}{|t|^2}\right) .$$

Mettendo tutto assieme, si ha che

$$\log|\Gamma(\sigma+it)| = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log|t| - \frac{\pi}{2}\log|t| + \sigma - \sigma + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{|t|}\right) ;$$

prendendo l'esponenziale di quest'ultima si conclude.

Sfruttando questa formula si riesce facilmente a dimostrare che $\Gamma(s) = O(e^{-(\beta-\epsilon)t})$ per $t \to +\infty$. Ciò equivale a dimostrare che $|\Gamma(\sigma+it)|e^{(\beta-\epsilon)t}$ è limitata per $t \to +\infty$. Vediamolo.

$$\begin{aligned} |\Gamma(\sigma+it)|e^{(\beta-\epsilon)t} =& \sqrt{2\pi}t^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t}a(t)e^{(\beta-\epsilon)t} \\ =& \sqrt{2\pi}t^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-t\epsilon}a(t) \\ =& \sqrt{2\pi}a(t)\frac{t^{\sigma-\frac{1}{2}}}{e^{t\epsilon}} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \;, \forall\epsilon > 0 \;, \end{aligned}$$

ove $a(t)$ è una funzione che tende a 1 per $t \to +\infty$, la cui esistenza è garantita dalla (1.13). Come volevasi dimostrare.

L'esempio della funzione $(1+w)^{-1}$ suggerisce un fatto valido in generale: per una funzione $f(w)$ che abbia andamento polinomiale per $|w| \longrightarrow +\infty$, la velocità di decadimento della sua trasformata di Mellin nella striscia di analiticità, dipende dalla struttura delle singolarità di f in $\mathbb{C}$.
Nel caso della funzione $(1+w)^{-1}$, c'è una sola singolarità in $w_0 = -1$, motivo per cui (come si è visto poc'anzi) $\alpha = \beta = \pi$, che implica massima velocità di decadimento, essendo $M[(1+w)^{-1}; s] = O(e^{-\pi|t|})$ per $t \to \pm\infty$.

Vediamo ora un esempio che metta ulteriormente in evidenza come la velocità di decadimento della trasformata di Mellin di una funzione f con andamento polinomiale all'infinito, dipenda dalle singolarità di f.

Sia quindi

$$f(w) = \frac{1}{1 + 2w\cos\psi + w^2} = \frac{1}{(w + e^{i\psi})(w + e^{-i\psi})} \quad , \quad \psi \in [0, \pi] \quad ;$$

f è meromorfa su $\mathbb{C}$ e le sue singolarità sono date da $w_\pm = -e^{\pm i\psi}$. Osservando che $-e^{i\psi} = e^{i(\pi-\psi)}$ (da cui subito $-e^{-i\psi} = e^{-i(\pi-\psi)}$), si deduce immediatamente che $\alpha = \beta = \pi - \psi$ e quindi per quanto finora detto, la trasformata $F(s)$ è controllata da $O(e^{-(\pi-\psi)|t|})$ per $t \longrightarrow \pm\infty$. Ora, più ψ si avvicina a 0, più velocemente decade $F(s)$. Arrivando a $\psi = 0$, valore per cui $f(w) = 1/(1 + w)^2$, ($w = -1$ è polo di ordine 2) la velocità di decadimento è massima. Viceversa, facendo scorrere ψ verso π, i due poli di f si sposteranno lungo la circonferenza unitaria avvicinandosi a 1 e diminuendo sempre più la velocità di decadimento di $F(s)$ per $t \longrightarrow \pm\infty$, fino a raggiungere $\psi = \pi$, valore per cui $F(s)$ non necessariamente è infinitesima, ma tutt'al più rimane limitata. Notiamo poi che in $\Omega_{-(\pi-\psi),(\pi-\psi)}$, $f(w) = O(\frac{1}{|w|^{2-\epsilon}})$ per $w \longrightarrow \infty_{\mathbb{C}}$; essendo poi continua attorno a 0, $f(w) = O(\frac{1}{|w|^{\epsilon}})$ per $w \longrightarrow 0_{\mathbb{C}}$, quindi la striscia di analiticità della trasformata di $f(w)$ è $S_{0,2}$.

Calcoliamo quindi la trasformata di Mellin di f.
Osserviamo però preliminarmente che se $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm1\}$, allora

$$\frac{1}{(w + \xi)\,(w + \frac{1}{\xi})} = \frac{-\frac{1}{\xi - \frac{1}{\xi}}}{w + \xi} + \frac{\frac{1}{\xi - \frac{1}{\xi}}}{w + \frac{1}{\xi}}$$

e, inoltre

$$\frac{1}{(w + \xi)} = \frac{1}{\xi}\frac{1}{(1 + \frac{w}{\xi})} \quad , \quad \frac{1}{(w + \frac{1}{\xi})} = \frac{\xi}{(1 + \xi w)} \quad .$$

Supponendo ora che $\xi \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{1\})$, calcoliamo la trasformata di Mellin di $\frac{1}{(w+\xi)(w+\frac{1}{\xi})}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_\xi(s) &= -\frac{\xi}{\xi^2 - 1}\int_0^{+\infty} x^{s-1}\frac{1}{(x + \xi)}\,dx \;+\; \frac{\xi}{\xi^2 - 1}\int_0^{+\infty} x^{s-1}\frac{1}{(x + \frac{1}{\xi})}\,dx \\
&= -\frac{1}{\xi^2 - 1}\int_0^{+\infty} x^{s-1}\frac{1}{(1 + \frac{x}{\xi})}\,dx \;+\; \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1}\int_0^{+\infty} x^{s-1}\frac{1}{(1 + \xi x)}\,dx \,.
\end{aligned}$$

Effettuiamo il cambio di variabile $\frac{x}{\xi} = w$ nel primo integrale. Otteniamo quindi

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\frac{1}{(1 + \frac{x}{\xi})}\,dx = \xi^s \int_{\gamma_1} w^{s-1}\frac{1}{(1 + w)}\,dw \quad ,$$

ove γ_1 rappresenta la semiretta uscente da $0_{\mathbb{C}}$ passante per $e^{i \arg \frac{1}{\xi}}$. Essendo $\arg \frac{1}{\xi} \neq \pi$, posso ripetere ragionamenti già fatti in precedenza per concludere che

$$\begin{aligned} \xi^s \int_{\gamma_1} w^{s-1} \frac{1}{(1+w)}\, dw =& \xi^s \int_0^{+\infty} x^{s-1} \frac{1}{(1+x)}\, dx \\ =& \xi^s \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad . \end{aligned}$$

Similmente si deduce che

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{s-1} \frac{1}{(1+\xi x)}\, dx =& \frac{1}{\xi^s} \int_0^{+\infty} x^{s-1} \frac{1}{(1+x)}\, dx \\ =& \frac{1}{\xi^s} \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad . \end{aligned}$$

Si conclude che

$$\tilde{F}_\xi(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \left\{ -\frac{1}{\xi^2 - 1} \xi^s + \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} \frac{1}{\xi^s} \right\} \quad .$$

Per trovare la trasformata di f, basterà porre $\xi = e^{i\psi}$ e si avrà $\tilde{F}_{e^{i\psi}} \equiv F$. Avendo supposto in particolare $\xi \neq \pm 1$, dovrà essere $\psi \neq 0, \pi$. Per ottenere la trasformata per tali valori di ψ, basterà semplicemente passare al limite.

Calcoliamo quindi $-\frac{1}{\xi^2-1}\xi^s + \frac{\xi^2}{\xi^2-1}\frac{1}{\xi^s}$ avendo posto $\xi = e^{i\psi}$:

$$\frac{e^{i2\psi}}{e^{i2\psi} - 1} \frac{1}{e^{i\psi s}} - \frac{1}{e^{i2\psi} - 1} e^{i\psi s} = \frac{e^{i\psi(2-s)} - e^{i\psi s}}{e^{i2\psi} - 1}.$$

Un rapido conto porta a $e^{i2\psi} - 1 = 2i \sin \psi e^{i\psi}$, da cui il termine più a destra nell'equazione precedente è uguale a

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{e^{i(\psi(1-s))} - e^{-i(\psi(1-s))}}{2i} = \frac{\sin(\psi(1-s))}{\sin \psi}.$$

Pertanto la trasformata di Mellin di $f(w) = \frac{1}{1 + 2w \cos \psi + w^2}$ è

$$\begin{aligned} F(s) =& M \left[\frac{1}{1 + 2x \cos \psi + x^2}; s \right] \\ =& \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left(\frac{1}{1 + 2x \cos \psi + x^2} \right) dx \\ =& \frac{\pi}{\sin \pi s} \frac{\sin(\psi(1-s))}{\sin \psi} \quad , \quad 0 < \sigma < 2 \, . \end{aligned}$$

1.2.2 Prolungamento analitico di $F(s)$ fuori da $S_{a,b}$

Ci occupiamo adesso di discutere il comportamento del prolungamento analitico di F al di fuori della sua striscia di analiticità $S_{a,b}$. Vedremo che il prolungamento analitico di F nei semipiani $\sigma \leq a$ e $\sigma \geq b$, dipende strettamente dall'andamento di $f(x)$ per $x \longrightarrow 0^+$ e $x \longrightarrow +\infty$.

Per fissare le idee, pur senza perdere eccessivamente in generalità, possiamo inizialmente supporre che $f(x)$ (funzione di variabile reale) abbia il seguente comportamento asintotico:

$$f(x) \sim \begin{cases} e^{\left(-d_1 x^{-\mu_1}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^{a_k} & x \to 0^+ \\ e^{\left(-d_2 x^{\mu_2}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k x^{-b_k} & x \to +\infty \end{cases} \tag{1.14}$$

ove $\mu_1, \mu_2 > 0$ e $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ sono successioni complesse tali che $(\Re(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$, $(\Re(b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ tendano a $+\infty$ con monotonia.
Inoltre $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$; in particolare $\Re(d_1), \Re(d_2) \geq 0$, altrimenti si vede facilmente che $f(x) \to \infty_{\mathbb{C}}$ per $x \to 0^+$ o $x \to +\infty$, quindi potrebbe non aver senso definire la trasformata di Mellin di f.

Osservando la stima di $f(x)$ per $x \to 0^+$, distinguiamo quindi tre casi per poter prolungare $F(s)$ nel semipiano $\sigma \leq a$:

• $\Re(d_1) > 0$;
Avendo $f(x)$ un decadimento esponenziale per $x \to 0^+$, facendo riferimento a (1.2), si ha $a = -\infty$, per cui in questo caso $F(s)$ è definita in tutto il semipiano $\sigma < b$ e non c'è quindi nulla da prolungare.

• $d_1 = i\eta$ (cioè $\Re(d_1) = 0, \Im(d_1) \neq 0$);
In questo caso $f(x)$ è oscillante per $x \to 0^+$, essendo

$$f(x) \sim_{0^+} e^{-\frac{i\eta}{x^{\mu_1}}} \left(A_0 x^{a_0} + A_1 x^{a_1} + A_2 x^{a_2} + \cdots\right) \quad .$$

Da ciò immediatamente si ha

$$f(x) \sim_{0^+} e^{-\frac{i\eta}{x^{\mu_1}}} x^{a_0} \left(A_0 + A_1 x^{a_1 - a_0} + A_2 x^{a_2 - a_0} + \cdots\right) \quad ;$$

il che ci porta a

$$\begin{aligned} |x^{s-1} f(x)| &\sim_{0^+} x^{\sigma - 1 + \Re(a_0)} \left|A_0 + A_1 x^{a_1 - a_0} + A_2 x^{a_2 - a_0} + \cdots\right| \\ &\sim_{0^+} x^{\sigma - 1 + \Re(a_0)} \end{aligned}$$

dal momento che $(\Re(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente. Si capisce quindi che (senza perdita di generalità possiamo supporre che $A_0 \neq 0$) $a = -\Re(a_0)$.
Si dimostra che $F(s)$ può essere prolungata analiticamente nel semipiano $\sigma \leq a = -\Re(a_0)$ come una funzione olomorfa, che rispetta la seguente stima:

$$F(s) = O(|t|^{m_1(\sigma)}) \quad \text{per} \quad t \longrightarrow \pm\infty \ , \ \sigma \leq a$$

ove $m_1(\sigma) = -\frac{\sigma-a}{\mu_1} - \frac{1}{2}$.

• $d_1 = 0_{\mathbb{C}}$;
L'esponenziale è ora assente, motivo per cui $f(x)$ ha andamento polinomiale per $x \to 0^+$. Per lo stesso motivo di prima, anche qui $a = -\Re(a_0)$. Poniamo adesso

$$f_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^{a_k} \sim_{0^+} \sum_{k=n}^{+\infty} A_k x^{a_k} \quad .$$

Allora, per $s \in S_{a,b}$, si ha che

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^1 x^{s-1} f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx \\
&= \int_0^1 x^{s-1} f_n(x)\, dx + \int_0^1 x^{s-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^{a_k}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx \\
&= \int_0^1 x^{s-1} f_n(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \int_0^1 x^{s-1+a_k}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx \\
&= \int_0^1 x^{s-1} f_n(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{s+a_k} + \int_1^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx \quad .
\end{aligned}$$

Con conti del tutto analoghi ad altri già fatti, si vede che il primo integrale (nell'ultimo passaggio) converge assolutamente in 0^+ per $\sigma > -\Re(a_n)$. In maniera simile si vede che l'ultimo integrale converge assolutamente su tutto il semipiano $\sigma < b$.
Quindi abbiamo trovato un prolungamento di $F(s)$ alla striscia $-\Re(a_n) < \sigma < b$; ma questo vale $\forall n \in \mathbb{N}$ e ricordando che $(\Re(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente, si vede che $F(s)$ si prolunga analiticamente sul semipiano $\sigma < b$ come una funzione meromorfa con poli semplici (dati dalla sommatoria centrale) in $s = -a_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Da ultimo, osserviamo che nel semipiano $\sigma < b$, $F(s) \longrightarrow 0$ per $t \to \pm\infty$ (i.e. vale la (1.10)).

Per il prolungamento di $F(s)$ a $\sigma \geq b$, si studia il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to +\infty$: in maniera del tutto analoga anche qui si presentano tre casi:

• $\Re(d_2) > 0$: $b = +\infty$ e $F(s)$ è definita su tutto il semipiano $\sigma > a$.

• $d_2 = i\eta$: $f(x)$ è oscillante per $x \to +\infty$ ed $F(s)$ può essere prolungata al semipiano $\sigma \geq b = \Re(b_0)$ come una funzione olomorfa che ivi obbedisce alla stima di decadimento $F(s) = O(|t|^{m_2(\sigma)})$ per $t \to \pm\infty$ (qui $m_2(\sigma) = \frac{\sigma-b}{\mu_2} - \frac{1}{2}$).

• $d_2 = 0_{\mathbb{C}}$: $F(s)$ ammette prolungamento nel semipiano $\sigma \geq b$ come una funzione meromorfa con poli semplici in $s = b_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Anche qui sussiste la (1.10), su $\sigma > a$.

Quindi, la trasformata di Mellin di una funzione con andamento asintotico come in (1.14), ammette prolungamento su tutto $\mathbb{C}$, nel peggiore dei casi, come funzione meromorfa.

Si potrebbe discutere un caso più generale di quello appena trattato; cioè quello in cui si suppone che $f(x)$ abbia il seguente comportamento asintotico:

$$f(x) \sim \begin{cases} e^{\left(-d_1 x^{-\mu_1}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N_1(k)} A_{n,k} (\log x)^n x^{a_k} & x \to 0^+ \\ e^{\left(-d_2 x^{\mu_2}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N_2(k)} B_{n,k} (\log x)^n x^{-b_k} & x \to +\infty \end{cases}$$

dove, rispetto alle precisazioni fatte per la (1.14) in più c'è da aggiungere solamente che $N_1(k), N_2(k)$ sono positivi e finiti $\forall k \in \mathbb{N}$.

Una funzione con questo andamento asintotico, copre pressochè tutti i casi riscontrabili nelle applicazioni.

Vediamo solo che nel caso $d_1 = 0_{\mathbb{C}}$, quando sono presenti i termini logaritmici, l'ordine dei poli nel prolungamento meromorfo di $F(s)$ è determinato dalla maggiore potenza di $\log x$ presente.

Imitiamo quindi il ragionamento fatto nell'analogo caso per la $f(x)$ "semplificata":

$$f(x) \sim_{0+} \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N_1(k)} A_{n,k} (\log x)^n x^{a_k};$$

si pone quindi

$$f_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{n=0}^{N_1(k)} A_{n,k} (\log x)^n x^{a_k} \sim_{0+} \sum_{k=n}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N_1(k)} A_{n,k} (\log x)^n x^{a_k}.$$

Adesso, ragionando come sopra, se $s \in S_{a,b}$, la parte singolare di $F(s)$ è data ($\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) da

$$\begin{aligned} Q(s) &= \int_0^1 x^{s-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{n=0}^{N_1(k)} A_{n,k} (\log x)^n x^{a_k} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{n=0}^{N_1(k)} A_{n,k} \int_0^1 x^{s+a_k-1} (\log x)^n \, dx \,. \end{aligned}$$

Ricordando ora che $\sigma > -\Re(a_0)$ e che $(\Re(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, per induzione si vede subito che

$$\int_0^1 x^{s+a_k-1}(\log x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(s+a_k)^{n+1}}\ ,$$

da cui

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{n=0}^{N_1(k)} A_{n,k}\frac{(-1)^n n!}{(s+a_k)^{n+1}}\ ,$$

prova del fatto che, detto $n_1(k) = \max_{0\le n\le N_1(k)}\{n \mid A_{n,k} \neq 0\}$, allora a_k è polo di ordine $n_1(k)+1$.

Le proprietà del prolungamento analitico di $F(s)$ appena discusse, possono essere verificate con semplici esempi di funzioni che possiedono i tre andamenti appena trattati:
(i)$f(x) = e^{-x}$, decadimento esponenziale per $x \to +\infty$;
(ii)$f(x) = e^{ix}$, oscillazione esponenziale per $x \to +\infty$;
(iii)$f(x) = (1+x)^{-1}$, decadimento polinomiale per $x \to +\infty$.

Si è già visto che $M[e^{-x}; s] = \Gamma(s)$ per $\sigma > 0$; in effetti la (1.2) porge $a = 0$ e $b = +\infty$, quindi a destra non c'è nulla da prolungare.

Poi, $M[(1+x)^{-1}; s] = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ con $0 < \sigma < 1$. È evidente come la trasformata in questo caso sia prolungabile su tutto il piano complesso $\mathbb{C}$ come una funzione meromorfa con poli semplici negli interi e quindi, in particolare si prolunga su $\sigma \geq 1$ come una funzione meromorfa.

Calcoliamo ora $M[e^{ix}; s]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{ix}\,dx =& i\int_{0_{\mathbb{C}}}^{-i\infty}(iw)^{s-1}e^{-w}\,dw \\
=& i^s\int_{0_{\mathbb{C}}}^{-i\infty} w^{s-1}e^{-w}\,dw \\
=& e^{i\frac{\pi}{2}s}\int_{0_{\mathbb{C}}}^{-i\infty} w^{s-1}e^{-w}\,dw \\
=& e^{i\frac{\pi}{2}s}\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx \\
=& e^{i\frac{\pi}{2}s}\Gamma(s)\ .
\end{aligned}$$

Nel primo passaggio si è usato il cambio di variabile $ix = -w$ e nel resto si sono sfruttati ragionamenti già fatti.

Osserviamo ora che $|x^{s-1}e^{ix}| = x^{\sigma-1}$, quindi l'integrale è assolutamente convergente in 0^+ per $\sigma > 0$ mentre lo è a $+\infty$ per $\sigma < 0$. Quindi l'integrale non converge mai assolutamente. Questo però non vuol dire che non converga semplicemente (si veda $\frac{\sin x}{x}$: sommabile ma non assolutamente sommabile su $\mathbb{R}_{\geq 0}$). In questo caso $f(x)$ non rispetta la (1.2), quindi, ammesso che l'integrale converga e che si tratti di una funzione olomorfa, l'eventuale striscia di analiticità sarà da determinarsi in altro modo.

Osservo allora che l'integranda è $x^{s-1}e^{ix} = \frac{\cos(x+t\log x)}{x^{1-\sigma}} + i\frac{\sin(x+t\log x)}{x^{1-\sigma}}$; integrando per parti possiamo concludere che l'integrale converge a $+\infty$ per $1-\sigma > 0$, i.e. per $\sigma < 1$. Si vede poi che si ha convergenza in 0^+ per $-\sigma < 0$, i.e. per $\sigma > 0$.

Dunque l'integrale converge (semplicemente) per $0 < \sigma < 1$. Essendo poi

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{ix}\,dx = e^{i\frac{\pi}{2}s}\Gamma(s)\ ,$$

è chiaro che per $0 < \sigma < 1$, la trasformata di e^{ix} è una funzione analitica. Quindi possiamo dire che ha striscia di analiticità $S_{0,1}$. In realtà il termine a destra della precedente uguaglianza è analitico su $\sigma > 0$ e fornisce quindi un prolungamento analitico della trasformata a tutto tale semipiano.

Osserviamo poi che tutte e tre le funzioni sono definite in $x = 0$ e ivi valgono 1. Quindi hanno tutte e tre andamento polinomiale per $x \to 0^+$. Si vede infatti che le trasformate, essendo $\Gamma(s)$, $e^{i\frac{\pi}{2}s}\Gamma(s)$ e $\frac{\pi}{\sin \pi s}$, si possono prolungare analiticamente in $\sigma \leq 0$: infatti l'esponenziale è olomorfa intera, la Γ si prolunga a tutto $\mathbb{C}$ come una funzione meromorfa con poli negli interi negativi e, infine, come già osservato, $\frac{\pi}{\sin \pi s}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (in $\mathbb{Z}$ ha poli semplici).
Quindi tutte e tre le trasformate si prolungano analiticamente verificando quanto detto in principio.

In sintesi, se $f(x)$ ha andamento algebrico per $x \to 0^+$ (risp. $x \to +\infty$), allora nel prolungamento analitico di $F(s)$ su $\sigma \leq a$ (risp. $\sigma \geq b$) compariranno dei poli.

Se invece $f(x)$ ha andamento esponenziale (indifferentemente decadimento od oscillazione) per $x \to 0^+$ (risp. $x \to +\infty$), allora $F(s)$ si prolungherà su $\sigma \leq a$ (risp. $\sigma \geq b$) ad una funzione olomorfa.

In particolare, se $f(x)$ ha andamento esponenziale in entrambi i limiti, allora $F(s)$ si prolunga ad una funzione olomorfa intera.

1.3 Alcune trasformate di Mellin inverse

All'inizio di questo capitolo è stata data la formula di inversione della trasformata di Mellin. Ricordiamo che essa afferma che data $f \in \mathcal{R}_{loc}(]0, +\infty[)$ che ammetta trasformata di Mellin $F(s) = M[f(x); s]$ con relativa striscia di analiticità $S_{a,b}$, allora

$$f(x) = M^{-1}[F(s); x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{-s} F(s)\, ds \ , \ c \in S_{a,b} \, .$$

Nel seguito tratteremo alcune importanti trasformate di Mellin inverse.

1.3.1 Integrali connessi con e^{-w}

Si è già visto che considerando e^{-w} come funzione di variabile complessa, si ha $M[e^{-w}; s] = \Gamma(s)$ da cui la striscia di analiticità è $S_{0,+\infty}$ e quindi affinchè e^{-w} rispetti la (1.11) con $a = 0$ e $b = +\infty$, dovrà essere $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, i.e. $|\arg w| < \frac{\pi}{2}$. Detto ciò, la formula di inversione pone quindi

$$e^{-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \Gamma(s) w^{-s}\, ds \ , \ |\arg w| < \frac{\pi}{2} \ , \ c > 0 \ ,$$

ove il cammino di integrazione è un'arbitraria retta verticale $\Re(s) = c$ con $c > 0$ e quindi contenuta in $S_{0,+\infty}$. Questo integrale è noto come integrale di Cahen-Mellin. Una discussione circa la convergenza si può trovare in [PK], §2.4, nel quale si mostra anche che il modulo dell'integranda è controllato da $O(|w|^{-\sigma}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{t \arg w - \frac{\pi}{2}|t|})$ per $t \to \pm\infty$.
Modifichiamo ora il cammino d'integrazione ragionando come segue.

Consideriamo la parabola di equazione $c(t) = -t^2 + d$, ove $d > 0$ è costante. Preso $T > 0$, chiamiamo $\mathcal{C}_T$ il cammino formato dal segmento verticale $[c(T) - iT, c(T) + iT]$ e dal "pezzo" di parabola descritto dalla precedente equazione per $t \in [-T, T]$. Senza perdita di generalità, supporremo che $c(t)$ si mantenga sempre sufficientemente lontano dagli interi negativi (che sono i poli dell'integranda).
Resta da determinare i residui. L'integranda è $\Gamma(s) w^{-s}$: essendo w^{-s} chiaramente olomorfa (intera), gli unici poli sono quindi quelli di Γ. Sia $s = -k$ un polo dell'integranda. Essa è polo semplice per Γ, quindi sviluppando Γ in serie di Laurent attorno ad un suo polo $s = -k$ e moltiplicando successivamente per w^{-s}, si ha quindi che, in un opportuno intorno di $-k$, varrà

$$\Gamma(s) w^{-s} = \frac{[(-1)^k/k!] w^{-s}}{s+k} + w^{-s} \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (s+k)^j \ ,$$

da cui $(s+k)\Gamma(s) w^{-s} \overset{s \to -k}{\longrightarrow} \frac{(-w)^k}{k!}$.
A questo punto il teorema dei residui assicura che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_T} \Gamma(s) w^{-s}\, ds = \sum_{k=0}^{-[c(T)]+1} \frac{(-w)^k}{k!} \ .$$

Se mostriamo che il contributo verticale dell'integrale è infinitesimo per $T \to +\infty$, possiamo concludere che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \Gamma(s) w^{-s}\, ds = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-w)^k}{k!} = e^{-w} \ ,$$

avendo ovviamente denotato con $\mathcal{C}$ il grafico della parabola di cui sopra. In tal modo si trova quindi una rappresentazione di e^{-w} con un integrale identico al primo considerato, ma con un differente cammino d'integrazione. Tale rappresentazione per e^{-w}, ha il vantaggio di essere definita per ogni $w \in \mathbb{C}$, a differenza della precedente, valida solo per $|\arg w| < \frac{\pi}{2}$. Questo fatto emergerà con chiarezza dimostrando (grazie alla stima per l'integranda riportata poco fa) che l'integrale sul segmento verticale $[c(T)-iT, c(T)+iT]$ è infinitesimo per $T \to +\infty$ uniformemente in $w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{c(T)-iT}^{c(T)+iT} \Gamma(s) w^{-s}\, ds\right| &= \left|\int_{-T}^{T} \Gamma(c(T)+it) w^{-c(T)} w^{-it}\, dt\right| \\ &\leq |w|^{-c(T)} \int_{-T}^{T} |\Gamma(c(T)+it)|\, dt \\ &\leq K|w|^{-c(T)} \int_{-T}^{T} |t|^{c(T)-\frac{1}{2}} e^{t \arg w - \frac{\pi}{2}|t|}\, dt \ .\end{aligned}$$

Analizziamo ora l'integrale:

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} |t|^{c(T)-\frac{1}{2}} e^{t \arg w - \frac{\pi}{2}|t|}\, dt &= \int_0^T t^{c(T)-\frac{1}{2}} e^{t(\arg w - \frac{\pi}{2})}\, dt + \int_0^T t^{c(T)-\frac{1}{2}} e^{-t(\arg w + \frac{\pi}{2})}\, dt \\ &= (\bar{t}(T))^{c(T)-\frac{1}{2}} T \left(e^{\bar{t}(T)(\arg w - \frac{\pi}{2})} + e^{-\bar{t}(T)(\arg w + \frac{\pi}{2})}\right) \ ,\end{aligned}$$

ove il secondo passaggio è garantito dal teorema della media integrale; in particolare $\bar{t}(T)$ è una funzione positiva ed è $O(T)$. Concludiamo quindi che

$$\left|\int_{c(T)-iT}^{c(T)+iT} \Gamma(s) w^{-s}\, ds\right| \leq K|w|^{-c(T)} (\bar{t}(T))^{c(T)-\frac{1}{2}} T \left(e^{\bar{t}(T)(\arg w - \frac{\pi}{2})} + e^{-\bar{t}(T)(\arg w + \frac{\pi}{2})}\right) \xrightarrow{T \to +\infty} 0 \ .$$

Una generalizzazione di quest'ultimo risultato si ottiene facilmente dalla (b) delle (1.5): $M[w^{-z}e^{-w}; s] = \Gamma(s-z)$. Quindi la formula di inversione e ragionamenti appena svolti porgono

$$w^{-z} e^{-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \Gamma(s-z) w^{-s}\, ds \ ,$$

ove il cammino d'integrazione $\mathcal{C}$ è come sopra e $z \in \mathbb{C}$ tale che $s - z \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, al variare di $s \in \mathcal{C}$.

Un altro integrale che discende dall'integrale di Cahen-Mellin è il seguente:

$$w^{-z}\sin\left(w+\frac{\pi}{2}z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\Gamma(s-z)w^{-s}\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\,ds\ ,$$

ove $\mathcal{C}$ e $z\in\mathbb{C}$ sono come sopra.
Osserviamo anzitutto che $\sin(w+\frac{\pi}{2}z)=\frac{e^{i(w+\frac{\pi}{2}z)}-e^{-i(w+\frac{\pi}{2}z)}}{2i}$.
Poi, conti svolti in precedenza assicurano che

$$\begin{aligned}
M\left[w^{-z}\sin\left(w+\frac{\pi}{2}z\right);s\right]=&\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}x^{s-1}x^{-z}e^{i(x+\frac{\pi}{2}z)}\,dx-\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}x^{s-1}x^{-z}e^{-i(x+\frac{\pi}{2}z)}\,dx\\
=&\frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{2i}\int_0^{+\infty}x^{(s-z)-1}e^{ix}\,dx-\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}z}}{2i}\int_0^{+\infty}x^{(s-z)-1}e^{-ix}\,dx\\
=&\frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{2}(s-z)}\Gamma(s-z)\right)-\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}z}}{2i}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}(s-z)}\Gamma(s-z)\right)\\
=&\Gamma(s-z)\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}s}-e^{-i\frac{\pi}{2}s}}{2i}\right)\\
=&\Gamma(s-z)\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\ .
\end{aligned}$$

La formula di inversione e ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti durante la trattazione dell'integrale di Cahen-Mellin permettono di concludere.

1.3.2 Cenni alla funzione beta $B(p,q)$ e qualche integrale standard

La *funzione beta* è una funzione di due variabili complesse ed è definita da

$$B(p,q):=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\ ,\ p,q\in\mathbb{C}\ .$$

È immediato constatare che l'integrale converge assolutamente se e solo se $\Re(p),\Re(q)>0$.

La funzione beta è intimamente collegata alla funzione Γ tramite l'importantissima formula di addizione di Γ:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ ,\ \Re(p),\Re(q)>0\ .$$

Dimostriamo questa formula.

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q)&=\int_0^{+\infty}u^{p-1}e^{-u}\,du\int_0^{+\infty}v^{q-1}e^{-v}\,dv\\
&=\int_{[0,+\infty[^2}u^{p-1}v^{q-1}e^{-(u+v)}\,dudv
\end{aligned}$$

La convergenza assoluta dell'integrale che definisce la funzione Γ, permette lo scambio delle variabili d'integrazione grazie al teorema di Fubini (cfr.TEOREMA 9.24.2 pag.443 di [DM]).

Effettuiamo ora il cambio di variabile $\begin{cases} u = \xi \\ u + v = \eta \end{cases}$, da cui $\begin{cases} u = \xi \\ v = \eta - \xi \end{cases}$; consideriamo cioè il diffeomorfismo $\phi : [0, +\infty[^2 \longrightarrow [0, +\infty[^2$ definito da $\phi(\xi, \eta) = (\xi, \eta - \xi)$. Poi si ha che $J_{\phi(\xi,\eta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall (\xi, \eta) \in [0, +\infty[^2$, da cui $|\det(J_{\phi(\xi,\eta)})| \equiv 1$. Notiamo infine che $\phi^{\leftarrow}([0, +\infty[^2) = \{\xi \geq 0, \eta \geq \xi\}$; denotiamo tale insieme con T.

Alla luce di ciò, l'ultimo integrale è uguale a

$$\int_T \xi^{p-1}(\eta - \xi)^{q-1} e^{-\eta}\, 1\, d\xi\, d\eta = \int_0^{+\infty} e^{-\eta} \left(\int_0^{\eta} \xi^{p-1}(\eta - \xi)^{q-1}\, d\xi \right) d\eta\ .$$

Sfruttando il cambio di variabile $\xi = t\eta$ nell'integrale tra parentesi, si ha che l'ultimo integrale eguaglia

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\eta} \left(\eta \int_0^1 (t\eta)^{p-1}(\eta - t\eta)^{q-1}\, dt \right) d\eta &= \int_0^{+\infty} e^{-\eta} \left(\eta^{p+q-1} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt \right) d\eta \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\eta} \eta^{p+q-1} B(p,q)\, d\eta \\ &= B(p,q) \int_0^{+\infty} \eta^{p+q-1} e^{-\eta}\, d\eta \\ &= B(p,q)\Gamma(p+q)\ , \end{aligned}$$

che era quanto si voleva dimostrare. Si osserva peraltro che la formula di addizione per la funzione Γ implica la simmetria della funzione beta nei suoi argomenti.

Vediamo adesso come esprimere la funzione beta come una trasformata di Mellin. Usando il cambio di variabile $(1 - t) = (x + 1)^{-1}$, risulta

$$\begin{aligned} B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} x^{p-1}(1+x)^{-(p+q)}\, dx\ , \quad \Re(p), \Re(q) > 0\,. \end{aligned}$$

Ponendo adesso $\begin{cases} p = s \\ p + q = z \end{cases}$, si ha che $\int_0^{+\infty} x^{p-1}(1+x)^{-(p+q)}\, dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1}(1+x)^{-z}\, dx$ da cui

$$M[(1+x)^{-z}; s] = \frac{\Gamma(s)\Gamma(z-s)}{\Gamma(z)}\ ,$$

ove chiaramente sarà $0 < \Re(s) < \Re(z)$.

Sfruttando poi la formula di inversione, si ottiene subito

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\Gamma(s)\Gamma(z-s)x^{-s}\,ds=\frac{\Gamma(z)}{(1+x)^z}\ ,$$

dove $0<c<\Re(z)$.

È possibile anche considerare $x\longmapsto(1+x)^{-z}$ come funzione di variabile complessa $w\longmapsto(1+w)^{-z}$, ottenendo quindi una trasformata di Mellin complessa. Allora, la trasformata inversa è un integrale di Mellin-Barnes. Questi integrali sono del tipo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}g(s)w^s\,ds\ ,$$

ove $\mathcal{C}$ è un circuito, una retta verticale (eventualmente indentata per evitare i poli) o -in tutta generalità- un cammino in $\mathbb{C}$ che evita i poli e tende all'infinito in certe direzioni fissate, mentre $g(s)$ è una frazione il cui numeratore è prodotto di N funzioni Γ e il cui denominatore è prodotto di D funzioni Γ. Allora l'integrale di Mellin-Barnes converge nel settore $|\arg w|<\frac{\pi}{2}(N-D)$ (si veda [PK], §2.4).
Quindi l'integrale che definisce la trasformata inversa (nel caso in cui $x=w\in\mathbb{C}$) converge per $|\arg w|<\pi$.

In particolare, per $z=1$ si ottiene la formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{\pi}{\sin\pi s}w^{-s}\,ds=\frac{1}{1+w}\ ,$$

ove $0<c<1$ e $|\arg z|<\pi$.

1.3.3 Un importante integrale discontinuo

Consideriamo $f(x)=\begin{cases}1 & \text{per}\quad 0<x<1\\ 0 & \text{per}\quad x>1\end{cases}$, funzione non definita in 1, ove presenta una discontinuità di prima specie.
Un calcolo immediato fornisce la sua trasformata:

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(x)x^{s-1}\,dx=\int_0^1 x^{s-1}\,dx=\frac{1}{s}\ ,\ \Re(s)>0\ .$$

Ora, la formula di inversione porge chiaramente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}x^{-s}\frac{ds}{s}=\begin{cases}1 & \text{per}\quad x\in]0,1[\\ 0 & \text{per}\quad x>1\end{cases}\ .$$

Possiamo però prolungare questo integrale anche al valore $x_0=1$, infatti $F(s)=s^{-1}$ è assolutamente convergente sulla retta $\Re(s)=c$ e $f(x)$ ha variazione totale pari a

1, quindi limitata. Allora per la (1.4) si ha che

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to+\infty}\int_{c-iT}^{c+iT} 1^{-s}\frac{ds}{s} = \frac{1}{2}\left[\overbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+} f(1+\epsilon)}^{0} + \overbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+} f(1-\epsilon)}^{1}\right] = \frac{1}{2}\ ,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{-s}\frac{ds}{s} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x \in]0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{per} \quad x = 1 \\ 0 & \text{per} \quad x > 1 \end{cases} \quad , \quad c > 0\ .$$

Il cambio di parametro $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ mostra immediatamente che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s}\frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \in]0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{per} \quad x = 1 \\ 1 & \text{per} \quad x > 1 \end{cases} \quad , \quad c > 0\ . \tag{1.15}$$

Ricordiamo che $c > 0$.
Mostriamo anzitutto che se $0 < x < 1$, allora $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^s \frac{ds}{s} = 0$. Fisso $T > c$. Sia $\mathcal{C}_T$, il circuito formato dal segmento ρ_T che va da $c - iT$ a $c + iT$ e dall'arco di circonferenza γ_T centrata in c di raggio T, che da $c + iT$ torna a $c - iT$ in senso orario. Quindi $\mathcal{C}_T = \rho_T + \gamma_T$. Essendo l'integranda olomorfa all'interno della regione delimitata da $\mathcal{C}_T$, il teorema dei residui assicura che

$$\int_{\mathcal{C}_T} x^s \frac{ds}{s} = 0 \;\; \forall T > 0\ .$$

Il che equivale ad affermare che

$$\int_{\rho_T} x^s \frac{ds}{s} = \int_{-\gamma_T} x^s \frac{ds}{s} \;\; \forall T > 0\ .$$

Vediamo adesso che l'integrale a destra tende a 0 per $T \to +\infty$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\gamma_T} x^s \frac{ds}{s}\right| = & \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{c+Te^{i\theta}} \frac{Tie^{i\theta}}{c+Te^{i\theta}}\, d\theta\right| \\ \leq & Tx^c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|x^{Te^{i\theta}}\right| \frac{1}{\left|c+Te^{i\theta}\right|}\, d\theta \\ = & Tx^c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|x^{T\cos\theta}\right| \frac{1}{\left|c+Te^{i\theta}\right|}\, d\theta \\ \leq & \frac{T}{T-c} x^c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{T\cos\theta}\, d\theta\ .\end{aligned}$$

Il teorema della media integrale assicura però che $\exists\bar{\theta} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tale che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{T\cos\theta}\, d\theta = \pi x^{T\cos\bar{\theta}} \ ,$$

fatto che permette di concludere, essendo quest'ultimo termine infinitesimo per $T \longrightarrow +\infty$.

Vediamo adesso che se $x > 1$ allora $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^s \frac{ds}{s} = 1$. Fissiamo anche qui $T > c$. Sia ora $\mathcal{C}_T$ il circuito ottenuto dallo stesso segmento di prima ρ_T che va da $c - iT$ a $c + iT$ e dall'arco di circonferenza γ_T centrata in c di raggio T, che va da $c + iT$ a $c - iT$ in senso antiorario. Come prima $\mathcal{C}_T = \rho_T + \gamma_T$ e sempre come prima il teorema dei residui garantisce che

$$\int_{\mathcal{C}_T} x^s \frac{ds}{s} = 1 \ \ \forall T > 0 \ ,$$

essendo adesso la funzione meromorfa all'interno della regione delimitata da $\mathcal{C}_T$, con $s = 0$ come unico polo di residuo $Res(\frac{x^s}{s}, 0) = \lim_{s\to 0} s\frac{x^s}{s} = 1$. Quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho_T} x^s \frac{ds}{s} = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma_T} x^s \frac{ds}{s} \ .$$

È quindi sufficiente mostrare che l'integrale al secondo membro è infinitesimo per $T \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\gamma_T} x^s \frac{ds}{s}\right| &= \left|\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{c+te^{i\theta}} \frac{Tie^{i\theta}}{c + Te^{i\theta}}\, d\theta\right| \\ &= \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^{c+te^{i\theta}} \frac{Tie^{i\theta}}{c + Te^{i\theta}}\, d\theta\right| \\ &\leq x^c T \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^{T\cos\theta} \frac{1}{|c + Te^{i\theta}|}\, d\theta \\ &\leq x^c \frac{T}{T - c}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^{T\cos\theta}\, d\theta \ .\end{aligned}$$

Ragionando come sopra, il teorema della media integrale permette di concludere.

Resta da far vedere soltanto il caso $x = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{dt}{c+it} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{c+it} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c-it}{c^2+t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{c^2+t^2}\,dt - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{c^2+t^2}\,dt \,.
\end{aligned}$$

Osserviamo che il secondo integrale nell'ultimo passaggio è nullo essendo l'integranda $t \longmapsto \frac{t}{c^2+t^2}$ dispari. Inoltre, usando il cambio di variabile $\frac{t}{c} = u$, si calcola

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{c^2+t^2}\,dt &= \frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{c}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{2} \;,
\end{aligned}$$

che dimostra completamente la (1.15).

Possiamo però fare di meglio: sempre sfruttando il teorema dei residui, integrando su un diverso circuito è possibile (oltre a provare la (1.15)) fornire una stima per $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} x^s \frac{ds}{s}$. Se $0 < x < 1$, si integra sul rettangolo di vertici $c \pm iT$ e $M \pm iT$ ove $M > c > 0$ e $T > 0$. Detto $\mathcal{R}$ questo cammino percorso in senso orario, è chiaro che $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}} x^s \frac{ds}{s} = 0$, da cui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} x^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\left\{-\int_{c+iT}^{M+iT} + \int_{c-iT}^{c+iT} + \int_{M-iT}^{M+iT}\right\} x^s \frac{ds}{s} \,.$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{M-iT}^{M+iT} x^s \frac{ds}{s}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T} x^M x^{it} \frac{idt}{M+it}\right| \\
&\le \frac{x^M}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{dt}{\sqrt{M^2+t^2}} \\
&\le \frac{1}{2\pi}\frac{x^M}{M} 2T \;,
\end{aligned}$$

conto che fornisce una stima per il terzo integrale. Vediamo ora come stimare il primo:

$$\begin{aligned}\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{M+iT} x^s\frac{ds}{s}\right| =& \left|\frac{x^{iT}}{2\pi i}\int_c^M x^\sigma\frac{d\sigma}{\sigma+iT}\right|\\ \leq& \frac{1}{2\pi}\int_c^M\frac{x^\sigma}{\sqrt{\sigma^2+T^2}}\,d\sigma\\ <& \frac{1}{2\pi T}\int_c^M x^\sigma\,d\sigma\\ =& \frac{1}{2\pi T}\left(\left.\frac{x^\sigma}{\log x}\right|_c^M\right.\\ =& \frac{1}{2\pi T}\left(\frac{x^M-x^c}{\log x}\right)\ .\end{aligned}$$

Per il secondo integrale sussiste una stima del tutto identica a quella per il primo, quindi concludo che, per $0 < x < 1$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} x^s\frac{ds}{s}\right| < \frac{\left|x^M-x^c\right|}{\pi T|\log x|}+\frac{x^M T}{\pi M}\ ,$$

relazione valida $\forall M > c > 0$. Allora, facendo tendere $M \longrightarrow +\infty$, troviamo la stima

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} x^s\frac{ds}{s}\right| < \frac{\left|x^M-x^c\right|}{\pi T|\log x|} \tag{1.16}$$

Il caso $x > 1$ si tratta in maniera del tutto analoga; l'unica differenza è il rettangolo su cui si integra $\frac{x^s}{s}$, i cui vertici sono adesso $c \pm iT$ e $-M \pm iT$, $M > 0$ e $c > 0$. In questo modo, l'unico polo dell'integranda, è contenuto all'interno del rettangolo; ricordando che $Res(\frac{x^s}{s}, 0) = 1$, si perviene alla seguente stima:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} x^s\frac{ds}{s}-1\right| < \frac{x^c}{\pi T\log x}\ . \tag{1.17}$$

Osserviamo infine che in ambo i casi, facendo tendere $T \longrightarrow +\infty$, si ritrova la (1.15).

L'integrale discontinuo trattato in questa sezione serve a dimostrare l'importantissima *formula di Perron*, che tratteremo in dettaglio nel prossimo capitolo. Diamone ora solo una breve anticipazione.

Data una serie di Dirichlet

$$D(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}\ ,$$

con ascissa di convergenza assoluta $\sigma = \sigma_0 \in \mathbb{R}$, allora otteniamo che

$$\sum_{n\le x}{}' a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} D(s)x^s \frac{ds}{s} \ , \tag{1.18}$$

ove $c > \sigma_0$; in tal modo la serie di Dirichlet $D(s)$ è assolutamente convergente sulla retta d'integrazione $\sigma = c$. L'apice sul simbolo di sommatoria sta ad indicare che se $x \in \mathbb{N}$, allora l'ultimo termine della somma è contato con peso $\frac{1}{2}$, cioè viene sostituito da $\frac{1}{2}a_x$. Dimostriamo qui la (1.18).
Osservando che la convergenza assoluta di D permette di permutare sommatoria e integrale, si potrà quindi integrare termine a termine sulla retta $\sigma = c$ da cui

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} D(s)x^s \frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} x^s \frac{ds}{s} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \\
&= \sum_{n\le x}{}' a_n \ ,
\end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio ci siamo serviti proprio di (1.15).

La formula di Perron è una versione della (1.18) in cui si integra su un segmento anzichè su una retta; si dovrà pertanto tenere conto di alcuni termini d'errore.

1.4 Trasformazione di serie e la formula di Poisson-Jacobi

Un problema nel quale capita di imbattersi, è quello di lavorare con serie la cui convergenza diventa molto lenta al tendere di un parametro ad un certo valore limite. In certi casi di serie a segno alterno, la convergenza è così lenta da rendere estremamente difficile una qualsiasi stima "utile".

Esistono però dei metodi per trasformare una tale serie in un'espressione che coinvolga un'altra serie che, al tendere dello stesso parametro allo stesso valore limite, converge molto rapidamente. Un metodo è quello di esprimere la serie come un integrale su un cammino, il quale verrà successivamente calcolato col teorema dei residui: questo è quello che noi tratteremo e prende il nome di *metodo della trasformata di Mellin*.

Prima di andare oltre, è opportuno impiegare qualche riga per parlare di una funzione che occupa un ruolo centrale nella Teoria Analitica dei Numeri: la *funzione ζ di Riemann*.

1.4.1 Cenni alla funzione ζ di Riemann

La funzione ζ di Riemann si presenta come una serie di Dirichlet: essa è infatti definita da

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad , \Re(s) > 1. \tag{1.19}$$

Tale funzione era già nota ad Eulero, il quale oltre ad aver calcolato i valori assunti sui numeri pari positivi (in particolare ha risolto il problema di Basilea calcolando $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$), ha dimostrato la cosiddetta *identità di Eulero*: se $f(n)$ è una funzione completamente moltiplicativa (i.e. $f(nm) = f(n)f(m)\ \forall n, m \in \mathbb{N}$), allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-f(p)} \ ,$$

ove $\mathcal{P}$ denota l'insieme dei primi (si veda [Ing], pag. 16). Quindi se $f(n) = n^{-s}$, si ottiene subito

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad , \Re(s) > 1 \ ,$$

formula che mette in mostra un primo legame tra la funzione ζ e i numeri primi. Ad esempio, dato che $\lim_{s\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = +\infty$, il prodotto appena scritto non può avere finiti termini, ossia si dimostra "analiticamente" che $|\mathcal{P}| = +\infty$.

La svolta di Riemann è stata proprio quella di estendere la ζ ai numeri complessi: prima infatti era considerata solo come funzione di variabile reale. Come abbiamo visto però, la serie di Dirichlet che definisce la ζ è definita solo per $\Re(s) > 1$.

Sempre Riemann ha dimostrato la celebre *equazione funzionale per la ζ* (si veda [Ing], §3.3):

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}} \quad , \ s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \ ,$$

che si esprime in maniera equivalente come

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\zeta(1-s)\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \quad , \ s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \ , \tag{1.20}$$

la quale, oltre a fornire un profondo legame con la Γ, ha permesso di prolungare la ζ ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{1\}$; da essa si deducono anche quelli che nella letteratura vengono chiamati *zeri banali*: i poli di $s \longmapsto \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, dividendo ambo i membri per tale funzione, diventano zeri di ζ; essi sono gli interi negativi pari.

Vediamo ora un prolungamento di (1.19) al semipiano $\{\sigma > 0\}$.
Facendo riferimento al Teorema A di [Ing], pag. 18, se $X \geq 1$, ricordando che $[x] = x - \{x\}$ e ponendo $\lambda_n = n$, $c_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi(x) = x^{-s}$, si ha che

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} =& s \int_1^X \frac{[x]}{x^{s+1}}\, dx + \frac{[X]}{X^s} \\
=& s \int_1^X \frac{1}{x^s}\, dx - s \int_1^X \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx + \frac{1}{X^{s-1}} - \frac{\{X\}}{X^s} \\
=& s \frac{X^{1-s}}{(s-1)} - \frac{s}{1-s} - s \int_1^X \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx + \frac{1}{X^{s-1}} - \frac{\{X\}}{X^s} \\
=& \frac{s}{s-1} - \frac{s}{(1-s)X^{s-1}} - s \int_1^X \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx + \frac{1}{X^{s-1}} - \frac{\{X\}}{X^s} \ .
\end{aligned}$$

Osserviamo che $\left|\frac{\{X\}}{X^s}\right| < \frac{1}{X^\sigma}$ e $\left|\frac{1}{X^{s-1}}\right| < \frac{1}{X^{\sigma-1}}$; quindi, per $\sigma > 1$, facendo tendere $X \longrightarrow +\infty$, si ha

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \ , \ \sigma > 1 \ .$$

Dal momento che $\left|\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\right| < \frac{1}{x^{\sigma+1}}$, l'ultimo integrale converge uniformemente su $\{\sigma > \delta\}$, $\forall \delta > 0$ fissato. Quindi l'ultima formula fornisce il prolungamento cercato. Da tale formula si evince che nel semipiano $\{\sigma > 0\}$, $s = 1$ è l'unica singolarità ed è un polo semplice con $Res(\zeta(s), 1) = 1$. Sfruttando poi l'equazione funzionale, si vede che la ζ non presenta altre singolarità nel piano complesso.

Dal prolungamento si vede anche che $\forall \sigma > 0$ vale $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$, cioè la ζ è simmetrica rispetto l'asse reale; da ciò segue che, ristretta ad $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, la funzione ζ è reale. L'equazione funzionale poi, implica una simmetria della ζ rispetto all'asse $\sigma = 1/2$, detta *linea critica*.

Sia $\delta > 0$ fissato. Allora, in ogni semipiano $\{\sigma \geq 1 + \delta\}$, la ζ è limitata: si ha infatti $|\zeta(s)| < \zeta(\sigma) < \zeta(1 + \delta)$.

Osserviamo che da $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$, $\Re(s) > 1$, segue che $\zeta(s) \neq 0$ su tutto il semipiano $\{\sigma > 1\}$; inoltre l'equazione funzionale assicura che, ad eccezione degli zeri banali, $\zeta(s) \neq 0$ anche sul semipiano $\{\sigma < 0\}$. In realtà, un'analisi più accurata (si veda [Ing], §2.4) permette di affermare che $\zeta(s) \neq 0$ per $\sigma = 1$, e di conseguenza, sempre grazie alla simmetria rispetto alla linea critica, si può affermare che $\zeta(s) \neq 0$ anche per $\sigma = 0$. Quindi gli eventuali altri zeri sono contenuti in $S_{0,1}$, la cosiddetta *striscia critica*. Tali zeri sono detti *zeri non banali* e sono denotati con $\rho = \beta + i\gamma$.

Concludiamo con un'altra formula (dovuta sempre a Riemann) che lega la ζ con la Γ. Tale formula è importante anche nella dimostrazione dell'importantissimo *teorema dei numeri primi*, al quale accenneremo alla fine dell'ultimo capitolo. Sia

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e $\sigma > 1$; allora

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-nt}\, dt \overset{nt=x}{=} & \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{s-1} e^{-x} \frac{1}{n}\, dx \\ = & \frac{1}{n^s} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx \\ = & \frac{\Gamma(s)}{n^s} , \end{aligned}$$

da cui, sommando su $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-nt}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt .$$

Lo scambio tra sommatoria e integrale è giustificato dalla convergenza assoluta di quest'ultimo.

1.4.2 Il metodo della trasformata di Mellin

Consideriamo la somma di funzioni

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) \ , \ \text{ove} \begin{cases} f \in \mathcal{R}_{loc}(]0, +\infty[) \\ f = O_{0^+}(\frac{1}{x^a}) \\ f = O_{+\infty}(\frac{1}{x^b}) \ \ (b > 1) \end{cases} .$$

Allora, assumendo che $a < b$, ricordiamo che la formula di inversione di Mellin porge $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(s) x^{-s}\, ds \ \ (a < c < b)$, ove $F(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx \ \ (s \in S_{a,b})$. Dunque si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(s)(nx)^{-s}\, ds \\ = & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(s) \sum_{n=1}^{+\infty} (nx)^{-s}\, ds \\ = & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(s)\zeta(s) x^{-s}\, ds \\ = & S(x) , \end{aligned}$$

ove $\max\{1, a\} < c < b$. Lo scambio dell'integrale con la sommatoria, al solito è permesso dalla convergenza assoluta, essendo $c \in S_{a,b}$. Modificare opportunamente il cammino d'integrazione in modo da racchiudere determinati poli dell'integranda, può portare (sfruttando il teorema dei residui) ad una rappresentazione tramite serie che convergono assai rapidamente. Questo naturalmente dipende dalla struttura delle singolarità del prolungamento analitico dell'integranda fuori da $S_{a,b}$.

Supponiamo ad esempio che $f(x)$ sia limitata in $x = 0$, di modo che per $x \to 0^+$ si abbia $f(x) = f(0^+) + O(x^\alpha)$, $\alpha > 0$, dove con $f(0^+)$ denotiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Per fissare le idee, sia $f(x) = f(0^+) + x^{\alpha+\epsilon}$, $\epsilon > 0$. Allora

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(f(0^+) + x^{\alpha+\epsilon}\right) x^{s-1}\,dx \\
&= \int_0^{1} \left(f(0^+) + x^{\alpha+\epsilon}\right) x^{s-1}\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)x^{s-1}\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(0^+)\int_0^1 x^{s-1}\,dx + \int_0^1 x^{s+\alpha+\epsilon-1}\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)x^{s-1}\,dx \\
&= \frac{f(0^+)}{s} + \frac{1}{s+\alpha+\epsilon} + \int_1^{+\infty} f(x)x^{s-1}\,dx\ ,
\end{aligned}$$

da cui chiaramente la striscia di analiticità è $S_{0,b}$ ed $F(s)$ ha un polo semplice in $s = 0$ di residuo $f(0^+)$. Inoltre per permettere la convergenza assoluta del secondo integrale nel penultimo passaggio, dovrà essere $\sigma > -\alpha$.

Assumiamo adesso che sia possibile modificare il cammino d'integrazione nella rappresentazione integrale di $S(x)$ trovata poc'anzi, in maniera da racchiudere prima $s = 1$ (il polo della $\zeta(s)$) e poi $s = 0$ (il polo di $F(s)$).
Sia dunque il nuovo cammino d'integrazione il rettangolo $\mathcal{R}$ di vertici $c\pm iT$ e $d\pm iT$, ove $-\alpha < d < 1 < c$. Per quanto detto finora, ricordando che $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, abbiamo che $Res\,(F(s)\zeta(s)x^{-s}, 0) = -\frac{f(0^+)}{2}$ e $Res\,(F(s)\zeta(s)x^{-s}, 1) = \frac{F(1)}{x}$.
Pertanto segue che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}} F(s)\zeta(s)x^{-s}\,ds = \frac{F(1)}{x} - \frac{f(0^+)}{2}\ \ ,\ (-\alpha < d < 0 < 1 < c)\ ,$$

e

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}} F(s)\zeta(s)x^{-s}\,ds = \frac{F(1)}{x}\ \ ,\ (0 < d < 1 < c)\ .$$

Essendo poi

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(s)\zeta(s)x^{-s}\,ds - \int_{d-\infty i}^{d+\infty i} F(s)\zeta(s)x^{-s}\,ds = \sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) - \int_{d-\infty i}^{d+\infty i} F(s)\zeta(s)x^{-s}\,ds\ ,$$

e supponendo che i contributi orizzontali dell'integrale su $\mathcal{R}$ siano infinitesimi per $T \to +\infty$, si ha che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) = \frac{F(1)}{x} + \int_{d-\infty i}^{d+\infty i} F(s)\zeta(s)x^{-s}\,ds \ \ (0 < d < 1)\ ,$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) = \frac{F(1)}{x} - \frac{f(0^+)}{2} + \int_{d-\infty i}^{d+\infty i} F(s)\zeta(s)x^{-s}\,ds \ \ (-\alpha < d < 0)\ . \tag{1.21}$$

Facciamo adesso un'ulteriore assunzione su $f(x)$: supponiamo che attorno a $x = 0$ ammetta espansione del tipo

$$f(x) \sim f(0^+) + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k x^{\alpha_k}\ ,$$

ove $(\Re(\alpha_k))_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente che tende con monotonia a $+\infty$. Quindi $f(x)$ è come in (1.14) con $d_1 = 0_{\mathbb{C}}$ e quindi la sua trasformata $F(s)$ si prolunga come funzione meromorfa sul semipiano $\{\sigma < b\}$, presentando poli semplici in $s = -\alpha_k$ di residuo A_k per $k \in \mathbb{N}$, oltre che -come già detto- in $s = 0$ con residuo $f(0^+)$.

Se $\alpha_k \in 2\mathbb{N}$, allora tutti i poli semplici di $F(s)$ (tranne $s = 0$) coincidono con gli zeri banali di ζ: questo annullerebbe i contributi che il teorema dei residui produrrebbe una volta modificato opportunamente il cammino d'integrazione. Supponiamo dunque $\alpha_k \notin 2\mathbb{N}$ e calcoliamo quindi che

$$\begin{aligned} Res(F(s)\zeta(s)x^{-s}, -\alpha_k) &= \lim_{s\to-\alpha_k} (s+\alpha_k)F(s)\zeta(s)x^{-s} \\ &= A_k\zeta(-\alpha_k)x^{\alpha_k} \ \ \forall k \in \mathbb{N}\ , \end{aligned}$$

da cui, osservando che $F(1) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, dalla (1.21) si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) \sim_{0^+} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx - \frac{f(0^+)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\zeta(-\alpha_k)x^{\alpha_k}\ ,$$

che è un caso particolare della *formula di Eulero-Maclaurin* (si veda [Ap]).

1.4.3 La formula di Poisson-Jacobi

Consideriamo la funzione $f(z) = e^{-zn^2}$, $z \in \mathbb{C}$; calcoliamone la trasformata di Mellin.

$$\begin{aligned} M\left[e^{-zn^2}; s\right] &= \int_{0_{\mathbb{C}}}^{\infty_{\mathbb{C}}} z^{s-1} e^{-zn^2}\, dz \\ &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-xn^2}\, dx \\ &= \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} \xi^{s-1} \frac{1}{n^{2s-2}} e^{-\xi}\, d\xi \\ &= \frac{1}{n^{2s}} \Gamma(s) \quad , \ \Re(s) > 0 \ , \end{aligned}$$

ove si è adoperato il cambio di variabile $xn^2 = \xi$.

La funzione *theta di Jacobi* è definita da

$$\theta(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-zn^2} \quad , \ \Re(z) > 0 \ ;$$

noi siamo interessati ad una variante di quest'ultima, che viene di seguito calcolata:

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-zn^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{1}{n^{2s}} \Gamma(s) z^{-s}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \Gamma(s) z^{-s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \Gamma(s) z^{-s} \zeta(2s)\, ds \quad , \ c > \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{d-\infty i}^{d+\infty i} \Gamma\left(\frac{w}{2}\right) \zeta(w) z^{-\frac{w}{2}}\, dw \quad , \end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio si è posto $2s = w$, da cui chiaramente $d = 2c > 1$. Anche qui chiaramente lo scambio tra serie e integrale è stato possibile per convergenza assoluta.

Dal momento che $|\zeta(2s)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2c}} = O(1)$ sul cammino d'integrazione, la convergenza dell'ultimo integrale è controllata dal fattore $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, il quale, per quanto già visto nella trattazione di e^{-w} come trasformata inversa, implica che l'ultimo integrale definisce effettivamente $S(z)$ per $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$.

Quindi, per $c > 1$ e $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, si ha che

$$S(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) z^{-\frac{s}{2}}\, dw \quad . \tag{1.22}$$

Ora, gli unici poli dell'integranda sono $s = 0$ (dovuto alla Γ) e $s = 1$ (dovuto alla ζ). Gli altri poli di $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ sono gli interi negativi pari, che coincidono con gli zeri banali di $\zeta(s)$; essendo semplici sia gli zeri che i poli, essi "si cancellano" non producendo quindi alcun contributo algebrico che possa manifestarsi col teorema dei residui.

Consideriamo adesso un diverso cammino d'integrazione: il rettangolo di vertici $c \pm iT$ e $d \pm iT$, ove $d < 0 < 1 < c$, in modo da contenere i poli dell'integranda.

Vediamo che i contributi dati dai segmenti orizzontali sono infinitesimi per $T \to +\infty$.

Ricordiamo la stima di Stirling per la funzione Γ sulle strisce verticali:

$$|\Gamma(\sigma \pm it)| = O(t^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t}) \ \ , \ \ t \to +\infty \ ,$$

uniformemente per $\sigma \in [a, b]$. Sussiste una stima analoga per la ζ (si veda [T1], pag. 95), secondo cui

$$|\zeta(\sigma \pm it)| = \begin{cases} O(1) & \sigma > 1 \\ O(t^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t) & 0 \leq \sigma \leq 1 \\ O(t^{\frac{1}{2}-\sigma}) & \sigma < 0 \ . \end{cases} \quad , \ t \to +\infty$$

Infine, detto $\theta = \arg z$, si ha che $\left|z^{-\frac{s}{2}}\right| = O(e^{\frac{\theta}{2}t}e^{-\frac{\sigma}{2}\log|z|})$ per $t \to +\infty$.

A questo punto è chiaro che, sui segmenti orizzontali $\sigma \pm iT$, con $d \leq \sigma \leq c$, si ha che

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}} = O(T^{\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}+\mu(\sigma)}\log T e^{-\frac{T}{2}(\pi-\theta)}) \ ,$$

ove $\mu(\sigma)$ è un'opportuna funzione che dipende dalla casistica della stima della ζ.

Essendo $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, è chiaro che $\pi-\theta > 0$, quindi i contributi sui segmenti orizzontali dell'integrale sul rettangolo prima definito, sono infinitesimi per $T \to +\infty$.

Ora,

$$Res\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}}, 0\right) = \lim_{s\to 0} 2\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}} = -1$$

e

$$Res\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}}, 1\right) = \lim_{s\to 1}(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{z}}$$

Dunque, chiamando ancora una volta $\mathcal{R}$ il cammino d'integrazione, il teorema dei residui assicura che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{z}} - 1 \ ,$$

e passando al limite per $T \to +\infty$, ricordando che i contributi orizzontali sono infinitesimi, si ha

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}}\,ds}_{2S(z)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{d-\infty i}^{d+\infty i} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{z}} - 1 \ ,$$

da cui

$$S(z) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{z}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi i}\int_{d-\infty i}^{d+\infty i} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}}\,ds\ .$$

Effettuando adesso il cambio di variabile $s = -2w$ si ha che

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{d-\infty i}^{d+\infty i} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)z^{-\frac{s}{2}}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i} \Gamma(-w)\zeta(-2w)z^{w}\,dw\ ,$$

ove $b = -\frac{d}{2} > 0$ e quindi si perviene a

$$S(z) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{z}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i} \Gamma(-s)\zeta(-2s)z^{s}\,ds\ . \tag{1.23}$$

Riportiamo ora la formula di duplicazione della funzione Γ, utile per il seguito:

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\Gamma(2s)\ ,$$

valida ove le funzioni implicate sono definite. A noi serivirà nella seguente forma:

$$\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\ . \tag{1.24}$$

Sfruttando la formula dei complementi (1.9), l'equazione funzionale nella forma (1.20) e la (1.24), trasformiamo l'integranda di (1.23):

$$\begin{aligned}\Gamma(-s)\zeta(-2s) &\overset{(1.20)}{=}\Gamma(-s)2^{-2s}\pi^{-2s-1}\zeta(1+2s)\Gamma(1+2s)\sin(-\pi s)\\ &\overset{(1.9)}{=}\frac{\pi}{\sin(-\pi s)}\frac{1}{\Gamma(1+s)}2^{-2s}\pi^{-2s-1}\zeta(1+2s)\Gamma(1+2s)\sin(-\pi s)\\ &=(2\pi)^{-2s}\frac{\zeta(1+2s)\Gamma(1+2s)}{\Gamma(1+s)}\ .\end{aligned}$$

Ricordando adesso che su $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ vale $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, utilizzando la (1.24) si ha

$$\begin{aligned}\Gamma(1+2s) &=2s\Gamma(2s)\\ &=2s\left[2^{2s-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]\\ &=s2^{2s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\ ,\end{aligned}$$

da cui si ha

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-2s}\zeta(1+2s)\frac{\Gamma(1+2s)}{\Gamma(1+s)} &=(2\pi)^{-2s}\zeta(1+2s)\frac{s2^{2s}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{s\Gamma(s)}\\ &=\pi^{-2s-\frac{1}{2}}\zeta(1-2s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

Un semplice conto porta poi a $z^s\pi^{-2s-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\left(\frac{\pi^2}{z}\right)^{-s-\frac{1}{2}}$ da cui l'integrale al secondo membro di (1.23) è uguale a

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\pi}{z}}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i}\zeta(1+2s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi^2}{z}\right)^{-s-\frac{1}{2}}ds\\
=&\sqrt{\frac{\pi}{z}}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+2s}}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi^2}{z}\right)^{-s-\frac{1}{2}}ds\\
=&\sqrt{\frac{\pi}{z}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi^2 n^2}{z}\right)^{-s-\frac{1}{2}}ds\\
=&\sqrt{\frac{\pi}{z}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{\pi^2 n^2}{z}}\ .
\end{aligned}
$$

Per giustificare l'ultimo passaggio è sufficiente mostrare che

$$
e^{-\frac{\pi^2 n^2}{z}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi^2 n^2}{z}\right)^{-s-\frac{1}{2}}ds\ .
$$

L'ultimo integrale fa pensare che si tratti di una trasformata di Mellin inversa. Vediamo che effettivamente è così. Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
M\left[e^{-\frac{\pi^2 n^2}{z}};s\right] &= \int_{0_{\mathbb{C}}}^{\infty_{\mathbb{C}}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{z}}z^{s-1}\,dz\\
&=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{x}}x^{s-1}\,dx\\
&\overset{\frac{\pi^2 n^2}{x}=\xi}{=}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{\pi^2 n^2}{\xi}\right)^{s-1}\frac{\pi^2 n^2}{\xi^2}\,d\xi\\
&=(\pi^2 n^2)^s\Gamma(-s)\ .
\end{aligned}
$$

A questo punto si calcola la trasformata inversa:

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{\pi^2 n^2}{z}} &=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}(\pi^2 n^2)^s\Gamma(-s)z^{-s}\,ds\\
&\overset{-s=w+\frac{1}{2}}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\left(\frac{\pi^2 n^2}{z}\right)^{-w-\frac{1}{2}}\Gamma\left(w+\frac{1}{2}\right)dw\ ,
\end{aligned}
$$

ove si è posto $a = -\frac{1}{2} - c$. Come volevasi dimostrare.

Dunque per quanto visto, $\sqrt{\frac{\pi}{z}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{\pi^2 n^2}{z}}$ eguaglia il secondo termine della (1.23), fatto che permette di approdare finalmente alla *formula di Poisson-Jacobi*:

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-zn^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{z}} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{z}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{\pi^2 n^2}{z}}\ ,
$$

valida per $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, $z \neq 0$; in tal modo infatti si garantisce la convergenza della serie a sinistra e non ci sono ambiguità nello scrivere $\sqrt{z}$.

Questa formula mette in evidenza il fenomeno di cui si discuteva all'inizio di questa sezione: trasformare una serie che converge molto lentamente al tendere di un parametro ad un valore limite, in un'altra che la eguagli ma che converga più velocemente. Questo è esattamente quello che succede con la formula di Poisson-Jacobi per $z \to 0$.

Capitolo 2

La formula di Perron e la formula esplicita di Riemann per $\psi(x)$

Scopo di questo capitolo sarà enunciare e dimostrare la *formula di Perron* avvalendosi degli strumenti sviluppati nel primo capitolo. Le tecniche usate nella dimostrazione di tale formula, saranno riprese per trattare il secondo argomento del capitolo, la *formula esplicita per* ψ.

2.1 La formula di Perron

Teorema 2.1.1. (**Formula di Perron**) Sia

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad , \ \sigma > 1 \ ,$$

con $a_n = O(\psi(n))$, dove $\psi(n)$ è una funzione non decrescente e positiva. Supponiamo inoltre che per $\sigma \to 1^+$ valga

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} = O\left(\frac{1}{(\sigma-1)^\alpha}\right) \quad , \alpha > 0 \ .$$

Assumiamo anche $c > 0$, $\sigma + c > 1$ e $x > 1$. Si presentano allora due casi: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{N}$.

Se x non è intero, definiamo $N := \left[x + \frac{1}{2}\right]$; N è quindi l'intero più vicino a x. In particolare, se $x = [x] + \frac{1}{2}$, allora $N = [x] + 1$.

Allora

$$\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw+O\left(\frac{x^c}{T(\sigma+c-1)^\alpha}\right)$$
$$+O\left(\frac{\psi(2x)x^{1-\sigma}\log x}{T}\right)$$
$$+O\left(\frac{\psi(N)x^{1-\sigma}}{T|x-N|}\right)$$

Nel caso in cui x sia intero, la stima cambia nel seguente modo:

$$\sum_{n\leq x}{}'\frac{a_n}{n^s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw+O\left(\frac{x^c}{T(\sigma+c-1)^\alpha}\right)$$
$$+O\left(\frac{\psi(2x)x^{1-\sigma}\log x}{T}\right)$$
$$+O\left(\frac{\psi(x)x^{-\sigma}}{T}\right)\ ,$$

cioè l'ultimo termine della somma viene sommato con peso $1/2$ e l'unico resto che cambia è l'ultimo.

Tutte le stime sono ovviamente intese per $T\longrightarrow+\infty$.

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso $x\notin\mathbb{N}$.

Consideriamo la funzione di variabile complessa $g(w):=\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{1}{w}$. Ha un unico polo (semplice) in $w=0$, con $Res(g(w),0)=\lim_{w\to0}wg(w)=1$.

Supponiamo dapprima $n<x$.

Integriamo ora $g(w)$ su $]-\infty-iT,c-iT]$, $[c-iT,c+iT]$ e $[c+iT,-\infty+iT[$. Ricordando che $c>0$, il teorema dei residui garantisce che

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty-iT}^{c-iT}+\int_{c-iT}^{c+iT}+\int_{c+iT}^{-\infty+iT}\right\}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w}=1\ .$$

Occupiamoci ora di stimare gli integrali sulle componenti orizzontali del cammino d'integrazione; abbiamo che

$$\int_{-\infty+iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^w\frac{dw}{w}=\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^w}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\frac{1}{w}\right|_{-\infty+iT}^{c+iT}+\frac{1}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\int_{-\infty+iT}^{c+iT}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^w}{w^2}\,dw$$
$$=\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c+iT}}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\frac{1}{c+iT}+\frac{1}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\int_{-\infty+iT}^{c+iT}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^w}{w^2}\,dw\ .$$

Concentriamoci ora sul primo addendo dell'ultimo passaggio:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c+iT}}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\frac{1}{c+iT}\right| &= \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\frac{1}{\sqrt{c^2+T^2}} \\
&= \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\frac{1}{T\sqrt{1+\left(\frac{c}{T}\right)^2}} \\
&\leq \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)} ,
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c+iT}}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\frac{1}{c+iT} = O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right) .$$

Passiamo al secondo addendo.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\int_{-\infty+iT}^{c+iT}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{w}}{w^2}\,dw\right| &\leq \frac{1}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\int_{-\infty}^{c}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{u}}{u^2+T^2}\,du \\
&\leq \frac{1}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\int_{-\infty}^{c}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{u^2+T^2}\,du \\
&\leq \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{T^2\log\left(\frac{x}{n}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+\left(\frac{u}{T}\right)^2} \\
&\overset{\frac{u}{T}=v}{=} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv}{1+v^2}}_{K_1\in\mathbb{R}} ,
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\frac{1}{\log\left(\frac{x}{n}\right)}\int_{-\infty+iT}^{c+iT}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{w}}{w^2}\,dw = O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right) .$$

Concludo dunque che

$$\int_{-\infty+iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{dw}{w} = O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right) .$$

Svolgendo dei conti del tutto analoghi per l'integrale sull'altra componente orizzontale del cammino, si perviene allo stesso risultato, motivo per cui si conclude che

$$\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{dw}{w} = 1 + O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{c}}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right) .$$

Sia ora $n > x$. Integriamo ora $g(w)$ su $]+\infty - iT, c - iT]$, $[c - iT, c + iT]$, $[c + iT, +\infty + iT[$: in questo caso il cammino non contiene poli dell'integranda, motivo per cui l'integrale di $g(w)$ su questo cammino è nullo. I contributi dati dalle semirette orizzontali del cammino d'integrazione si stimano esattamente come nel caso precedente; possiamo quindi affermare che

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w} = O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^c}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right) .$$

Riassumendo, si ha che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^w \frac{dw}{w} = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^c}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right) & n < x \\ O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^c}{T\log\left(\frac{x}{n}\right)}\right) & n > x \; . \end{cases}$$

Moltiplicando ora ambo i membri per $\frac{a_n}{n^s}$ e sommando su $n \in \mathbb{N}$, si ottiene quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} f(s+w)x^w \frac{dw}{w} = \sum_{n<x} \frac{a_n}{n^s} + O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|}\right) ; \qquad (2.1)$$

vogliamo dunque studiare $O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|}\right)$.

Procediamo nella dimostrazione, distinguendo vari casi circa la relazione tra n ed x:

- $n < \frac{x}{2}$; che equivale a $\frac{x}{n} > 2$, da cui $\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \log\left(\frac{x}{n}\right) > K_2 > 0$, $\exists K_2 \in \mathbb{R}$;
- $n > 2x$; che equivale a $\frac{x}{n} < \frac{1}{2}$, da cui $\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right| = -\log\left(\frac{x}{n}\right) = \log\left(\frac{n}{x}\right) > K_2 > 0$.

Denominando ora $A_x = \left\{n \in \mathbb{N} \mid (n < \frac{x}{2}) \vee (n > 2x)\right\}$, si ha che

$$\begin{aligned} \frac{x^c}{T}\sum_{n\in A_x} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|} &\leq \frac{1}{K_2}\frac{x^c}{T}\sum_{n\in A_x}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}} \\ &\leq \frac{1}{K_2}\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}} \; . \end{aligned}$$

Ora, per ipotesi,

$$\frac{1}{K_2}\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}} = O\left(\frac{x^c}{T(\sigma+c-1)^\alpha}\right) ,$$

da cui,

$$\frac{x^c}{T}\sum_{n\in A_x} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|} = O\left(\frac{x^c}{T(\sigma+c-1)^\alpha}\right) . \qquad (2.2)$$

Vediamo adesso la stima per i contributi della somma su $\mathbb{N} \setminus A_x$:

• Sia $N < n < 2x$ e poniamo $n = N + r$ (ovviamente $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$). Poi, essendo (per definizione di N) $x - N \leq \frac{1}{2}$, si ha che $x \leq N + \frac{1}{2}$. Quindi, sfruttando la monotonia del logaritmo si evince

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{n}{x}\right) &= \log\left(\frac{N+r}{x}\right)\\ &\geq \log\left(\frac{N+r}{N+\frac{1}{2}}\right)\\ &= \log\left(1+\frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}\right)\\ &> \log\left(1+\frac{r}{N}\right)\\ &> K_3\frac{r}{N} \quad , \ \exists K_3 > 0\ .\end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\frac{r}{N} > 0$, dunque $\log\left(1+\frac{r}{N}\right) > 0$. Ma le coppie (r, N) che rispettano $n = N + r$ sono in numero finito, quindi detto $\alpha = \min_{n=N+r}\left\{\log\left(1+\frac{r}{N}\right)\right\}$, $\beta = \max_{n=N+r}\left\{\frac{r}{N}\right\}$ e $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, si ha che $\log\left(1+\frac{r}{N}\right) \geq \gamma\beta \geq \gamma\frac{r}{N}$ a questo punto sarà sufficiente porre $K_3 = \gamma$. Da ultimo si osserva che $N < 2x$ e questo equivale a dire $\frac{1}{N} > \frac{1}{2x}$ da cui $K_3\frac{r}{N} > \frac{K_3 r}{2x} = K_4\frac{r}{x}$, ove chiaramente si è posto $K_4 = \frac{K_3}{2}$.

Quindi $N < n < 2x \Rightarrow \log\left(\frac{n}{x}\right) > K_4\frac{r}{x}$. Tenendo a mente che $\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right|$, e ponendo $B_x = \{n \in \mathbb{N} \mid N < n < 2x\}$ abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}\sum_{n\in B_x}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right|} &\leq \sum_{n\in B_x}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}K_4\frac{r}{x}}\\ &= \frac{x}{K_4}\sum_{n\in B_x}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}(n-N)}\\ &\leq \frac{x}{K_4 N^{\sigma+c}}\sum_{n\in B_x}\frac{|a_n|}{n-N}\ .\end{aligned}$$

Maggioriamo adesso $\frac{1}{N^{\sigma+c}}$: se $\{x\} > \frac{1}{2}$, allora $N = [x] + 1 > x$ da cui $\frac{1}{N^{\sigma+c}} < \frac{1}{x^{\sigma+c}}$. Se invece $\{x\} < \frac{1}{2}$, allora $N = [x]$; vediamo che allora $\exists K_5 > 0$ tale che $\frac{1}{N^{\sigma+c}} \leq \frac{K_5}{x^{\sigma+c}}$, ma questo è vero se e solo se

$$K_5 \geq \left(\frac{x}{N}\right)^{\sigma+c} = \left(\frac{[x]+\{x\}}{[x]}\right)^{\sigma+c} = \left(1+\frac{\{x\}}{[x]}\right)^{\sigma+c}$$

Essendo l'ultimo termine maggiorato da $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\sigma+c}$, sarà sufficiente prendere $K_5 = 2^{\sigma+c}$. In definitiva abbiamo quindi che $\frac{1}{N^{\sigma+c}} \leq \frac{K_5}{x^{\sigma+c}}$.

Alla luce di ciò

$$\begin{aligned}
\frac{x^c}{T}\sum_{n\in B_x}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right|} \leq& \frac{K_5x^{c+1-\sigma-c}}{K_4T}\sum_{n\in B_x}\frac{|a_n|}{n-N}\\
\overset{K_6=\frac{K_5}{K_4}}{\leq}& K_6\frac{x^{1-\sigma}}{T}\sum_{n\in B_x}\frac{|a_n|}{n-N}\\
=& K_6\frac{x^{1-\sigma}}{T}\sum_{r<2x-N}\frac{|a_{N+r}|}{r}\\
=& K_6\frac{x^{1-\sigma}}{T}K_7|a_{[2x]}|\sum_{r<2x-N}\frac{1}{r}\ ;
\end{aligned}$$

Osservando infine che essendo $x<N<2x$ si ha che $2x-N<2x-x=x$, da cui $\sum_{r<2x-N}\frac{1}{r}\leq\sum_{r<x}\frac{1}{r}=O(\log x)$. Spieghiamo l'ultimo passaggio: è noto che $\sum_{k=1}^{k=m}\frac{1}{k}<1+\log m$, $\forall m\in\mathbb{N}, m\geq 2$; siamo dunque nell'ipotesi che $x>2$. Vediamo allora che esiste una costante K_8 tale che $1+\log x<K_8\log x$; questo equivale a $K_8>1+\frac{1}{\log x}$, ma quest'ultima quantità è maggiorata da $1+\frac{1}{\log 2}$ $\forall x>2$ che può quindi prendere il posto di K_8. Il caso $1<x<2$ è banale.

Osservando infine che $|a_{[2x]}|=O(\psi([2x]))=O(\psi(2x))$ (essendo ψ non decrescente per ipotesi), si perviene a

$$O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n\in B_x}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right|}\right)=O\left(\frac{\psi(2x)x^{1-\sigma}\log x}{T}\right)\ . \tag{2.3}$$

Non rimane che l'ultimo caso:

- $\frac{x}{2}<n<N$; definiamo anzitutto $C_x=\left\{n\in\mathbb{N}\mid\frac{x}{2}<n<N\right\}$. Vale allora quanto segue:

$$\begin{aligned}
O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n\in C_x}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right|}\right)=& O\left(\frac{x^c\psi(N)}{Tx^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{x}{N}\right)\right|}\right)\\
=& O\left(\frac{x^c\psi(N)}{Tx^{\sigma+c}\left|\log\left(1+\frac{x-N}{N}\right)\right|}\right)\\
=& O\left(\frac{x^{-\sigma}\psi(N)}{T\left|\log\left(1+\frac{x-N}{N}\right)\right|}\right)\ ;
\end{aligned}$$

osserviamo ora che $\frac{x-N}{N}\in]-1,1[\setminus\{0\}$. Mostriamo dunque che se $\xi\in]-1,1[\setminus\{0\}$, allora $\exists E>0$ tale che $|\log(1+\xi)|\geq E|\xi|$. Il fatto che i limiti di $\frac{|\log(1+\xi)|}{|\xi|}$ agli estremi del dominio (i.e. $\xi\to 0,\pm1$) siano $+\infty$ o $\log 2>0$ e che altrove la funzione in questione sia continua, positiva e mai nulla, permette di dedurre che

$\inf_{]-1,1[\setminus\{0\}} \frac{|\log(1+\xi)|}{|\xi|} = \beta > 0$. Dunque $\left|\log\left(1+\frac{x-N}{N}\right)\right| \geq \beta\frac{|x-N|}{N}$, da cui

$$O\left(\frac{x^{-\sigma}\psi(N)}{T\left|\log\left(1+\frac{x-N}{N}\right)\right|}\right) = O\left(\frac{x^{-\sigma}\psi(N)}{T\frac{|x-N|}{N}}\right) = O\left(\frac{x^{1-\sigma}\psi(N)}{T|x-N|}\right) .$$

Quindi si ha che

$$O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n\in C_x}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}\left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right|}\right) = O\left(\frac{x^{1-\sigma}\psi(N)}{T|x-N|}\right) . \tag{2.4}$$

Mettendo assieme (2.2), (2.3) e (2.4) si ottiene la dimostrazione della formula di Perron nel caso $x \notin \mathbb{N}$.

Se invece $x \in \mathbb{N}$, andiamo a vedere cosa cambia in (2.1).

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} f(s+w)x^w\frac{dw}{w} =& \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{s+w}}x^w\frac{dw}{w}\\ =& \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\sum_{n\neq x}\frac{a_n}{n^{s+w}}x^w\frac{dw}{w}}_{f(x,s)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{a_x}{x^{s+w}}x^w\frac{dw}{w}\\ =& f(x,s) + \frac{a_x}{2\pi i x^s}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{dw}{w}\\ =& f(x,s) + \frac{a_x}{2\pi i x^s}\log\left(\frac{c+iT}{c-iT}\right) .\end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che $f(x,s)$ eguaglia il secondo membro della (2.1). Studiamo quindi l'altro addendo, in particolare occupiamoci di $\log\left(\frac{c+iT}{c-iT}\right)$.

Osserviamo che $\frac{c+iT}{c-iT} \overset{T\to+\infty}{\longrightarrow} -1$; ponendo $h(T) = \frac{c+iT}{c-iT}+1$, un rapido conto mostra che $h(t) = O\left(\frac{1}{T}\right)$. Si ha inoltre che $\log(h(T)-1) \overset{T\to+\infty}{\longrightarrow} i\pi$.

Mostriamo che $\log(h(T)-1) - i\pi = O\left(\frac{1}{T}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{|\log(h(T)-1)-i\pi|}{\frac{1}{T}} =& \frac{|\log(h(T)-1)-\log(-1)|}{\frac{1}{T}}\\ =& -\frac{|\log(1+(-h(T)))|}{\left(-\frac{1}{T}\right)} ;\end{aligned}$$

ricordando il limite notevole $\lim_{\xi\to 0}\frac{\log(1+\xi)}{\xi} = 1$ e che $h(T) = O\left(\frac{1}{T}\right)$ si conclude.

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{a_x}{2\pi i x^s}\log\left(\frac{c+iT}{c-iT}\right) =&\frac{a_x}{2\pi i x^s}\left(i\pi+O\left(\frac{1}{T}\right)\right)\\ =&\frac{O(\psi(x))x^{-s}}{2\pi i}\left(i\pi+O\left(\frac{1}{T}\right)\right)\\ =&O(\psi(x)x^{-\sigma})\left(i\pi+O\left(\frac{1}{T}\right)\right)\\ =&O\left(\frac{\psi(x)x^{-\sigma}}{T}\right)\ .\end{aligned}$$

Con questo la formula di Perron è dimostrata anche nel caso $n \in \mathbb{N}$. □

Esiste anche un'utile versione della formula di Perron nella quale l'errore è limitato per $x \to N$. Sotto le stesse ipotesi di prima, si ha che

$$\begin{aligned}\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} f(s+w)\frac{x^w}{w}\,dw &+O\left(\frac{x^c}{T(\sigma+c-1)^\alpha}\right)\\ &+O\left(\frac{\psi(2x)x^{1-\sigma}\log x}{T}\right)\\ &+O\left(\psi(N)x^{-\sigma}\min\left(\frac{x}{T|x-N|},1\right)\right)\ ,\end{aligned}$$

risultato valido a meno che $x - N = O\left(\frac{x}{T}\right)$, nel qual caso si stima il contributo dato dal termine $n = N$ come fatto nella dimostrazione precedente. Osserviamo dapprima che

$$\left(\frac{x}{N}\right)^w = \left(\frac{N+O\left(\frac{x}{T}\right)}{N}\right)^w = \left(1+O\left(\frac{x}{T}\right)\right)^w = \left(1+O\left(\frac{w}{T}\right)\right)\ ,$$

fatto che implica

$$\begin{aligned}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{a_N}{N^s}\left(\frac{x}{N}\right)^w\frac{dw}{w} =&\frac{a_N}{N^s}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(1+O\left(\frac{w}{N}\right)\right)\frac{dw}{w}\\ =&\frac{a_N}{N^s}\left\{\log\left(\frac{c+iT}{c-iT}\right)+\int_{c-iT}^{c+iT}\left(O\left(\frac{w}{N}\right)\right)\frac{dw}{w}\right\}\\ =&\frac{a_N}{N^s}\left\{\log\left(\frac{c+iT}{c-iT}\right)+O(1)\right\}\\ =&O(\psi(N)N^{-\sigma})\left\{\log\left(\frac{c+iT}{c-iT}\right)+O(1)\right\}\\ =&O(\psi(N)N^{-\sigma})O(1)\\ =&O(\psi(N)N^{-\sigma})\ ,\end{aligned}$$

ove ciò che non è esplicitato discende da semplici conti.

2.2 La formula esplicita di Riemann per $\psi(x)$

Presentiamo adesso l'importantissima *formula esplicita per* $\psi(x)$, scoperta e dimostrata dallo stesso Riemann.

Introduciamo la funzione Λ di Von Mangoldt:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{se } n = p^m, \ \exists m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

da cui si definisce subito la ψ di Chebyshev:

$$\psi(x) := \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \le x} \log p = \sum_{n \in \Psi_x} \log n \ ,$$

funzione della variabile reale $x > 1$ ove $\Psi_x = \{p^m \mid p^m \le x, \ p^{m+1} > x\}$, cioè è l'insieme di tutte le massime potenze di primi che siano minori o uguali a x.

Tale funzione presenta chiaramente delle discontinuità nei reali che sono interi e potenze di primi (basti pensare al grafico, che sarà "a scalini"). Per fare in modo che la formula esplicita "funzioni" anche in questi punti, si considera una nuova funzione ψ_0 che in $x = p^m$ sia il punto medio tra $\psi(x - \frac{1}{2})$ e $\psi(x + \frac{1}{2})$, i.e.

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x) - \frac{\Lambda(x)}{2} & \text{se } x = p^m \\ \psi(x) & \text{altrimenti} \end{cases},$$

infatti $\psi(x) - \frac{\Lambda(x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\psi(x + \frac{1}{2}) + \psi(x - \frac{1}{2})\right)$.

La formula esplicita allora afferma che

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) \ , \tag{2.5}$$

ove la somma presente al secondo membro viene effettuata sugli zeri non banali della ζ, denotati da $\rho = \beta + i\gamma$ e la somma è da intendersi in senso "simmetrico", cioè

$$\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} = \lim_{T \to +\infty} \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} \ .$$

Vale inoltre $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\pi$ (si veda [Dav], §12). Notiamo poi che, chiamando ω gli zeri banali della ζ, si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} \frac{x^\omega}{\omega} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{-2k}}{-2k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x^{-2})^k}{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(-x^{-2})^k}{k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(-x^{-2})^k}{k} \\ &= \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) \ . \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio segue ricordando lo sviluppo in serie di Taylor del logaritmo $\log(1+x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}x^j}{j}$ a cui ci si voleva ricondurre vista la “familiarità” del primo termine con quest'ultima serie di potenze.

D'ora in avanti, per semplicità supporremo $x \geq 2$, nonostante la formula esplicita per ψ rimanga vera anche per $x > 1$.

Dimostriamo innanzitutto che per $\sigma > 1$ vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ . \tag{2.6}$$

Come già scritto, per $\sigma > 1$ vale $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$. Prendendo i logaritmi di ambo i membri e ricordando lo sviluppo appena sfruttato, si ottiene

$$\begin{aligned} \log\zeta(s) &= -\sum_{p\in\mathcal{P}} \log(1-p^{-s}) \\ &= -\sum_{p\in\mathcal{P}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(-p^{-s})^k}{k} \right) \\ &= \sum_{p\in\mathcal{P},k\in\mathbb{N}} \frac{1}{kp^{sk}} \ . \end{aligned}$$

Derivando il primo e l'ultimo membro di questa catena di uguaglianze si ha

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p\in\mathcal{P},k\in\mathbb{N}} -\frac{\log p}{p^{sk}} \ ;$$

avendo potuto, grazie alla convergenza assoluta della serie, derivare la serie stessa termine a termine.

Per definizione di Λ si ottiene infine

$$\sum_{p\in\mathcal{P},k\in\mathbb{N}} -\frac{\log p}{p^{sk}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) n^{-s} \ ,$$

che dimostra la relazione interessata.

Passiamo dunque alla dimostrazione della (2.5).

Il primo passo è quello di considerare l'integrale discontinuo

$$\delta(y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad y \in]0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{per} \quad y = 1 \\ 1 & \text{per} \quad y > 1 \end{cases} \quad , \ c > 0 \ .$$

dettagliatamente analizzato nel paragrafo (1.3.3).

Considerando la (2.6), si osserva che se $c > 1$ si ha che

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds \ , \tag{2.7}$$

infatti

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds =& \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-s}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\\ =&\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\\ =&{\sum_{n\le x}}'\Lambda(n)\\ =&\psi_0(x)\ .\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che i poli e gli zeri di ζ sono tutti poli semplici per la sua derivata logaritmica, dunque le singolarità di $s \longmapsto -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}$ sono tutte site nel semipiano $\{\sigma \le 1\}$.
Ora, i poli di tale funzione sono: il polo di $\frac{x^s}{s}$ $(s = 0)$ di residuo

$$Res\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}, 0\right) = \lim_{s\to 1}\left(-s\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\right) = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \ ,$$

gli zeri di ζ (banali e non) di residuo

$$Res\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}, \rho\right) = \lim_{s\to \rho}\left(-(s-\rho)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\right) = -\frac{x^\rho}{\rho} \ ,$$

e il polo di ζ $(s = 1)$ di residuo

$$Res\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}, 1\right) = \lim_{s\to 1}\left(-(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\right) = x \ ,$$

infatti visto che $-(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s} = -\frac{(s-1)^2\zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)}\frac{x^s}{s}$, essendo $s = 1$ polo semplice per ζ, lo sviluppo di Laurent attorno a 1 diviene $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(s-1)^n$ da cui $\zeta'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(s-1)^{n-1}$, e quindi un semplice conto permette di concludere.

Ciò detto, l'idea di fondo è la seguente: se $d < 0 < 1 < c$, chiamando $\mathcal{R}$ il rettangolo di vertici $c \pm iT$ e $d \pm iT$ (con d e T scelti opportunamente in modo che il cammino d'integrazione si mantenga sufficientemente distante dai poli dell'integranda), si avrebbe che $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,ds = \sum_{\mathcal{R}} Res$; quest'ultima somma indicando i residui dei poli dell'integranda contenuti in $\mathcal{R}$. Questo ci permette quindi di esprimere $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,ds$ tramite i residui contenuti in $\mathcal{R}$ più una stima degli integrali sui rimanenti lati di $\mathcal{R}$: stiamo dunque parlando di una versione "finita" della formula esplicita, con una stima esplicita dell'errore. La stima è chiaramente fatta su T, quindi dalla versione approssimata si potrà ottenere la formula esplicita semplicemente passando al limite per $T \longrightarrow +\infty$.

Iniziamo stimando la funzione discontinua $\delta(y)$. A tal proposito definiamo

$$I(y,T) := \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\,ds\ .$$

Lemma 2.2.1. Per $y > 0$, $c > 0$, $T > 0$, si ha che

$$|I(y,T) - \delta(y)| < \begin{cases} y^c \min\left(1, \frac{1}{T|\log y|}\right) & \text{per} \quad y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{per} \quad y = 1 \end{cases}\ .$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $0 < y < 1$. Siano $0 < a < b$ e chiamiamo $\mathcal{Q}$ il rettangolo di lati $c \pm iT$ e $d \pm iT$. Allora $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{Q}} \frac{y^s}{s}\,ds = 0$ e dal momento che $\frac{y^s}{s} \overset{\sigma\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente in t ($s = \sigma + it$), si ha che

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iT}^{c+iT} - \int_{c-iT}^{d-iT} + \int_{c+iT}^{d+iT}\right)\frac{y^s}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{d-iT}^{d+iT}\frac{y^s}{s}\,ds \overset{d\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

ragion per cui

$$I(y,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{+\infty+iT}\frac{y^s}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{+\infty-iT}\frac{y^s}{s}\,ds\ .$$

Stimiamo ora il primo di questi due integrali (per l'altro si procederà in maniera del tutto analoga):

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{+\infty+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c}^{+\infty}\frac{y^{\sigma+iT}}{\sigma+iT}\,d\sigma\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_c^{+\infty}\frac{y^\sigma}{\sqrt{\sigma^2+T^2}}\,d\sigma \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_c^{+\infty} y^\sigma\,d\sigma \\
&= \frac{1}{2T}\left(\frac{y^\sigma}{\log y}\right|_c^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{2T}\frac{y^c}{\log y} \\
&= \frac{1}{2T}\frac{y^c}{|\log y|}\ ,
\end{aligned}$$

ove negli ultimi due passaggi si è usato il fatto che $0 < y < 1$, che tra l'altro implica anche $\delta(y) = 0$. Abbiamo pertanto che

$$\begin{aligned}
|I(y,T) - \delta(y)| =& |I(y,T)| \\
<& \frac{1}{2T}\frac{y^c}{|\log y|} + \frac{1}{2T}\frac{y^c}{|\log y|} \\
=& \frac{1}{T}\frac{y^c}{|\log y|} \ .
\end{aligned}$$

Consideriamo ora l'arco di circonferenza centrata in 0 di raggio $R = \sqrt{c^2+T^2}$: sia $\bar\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tale che $Re^{i\bar\theta} = c+iT$; chiamiamo poi $\mathcal{C}$ il circuito (percorso in senso orario) formato dal segmento $c \pm iT$ e dall'arco $\tau = \{Re^{i\theta} \mid \theta \in [-\bar\theta, \bar\theta]\}$. Al solito si avrà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{y^s}{s}\, ds = 0 \ ,$$

da cui chiaramente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\tau} \frac{y^s}{s}\, ds \ .$$

Stimiamo:

$$\begin{aligned}
|I(y,T) - \delta(y)| =& |I(y,T)| \\
=& \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{-\tau} \frac{y^s}{s}\, ds \right| \\
=& \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{-\bar\theta}^{\bar\theta} \frac{y^{Re^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta}\, d\theta \right| \\
\leq& \frac{1}{2\pi}\int_{-\bar\theta}^{\bar\theta} y^{R\cos\theta}\, d\theta \\
\leq& \frac{1}{2\pi} y^{R\cos\bar\theta} \int_{-\bar\theta}^{\bar\theta} d\theta \\
=& \frac{1}{2} y^c \\
\leq& y^c \ ,
\end{aligned}$$

ove nel penultimo passaggio si è usato il fatto che $R\cos\bar\theta = c$; ma quando una quantità è minore sia di ξ che di η, allora è anche minore del più piccolo tra ξ ed η. Ciò esaurisce il caso $0 < y < 1$.

Il caso $y > 1$ si tratta in maniera simile; l'unica differenza è che il rettangolo e il semicerchio saranno ribaltati con un'isometria di asse $\sigma = c$, in modo da circondare $s = 0$ che è l'unica singolarità dell'integranda; inoltre $Res(\frac{y^s}{s}, 0) = 1$ compenserà il fatto che adesso $\delta(y) = 1$, permettendo quindi di concludere come sopra.

Non rimane da considerare che $y = 1$; vediamo con un conto diretto:

$$
\begin{aligned}
I(1,T) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{s}\, ds \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{dt}{c+it} \\
=& \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-T}^{T} \underbrace{\frac{c}{c^2+t^2}}_{pari}\, dt - \underbrace{\int_{-T}^{T} \frac{it}{c^2+t^2}\, dt}_{0}\right] \\
=& \frac{c}{\pi}\int_{0}^{T} \frac{dt}{c^2+t^2} \\
\overset{t=cu}{=}& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{T}{c}} \frac{du}{1+u^2} \\
=& \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}}_{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{T}{c}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}\right] \\
=& \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{T}{c}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}\ ,
\end{aligned}
$$

da cui segue che

$$
\begin{aligned}
\left|I(1,T) - \frac{1}{2}\right| =& \frac{1}{\pi}\int_{\frac{T}{c}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \\
<& \frac{1}{\pi}\int_{\frac{T}{c}}^{+\infty} \frac{du}{u^2} \\
=& \frac{1}{\pi}\frac{c}{T} \\
<& \frac{c}{T}\ ,
\end{aligned}
$$

che è quanto volevamo. $\square$

Definiamo adesso

$$
J(x,T) := \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s}\, ds\ .
$$

Se $c > 1$, sfruttando il lemma appena dimostrato si vede che

$$\begin{aligned}
|\psi_0(x) - J(x,T)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} - \int_{c-iT}^{c+iT} \right) \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) \left| I\left(\frac{x}{n}, T\right) - \delta\left(\frac{x}{n}\right) \right| \\
&< \sum_{n=1, n\neq x}^{+\infty} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left(1, \frac{1}{T\left|\log \frac{x}{n}\right|}\right) + \frac{c}{T}\Lambda(x) \,,
\end{aligned}$$

ove si intende che l'ultimo termine è presente solo se x è intero e potenza di un primo.
Scegliamo per comodità $c = 1 + \frac{1}{\log x}$; notiamo altresì che $x^c = ex$.

Vogliamo adesso stimare la serie appena scritta. Per farlo, consideriamo una partizione di $\mathbb{N}$ (che nel nostro caso faremo dipendere da x) e ci concentriamo sulla somma effettuata sui diversi elementi della partizione.

Sia dunque $A_x = \{n \in \mathbb{N} \mid (n \leq \frac{3}{4}x) \vee (n \geq \frac{5}{4}x)\}$. Imitando calcoli già fatti nella dimostrazione della formula di Perron, si vede facilmente che $\left|\log \frac{x}{n}\right| \geq \log \frac{5}{4} := \alpha > 0 \ \ \forall n \in A_x$. Sia allora $T > T_0$ (per T_0 sufficientemente grande); si ha quindi che

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in A_x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left(1, \frac{1}{T\left|\log \frac{x}{n}\right|}\right) &\leq \frac{x^c}{T\alpha} \sum_{n\in A_x} \Lambda(n) n^{-c} \\
&\leq \frac{ex}{T\alpha} \sum_{n\in A_x} \Lambda(n) n^{-c} \\
&\leq \frac{ex}{T\alpha} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) n^{-c}}_{-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)}} \\
&\leq \frac{ex}{T\alpha} K \log x \,.
\end{aligned}$$

Sfruttando la *formula di sommazione di Abel* e il fatto che $\sum_{n\leq t} \Lambda(n) = O(t)$ (*stima* *di Chebyshev*), spieghiamo l'ultimo passaggio:

$$\begin{aligned}\sum_{n\le Y}\Lambda(n)n^{-c} =& Y^{-c}\sum_{n\le Y}\Lambda(n)+c\int_2^Y\sum_{n\le t}\Lambda(n)t^{-c-1}\,dt\\ =&O(Y^{1-c})+O\left(c\int_2^Y t^{-c}\,dt\right)\\ =&O(Y^{1-c})+O\left(\frac{c}{c-1}[Y^{1-c}-2^{1-c}]\right)\ .\end{aligned}$$

Passando al limite per $Y\to+\infty$ si ha subito $\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-c}=O\left(\frac{c}{c-1}2^{1-c}\right)$ la quale (ricordando che $c=1+\frac{1}{\log x}$) equivale ad affermare che $-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)}=O(\log x)$.

Si conclude quindi che

$$\sum_{n\in A_x}\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^c\min\left(1,\frac{1}{T\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right)=O\left(\frac{x\log x}{T}\right)\ . \tag{2.8}$$

Considero adesso $B_x=\{n\in\mathbb{N}\mid\frac{3}{4}x<n<x\}$. Sia poi x_1 la più grande potenza di un primo che sia minore di x. Allora, senza perdita di generalità possiamo supporre che $\frac{3}{4}x<x_1<x$; se così non fosse, il contributo dato dalla somma su B_x sarebbe nullo.

Per il termine $n=x_1$ abbiamo che

$$\log\frac{x}{n}=-\log\left(1-\frac{x-x_1}{x}\right)\ge\frac{x-x_1}{x}\ .$$

L'ultimo passaggio si giustifica nel seguente modo: essendo $\log(1+x)\le x\quad\forall x>-1$, se restringo $x\in]-1,0[$, allora ponendo $x=-y$ si ha che $y\in]0,1[$ e quindi $\log(1-y)\le -y$, fatto che equivale a $-\log(1-y)\ge y$. Osservando che $0<\frac{x-x_1}{x}<1$ si conclude.

Notando poi che $\Lambda(x_1)\le\log x_1\le\log x$, allora il termine $n=x_1$ contribuisce alla somma nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\Lambda(x_1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^c\min\left(1,\frac{1}{T\left|\log\frac{x}{x_1}\right|}\right)&\le\left(\frac{x}{x_1}\right)^c\Lambda(x_1)\min\left(1,\frac{1}{T\left(\frac{x-x_1}{x}\right)}\right)\\ &\le\left(\frac{x}{x_1}\right)^c(\log x)\min\left(1,\frac{1}{T\left(\frac{x-x_1}{x}\right)}\right)\ ,\end{aligned}$$

da cui segue la stima

$$\Lambda(x_1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^c\min\left(1,\frac{1}{T\left|\log\frac{x}{x_1}\right|}\right)=O\left((\log x)\min\left(1,\frac{1}{T\left(\frac{x-x_1}{x}\right)}\right)\right)\ . \tag{2.9}$$

Vediamo ora la stima per i rimanenti termini di B_x; consideriamoli in questo modo: $n = x_1 - \nu$, con $0 < \nu < \frac{1}{4}x$. Allora, per quanto visto sopra si ha che

$$\log\frac{x}{n} \geq \log\frac{x_1}{n} = -\log\left(1 - \frac{\nu}{x_1}\right) \geq \frac{\nu}{x_1} \ ,$$

e anche $\Lambda(x_1 - \nu) \leq \log(x_1 - \nu) \leq \log x$, da cui

$$\sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x} \underbrace{\Lambda(x_1-\nu)}_{\leq \log x} \underbrace{\left(\frac{x}{x_1-\nu}\right)^c}_{\leq K} \underbrace{\min\left(1, \frac{1}{T\left|\log\frac{x}{x_1-\nu}\right|}\right)}_{\leq \frac{x_1}{T\nu} \leq \frac{x}{T\nu}} \leq K\frac{x}{T}\log x \underbrace{\sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x}\frac{1}{\nu}}_{\leq H\log x}$$

ove il fatto che $\sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x}\frac{1}{\nu} \leq H\log x$ è stato spiegato nella dimostrazione della formula di Perron, nella sezione precedente (chiaramente H e K sono opportune costanti reali positive). Quindi

$$\sum_{0<\nu<\frac{1}{4}x} \Lambda(x_1-\nu)\left(\frac{x}{x_1-\nu}\right)^c \min\left(1, \frac{1}{T\left|\log\frac{x}{x_1-\nu}\right|}\right) = O\left(\frac{x}{T}(\log x)^2\right) \ . \qquad (2.10)$$

Osservando ora che $\frac{x}{T}\log x = O(\frac{x}{T}(\log x)^2)$, dal momento che la somma su $C_x = \{n \in \mathbb{N} \mid x < n < \frac{5}{4}x\}$ ha un apporto analogo a quello della somma su B_x (con la differenza che x_1 è sostituito ora da x_2, il più piccolo numero maggiore x che sia potenza di un primo), mettendo assieme la (2.8), la (2.9) e la (2.10), si conclude che

$$|\psi_0(x) - J(x,T)| = O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right) + O\left((\log x)\min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right)\right) \ , \qquad (2.11)$$

avendo denotato con $\langle x\rangle := \min\{|x-n| \ : \ n = p^m, n \neq x\}$.

Per futura utilità, diamo un nome a questo resto:

$$R_1(x,T) := O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right) + O\left((\log x)\min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right)\right) \ .$$

Il passo successivo è quello di sostituire il segmento d'integrazione di $J(x,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds$ con gli altri tre lati del rettangolo di vertici $c \pm iT$, $-U \pm iT$ (con $U > 0$ dispari, per evitare di toccare i poli dell'integranda, che sono, tra gli altri, gli interi pari negativi). Chiamo $\mathcal{S}$ tale rettangolo. Chiaro che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{S}}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds = x - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2m<U}\frac{x^{-2m}}{-2m} \ . \qquad (2.12)$$

La scelta di T richiede attenzione. Considero $A_T = \{\rho = \beta + i\gamma \ : \ |\gamma - T| < 1\}$. Allora la *formula di Riemann-Von Mangoldt* (lemma al §15 di [Dav]), assicura che per un arbitrario T sufficientemente grande, si ha che $|A_T| = O(\log T)$.

Pertanto suddividendo la regione della striscia critica compresa tra $t = T - \frac{1}{2}$ e $t = T + \frac{1}{2}$ in $O(\log T)$ intervalli la cui misura sia dello stesso ordine di grandezza di $\frac{1}{\log T}$, nel peggiore dei casi abbiamo uno zero non banale della ζ (e quindi una singolarità dell'integranda) in ognuna di esse: questo implica che si riesce a trovare un'ordinata che si mantiene lontana dai poli a meno di spostarsi di $O\left(\frac{1}{\log T}\right)$ da T. Quindi, dette γ_1 e γ_2 le ordinate di due tali zeri non banali, si ha che $\frac{1}{\log T} = O(|\gamma_1 - \gamma_2|)$. Esiste pertanto $\epsilon > 0$ tale che facendo variare T in un insieme limitato di tale ampiezza (i.e. $T \in [T_-, T_+]$ con $|T_+ - T_-| < \epsilon$), si ha $\frac{1}{\log T} = O(|\gamma - T|)$ che equivale a affermare che

$$\frac{1}{|\gamma - T|} = O(\log T) \ .$$

Valendo ciò per ogni zero non banale $\rho = \beta + i\gamma$, possiamo quindi fare una "buona" scelta per T, tenendo il cammino d'integrazione sufficientemente lontano dai poli dell'integranda.
Richiamiamo un altro risultato reperibile in [Dav], §15; esso stabilisce che se $s = \sigma + iT$ e $-1 \leq \sigma \leq 2$, allora

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma - T| < 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\log T) \ .$$

Con l'attuale scelta di T, ogni termine di questa somma è $O(\log T)$; essendo però anche il numero degli addendi un $O(\log T)$, segue che sul tratto di cammino orizzontale, vale la seguente stima:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2 T) \ , \quad -1 \leq \sigma \leq 2 \ .$$

Stimiamo quindi l'integrale su questo tratto di cammino:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-1+iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} \, ds \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{c} \left(-\frac{\zeta'(\sigma + iT)}{\zeta(\sigma + iT)} \right) \frac{x^\sigma x^{iT}}{\sigma + iT} \, d\sigma \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{c} \underbrace{\left| -\frac{\zeta'(\sigma + iT)}{\zeta(\sigma + iT)} \right|}_{\leq K \log^2 T} \frac{x^\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + T^2}} \, d\sigma \\
&\leq \frac{K}{2\pi} \frac{\log^2 T}{T} \int_{-\infty}^{c} x^\sigma \, d\sigma \\
&= \frac{Ke}{2\pi} \frac{x}{\log x} \frac{\log^2 T}{T} \ .
\end{aligned}$$

Bisogna però fare una precisazione: il conto appena fatto è valido solo se $c \leq 2$, cosa vera se e solo se $x \geq e$; però abbiamo supposto $x \geq 2$, quindi bisogna analizzare il caso $2 \leq x \leq e$, equivalente a $c \in [2, 1 + \frac{1}{\log 2}]$; in tale dominio però l'integranda è olomorfa e quindi esprimibile in serie di potenze attorno ad un punto $s_0 = \sigma_0 + iT$, $\sigma_0 \in]2, 1 + \frac{1}{\log 2}[$; l'aver scelto $\Im(s_0) = T$ non è stato un caso: poteva esser fatto e si rivela utile nel conto che dimostra che (poniamo $1 + \frac{1}{\log 2} = \xi$)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{2+iT}^{\xi+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \, ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{2+iT}^{\xi+iT} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (s - s_0)^n \, ds \right| = O(1) \ .$$

Si tratta di un conto elementare che non svolgeremo. Possiamo quindi concludere che

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-1+iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} \, ds \right| = O\left(\frac{x \log^2 T}{T \log x} \right) \ .$$

Prima di procedere presentiamo una stima di $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ utile nel dominio che andremo a considerare.

Lemma 2.2.2. Nel semipiano $\{\sigma \leq -1\}$ privato dei dischi di centro $-2m$, $m \in \mathbb{N}$ e raggio $\frac{1}{2}$ si ha che

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = O(\log(2|s|)) \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo il prolungamento analitico della ζ nella sua forma asimmetrica (1.20) e operiamo la sostituzione $s \to 1 - s$, ottenendo

$$\zeta(1-s) = s^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi}{2} s\right) \Gamma(s) \zeta(s) \ .$$

Stiamo chiaramente considerando $1 - \sigma \leq 1$, da cui $\sigma \geq 2$. La derivata logaritmica è, a meno di una costante additiva

$$\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} s\right) + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} \ .$$

Se s si mantiene sufficientemente lontana dai numeri dispari, il primo termine è limitato. Questa condizione equivale a

$$\begin{aligned} |s - (2m+1)| \geq \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow |(1-s) + 2m| \geq \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow |(1-s) - 2m| \geq \frac{1}{2} \ , \end{aligned}$$

(l'ultimo passaggio per arbitrarietà di $m \in \mathbb{Z}$). L'ultima relazione vuol dire che nel semipiano $\{\sigma \leq -1\}$ la ζ non si avvicina mai ai pari negativi meno di $\frac{1}{2}$, cosa vera

per ipotesi. Quindi il primo termine è limitato.
Poi: $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = O(\log|s|)$. Sfruttando la monotonia del logaritmo osserviamo che

$$\sigma^2 + t^2 \leq 2((1-\sigma)^2 + t^2) \iff (\sigma \geq 2 + \sqrt{2}) \vee (\sigma \leq 2 - \sqrt{2}) \; ;$$

quindi per $\sigma \geq 2 + \sqrt{2}$ vale $\log|s| = O(2\log|1-s|)$.
Se invece $2 \leq \sigma \leq 2 + \sqrt{2}$, $\exists K > 0$ tale che $\log|s| \leq K(2\log|1-s|)$. Quindi il secondo termine è $O(\log(2|1-s|))$.
Essendo infine il terzo termine limitato per $\sigma \geq 2$, si conclude. $\square$

Stimiamo adesso l'integrale sul rimanente segmento orizzontale $[-U+iT, -1+iT]$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-U+iT}^{-1+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{-1}\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right|\frac{x^\sigma}{\sqrt{\sigma^2+T^2}}\,d\sigma \\
&\leq \frac{K}{2\pi}\int_{-U}^{-1}\log\left(2\sqrt{\sigma^2+T^2}\right)\frac{x^\sigma}{\sqrt{\sigma^2+T^2}}\,d\sigma \\
&\leq \frac{K}{2\pi}\frac{\log\left(2\sqrt{U^2+T^2}\right)}{T}\int_{-U}^{-1}x^\sigma\,d\sigma \\
&\leq \frac{K}{2\pi}\frac{\log\left(2\sqrt{U^2+T^2}\right)}{T}\int_{-\infty}^{-1}x^\sigma\,d\sigma \\
&= \frac{K}{2\pi}\frac{\log\left(2\sqrt{U^2+T^2}\right)}{Tx\log x} \; .
\end{aligned}$$

Un facile conto permette di stabilire che quest'ultimo termine è $O\left(\frac{\log T}{Tx\log x}\right)$, da cui si conclude che

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-U+iT}^{-1+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right| = O\left(\frac{\log T}{Tx\log x}\right) \; .$$

Osservando poi che $O\left(\frac{x\log^2 T}{T\log x}\right) = O\left(\frac{\log T}{Tx\log x}\right)$, possiamo concludere che il contributo fornito dai segmenti orizzontali (il segmento $[-U-iT, c-iT]$ si tratta allo stesso modo) è

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-U\pm iT}^{c\pm iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right| = O\left(\frac{\log T}{Tx\log x}\right) \; . \tag{2.13}$$

Concludiamo stimando il segmento verticale (sfruttando nuovamente la stima per la derivata logaritmica della ζ sul semipiano $\{\sigma \leq 1\}$):

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-U-iT}^{-U+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\zeta'(-U+it)}{\zeta(-U+it)}\right|\frac{x^{-U}}{\sqrt{U^2+t^2}}\,dt\\ &\leq \frac{K}{2\pi}\int_{-T}^{T}\log\left(2\sqrt{U^2+t^2}\right)\frac{x^{-U}}{\sqrt{U^2+t^2}}\,dt\\ &\leq \frac{K}{2\pi}\frac{1}{Ux^U}\int_{-T}^{T}\log\left(2\sqrt{U^2+t^2}\right)\,dt\\ &\leq \frac{2K}{2\pi}\frac{T}{Ux^U}\log\left(2\sqrt{U^2+T^2}\right)\ ;\end{aligned}$$

anche in questo caso un semplice conto ci permette di stabilire che l'ultimo termine è $O\left(\frac{T\log U}{Ux^U}\right)$, da cui subito

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-U-iT}^{-U+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds\right| = O\left(\frac{T\log U}{Ux^U}\right)\ , \tag{2.14}$$

contributo infinitesimo per $U \to +\infty$.

La (2.13) e la (2.14) sono quindi i resti ottenuti stimando l'integrale sui lati orizzontali e sul lato verticale sinistro; diamo loro un nome:

$$R_2(x,T,U) = O\left(\frac{\log T}{Tx\log x}\right) + O\left(\frac{T\log U}{Ux^U}\right)\ .$$

Per quanto appena detto,

$$R_2(x,T,U) \overset{U\to+\infty}{\longrightarrow} O\left(\frac{\log T}{Tx\log x}\right) =: R_2(x,T)\ .$$

Riscriviamo quindi la (2.12) aggiungendo in modo ovvio la variabile U alla funzione J:

$$J(x,T,U) = x - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2m<U}\frac{x^{-2m}}{-2m} + R_2(x,T,U)\ ;$$

quindi passando al limite per $U \to +\infty$, quest'ultima relazione si riscrive nel seguente modo:

$$J(x,T) = x - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + R_2(x,T)\ ,$$

e quindi, ricordando la (2.11), si ha che

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + R_1(x,T) + R_2(x,T)\ .$$

Un ultimo facile conto mostra infine che

$$O\left(\frac{\log T}{Tx\log x}\right)+O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)=O\left(\frac{x\log^2(xT)}{T}\right) .$$

Chiamando dunque

$$R(x,T)=O\left(\frac{x\log^2(xT)}{T}\right)+O\left((\log x)\min\left(1,\frac{x}{T\langle x\rangle}\right)\right) ,$$

possiamo finalmente scrivere una forma più precisa della *formula esplicita* per la ψ:

$$\psi_0(x)=x-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+R(x,T) ;$$

osservando che $R(x,T)\overset{T\to+\infty}{\longrightarrow}0$, si ottiene la formula esplicita presentata in principio. Da ultimo, si osserva che la convergenza è uniforme in x, in qualsiasi intervallo di $\mathbb{R}_{\geq 2}$ che non contenga potenze di primi. Questa richiesta è essenziale dal momento che ψ_0 è discontinua in tutte le potenze di primi.

2.3 Conclusione

Suddetta formula mette in relazione i numeri primi e gli zeri non banali della funzione ζ in maniera -appunto- esplicita. Si intuisce da ciò l'importanza di tali zeri; in particolare Riemann, formulò un'ipotesi sulla loro distribuzione nella striscia critica, secondo cui essi giacciono tutti sulla retta critica $\sigma = \frac{1}{2}$. Tale congettura prende il nome di *ipotesi di Riemann* (RH) ed è uno dei problemi aperti più importanti in Matematica. La formula esplicita è inoltre un punto di passaggio obbligato nella dimostrazione analitica del *teorema dei numeri primi*, congetturato da Gauss nel 1792 e dimostrato indipendentemente da J. Hadamard e C. J. De la Vallèe Poussin nel 1896. Tale teorema afferma che, chiamata $\pi(x)$ la funzione di variabile reale che conta i numeri primi minori o uguali ad x, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1 \ .$$

Per lungo tempo si è pensato che non fosse possibile dimostrare questo teorema con metodi di variabile reale, ma nel 1948, P. Erdös e A. Selberg sono riusciti nell'intento. Una formulazione equivalente è (si veda [Ing], pag. 13)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \ .$$

Osservando la (2.5) risulta chiaro che per dimostrare quest'ultimo limite è necessario avere informazioni dettagliate sulla dislocazione degli zeri non banali della funzione ζ. Esulando tale analisi dagli scopi di questa tesi, non procediamo oltre.

Bibliografia

[DM] Giuseppe De Marco, *Analisi Due*, Decibel-Zanichelli, Padova, 1999.

[PK] R.B. Paris, D. Kaminski, *Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals*, Cambidge University Press, New York, 2001.

[Ing] A.E. Ingham, *The Distribution Of Prime Numbers*, Cambridge University Press, 1932.

[Dav] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Springer-Verlag, Chicago, 1967.

[MV] H. L. Mongomery, R. C. Vaughan *Multiplicative Number Theory: 1. Classical Theory*, Cambridge University Press, 2007.

[T1] E. C. Titchtmarsh, *The Theory Of The Riemann Zeta Function*, Oxford University Press, New York, 1988.

[T2] E. C. Titchmarsh, *Introduction To The Theory Of Fourier Integrals*, Oxford University Press, 1948.

[Ap] T. M. Apostol, *Introduction To Analytic Number Theory*, Springer, 1976