Proyecto Final de Análisis Numérico

Método de Newton-Raphson para calcular la Yield To Maturity

Gómez Rodríguez Angel Giovanni & Melchor Reyes Nancy

Universidad Nacional Autónoma de México

13 de Agosto de 2021

Contenido

Contenido

Resumen

En el presente proyecto, creamos una clase de bonos en Python que calculará el precio y el rendimiento al vencimiento de un bono con cupón. Además, para calcular la *Yield To Maturity (YTM)* usaremos el método numérico de Newton-Raphson para hallar raíces.

Contenido

Conocimientos Previos

¿Qué son los bonos?

Los bonos (nombre para los que son emitidos por el gobierno) son instrumentos financieros de deuda a través de los cuales se da el financiamiento de una entidad. Se colocan pagando por ellos un precio que le da al inversionista el derecho de cobro de unos pagos llamados cupones. Al vencimiento de los bonos se recibe el pago de una cantidad final que se llama valor de redención. Es un concepto general que representa la base de muchos tipos de instrumentos más específicos.

Hay diferentes tipos de bonos, pero particularmente en este proyecto nos enfocaremos en los bonos con cupones fijos.

Conocimientos Previos

Bonos con cupones fijos

Los bonos con cupón son los bonos que además del nocional, al final pagan un cupón fijo, ya sea anual o semestralmente hasta su vencimiento.

Contenido

Conocimientos Previos

Clasificación de bonos...

Hay una clasificación de los bonos según su relación entre su valor nominal y su precio. Según definimos las variables anteriormente, puede haber tres casos:

- Si C=F, se dice que el bono se reembolsa a la par.
- Si C>F, se dice que el bono se reembolsa con premio.
- Si C>F, se dice que el bono se reembolsa con descuento.

Contenido

¿Qué variables están involucradas?

- P denotará el precio del bono
- F denotará el valor nominal o valor facial (par value) del bono
- C es el valor de redención del bono
- j es la tasa cupón del bono
- F*r es el monto del cupón
- r es la tasa de rendimiento del bono, frecuentemente llamada *Yield To Maturity*
- n es el número de pagos de cupón

En este caso nos interesa ver qué sucede con la *Yield To Maturity*

Contenido

Yield to Maturity

La tasa de rendimiento al vencimiento (YTM) es la tasa de rendimiento porcentual de un bono asumiendo que el inversor tiene el activo hasta su fecha de vencimiento. Es la suma de todos los pagos de cupones restantes. El rendimiento de un bono al vencimiento aumenta o disminuye según su valor de mercado y cuántos pagos quedan por realizar.
La tasa de cupón es la cantidad anual de interés que recibirá el propietario del bono.
Por si esto fuera poco, para complicar las cosas, la tasa de cupón también puede denominarse rendimiento del bono.

Contenido

Conocimientos Previos

Sobre el cálculo de bono con cupones

El valor del bono puede ser escrito como:

$$PV(r) = \sum_{t=1}^{n} \frac{F * j}{(1+r)^t} + \frac{C}{(1+r)^n}$$

Contenido

Contenido

Método de Newton-Raphson

Analicemos ésta ecuación, y todo lo que implicaría resolver para r, probablemente lo primero que nos gustaría hacer es multiplicar por $1 + r$ a las respectivas potencias para deshacernos de todos los términos y, en su lugar, tenemos un polinomio que también será de un determinado grado. De esta manera, intentar manipular algebraicamente la expresión no es exactamente lo más sencillo para encontrar raíces analíticas.

De esta manera que lo que vamos a hacer aquí es usar el llamado método de Newton-Raphson este es un método numérico que usamos para la búsqueda de raíces de funciones no lineales.

Contenido

Contenido

¿Cómo funciona el método?

El método se basa en la idea de aproximar una raíz de una función no lineal por la posible raíz de una función lineal que es básicamente tangente a esa función no lineal.

Contenido

Sobre el cálculo de bono con cupones

Ahora, de la ecuación:

$$PV(r) = \sum_{t=1}^{n} \frac{F * j}{(1+r)^t} + \frac{C}{(1+r)^n}$$

Tenemos que

$$PV(r) - Precio = 0$$

Contenido

Sobre el cálculo de bono con cupones

Haciendo la expansión correspondiente tenemos que:

$$f(r) = \frac{C}{(1+r)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{F * j}{(1+r)^t} - Precio = 0$$

Contenido

Contenido

Casos más simples

Si la función es lineal, podemos decir un poco más porque esta relación tiene una derivada que será constante, este límite es constante y también esta relación no depende de la elección de esos dos puntos.

$$\text{Si f es lineal} \Longrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Contenido

Contenido

Casos más avanzados

Podemos aprovechar este hecho sobre la función lineal para encontrar el valor de las raíces, si re-organizamos un poco esta ecuación anterior. Así tomamos el incremento que tenemos para esta función aquí. Además, hay una diferencia en los argumentos y, por supuesto, tenemos el punto de partida desde el cual vamos haciendo los incrementos.

Con base en la definición de la derivada podemos calcular la raíz de una función lineal, ahora, la idea del Método de Newton-Raphson es usar esta aproximación y ver cómo funciona para una función no lineal. Así podemos hacer una aproximación a la raíz mediante iteraciones:

$$f(x_1) = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Contenido

Ejemplo

Caso a analizar

$$f(r) = \frac{100}{(1+r)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{F*r}{(1+r)^t} - Precio = 0 \tag{1}$$

Contenido

Continuación

El código lo analizaremos en Jupyter, gracias.