UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Kompaktna priponska drevesa

(Compact Suffix Tree)

Ime in priimek: *Jani Suban*
Študijski program: *Računalništvo in informatika, 2. stopnja*
Mentor: *prof. dr. Andrej Brodnik*
Somentor: *izr. prof. dr. Rok Požar*

Koper, julij 2025

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Jani SUBAN
Naslov magistrskega dela: Kompaktna priponska drevesa

Kraj: Koper
Leto: 2025

Število listov: 86 Število slik: 22 Število tabel: 4
Število referenc: 31
Mentor: prof. dr. Andrej Brodnik
Somentor: izr. prof. dr. Rok Požar

UDK:
Ključne besede:
Priponska drevesa, Priponska polja, Kompaktna priponska drevesa, Kompaktne podatkovne strukture
Izvleček:
Magistrska naloga obravnava problem iskanja vzorcev v daljših besedah z uporabo podatkovnih struktur, kot so priponsko drevo, priponsko polje in kompaktno priponsko drevo. Namen naloge je preučiti vpliv kompaktne predstavitve na izgradnjo in uporabo priponskih dreves, zato je bila storjena empirična primerjava teh struktur. Primerjava je bila storjena za zaporedje genov ter za besedilo v naravnem jeziku. Pri tem se vidijo praktične prednosti kompaktnosti, saj se zmanjša učinkovitost priponskega drevesa, ko preseže velikost delovnega pomnilnika in zato potrebuje Swap razdelek na disku. Te težave nimata priponsko polje in kompaktno priponsko drevo za testirane velikosti besed.

Key document information

Name and SURNAME: Jani SUBAN
Title of the thesis: Compact Suffix Tree

Place: Koper
Year: 2025

Number of pages: 86 Number of figures: 22 Number of tables: 4
Number of references: 31
Mentor: prof. dr. Andrej Brodnik
Co-Mentor: izr. prof. dr. Rok Požar

UDC:
Keywords:
Suffix tree, Suffix array, Compressed suffix tree, compact data structures
Abstract:
The master's thesis addresses the problem of pattern matching in longer texts using data structures such as the suffix tree, suffix array, and compressed suffix tree. The aim of the thesis is to examine the impact of compact representation on the construction and use of suffix trees, for which an empirical comparison of these structures was performed. The comparison was carried out on a gene sequence and on a natural language text. The practical advantages of compactness are evident, as the efficiency of the suffix tree decreases when it exceeds the size of the main memory and thus requires the use of a swap partition on the disk. The suffix array and the compressed suffix tree did not face this issue with the tested text sizes.

Kazalo vsebine

Kazalo preglednic

Kazalo slik in grafikonov

Seznam kratic

angl.	Angleščina
slo.	Slovenščina
idr.	in drugi
DNK	Deoksiribonukleinska kislina
KMP	Knuth–Morris–Pratt
ST	angl. *Suffix Tree* (slo. Priponsko drevo)
rmM	angl. *range minimum-maxsimum*
rmq	angl. *range minimum querry*
rMq	angl. *range maxsimum querry*
LOUDS	angl. *Level Order Unary Degree Sequence* (slo. Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč po plasteh)
DFUDS	angl. *Depth Frst Unary Degree Sequence* (slo. Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč v globino)
BP	angl. *Balanced Parentheses* (slo. Uravnoteženi oklepaji)
SA	angl. *Suffix Array* (slo. Priponsko Polje)
LCP	angl. *Longest Common Preffix* (slo. Najdaljša skupna predpona)
CST	angl. *Compressed Suffix Tree* (slo. Kompaktno priponsko drevo)
CSA	angl. *Compressed Suffix Array* (slo. Kompaktno priponsko polje)
CSV	angl. *Comma-separated values*
GCC	angl. *GNU C Compiler* (slo. GNU C Prevajalnik)
SDSL	angl. *Succinct Data Structure Library* (slo. Knjižnica kompaktnih podatkovnih struktur)
ASCII	angl. *American Standard Code for Information Interchange* (slo. Ameriški standardni nabor za izmenjavo informacij)

Zahvala

Najprej bi se rad zahvalil mentorju prof. dr. Andreju Brodniku in somentorju izr. prof. dr. Roku Požarju za pomoč pri izdelavi magistrske naloge. Poleg tega bi se rad zahvalil tudi svoji družini in prijateljem. Posebno pa bi se rad zahvalil svojim staršem in bratu, ki so mi bili v pomoč ter mi stali ob strani v času študija.

1 UVOD

Pogosti problem pri obdelavi daljših besed je iskanje vzorcev v njih. V procesiranju naravnih jezikov vlogo vzorca pogosto prevzame iskana beseda naravnega jezika in vlogo vhodne besede pa prevzame besedilo, v katerem želimo iskati besedo. Medtem ko v bioinformatiki vlogo vzorca prevzame specifični gen ali druga DNK sekvenca, pri tem pa je vhodna beseda genomu.

Ko v besedi T dolžine n iščemo zgolj en vzorec P dolžine m, se za iskanje lahko uporabi Knuth–Morris–Pratt (KMP) algoritem s časovno zahtevnostjo $O(n + m)$. V primeru, da se v besedi išče več vzorcev, je smiselno nad besedo zgraditi indeks, recimo priponsko drevo, ki je lahko zgrajeno v času $O(n)$, in nato iskati vzorce. Časovna zahtevnost iskanja vzorca v priponskem drevesu je sorazmerna dolžini vzorca, $O(m)$. Ko je vzorec prisoten v besedi, se vsaj ena pripona besede začne z iskanim vzorcem. Torej se vzorec zagotovo nahaja na začetku sprehoda iz korena proti listom priponskega drevesa, zgrajenega nad besedo. Peter Weiner je kot prvi predstavil priponska drevesa leta 1973 [**?**] in jih uporabil v algoritmu za iskanje vzorcev v besedi. Časovna zahtevnost podanega algoritma za iskanje vzorcev v besedi je $O(m)$. Velikost priponskega drevesa je sorazmerna z dolžino vhodne besede, torej pri velikih besedah preraste velikost delovnega pomnilnika, kar močno vpliva na hitrost iskanja. Rešitev te težave je kompaktna predstavitev priponskega drevesa [**?**].

Namen magistrske naloge je preučevanje vpliva kompaktne predstavitve na izgradnjo priponskih dreves in na operacije nad njimi. V nalogi bodo predstavljene časovne zahtevnosti osnovnih operacij in poizvedb ter izgradnje priponskih dreves, priponskih polj in kompaktne predstavitve priponskih dreves. Izdelana bo tudi empirična primerjava različnih implementacij priponskih dreves in drugih indeksov besed.

1.1 STRUKTURA

Magistrska naloga je razdeljena na pet delov. V drugem poglavju bodo predstavljene notacije uporabljene v magistrski nalogi. Predstavljen bodo tudi osnovne podatkovne strukture in operacije nad njimi, ki bodo uporabljene za implementacijo kompaktne predstavitve priponskega drevesa.

V tretjem poglavju naloge bo podrobno predstavljena podatkovna struktura priponsko drevo (angl. *Suffix Tree* oziroma ST). Poleg predstavitve strukture bo v poglavju

prikazana tudi metoda, ki sprotno (angl. *on-line*) gradi priponsko drevo v času $O(n)$ ter implementacija poizvedb nad vhodno besedo s pomočjo priponskega drevesa. Zatem sledi v četrtem poglavju predstavitev alternativnega indeksa besedila, priponsko polje (angl. *Suffix Array* oziroma SA). Predstavljena bo tudi metoda izgradnje priponskega polja v $O(n)$ času ter implementacija poizvedb s priponskim poljem.

V petem poglavju bo predstavljena podatkovna struktura kompaktno priponsko drevo (angl. *Compressed Suffix Tree* oziroma CST), ki omogoča iste operacije kot priponsko drevo, pri tem pa potrebuje manj prostora. V tem poglavju bo tudi predstavljen algoritem za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa, ki skozi celotno izgradnjo ohranja kompaktnost podatkovne strukture. Zatem pa bodo predstavljene implementacije poizvedb nad vhodno besedo s pomočjo kompaktne predstavitve priponskega drevesa.

V šestem poglavju bo izdelana primerjava med različnimi indeksi, ki so bili predhodno predstavljeni. Izdelana bo empirična primerjava različnih indeksov, ki bo merila prostorsko zahtevnost podatkovnih struktur in časovno zahtevnost izgradnje ter poizvedb nad njimi.

2 OZNAKE, DEFINICIJE IN OSNOVNE OPERACIJE

V tem poglavju bodo predstavljene osnovne oznake in definicije, ki bodo uporabljene skozi magistrsko nalogo. Za tem pa bodo predstavljene osnovne podatkovne strukture in predstavitve podatkovnih struktur, ki so potrebne za implementacijo kompaktne predstavitve priponskih dreves.

2.1 OZNAKE IN OSNOVNE DEFINICIJE

Skozi magistrsko nalogo bo Σ predstavljala abecedo. Abeceda je množica znakov $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_a\}$. Znake v Σ lahko uredimo v zaporedje ter definiramo, da je σ_i manjši od σ_j, ki je različen od σ_i, natanko tedaj ko se znak σ_i pojavi pred znakom σ_j v zaporedju. Sicer je σ_i večji od σ_j. Vhodna beseda T dolžine n znakov, iz katere bomo zgradili priponsko drevo, priponsko polje ali kompaktno priponsko drevo, je sestavljena iz znakov abecede Σ, torej je $T = \Sigma^n$. Na podoben način P predstavlja iskani vzorec dolžine m znakov, katerega se želi preveriti prisotnost v T. Tako kot beseda T je tudi vzorec P sestavljen iz znakov abecede Σ, torej je $P = \Sigma^m$.

Niz znakov iz abecede Σ, ki je del besede in se začne na i-tem in se konča na j-tem znaku besede, imenujemo podniz in ga označimo kot $T[i : j]$. Posebna vrsta podniza, ki se začne na i-tem znaku in konča na koncu besedila, imenujemo pripona ter se jo označi kot $T[i : n]$ oziroma $T[i :]$. Poljubni nizi oziroma podnizi so označeni z grškimi črkami α, β in γ ter pri tem je dopisano, ali gre za podniz ali niz. Formalno je podniz definiran na sledeč način:

Definicija 2.1. Niz $\alpha \in \Sigma^*$ je podniz besede T, ko obstaja tak $1 \leq i \leq n$, za katerega velja, da je $\alpha = T[i : i + |\alpha|]$.

Dva poljubna niza se lahko združita v novi daljši niz s stikom, ki je definiran na sledeči način:

Definicija 2.2. Stik nizov α in β je niz $\gamma = \alpha \cdot \beta = \alpha\beta$, pri čemer je $\alpha = \gamma[1 : |\alpha|]$ in $\beta = \gamma[|\alpha| + 1 : |\alpha| + |\beta|]$.

Za razliko od nizov in podnizov so znaki iz abecede Σ označeni s črkama x ali t. Oznaka $T[i]$ pa predstavlja znak na i-tem mestu vhodne besede.

Ker bo nad besedo T izgrajeno priponsko drevo ali kompaktno priponsko drevo, ki je uporabljeno za hitrejše iskanje vzorcev v besedi, so skozi nalogo vozlišča označena s črkami s, v, w in u. Listi priponskega drevesa pa bodo označeni s črko l, ko se govori na splošno o listih, sicer pa bodo označeni z l_i, pri čemer i označuje zaporedno število lista od leve proti desni.

Skozi nalogo bodo $\log_2 n$ označeni kot $\log n$. Če zapisan logaritem ni dvojiški logaritem, bo osnova le tega označena.

2.2 ENIŠKI ZAPIS

Kot je iz samega imena zapisa razvidno, bodo števila predstavljena v eniškem sistemu. Torej bo nenegativno celo število s predstavljeno kot 1^s0, pri čemer je abeceda $\Sigma = \{0, 1\}$.s s-timi enicami ter števila so med seboj ločena z ničlo. Na primer, seznam števil $[1, 3, 0, 4, 1]$ bi bil v eniškem zapisu predstavljen kot niz `10111001111010`.

Eniški zapis bo uporabljen pri kompaktni predstavitvi dreves. Razlog za uporabo eniškega zapisa števil namesto dvojiškega zapisa števil je lažja pretvorba operacij nad drevesi na operacije nad bitimi polji, saj imajo na ta način enice in ničle vsaka svoj pomen. Ker je zapis uporabljen za predstavitev stopenj vozlišč, potem predstavlja zaporedje 1^*0 eno vozlišče. Vsaka enica v vozlišču predstavlja otroka vozišča, ničla pa predstavlja, da je bilo vozlišče že obiskano v zapisu.

2.3 MODEL RAČUNANJA

Preden se lahko predstavi način shranjevanja bitnega polja, je potrebno predstaviti uporabljen model računanja. Splošen model računanja bo uporabljen, saj se različne arhitekture mikro procesorjev razlikujejo med seboj in bi bilo potrebo narediti analizo za vsako arhitekturo posebej. Zato bo izbran model računanja Računalnik z naključnim dostopom (angl. *random-access machine* oziroma RAM). Bolj natančno bo uporabljen besedni RAM (angl. *word RAM*).

Osnovna različica RAM modela podpira, da so vse aritmetične operacije nad celimi števili in logične operacijami nad biti izvedene v konstantnem času. Poleg tega RAM omogoča dostop do pomnilnika v konstantnem času ter linearni čas za dodelitev zaporednega spomina. Vse te operacije so storjene v enakem času tudi v besednem RAM modelu. Edina razlika med modeloma je, da RAM predpostavlja neskončno velik pomnilnik za razliko od besednega RAM, ki pa omeji velikost pomnilnika na U naslovov in posledično je velikost ene pomnilniške besede na $w = \log U$ bitov, kar je velikost enega naslova $[?, ?, ?]$. Pri tem se lahko definira tudi »cela števila« (angl. *Integer*). »Cela števila« so definirana kot podmnožica celih števil, ki so lahko predstavljena v

dvojiškem zapisu z eno računalniško besedo [**?**].

2.4 BITNO POLJE

Bitno polje (angl. *bit array*) B dolžine $b = |B|$ je polje, v katerem je shranjenih b bitov. Ker je dostop do posameznega bita možen v konstantnem času, se bitno polje lahko uporabi kot osnovna podatkovna struktura za implementacijo kompaktnih predstavitve drugih podatkovnih struktur. Primer take podatkovne strukture, ki uporablja bitno polje za svojo kompaktno predstavitev, je drevo.

V nadaljevanju tega podpoglavja bo predstavljeno, kako učinkovito shraniti bitno polje ter ohraniti dostop do podatkov v konstantnem času. Predstavljene bodo še druge operacije nad bitnimi polji, ki se uporabljajo za reševanje problemov, ki so predstavljeni z bitnimi polji. Predstavljene operacije so: $dostop(B, i)$ (angl. *access*), $rang(B, i)$ (angl. *rank*), $izbira(B, i)$ (angl. *select*), $predhodnik(B, i)$, $NaslednikBi$ in dodatne operacije nad območji (angl. *range querry*) bitnega polja. Vse predstavljene operacije želimo opraviti čim bolj učinkovito ter pri tem uporabiti čim manj dodatnega prostora.

Shramba in dostop. Intuitivni način shranjevanja bitnega polja B dolžine b v spominu bi bil tak, da bi se vsaka celica polja shranila v pomnilniku na lastnem naslovu. Na ta način bo operacija $dostop(B, i)$ oziroma dostop do celice $B[i]$ potreboval konstanten čas, da se izvede. Pri tem pa bo bitno polje potrebovalo $O(b)$ bitov oziroma wb bitov. Na ta način ima vsaka celica bitnega polja $w - 1$ odvečnih bitov.

Zato se pojavi vprašanje, ali se je mogoče izogniti teh $b(w - 1)$ odvečnih bitov. Če se je mogoče izogniti uporabi teh odvečnih bitov, bi bitno polje B potrebovalo zgolj $b + o(b)$ bitov (dodatnih $o(b)$ bitov je potrebnih, če b ni večkratnik od w). Torej bi se lahko bitno polje B predstavilo kot polje pomnilniških besede $W\left[1 : \left\lceil \frac{b}{w} \right\rceil\right]$. Naslednji problem, ki ga je potrebno rešiti, je, kako učinkovito dostopati do i-tega bita v bitnem polju. V konstantnem času lahko dostopamo do celice v polju W, v kateri je shranjen i-ti bit. Le ta je shranjen v celici $W\left[\left\lceil \frac{i}{w} \right\rceil\right] = w_i$. Naivna metoda dostopa do bita v pomnilniški besedi bi bila z bitnim premikom (angl. *bit shift*) v desno, ponovljenim $(w - r)$-krat, pri čemer je $r = ((i - 1) \mod w) + 1$. Za to je potrebno $O(w)$ časa. Ker pa je en premik v desno enakovreden celoštevilskemu deljenju števila z dva, se lahko nadomesti premike v desno s celoštevilskemu deljenjem števila, ki ga predstavlja v pomnilniška beseda w_i, s številom 2^{w-r}. Torej vrednost bita $B[i]$ je izračunana kot:

$$\left\lfloor W\left[\left\lceil \frac{i}{w} \right\rceil\right] / 2^{w-r} \right\rfloor \mod 2.$$

Ker besedni RAM model predpostavi, da so vse aritmetične operacije nad celimi števili, med katere sodi tudi celoštevilsko deljenje, opravljene v konstantnem času, je čas po-

treben za dostop do i-tega elementa tudi konstanten. Torej se mogoče izogniti uporabi odvečnih bitov iz naivne implementacije, ne da bi se časovna zahtevnost povečala [**?**].

Rang. Prva operacija, ki jo definiramo nad bitnim poljem B velikosti b, je $rang_v(B, i)$. Operacija vrne število bitov z vrednostjo $v \in \{1, 0\}$ v B do vključno položaja i. V nadaljevanju bo operacija $rang(B, i)$ predstavljala $rang_1(B, i)$. To je možno, saj velja sledeča zveza med $rang_0(B, i)$ in $rang_1(B, i)$:

$$rang_1(B, i) = i - rang_0(B, i). \tag{2.1}$$

Operacijo se lahko naivno implementira s štetjem bitov z vrednostjo 1 v bitnem polju, za kar je potrebno $O(b)$ časa. Štetje bitov z vrednostjo 1 se v angl. imenuje *population count* (v nadaljevanju označeno `popcount`), ki se izračuna v konstantnem času za eno pomnilniško besedo [**?**, **?**]. Zaradi uporabnosti te funkcije je le ta že implementirana v različnih modernih arhitekturah procesorjev in je zato možno uporabiti strojno operacijo. Operacijo rang se lahko pospeši na konstantni čas, pri tem pa se potrebuje dodatne podatkovne strukture, ki zasedejo $o(b)$ bitov. Pri tem ni potrebno zgraditi dodatnih podatkovnih struktur za obe različici ranga, saj relacija iz enakosti (2.1) omogoča izgradnjo podatkovne strukture zgolj za operacijo $rang_1$.

Pomožna struktura shranjuje range različnih elementov bitnega polja B v polju R. Naivni pristop bi shranil v polju R range vseh elementov B-ja. Problem tega pristopa je prevelika prostorska zahtevnost, saj je zaželjeno, da je R čim manjši in po možnosti ni večji od $o(b)$ bitov. Predlagana rešitev potrebuje $b \log r_1 = O(bw)$ dodatnih bitov, pri čemer r_1 predstavlja število bitov z vrednostjo 1 v bitnem polju B.

Rešitev tega problema je vzorčenje rangov, tako da so v polju R shranjeni zgolj rangi nekaterih elementov B-ja. Polje R razdeli B na $s = kw$ delov, pri čemer je k poljubno število. Element $R[i] = rang_1(B, is)$, pri čemer $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{b}{s} \right\rfloor$. Na ta način je operacija rang implementiran kot

$$rang_1(B, i) = R\left[\left\lfloor \frac{i}{s} \right\rfloor\right] + \texttt{popcount}\left(B\left[\left\lfloor \frac{i}{s} \right\rfloor s, i\right]\right).$$

Polje R ima velikost $\lfloor \frac{b}{k} \rfloor$ bitov, saj shranjuje $\lfloor \frac{b}{s} \rfloor$ števil velikosti w bitov. Pri tem je potrebno funkcijo `popcount` pognati največ k-krat, kar naredi čas operacije rang $O(k)$ [**?**]. Na Sliki 1 je prikazan primer polja R za podano bitno polje B.

Podobno kot polje R se definira tudi polje R'. Polje R' hrani na i-tem mestu število bitov z vrednostjo 1 po vedru $R[\lfloor \frac{i}{k} \rfloor]$ ali $R'[i] = rang_1(B, iw) - R[\lfloor \frac{i}{k} \rfloor]$. Na ta način se zniža število klicev funkcije `popcount` na 1 klic. Ker so v R' shranjena zgolj števila med 0 in s (vsako vedro v R ima k elementov v R'), se lahko R' shrani v $\lfloor \frac{b}{w} \rfloor \log s$ bitov, kar je $o(b)$ bitov. Tako je operacija rang implementirana z uporabo polj R in R'. In sicer je implementirana na sledeči način:

$$rang_1(B, i) = R\left[\left\lfloor \frac{i}{kw} \right\rfloor\right] + R'\left[\left\lfloor \frac{i}{w} \right\rfloor\right] + \texttt{popcount}\left(B\left[\left\lfloor \frac{i}{w} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{i}{w} \right\rfloor + (i \mod w)\right]\right).$$

R'	0	3	5	8	0	1	2	4	0
R	1				9				16
B	1011	1100	1101	1000	0000	1001	0110	0101	1011

Slika 1: Primer dodatne podatkovne strukture za operacijo $rank_1$ v konstantnem času. Pri tem je bitno polje razdeljeno na posamične pomnilniške besede dolžine $w = 4$. Pri tem se je izbralo, da je število $k = 4$.

Ta implementacija potrebuje konstanten čas za izračunati $rang(B, i)$. Dostop do polj R in R' je storjen v konstantnem času, kot tudi izračun funkcije `popcount`, ki je klicana samo enkrat [**?**]. Na Sliki 1 je prikazano tudi polje R'.

Izbira: Druga osnovna operacija nad bitnim poljem B je $izbira_v(B, i)$, ki vrne položaj i-te ponovitve vrednosti $v \in \{1, 0\}$ v B. Podobno kot operacija rang tudi operacija izbira potrebuje pomožno podatkovno strukturo za izvedbo v konstantnem času.

Operacijo izbira si lahko predstavimo kot inverzno operacijo operacije rang, saj velja zveza $j = rang_v(B, izbira_v(B, i))$. Pri tem pa ne obstaja povezava med operacijo $izbira_1(B, i)$ in $izbira_0(B, i)$. To pomeni, da rešitev s pomožno podatkovno strukturo za $izbira_1(B, i)$ ne more biti uporabljena pri iskanju rešitve za $izbira_0(B, i)$. V nadaljevanju bo opisan časovno učinkovit postopek iskanja $izbira_1(B, i)$, saj se lahko $izbira_0(B, i)$ implementira na podoben način [**?**].

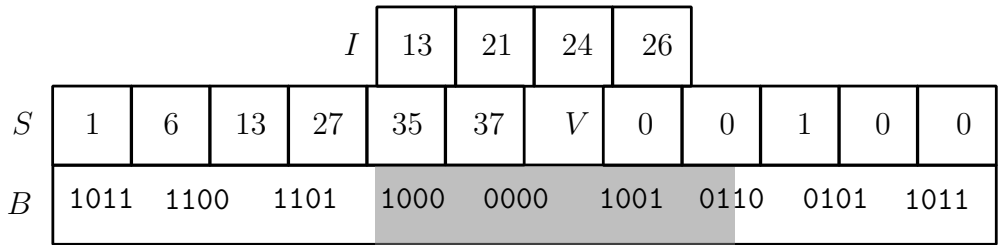
Ko operacija izbira ni ključna pri reševanju problemov, se lahko uporabi binarno iskanje v poljih R in R', ki sta del podatkovne strukture za rank, za kar se potrebuje $O(\log b)$ časa. Z binarnim iskanjem se najde območje dolžine k, pri čemer je potrebno še dodatnih k preiskav, da se najde natančno vrednost. Čas operacije se lahko zniža na $O(\log \log b)$ z uporabo pomožnih podatkovnih struktur. Podobno kot pri operacij rang se bitno polje razdeli na $\lceil \frac{r_1}{s} \rceil$ veder, pri čemer pa je r_1 število bitov z vrednostjo 1 v bitnem polju in s je število takih bitov v vsakem vedru. Polje $S[0 : \lceil \frac{r_1}{s} \rceil]$ hrani vrednosti $S[i] = izbira_1(B, i \cdot s + 1)$, pri čemer $S[\lceil \frac{r_1}{s} \rceil] = b + 1$. Polje S potrebuje $w(\lceil \frac{r_1}{s} \rceil + 1)$ bitov. Ko je $s = w^2$, potem podatkovna struktura potrebuje $w(\lceil \frac{r_1}{w^2} \rceil + 1) = o(r_1) = o(b)$ bitov [**?**].

Vedra niso enako velika, zato se lahko razdelijo na velika vedra in mala vedra, pri čemer je vedro veliko natanko tedaj, ko je večje kot $s \log^2 b$ bitov, sicer je malo vedro. Pri tem je potrebno shraniti velikost vedra v bitno polje V, kjer $V[i] = 1$, če i-to vedro je veliko, sicer je $V[i] = 0$. Za velika vedra se izračuna vse s vrednosti izbire, pri čemer so shranjeni v polju I položaji bitov z vrednostjo ena znotraj vedra. Za mala vedra pa

se sproti naračuna izbira znotraj vedra. Operacija izbira se izračuna kot

$$izbira_1(B,j) = \begin{cases} I\left[(rang_1(V,\lceil \frac{j}{s} \rceil) - 1)s + x\right], & V\left[\lceil \frac{j}{s} \rceil\right] = 1 \\ S\left[\lceil \frac{j}{s} - 1 \rceil\right] + k, & V\left[\lceil \frac{j}{s} \rceil\right] = 0 \\ b+1, & r_1 < j \end{cases},$$

kjer je $x = ((j-1) \mod s) + 1$ in k je relativni položaj x-tega bita z vrednostjo 1 na intervalu $B\left[S\left[\lceil \frac{j}{s} - 1 \rceil\right], S\left[\lceil \frac{j}{s} \rceil - 1\right]\right]$. Vrednost k je izračunana s pomočjo razpolavljanja na podatkovni strukturi za rank, ter šteje bitov na zadnjem intervalu [**?**]. Podatkovna struktura za izbiro je prikazana na Sliki 2.



Slika 2: Primer dodatne podatkovne strukture za operacijo $izbira_1$ v $O(\log\log n)$ času. Pri tem je bitno polje razdeljeno na posamične pomnilniške besede dolžine $w = 4$. Zaradi majhnosti primera velika vedra, ki vsebujejo vsaj 10 bitov namesto $s\log^2 b = 4\log^2 36$ bitov, kar se zaokroži na 100 bitov. Velika vedra so označena v bitem polju s sivo barvo.

Polje I mora shraniti $s\lceil \log b \rceil$ bitov za vsako veliko vedro, katerih je $\frac{b}{s(\log b)^2}$, torej potrebuje $O\left(\left\lceil \frac{b}{\log b} \right\rceil\right) = o(b)$ bitov. Bitno polje V pa potrebuje $\lceil \frac{m}{s} \rceil$ bitov za shraniti velikosti blokov ter dodatne bite za izvajanje operacije rang v konstantnem času, torej tudi V potrebuje $o(b)$ bitov [**?**].

Operacija se lahko izvede v konstantnem času. To je doseženo z dodatnim deljenjem majhnih veder, na podoben način, kot je bilo to storjeno nad celotnim bitnim poljem B. Vsako majhno vedro se dodatno razdeli na $s' = (\log\log b)^2$ mini veder, pri čemer mini vedro je veliko, ko je večje od $s'(\log\log b)^2$. Vsako majhno mini vedro potrebuje $s' \log\left(s(\log b)^2\right) = O((\log\log b)^3) = o(b)$ bitov ter vsako veliko mini vedro potrebuje isto prostora, pri čemer pa jih je največ $O\left(\frac{b}{(\log\log b)^4}\right)$, torej vsa velika mini vedra skupaj potrebujejo $O\left(\frac{b}{\log\log b}\right) = o(b)$ bitov [**?**].

Vse dodatne podatkovne strukture, ki so potrebne za izvajanje operacij rang in izbira v konstantnem času, so lahko izgrajene v dveh sprehodih po bitnem polj B, pri čemer vsak sprehod traja $O(b)$ časa. Pri tem je ves potrebni spomin že predhodno dodeljen.

Predhodnik/Naslednik. S pomočjo operaciji rang in izbira lahko implementiramo dodatne operacije, ki omogočajo lažje iskanje po bitnem polju B. Dve taki operaciji, ki

bosta uporabljeni za implementacijo operacij nad drevesi, sta predhodnik in naslednik.

Operacija predhodnik elementa y najde največji indeks $i < y$, za katerega velja, da je $B[i] = v$. Operacija je implementirana kot

$$predhodnik_v(B, y) = izbira_v(B, rang_v(B, y)),$$

pri čemer je $v \in \{0, 1\}$. Na podoben način se definira tudi operacijo naslednik. Operacija naslednik elementa y najde najmanjši indeks $i > y$, za katerega velja, da je $B[i] = v$. Pri tem je operacija implementirana kot

$$naslednik_v(B, y) = izbira_v(B, rang_v(B, y - 1) + 1),$$

kjer je $v \in \{1, 0\}$ [**?**].

Operaciji se uporablja za sprehod po bitnem polju B. Z njima se lahko najde indekse vseh bitov z vrednostjo v v $O(r_v)$ časa (r_v je število bitov z vrednostjo v v bitnem polj B).

Višek. Do sedaj so vse predstavljene operacije imele kot vhod zgolj en element v bitnem polju, ampak nekateri problemi zahtevajo rešitev za podani interval. Pogosta vprašanja na intervalih sta največje ali najmanjše število v intervalu. Na bitnih poljih pa se ta problem pretvori na razliko med številom bitov z vrednostjo 0 ter številom bitov z vrednostjo 1 do i-tega bita. To razmerje imenujemo *višek*(B, i) in je je izračunan kot:

$$višek(B, i) = rang_0(B, i) - rang_1(B, i) = 2\, rang_0(B, i) - i.$$

Na podoben način se lahko definira tudi relativni višek na intervalu med indeksom i in j, in sicer kot:

$$višek(B, i, j) = višek(B, j) - višek(B, i - 1).$$

Višek in posledično tudi relativni višek je izračunan zgolj z uporabo ranga, zato jih je možno izračunati v konstantnem času.

Operacije na območjih. Poznamo različne operacije na območjih, ampak za potrebe magistrske naloge bomo definirali štiri operacije. Prva operacija je $rmq(B, i, j)$ (angl. *range minimum query*), ki vrne indeks k, za katerega velja, da je $i \leq k \leq j$ in *višek*(B, k) je najnižji višek na intervalu med i in j ter se najnižji višek prvič pojavi na indeksu k. Podobno je definirana tudi operacija $rMq(B, i, j)$ (angl. *range maximum query*), ki pa vrne indeks k, pri čemer je $i \leq k \leq j$ in *višek*(B, k) je najvišji višek na intervalu med i in j ter se najvišji višek prvič pojavi na indeksu k. Operacija *minIzbira*(B, i, j, t) vrne položaj t-tega pojava najmanjšega viška na intervalu med i in j. Operacija *minŠtetje*(B, i, j) pa vrne število pojav najnižjega viška na intervalu

med i in j. S pomočjo teh operaciji bodo v nadaljevanju implementirane operacije nad drevesi v enem od kompaktnih prikazov [**?**].

Vse predstavljene operacije na intervalih so lahko implementirane s časovno zahtevnostjo $O(\log b)$. Pri tem pa je potrebno zgraditi dodatno podatkovno strukturo rmM-drevo (angl. *range minumum maximum tree*), ki je lahko shranjeno z $O(b/\log b) = o(b)$ dodatnimi biti. Drevo je levo poravnano in se lahko zapiše kot polje vozlišč (podobno kot podatkovna struktura kopica). Torej so otroci i-tega vozlišča na $2i$-tem in $(2i+1)$-vem mestu v polju ter starš i-tega vozlišča se nahaja na $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$-mestu. Vsako vozlišče drevesa, predstavlja interval v bitnem polju. Prvi otrok vozlišča pokriva prvo polovico intervala, drugi otrok pa pokriva drugo polovico intervala. Torej *koren* rmM-drevesa pokriva celotno bito polje B. Ker želimo časovno in prostorsko učinkovito podatkovno strukturo lahko B razdelimo na na $\frac{b}{a}$ veder velikosti a elementov. Posledično lahko vsak interval dolžine a predstavlja list rmM-drevesa. Za zagotoviti prostorsko zahtevnost $o(b)$ bitov in časovno zahtevnost $O(\log b)$ izberemo vrednost $a = \log b$. Vsako vozlišče v drevesu hrani štiri podatke: e relativni višek pokritega intervala, m najmanjši relativni višek v območju, M največji relativni višek na območju in n število najmanjših viškov na pokritem intervalu. Pri tem vozlišče pokriva celotno območje, ki ga pokrivata oba otroka, in listi pokrivajo zgolj eno vedro velikosti a elementov. Torej koren drevesa pokriva celotno bitno polje B. Vse predstavljene operacije so implementirane s pomočjo sprehoda po rmM-drevesu [**?**].

Vse štiri operacije temeljijo na sprehodu po rmM-drevesu, torej bo sprehod predstavljen zgolj za operacijo $rmq(B, i, j)$ na intervalu bitnega polja $B[i : j]$. Operacija $rmq(B, i, j)$ je izvedena v dveh korakih. Prvi korak je iskanje vrednosti najmanjšega viška na intervalu $B[i : j]$. Ker se lahko i nahaja sredi vedra bitov, se naračuna relativni višek d ter najnižji višek m na intervalu med i in začetkom vedra $\lceil i/a \rceil$ brez uporabe rmM-drevesa. Če je j med i in začetkom vedra $\lceil i/a \rceil$, se izračuna zgolj do j-tega bita in m predstavlja tudi najnižji višek na intervalu med i in j, za kar potrebujemo $O(a)$ časa. Sicer pa se nadaljuje s sprehodom po rmM-drevesu. Začetno vozlišče sprehoda je list, ki predstavlja vedro $\lceil i/a \rceil$, in ga označimo z v. Izračunamo tudi zaporedno število lista, ki vsebuje vedro s koncem intervala j, in ga označimo kot k. Zdaj lahko začnemo s sprehodom po drevesu navzgor. Če je v desni otrok (v je sodo število), se premaknemo v starša, torej $v \leftarrow (v-1)/2$. Sicer pa je potrebno preveriti, ali je desni brat tudi v intervalu, kar se lahko preveri, tako da preverimo, če trditev $\lfloor l/2^{\lfloor \log l \rfloor - \lfloor \log u \rfloor} \rfloor \neq u$ drži, potem je vozlišče u tudi znotraj intervala $B[i : j]$. Če je desni brat v intervalu preverimo, ali smo našli nov najmanjši višek na intervalu $(m > d + rmM[v+1].m)$. Če smo ga našli, potem $m \leftarrow d + rmM[v+1].m$. Nato pa se še popravi višek intervala na $d \leftarrow d + rmM[v+1].e$. Zatem pa se premaknemo v starša, torej $v \leftarrow v/2$ [**?**].

Ko desni brat ni v intervalu, torej ne velja prejšnji pogoj, pa nadaljujemo s spreho-

dom navzdol iz našega desnega brata $v \leftarrow (v+1)/2$. Tokrat pa preverjamo, ali je levi otrok vsebovan v intervalu ter če vozlišče v omogoča zmanjševanje najmanjšega viška. Če vozlišče v ne omogoča zmanjševanja, lahko sprehod končamo in vemo, da najmanjši višek je m, sicer pa nadaljujemo s sprehodom. Če levi otrok ni vsebovan, nadaljujemo s sprehodom v levem otroku, sicer pa preverimo, če velja $m > d + rmM[2v].m$ ter v primeru, da velja popravimo vrednost m. Nato popravimo vrednost $d \leftarrow d + rmM[2v].e$ ter nadaljujemo z iskanjem v desnem otroku $v \leftarrow 2v+1$. Sprehod nadaljujemo, dokler ne dosežemo listov oziroma $v > \lceil n/a \rceil$. Če list v ne omogoča zmanjševanja najmanjše vrednosti viška na intervalu oziroma $m \leq d + rmM[v].m$, potem je m najmanjši višek na intervalu. Sicer pa pregledamo, na podoben način kot pred začetkom iskanja, še višek do j-tega bita in najmanjši višek na tem intervalu označimo m'. Če $m > d + m'$, potem je najmanjši višek na intervalu $B[i:j]$ enak $d + m'$, sicer pa je m [**?**].

Zadnji korak pa je iskanje točnega indeksa bita z relativnim viškom m. To je storjeno z operacijo $iskanjeNaprej(B, i, m)$, ki najde prvi $j > i$, za katerega velja $višek(B, j) = višek(B, i) + m$. Operacija je implementirana na isti način, samo tokrat se ne preverja vrednost polja $rmM[v].m$, ampak se išče prvo pojavitev viška, ki je enaka m. Ta isti postopek se lahko uporabi tudi za preostale tri operacije, pri čemer pa operacija $rMq(B, i, j)$ uporablja namesto polja $rmM[v].m$ polje $rmM[v].M$ in relacija manjše postane večje in obratno. Operaciji $minIzbira(B, i, j, t)$ in $minŠtetje(B, i, j)$ pa uporabljata polje $rmM[v].n$ [**?**].

Tako implementirane operacije potrebujejo $O(\log b)$ časa, da se izvršijo. Začetno in končno štetje bitov potrebuje $O(a) = O(1)$ čas. Ker je rmM-drevo dvojiško in polno (vsak globina drevesa, razen zadnje, ima maksimalno število otrok) drevo, je njegova višina enaka $O(\log \lceil b/a \rceil) = O(\log b)$, torej tudi sprehodi, ki gredo od lista proti korenu ali od korena proti listu, potrebujejo $O(\log b)$ časa. Z izdelavo manjših rmM-dreves, ki zavzamejo $\beta = \log^3 b$ elementov, in dodatne podatkovne strukture imenovane pospeševalnik (angl. *accelerator*), je možno implementirati te operacije v času $O(\log \log b)$ [**?**].

2.5 KOMPAKTNA PREDSTAVITEV DREVES

Z uporabo bitnih polj je mogoče predstaviti mnogo podatkovnih struktur. Ker pa se magistrska naloga osredotoča na priponska drevesa, bo zato predstavljena uporaba bitnih polj za kompaktno predstavitev topologije dreves. Običajno je podatkovna struktura drevo sestavljeno iz vozlišč ter referenc na njih. V vsakem vozlišču je shranjena vrednost, ki jo predstavlja vozlišče, ter referenca na svoje otroke. Drevo z n-timi vozlišči potrebuje $O(n \log n)$ bitov za shraniti topologijo drevesa (v praksi potrebuje $O(nw)$ bitov). Kompaktna predstavitev topologije dreves zniža prostorsko zahtevnost

na $2n + o(n)$ bitov. Za vsako vozlišče je potrebno predstaviti referenco na vozlišče ter predstaviti, da je vozlišče bilo že obiskano, zato vsako vozlišče potrebuje 2 bita oziroma za predstavitev celotnega drevesa je potrebnih $2n$ bitov.

Pri tem obstajajo tri vrste kompaktne predstavitve dreves: Uravnoteženi oklepaji (angl. *Balanced Parentheses* oziroma BP), Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč po plasteh (angl. *Level Order Unary Degree Sequence* oziroma LOUDS) in Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč v globino (angl. *Depth-First Unary Degree Sequence* oziroma DFUDS). Naslednja definicija prikaže operacije nad drevesi.

Definicija 2.3. Podatkovne struktura drevo mora podpirati naslednje operacije:

1. $koren()$ vrne koren drevesa,
2. $jeList(v)$ vrne *true*, če je vozlišče v list, sicer pa vrne *false*,
3. $stOtrok(v)$ vrne število otrok vozlišča v,
4. $otrok(v, i)$ vrne vozlišče w, ki je i-ti otrok vozlišča v,
5. $prviOtrok(v)$ vrne vozlišče w, ki je prvi otrok vozlišča v,
6. $nBrat(v)$ vrne vozlišče w, ki je desni (naslednji) brat od vozlišča v,
7. $pBrat(v)$ vrne vozlišče w, ki je levi (predhodni) brat od vozlišča v,
8. $starš(v)$ vrne vozlišče w, ki je starš od vozlišča v,
9. $globina(v)$ vrne število vozlišč na poti iz korena do vozlišča v,
10. $lca(v,)$ vrne najnižjega skupnega prednika od v in w.

Iz definicije se lahko opazi, da večina operacij je lahko implementiranih zgolj z operacijo $Otrok(v, i)$ ter operacijo $starš(v)$, s katerimi se lahko sprehajamo po drevesu. S pomočjo operacij iz definicije je možno implementirati ostale operacije na drevesih, ki so bolj specifične za posamično implementacijo drevesa, na primer `vstavi`, `izbriši`, `najmanjši_element` (v kopici) in ostale.

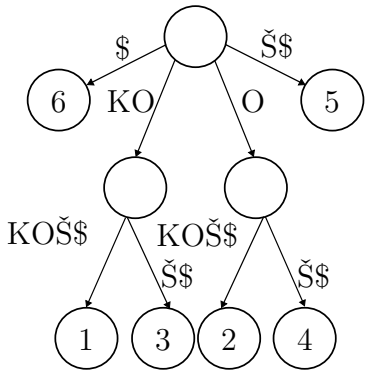
2.5.1 Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč po plasteh

Prvi način zapisa topologije drevesa je zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč po plasteh (LOUDS). Ideja zapisa temelji na sprehodu po plasteh po drevesu in zapisu stopenj vozlišč ob njihovem obisku. Pri tem pa se pojavi problem, kako implementirati sprehod polju stopenj in posledično po drevesu. Potrebuje se dodatni strukturi, in sicer za vsoto stopenj vozlišč do trenutnega vozlišča ter strukturo za štetje vozlišč. Obe strukturi lahko implementiramo kot polji števil. Z uporabo eniškega zapisa, pa

se te dve strukturi prevedeta na operaciji *rang* in *izbira* nad bitnim poljem z eniškim zapisom.

Topologijo drevesa se predstavi kot bitno polje B dolžine $2n + 1$, pri čemer je n število vozlišč v drevesu. Zapis drevesa se začne z nizom 10, temu pa sledijo stopnje vsakega vozlišča v eniškem zapisu. Kot je razvidno iz imena predstavitve, so vozlišča obiskana po nivojih: vozlišča z isto globino so zaporedno predstavljena [**?**].

Primer takega zapisa je predstavljen na Sliki 3. Na sliki so vozlišča v zaporedju ločena s sivimi črtami. Koren drevesa je predstavljen z $B[3:7] = 11110$. Niz $B[3:7]$ vsebuje 4 bite z vrednostjo 1, ker ima koren 4 otroke.



10|11110|0|110|110|0|0|0|0|0

Slika 3: Primer predstavitve drevesa z metodo LOUDS za priponsko drevo besede »KOKOŠ$«.

Tabela 1: Implementacija operacij drevesa v LOUDS.

Operacija	**Implementacija v LOUDS**
$koren()$	3
$jeList(v)$	$B[v] == 0$
$stOtrok(v)$	$naslednik_0(B, v) - v$
$otrok(v, i)$	$izbira_0(B, rang_1(B, v - 1 + 1)) + 1$
$prviOtrok(v)$	$otrok(v, 1)$
$nBrat(v)$	$naslednik_0(B, v) + 1$
$pBrat(v)$	$predhodnik_0(B, v - 2) + 1$
$starš(v)$	$predhodnik_v(B, izbira_1(B, rang_0(B, v - 1))) + 1$
$globina(v)$	/
$lca(v, w)$	Algoritem 1

Med izgradnjo kompaktne predstavitve se vozlišča indeksira s števili i med 1 in n. Število i predstavlja zaporedno število obiskanega vozlišča, torej koren ima vrednost

1, prvi otrok korena ima vrednost 2 in tako dalje. Indeks se uporabi za shranjevanje vrednosti, ki so po navadi shranjene znotraj vozlišča. V Tabeli 1 so predstavljene implementacije operacij z uporabo predstavitve drevesa LOUDS. Indek vozlišča se izračuna kot $izbira_1(B, v) + 1$ [**?**].

Vse operacije razen operacije *globina* in *lca* so izvršene v konstantnem času. Pri tem je treba izgraditi podatkovno strukturo zgolj za $izbira_0$, saj operacija $izbira_1$ ni potrebna za pravilno delovanje operacij drevesa. Operacija *globina* ni podprta, saj LOUDS predstavitev ne omogoča učinkovitega iskanja. Operacija globina je lahko implementirana s štetjem, koliko krat se uporabi operacija $starš(v)$ za doseči *koren* drevesa. Pri tem pa velja, da je $globina(u) \geq globina(v)$, ko je $u > v$. S pomočjo tega dejstva se lahko implementira operacijo *lca*, kot je prikazano v Algoritmu 1 [**?**].

Algoritem 1: Operacija $lca(v, w)$ (LOUDS)

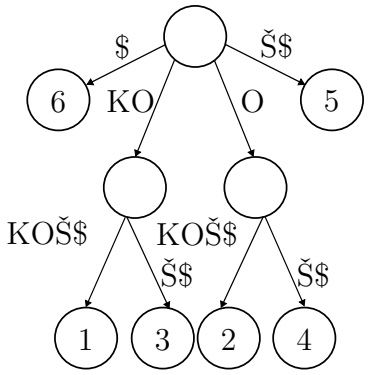
Vhod: Bitno polje B, vozlišča v in w
Izhod: Vozlišče u

```
1 while v ≠ w do
2     če v > w potem
3         v ← starš(v)
4     sicer
5         w ← starš(w)
6 vrni v
```

2.5.2 Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč v globino

Naslednja predstavitev topologije drevesa je zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč v globino (DFUDS). Ideja predstavitve temelji na premem sprehodu (angl. *Preorder traversal*) po drevesu. In prvič ko obiščemo vozlišče zapišemo njegovo stopnjo. Pri tem lahko opazimo, da so poddrevesa otrokov vozlišča v zapisana v zaporednih celicah polja. Posledično se poddrevo naslednja brat od v zančne po skrajno desnem listu v poddrevesu s korenov v v. Torej se naslednje poddrevo ne začne, dokler se ne »zapre« trenutnega poddrevesa.

Drevo je predstavljeno z bitnim poljem $B[1 : 2n+2]$. Zapis temelji na uporabi zapisa stopenj vozlišč, zato je potrebno dodati na začetek bitnega polja $B[1 : 3] = 110$. Zatem pa so zapisane stopnje vozlišč z eniškim zapisom. Zapis je zgrajen z uporab pregleda v globino, kot to ponazarja ime predstavitve. Vsa vozlišča imajo indeks, ki je zaporedno število obiskanega vozlišča. Predstavitev omogoča preprostejše implementacije operacij ter posledično manjše dodatne podatkovne strukture. Vseeno pa omogoča hitrejše implementacije nekaterih operacij v primerjavi z uporabo predstavitve LOUDS. Primer



110|11110|0|110|0|0|110|0|0|0

Slika 4: Primer predstavitve drevesa z metodo DFUDS za priponsko drevo besede »KOKOŠ$«.

zapisa topologije drevesa z DFUDS je prikazan na Sliki 4. Vozlišča so v zaporedju ločena s sivimi črtami.

Tabela 2: Implementacija operacij drevesa z DFUDS

Operacija	**Implementacija v DFUDS**
$koren()$	4
$jeList(v)$	$B[v] == 0$
$stOtrok(v)$	$naslednik_0(B, v) - v$
$otrok(v, i)$	$zapri(B, naslednik_0(B, v) - i) + 1$
$prviOtrok(v)$	$naslednik_0(B, v) + 1$
$nBrat(v)$	$iskanjeNaprej(B, v - 1, -1) + 1$
$pBrat(v)$	$zapri(B, odpri(B, v - 1) + 1) + 1$
$starš(v)$	$predhodnik_0(B, izbira_1(B, v - 1)) + 1$
$globina(v)$	/
$lca(v, w)$	$starš(rmq(B, naslednik_0(B, w), v - 1) + 1); v < w$

V Tabeli 2 so predstavljene implementacije operacij nad drevesom, implementirane z DFUDS. Indeks $izbira_0(B, v) + 1$ je uporabljen za shranjevanje dodatnih informacij o vozlišču, saj je vozlišče v predstavljeno s položajem vozlišča v bitnem polju B. Operacija $zapri(B, i)$, ki zapre trenutno poddrevo, je definirana z uporabo operacije *višek* tako, da vrne prvi $j > i$, pri čemer je $višek(B, j) = višek(B, i) - 1$. Podobno se lahko definira tudi operacijo $odpri(B, i)$, ki vrne koren trenutnega poddrevesa, z uporabo operacije *višek* tako, da vrne zadnji $j < i$, pri čemer $višek(B, j) = višek(B, i) + 1$. V tabeli je vidno, da operacija $globina(v)$ ni podprta, saj ni mogoče implementirati te operacije brez sprehoda od vozlišča v do korena ter pri tem šteti potrebne korake.

Operacija $lca(v, u)$ je lahko implementirana brez sprehoda po drevesu za razliko od implementacije z LOUDS.

Vse operacije, ki temeljijo na operaciji *rang* in *izbira*, se izvršijo v $O(1)$ času. Operacije, ki temeljijo na rmM-drevesu, pa potrebujejo $O(\log n)$ časa. Pri tem so potrebne dodatne podatkovne strukture za $izbira_1$, $izbira_0$, *rang* ter rmM-drevo, pri čemer vsaka potrebuje $o(n)$ dodatnih bitov. Prostorsko zahtevnost rmM-drevesa je mogoče zmanjšati, tako da se shranita zgolj polji e in m. Tako se razpolovi prostorsko zahtevnost rmM-drevesa, ki pa še vedno zahteva $o(n)$ dodatnih bitov, brez škode za implementacijo operacij drevesa.

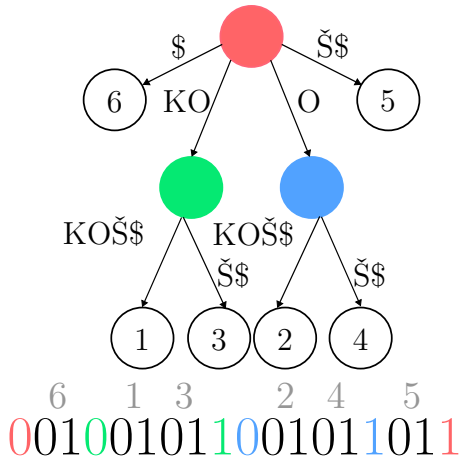
Za lažjo implementacijo dodatnih operacij nad listi je mogoče ustvariti dve dodatni podatkovni strukturi za $rang_{00}$ in $izbira_{00}$ v konstantnem času, ki omogočata iskanje in indeksiranje listov v drevesu. Podatkovni strukturi sta implementirani na podoben način kot podatkovni strukturi za $rang_0$ in $izbira_0$, pri tem pa $rang_{00}$ in $izbira_{00}$ temeljijo na številu ponovitev oziroma položaju i-te ponovitve dveh zaporednih bitov z vrednostjo 0.

2.5.3 Uravnoteženi oklepaji

Zadnji način zapisa topologije drevesa je zapis z zaporedjem uravnoteženih oklepajev (BP). Drevo se predstavi kot bitno polje B dolžine $2n$, pri čemer je n število vozlišč v drevesu. Zaporedje se zgradi z uporabo pregleda v globino. Ko je vozlišče prvič obiskano, se na konec do sedaj zapisane sekvence zapiše '('. Uklepaj je v bitnem polju predstavljen s številom 0. Ko se zapiše celotno poddrevo vozlišča, pa se na konec sekvence zapiše ')'. Zaklepaj pa je v bitnem polju zapisan s številom 1. Primer priponskega drevesa, ki je predstavljen z uporabo zaporedja uravnoteženih oklepajev, je prikazan na Sliki 5. Na sliki so vsa notranja vozlišča obarvana z različnimi barvami za lažje prepoznavanje le teh v zaporedju uravnoteženih oklepajev. Ker so listi oštevilčeni, so ta števila tudi zapisana nad vsakim listom v zaporedju uravnoteženih oklepajev [**?**].

Torej je vsako vozlišče predstavljeno kot par '(' in ')'. Tako je mogoče definirati sledeče operacije nad oklepaji: *odpri*, *zapri* ter *oklepa*. Operacija $odpri(B, i)$ vrne položaj '(', ki odpre ')' na i-tem mestu v B. Operacija $zapri(B, i)$ pa v tej notaciji predstavlja ')', ki zapra '(' na i-tem mestu B. Operacija $oklepa(B, i)$ pa vrne položaj j od '(' v bitem polju B, pri čemer velja, da $j < i < zapri(B, j)$. Z uporabo operacije *višek* operacija $OklepaBi$ vrne položaj največjega $j < i$, pri čemer je $višek(B, j - 1) = višek(B, i) - 1$ [**?**].

Podobno kot pri predstavitvi drevesa LOUDS, tudi predstavitev BP potrebuje dodatno podatkovno strukturo za operaciji *izbira* in *rang*. Pri tem sta potrebni zgolj podatkovni strukturi za 0, saj operaciji $rang_1$ in $izbira_1$ nista potrebni za pravilno delovanje drevesa v tej predstavitvi. Podatkovni strukturi potrebujeta vsaka $o(n)$ do-



Slika 5: Primer predstavitve drevesa z metodo BP za priponsko drevo besede »KOKOŠ$«.

datnih bitov in operaciji se izvršita v konstantnem času.

Tabela 3: Implementacija operacij drevesa z BP

Operacija	**Implementacija v BP**
$koren()$	1
$jeList(v)$	$B[v] == 0 \wedge B[v+1] == 1$
$stOtrok(v)$	$minŠtetje(B, v, zapri(B, v) - 2)$
$otrok(v, i)$	$minIzbira(B, v, zapri(B, v) - 2, i) + 1$
$prviOtrok(v)$	$v + 1$
$nBrat(v)$	$zapri(B, v) + 1$
$pBrat(v)$	$odpri(B, v - 1)$
$starš(v)$	$oklepa(B, x)$
$globina(v)$	$2 \cdot rang_0(B, v) - v$
$lca(v, w)$	$oklepa(B, rmq(B, v, w) + 1); v < w$

V Tabeli 3 so prikazane implementacije operacij, ki so potrebne za pravilno delovanje drevesa. Indeks $izbira_0(B, v)$ je uporabljen za pridobiti dodatne informacije o vozlišču, saj vrednost v predstavljata položaja '(' v zaporedju B, ne pa indeksa v tabeli z dodatnimi informacijami o vozlišču.

Zapis topologije drevesa s BP omogoča dodatne operacije. Primer operacije je oštevilčenje in iskanja listov drevesa, kar je storjeno z uporabo posplošitve operacij ranga in izbire na poljubno dolge nize. Ker imajo listi obliko »()« (oziroma 01, ko so zapisani v bitnem polju B), se lahko implementirata operaciji $rang_{01}(B, i)$ in $izbira_{01}(B, i)$. Operaciji potrebujeta konstanten čas, da se izvedeta, saj se lahko izgradi podobno dodatno strukturo, kot za osnovno verzijo ranga in izbire. V BP ni mogoče izbrisati

vrednosti M in n iz listov rmM-drevesa, saj se uporablja poizvedbo $rMq(B, i, j)$, ki potrebuje vrednost M, pri implementaciji dodatnih operaciji. Primer take operacije je *najgloljeVozlišče*(v), ki vrne najgloblje vozlišče v poddrevesu s korenom v [**?**].

3 PRIPONSKA DREVESA

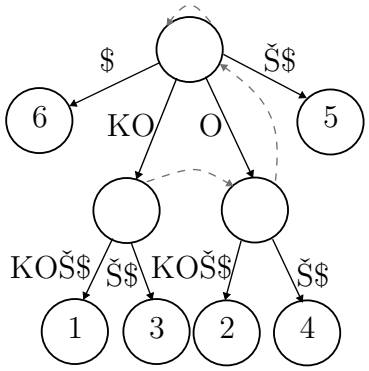
Priponska drevesa so posebna implementacija številskega drevesa, pri čemer vsak list predstavlja posamezno pripono besede. Na ta način priponsko drevo ne predstavlja zgolj vhodne besede T dolžine n, ki je sestavljeno iz znakov abecede Σ in je shranjena v pomnilniku kot polje črk `T[1:n]`, ampak zakodira tudi strukturo besede. Zato se pogosto uporabi za indeksiranje besede in posledično iskanja vzorcev v njej. Vzorec $P[1 : m]$ se nahaja v besedi T, če obstaja podniz $T[i : j]$, za katerega velja $P[1 : m] = T[i : j]$. Z uporabo indeksa je iskanje prisotnosti vzorca P dolžine m v besedi primerljivo s KMP algoritmom. KMP algoritmom potrebuje $O(n+m)$ časa za preveriti, ali se vzorec nahaja v besedi. Za razliko od KMP algoritma je prednost uporabe priponskega drevesa, da lahko iščemo različne vzorcev v isti besedi T. Za najti več vzorcev v priponskem drevesu je potrebno: $O(n)$ časa za izgradnjo priponskega drevesa ter $O(m)$ časa za vsak iskani vzorec. Pri iskanju več vzorcev v besedi T algoritem KMP potrebuje $O(n + m)$ časa za vsak iskan vzorec [**?**, **?**].

Nad priponskim drevesom lahko definiramo funkcijo $beseda(v)$. Funkcija vrne niz, ki je pridobljen s stikom podnizov na povezavah na poti od korena do vozlišča v. Torej priponsko drevo nad besedo T, ki je niz nad abecedo Σ, definiramo na sledeči način [**?**]:

Definicija 3.1. Priponsko drevo nad nizom T dolžine n je številsko drevo, ki zadošča sledečim zahtevam:

1. drevo ima natanko n listov oštevilčenih s števili med 1 in n, ki se shranjenijo v polju *indeks*,
2. vsako notranje vozlišče, razen korena, ima vsaj dva otroka,
3. vsaka povezava predstavlja neprazni podniz besede T,
4. ne obstajata povezavi, ki se začneta v istem vozlišču in z istim znakom,
5. za vsak list l velja, da je $beseda(l) = T[l.indeks :]$.

Primer priponskega drevesa besede »KOKOŠ« je prikazan na Sliki 6. Znak »$«, ki predstavlja konec besedila, omogoča bistveno poenostavitev podatkovne strukture, saj tako ni nobena pripona predpona druge pripone. Posledično je vsaka pripona shranjena v listu priponskega drevesa. V primeru, predstavljenem na Sliki 6, znak »$« ne bi bil potreben, ker že znak »Š« jasno določi vse pripone besede »KOKOŠ«. Da zagotovimo,



Slika 6: Primer priponskega drevesa nad besedo »KOKOŠ$«.

da vse so vse pripone shranjene v listih, se besedi na konec pripne znak »$«. Torej bo v nadaljevanju magistrske naloge znak $T[n] = \$$.

Ker povezave v priponskih drevesih predstavljajo podnize v besedi T, se lahko nad priponskimi drevesi definira tudi črkovna globina vozliča.

Definicija 3.2. Črkovna globina vozlišča $sd(v) = |\, beseda(v)|$.

Primer razlike med globino vozlišča in črkovno globino vozlišča se lahko vidi na Sliki 6: vozlišči, do katerih se pride s povezavama »KO« in »O«, imata globino 1. Črkovna globina vozlišča, v katerega kaže povezava »KO«, je 2, medtem ko ima vozlišče, v katerega kaže povezava »O«, črkovno globino 1.

3.1 POIZVEDBE

Časovno učinkovito iskanje vzorcev v vhodni besedi T je doseženo z izgradnjo priponskega drevesa. Zato bodo v tem podpoglavju predstavljene implementacije poizvedb za iskanje vzorcev nad besedo T z uporabo priponskega drevesa. Obstajajo tri poizvedbe, in sicer:

1. *prisotnost*(T, P), ki preveri, ali je vzorec P prisoten v besedi T,
2. *številoPonovitev*(T, P), ki vrne število ponovitev vzorca P v besedi T, in
3. *seznamPojavov*(T, P), ki vrne seznam indeksov v besedi T, kjer se pojavi vzorec P.

Osnovna poizvedba nad besedo T je *prisotnost*(T, P), saj sta ostali dve poizvedbi nadgradnji le te. Osnovna ideja iskanja vzorcev s priponskimi drevesi je obstoj vzorca P na začetku vsaj ene pripone besede T natanko tedaj, ko je P prisoten v T. Oziroma vzorec $P[1 : m]$ je prisoten v besedi T natanko tedaj, ko obstaja pripona $T[i : n]$, za katero velja $P = T[i : i + m]$ (P je predpona pripone $T[i : n]$).

Listi priponskega drevesa predstavljajo pripone besede T, zato je poizvedba *prisotnost*(T, P) z uporabo priponskega drevesa implementirana s sprehodom iz *korena* drevesa proti listom. Ker vsaka povezava predstavlja podniz besede $T[k : p]$, ki je lahko shranjen kot par indeksov k in p, je potrebno preveriti, ali se P ujema s $T[k : p]$. Če se vzorec ne ujema s podnizom, potem vzorec ni prisoten v besedi in zato poizvedba vrne *false*. Ko pa se P ujema s podnizom, potem je vzorec prisoten v besedi in zato poizvedba vrne *true*. Tako predstavljen način iskanja deluje zgolj za vzorce, ki niso daljši od $p-k$ znakov. Če pa je vzorec P daljši, se najprej pogleda prvih $p-k$ znakov. Če se podniza ujemata, se nadaljuje z iskanjem na naslednji povezavi, ki se začne v vozlišču v, do katerega smo prišli po povezavi $T[k : p]$ na poti proti listom. Pri tem si je potrebno zapomniti, koliko znakov smo že pregledali, in to označimo z o. V vsakem koraku povečamo o za $p-k$ ter preverimo, ali je $P[o+1 : o+p-k] = T[k, p]$. Poizvedba se konča na povezavi, za katero velja, da je $p - k \geq m - o$, če se je vseh o do takrat pregledanih znakov ujemalo. V vozlišču v je izbrana povezava, za katero velja, da se prvi znak povezave ujema z znakom $P[o + 1]$. Iskanje te povezave vzame od $O(1)$ časa (vsako vozlišče ima polje velikosti $|\Sigma|$, tako da ima vsak znak dodeljen prostor za svojo povezavo, čeprav otrok ne obstaja) do $O(|\Sigma|)$ časa (vsako vozlišče ima povezan seznam povezav do otrok), kar je še vedno konstanten čas, saj se abeceda Σ ne spreminja skozi postopek izgradnje in poizvedb.

Operacija *prisotnost*(T, P) potrebuje $O(m)$ časa, da preveri prisotnost vzorca v besedi. Operacija mora preveriti, ali se vsi znaki vzorca ujemajo z znaki na povezavah, ki so del poti od *korena* proti listom, za kar potrebuje $O(m)$ časa. V vsakem notranjem vozlišču na poti pa potrebuje še dodatno $O(1)$ časa, da najde naslednjo povezavo. Ker je notranjih vozlišč na poti največ m, potem tudi celotna poizvedba potrebuje $O(m)$ časa. Iz tega sledi izrek.

Izrek 3.3. *Poizvedba prisotnost*(T, P)*, ki je implementirana s priponskim drevesom potrebuje* $O(m)$ *časa in* $O(n)$ *prostora.*

Za primer iskanja vzamemo priponsko drevo na Sliki 6, ki predstavlja besedo $T =$»KOKOŠ«. V besedi želimo preveriti prisotnost vzorca $P_1 =$ »KOŠ«, ki je prisoten v besedi, ter vzorca $P_2 =$ »KOT«, ki pa ni prisoten v besedi. Pri tem predpostavimo, da ima vsako vozlišče fiksno polje kazalcev na otroke (vsaka črka abecede ima eno celico v polju). Iskanje se začne v vozlišču `koren`. Preveri se, ali velja `koren.otroci['K']`$\neq$*NIL*. Ker `koren.otroci['K']` kaže na notranje vozlišče, ki ga imenujemo v, se lahko preveri, ali se podniz na povezavi ujema s P_1 oziroma P_2. Ker se oba vzorca začneta s »KO« in se ujema s podnizom na povezavi, si zapomnimo, da smo pregledali dve črki, in nadaljujemo s pregledovanjem. Za vzorec P_1 preverimo v vozlišču v, ali velja v`.otroci['Š']`$\neq$*NIL*. Ker obstaja taka povezava, lahko nadaljujemo z iskanjem, ampak smo že preverili vse črke vzorca, ker sta bila do vozlišča v

že pregledana $o = 2$ znaka in za iskanje naslednje povezave se je pregledal tudi znak $P_1[3] = $ Š. Zato lahko trdimo, da je vzorec P_1 prisoten v besedi »KOKOŠ«. Za razliko od vzorca P_1 se za vzorec P_2 v vozlišču v preveri, ali velja v`.otroci['T']`$\neq NIL$. Ker ne obstaja povezava, ki predstavlja podniz z prvim znakom 'T', vzorec P_2 ni prisoten v besedi »KOKOŠ«.

Preostali poizvedbi sta si zelo podobni in imata isto osnovno idejo implementacije. Brez škode za splošnost lahko uporabimo poizvedbo *številoPonovitev*(T, P), da razložimo idejo. Vzorec se nahaja na začetku sprehoda od *korena* proti listom, zato je število ponovitev vzorca v besedi enako številu listov v drevesu, katerih pot do njih se začne z vzorcem P. Isto velja tudi za poizvedbo *seznamPojavov*(T, P), pri čemer pa indeksi pripon, ki so shranjeni v listih, predstavljajo indekse v besedi, kjer se pojavi vzorec P.

Začetka implementacije obeh poizvedb sta enaki kot pri poizvedba *prisotnost*(T, P). Če je vzorec P prisoten v besedi, potem se vzorec P konča na povezavi, ki vodi v vozlišče v. Zato velja, da so vsi listi priponskega drevesa, ki predstavljajo pripone s predpono P, tudi listi v poddrevesu s korenom v vozlišču v. Torej za najti oziroma prešteti vse ponovitve vzorca P v vhodni besedi T se je potrebno sprehoditi po poddrevesu. Poizvedba *številoPonovitev*(T, P) vrne število obiskanih listov v poddrevesu s korenom v v, če pa vzorec P ni prisoten v besedi, pa vrne 0. Poizvedba *seznamPojavov*(T, P) pa vrne seznam vseh indeksov pripon, ki so predstavljeni z obiskanimi listi v sprehodu, če pa vzorec P ni prisoten v besedi, pa vrne prazen seznam [ ].

Časovna zahtevnost obeh poizvedb je $O(m + occ)$, pri čemer je *occ* število pojavov vzorca v besedi T. Ker je prvo potrebno preveriti, ali je vzorec prisoten v drevesu, je potrebno izvesti iste korake kot za poizvedbo *prisotnost*(T, P), za kar je potrebno $O(m)$ časa. Za najti vse liste v poddrevesu pa je potrebno še $O(occ)$ časa. Ker je v priponskem drevesu z n-timi listi $O(n)$ notranjih vozlišč, potem je v poddrevesu priponskega drevesa z *occ* listi $O(occ)$ vozlišč. Ker tako pregled v globino kot tudi pregled v širino potrebujeta v drevesih z n-timi vozlišči $O(n)$ časa, potemtakem za najti vse liste poddrevesa potrebujemo $O(occ)$ časa.

Za primer vzemimo besedo $T =$ »KOKOŠ«, za katero imamo zgrajeno priponsko drevo, ki je prikazano na Sliki 6. V besedi želimo preveriti, kolikokrat se pojavi vzorec $P =$ »KO« oziroma želimo narediti poizvedbo *številoPonovitev*(T, P). Poizvedbo začnemo v *korenu* priponskega drevesa, kjer preverimo, ali obstaja povezava na vozlišče, ki se začne z znakom $P[1] =$ *'K'*. Ker obstaja povezava `koren.otroci['K']`, imenujemo to vozlišče v in preverimo, ali se preostanek znakov na povezavi ujema z vzorcem. Povezava predstavlja podniz $T[1 : 2] =$»KO«, in ker smo že preverili prvi znak, je potrebno preverit še drugi znak, ki pa se tudi ujema. Vzorec je dolg dva znaka, zato se preverjanje prisotnosti vzorca ustavi ter nadaljujemo s preštevanjem listov v poddrevesu s korenom v v. Brez škode za splošnost lahko uporabimo pregled v globino ter začnemo s pregledom pregledovati v levem poddrevesu. Skrajno levi otrok od v

je list, ki predstavlja predpono z indeksom 1, zato povečamo število obiskanih listov iz 0 na 1. Nato pregledamo še drugega (zadnjega) otroka, ki je tudi list in predstavlja predpono z indeksom 3, zato se poveča število obiskanih listov iz 1 na 2. Ker smo pregledali celotno poddrevo, poizvedba vrne število 2, kar pomeni, da se vzorec $P =$ »KO« pojavi v besedi T dvakrat. Ča pa bi želeli poiskati indekse v besedi, kjer se vzorec pojavi, oziroma izvesti poizvedbo *seznamPojavov*(T, P), bi bil postopek enak. Pri tem bi beležili indekse pripon namesto štetja obiskanih listov. Ob obisku prvega lista bi se na konec praznega seznama vstavil indeks 1, za drugi list pa bi se na konec seznama vstavil še indeks 3. Torej bi poizvedba vrnila seznam $[1, 3]$.

3.2 GRADNJA

V tem podpoglavju bodo predstavljene različne metode gradnje priponskih dreves. Metode bodo predstavljene v zaporedju od najbolj počasne, ki zgradi priponsko drevo v času $O(n^3)$, do najhitrejše, ki zgradi drevo v času $O(n)$. Obstajata dve metodi gradnje priponskega drevesa s časovno zahtevnostjo $O(n)$: McCreightov algoritem [**?**] in Ukkonenov algoritem [**?**]. V nadaljevanju bo bolj podrobno opisan Ukkonenov sprotni (angl. *on-line*) algoritem, saj v vsakem koraku podaljša vse pripone v drevesu za en znak. McCreightov algoritem pa ni sprotni algoritem, saj v i-tem koraku doda i-to najdaljšo pripono.

3.2.1 Naivna metoda

Naivna metoda je sprotna metoda gradnje priponskega drevesa. Ta metoda v vsakem koraku s sprehodom po drevesu podaljša vse pripone za en znak ter doda novo pripono. Metoda v i-tem koraku gradnje v do sedaj zgrajeno drevo, ki je bilo zgrajeno za podniz $T[1 : i-1]$, doda znak $T[i]$ ter tako zgradi drevo za podniz $T[1 : i]$.

Načini dodajana Naj bo α niz, ki z $x = T[i]$ tvori niz $T[k : i] = \alpha x$, pri čemer je $1 \leq k \leq i$ in posledično je α lahko tudi prazen niz. Znak x je lahko dodan v drevo na tri načine:

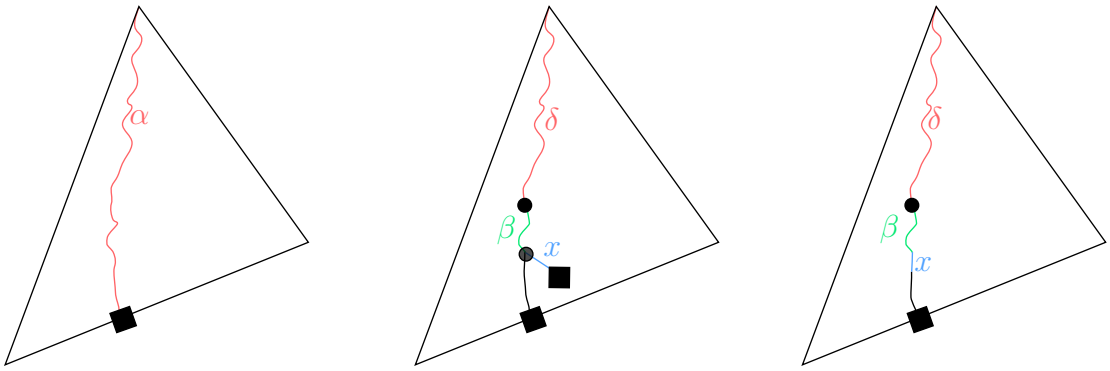
1. Če se niz α konča v listu, potem se zadnja povezava, ki je del niza α, podaljša za znak x. Torej enkrat, ko je list zgrajen, ne more postati notranje vozlišče. Način je prikazan na Sliki 7a.

2. Če pa se niz $\alpha = \delta\beta$ ne konča v listu, potem se konča bodisi v vozlišču v, bodisi na povezavi med vozliščema, recimo v_1 in v_2, ter δ predstavlja niz iz korena do vozlišča v_1, β pa predstavlja zadnji del niza α na povezavi med v_1 in v_2. V tem primeru se lahko znak x doda na dva načina:

(a) Če se nobena pot ne nadaljuje z znakom x, se ustvari nov list l, na katerega kaže povezava z oznako x. Če se niz α konča v vozlišču v, potem l postane otrok vozlišča v. Če pa se α konča sredini niza na povezavi med vozliščema v_1 in v_2, se ustvari novo vozlišče v'. Povezava, ki kaže iz vozlišča v_1 na vozlišče v', predstavlja niz β. Iz novega vozlišča kažeta dve povezavi: prva povezava kaže na list l, druga povezava pa kaže na vozlišče v_2, ki predstavlja preostanek niza, ki ga je predstavljala predhodna povezava. Način je prikazan na Sliki 7b.

(b) Če pa obstaja taka pot, ki se nadaljuje po nizu α z znakom x, se ne stori ničesar, saj je pripona že prisotna v drevesu kot predpona druge pripone. Način je prikazan na Sliki 7c.

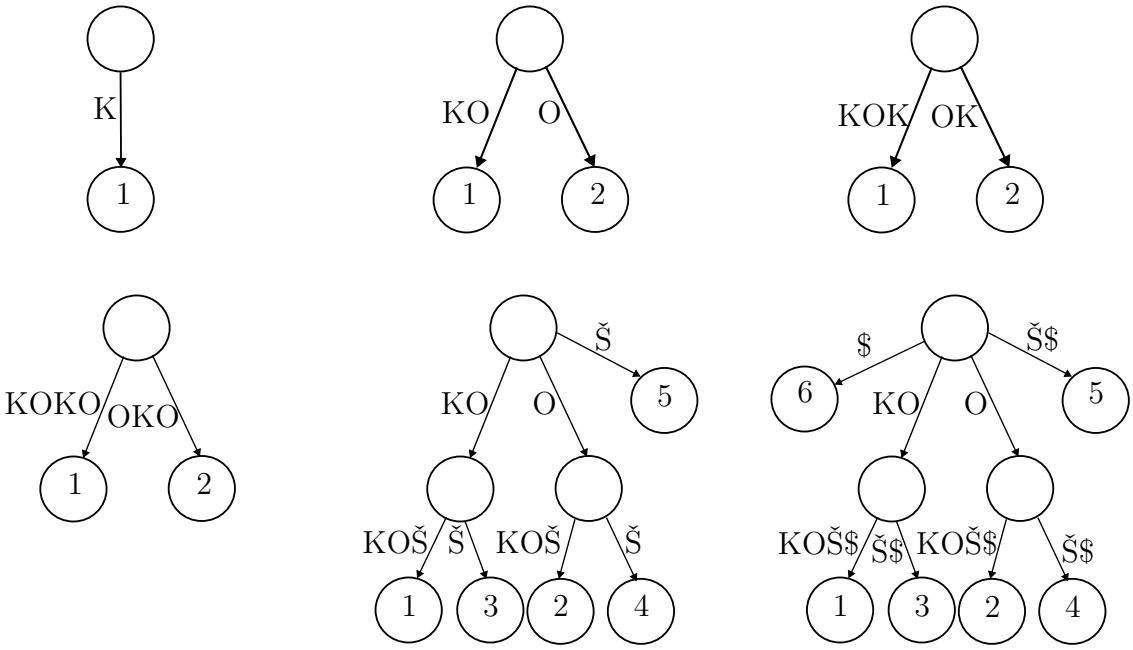
Ti načini podaljševanja pripon veljajo za vse sprotne metode gradnje priponskega drevesa.



(a) (b) (c)

Slika 7: Načini dodajanja novih znakov v priponsko drevo. Na sliki kvadratki predstavljajo liste drevesa, krogci pa predstavljajo notranja vozlišča drevesa.

Opazimo, da drevo, ki je zgrajeno za podniz $T[1 : i]$, $i < n$, ni nujno priponsko, saj niso vse pripone podniza $T[1 : i]$ shranjene v listih. Še več, nekatere pripone niso niti eksplicitno predstavljene z vozliščem. Kljub temu pa to drevo vsebuje vso informacijo o pripadajočlh priponah, pri čemer moramo posebej beležiti vse pripone, ki so predpone drugim priponam. Takšne pripone imenujemo implicitno predstavljene pripone. Takšnemu drevesu pa rečemo implicitno priponsko drevo. Algoritem gradnje priponskega drevesa z naivno metodo je prikazan v Algoritmu **??**. V algoritmu je uporabljena funkcija `najdiVozlišče`(α), ki vrne najglobje vozlišče pri iskanju niza α v drevesu. Primer gradnje priponskega drevesa za besedo »KOKOŠ« z naivno metodo je prikazan na Sliki 8. Na Sliki 8 zgolj tretje (zadnje drevo v prvi vrstici) in četrto (prvo drevo v drugi vrstici) drevo sta implicitna priponska drevesa.



Slika 8: Primer gradnje priponskega drevesa z uporabo Naivne metode za besedo »KOKOŠ$«.

Izrek 3.4. *Naivna metoda zgradi priponsko drevo nad besedo T, dolžine n, v času $O(n^3)$.*

Dokaz. Naivna metoda se v vsakem koraku sprehodi čez celotno drevo. Črkovna globina vsakega vozlišča je največ dolžina že dodanega besedila v drevesu, v i-tem koraku je črkovna globina $sd(v)$ vsakega vozlišča v je največ i. Podobno velja tudi za število listov v drevesu, ki ne presega dolžine že dodanega podniza. Globina lista je manjša ali enaka črkovni globini, torej velja, da se v i-tem koraku pregleda $\sum_{j=1}^{i-1} j = \frac{i(i-1)}{2}$ vozlišč.

Ker je niz T dolg n znakov, je skozi celotno gradnjo priponskega drevesa število obiskanih vozlišč enako

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = O(n^3).$$

Torej naivna metoda potrebuje $O(n^3)$ časa. □

3.2.2 Izboljšana naivna metoda

Naivna metoda je preprosti način gradnje priponskega drevesa, vendar se hitro opazijo načini za pospešitev. Prvi način izboljšave je pomnjenje implicitnih pripon. Na ta način ni potrebno iskati vsako pripono preden se jo lahko podaljša. Zato lahko naslednji znak

Algoritem 2: Naivna metoda gradnje priponskega drevesa

Vhod: Beseda T, dolžine n

Izhod: Priponsko drevo

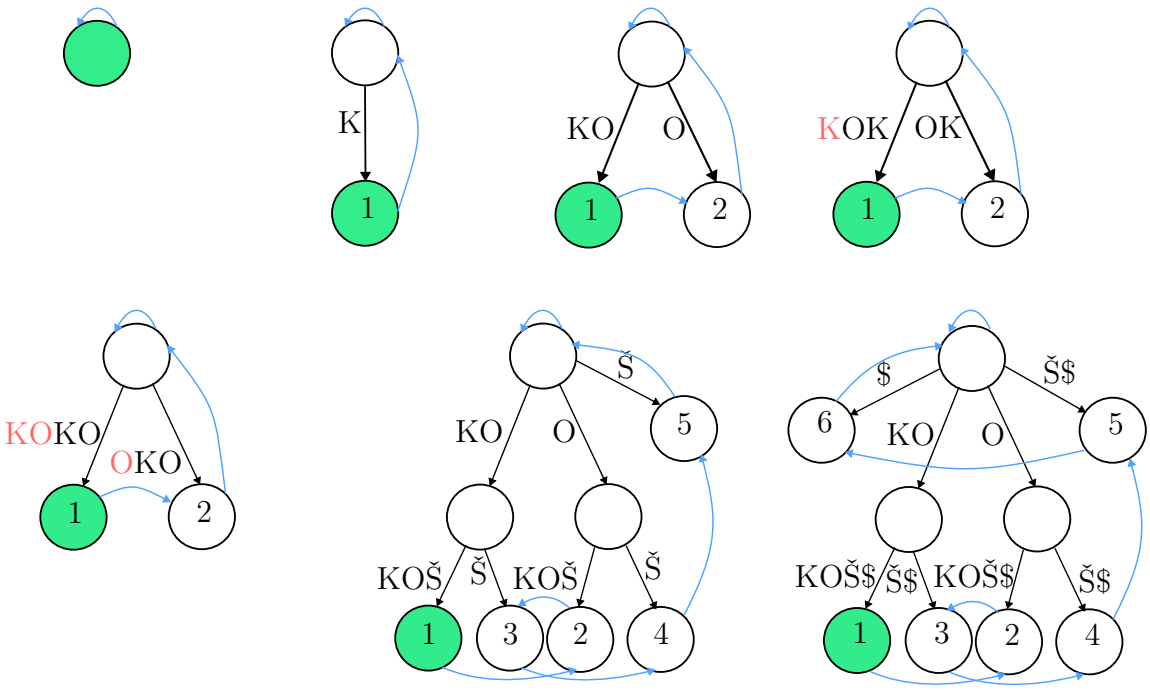
```
1  Ustvari vozlišče koren
2  s ← koren
3  za i = 1, ..., n
4      za j = 1, ..., i − 1
5          v ←najdiVozlišče(T[j, i])
6          u ← v.otrok[T[j + sd(v) + 1]]
7          če beseda(u)| = i − j potem
8              sicer če jeList(()u) potem
9                  Uporabi način podaljševanja pripon 1 (strani 23)
10             sicer če u.otrok[T[i]] = NIL potem
11                 Ustvari list l_i, v.otrok[T[i]] ← l_i
12         sicer če | beseda(u)[i − j + 1] ≠ T[i] potem
13             Uporabi način podaljševanja pripon 2a (strani 23)
14     če koren.otrok[T[i]] = NIL potem
15         Ustvari list l_i, koren.otrok[T[i]] ← l_i
```

dodamo zgolj z enim sprehodom po drevesu. Za tem pa opazimo, da metoda nepotrebno pregleduje celotno drevo. Možna rešitev za ta problem je povezan seznam vozlišč, ki predstavljajo pripone. Vozlišče v, ki predstavlja pripono, je list, če se pripona konča v listu, sicer pa je vozlišče, iz katerega se začne povezava s koncem pripone.

Definicija 3.5. Naj vozlišče v predstavlja pripono $T[i :]$ in vozlišče w predstavlja pripono $T[i + 1 :]$ Z Ψ označimo povezavo, ki kaže iz vozlišča v na vozlišče w.

Na Sliki **??**, ki prikazuje postopek gradnje priponskega drevesa za besedo »KOKOŠ« z izboljšano naivno metodo, so prikazane povezave na naslednje vozlišče z modro puščico. Uvedba seznama pripon omogoča izogib nepotrebnim sprehodom po drevesu. Tako metoda podaljša vse liste zgolj s sprehodom po seznamu. Pri tem velja, da je $\Psi(koren()) = koren()$. Na ta način lahko pregledamo vse pripone v drevesu. Metoda se v vsakem koraku sprehodi iz začetne točke, ki predstavlja najdaljšo pripono, po seznamu pripon. Na Sliki **??** je začetna točka označena z zeleno barvo. Ker je število vozlišč v seznamu lahko manjše od števila pripon in $koren()$ kaže nase, metoda šteje, koliko pripon je že podaljšala v trenutnem koraku. Na Sliki **??** so vse implicitno predstavljene pripone, prikazane z rdečo barvo.

Na Algoritmu **??** je prikazana psevdokoda izboljšane naivne metode gradnje. V



Slika 9: Primer gradnje priponskega drevesa z uporabo Izboljšane naivne metode za besedo »KOKOŠ$«.

vsakem koraku gradnje se metoda sprehodi po seznamu vozlišč, ki predstavljajo pripono, in podaljša vse pripone. Vsakič, ko se pripona podaljša z načinom 2a (stran 23), je potrebno popraviti seznam vozlišč. V vsakem koraku je v seznamu največ toliko vozlišč, kot je pripon. Ker je lahko vozlišč manj, metoda šteje število že obiskanih pripon in vse neobiskane pripone se obišče iz korena.

Iz Algoritma **??** je razvidno, da se metoda v i-tem koraku sprehodi po seznamu vozlišč velikosti $O(i)$ ter tako podaljša i pripon. Vhodna beseda je dolga n znakov, zato je čas gradnje z izboljšano naivno metodo $O(n^2)$. Iz tega sledi izrek:

Izrek 3.6. *Izboljšana naivna metoda zgradi priponsko drevo nad besedo T v času $O(n^2)$.*

Čeprav te izboljšave znižajo čas gradnje priponskega drevesa iz $O(n^3)$ na $O(n^2)$, le te ne omogočajo gradnje drevesa v času $O(n)$.

3.2.3 Ukkonenov algoritem

Ukkonenov algoritem deluje na podoben način kot naivna metoda in izboljšana naivna metoda, saj dodaja v drevo črko po črko. Torej algoritem v i-tem koraku zgradi priponsko drevo, ki je lahko implicitno priponsko drevo, in predstavlja besedo $T[1:i]$. Algoritem v i-tem koraku doda v obstoječe drevo črko $T[i]$. Črka je dodana v drevo

Algoritem 3: Izboljšana naivna metoda gradnje priponskega drevesa

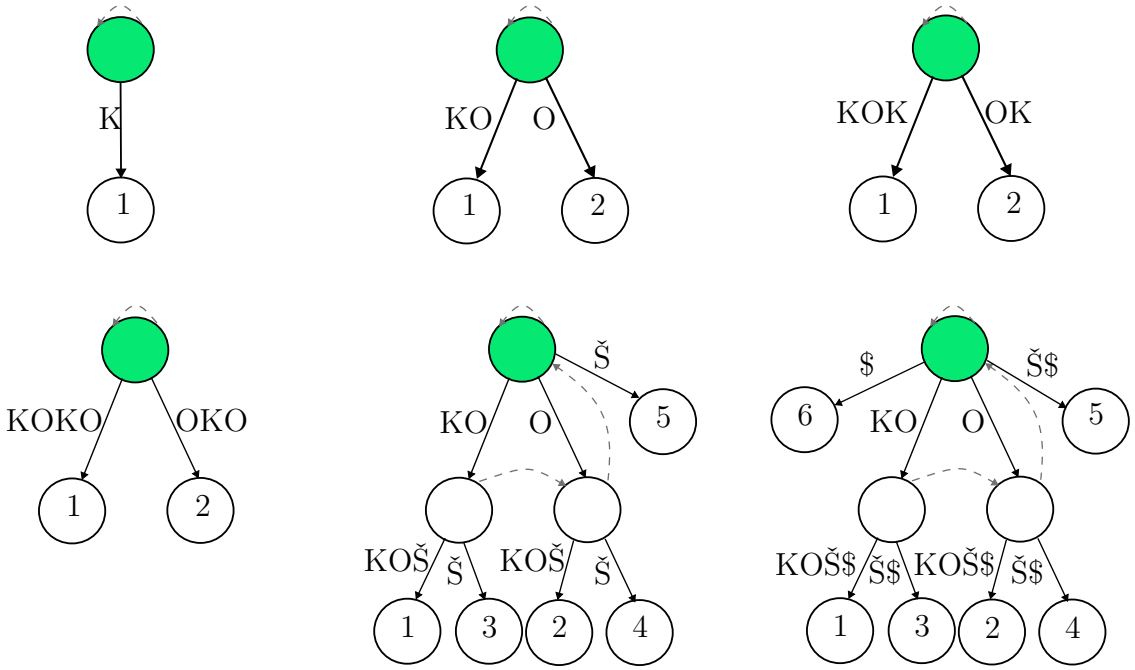
Vhod: Beseda T, dolžine n

Izhod: Priponsko drevo

```
1  Ustvari vozlišče koren; ZacetnaTocka ← koren()
2  za i = 1, ..., n
3      v ← ZacetnaTocka
4      za j = 1, ..., i − 1
5          če jeList(v) potem Uporabi način podaljševanja pripon 1 (strani 23)
6          sicer
7              k ← |beseda(v)|, u ← v.otrok[T[j + k + 1]]
8              če u = NIL potem
9                  Ustvari list l_i; v.otrok[T[i]] ← l_i
10                 Popravi seznam pripon (v spremni v l_i)
11             sicer če j + |beseda(u)| < i potem
12                 če u.otrok[T[i]] = NIL potem
13                     Ustvari list l_i, u.otrok[T[i]] ← l_i
14                     Popravi seznam pripon (v spremni v l_i)
15                 sicer Popravi seznam pripon (v spremni v u)
16             sicer če |beseda(u)[i − j + 1] ≠ T[i] potem
17                 Uporabi način podaljševanja pripon 2a (strani 23)
18                 Popravi seznam pripon (v spremni v l_i)
19         v ← v.Ψ
20     če koren.otrok[T[i]] = NIL potem Ustvari list l_i; koren.otrok[T[i]] ← l_i
21     če ZacetnaTocka = koren() potem ZacetnaTocka ← l_1
```

na iste tri načine kot pri ostalih dveh metodah in jih lahko vidimo tudi na primeru gradnje priponskega drevesa za besedo »KOKOŠ$«. Postopek gradnje z Ukkonenovim algoritmom in vmesna drevesa so prikazana na Sliki **??**. Iz načina dodajanja novih znakov v priponsko drevo, ki ga uporablja algoritem, se opazi, da se število vozlišč v drevesu spremeni samo z drugim načinom dodajanja (2a). Torej se moramo sprehoditi zgolj po vozliščih, iz katerih kažejo povezave s konci implicitnih pripon. V teh točkah se lahko zgodi delitev povezave. Zato se potrebuje dodatno povezavo, ki bo nadomestila povezavo na naslednjo pripono, imenovano priponska povezava (angl. *Suffix link*).

Definicija 3.7. Naj bo v notranje vozlišče, za keterega velja $beseda(v) = x \cdot \alpha$ ter $x \in \Sigma$ in $\alpha \in \Sigma^*$. Priponska povezava $sl(v)$ je povezava iz vozlišča v na notranje vozlišče w, za katerega velja $beseda(w) = \alpha$.



Slika 10: Primer gradnje priponskega drevesa z uporabo Ukkonenovaga algoritma za besedo »KOKOŠ$«.

Podobno kot pri povezavi na naslednjo pripono Ψ, velja $sl(koren()) = koren()$. Na Sliki **??** so priponske povezave označene s sivo črtkano črto. Vse točke, v katerih se bo v tem koraku zgodila delitev, imenujemo aktivne točke (angl. *active point*). Na Sliki **??** je z zeleno označeno vozlišče, ki se nahaja pred začetno aktivno točko. Premik po aktivnih točkah med začetno aktivno točko in končno aktivno točko poteka po priponskih povezavah. Pri tem pa algoritem v vsakem koraku poti izračuna, ali je že prišel v končno aktivno točko. Zato je potrebno hraniti zgolj trenutno aktivno točko ter zastavico, ki hrani vrednost, ali je ta točka tudi končna aktivna točka. Aktivna točka postane končna aktivna točka takrat, ko se način dodajanja spremeni iz 2a v 2b (strani 23), ali, ko so vse implicitne pripone postale listi drevesa, saj od takrat ni več potrebno v trenutnem koraku gradnje deliti povezave in ustvarjati nova vozlišča. Pri tem velja tudi, da končna aktivna točka v koraku $i-1$ postane začetna aktivna točka v koraku i, saj se prva nova delitev v koraku i lahko zgodi zgolj v točki, kjer so se končale delitve v koraku $i-1$, in to je končna točka koraka $i-1$.

Vsako aktivno točko lahko predstavimo kot referenčni par (s, α), pri čemer je s vozlišče pred aktivno točko in α je niz iz vozlišča s do aktivne točke. Za lažje shranjevanje niza α je le ta shranjen kot par indeksov (k, p), pri čemer je $\alpha = T[k : p]$. Aktivna točka je lahko predstavljena z različnimi pari $(s, (k, p))$. Če je s najglobje vozlišče pred aktivno točko, takšen par imenujemo kanonična oblika referenčenga para. Kanonična

Algoritem 4: Ukkonenov algoritem za gradnjo priponskega drevesa

Vhod: Beseda T, dolžine n

Izhod: Priponsko drevo

```
1  Ustvari vozlišče koren
2  s ← koren, k ← 1
3  za i = 1, ..., n
4      sVoz←NIL
5      (KončnaTočka, v) ←razdeliTestiraj((s, (k, i − 1)), T[i])
6      dokler ni KončnaTočka
7          ustvari list l na katerega kaže točka v
8          če sVoz ≠ NIL potem
9              Ustvari priponsko povezavo iz sVoz v v
10         sVoz<-v
11         (s, k) ←kanoničnaOblika((sl(s), (k, i − 1)))
12         (KončnaTočka, v) ←razdeliTestiraj((s, (k, i − 1)), T[i])
13     če sVoz ≠ NIL potem
14         Ustvari priponsko povezavo iz sVoz v s
15     (s, k) ←kanoničnaOblika((s, (k, i)))
```

oblika je po definiciji enolična. Med vsemi referenčnimi pari za dano aktivno točko velja, da je pri paru, ki je v kanonični obliki, niz $\alpha = T[k : p]$ najkrajši. Na Sliki **??** v četrtem koraku gradnje, ki ga predstavlja prvo drevo v spodnji vrstici, je začetna aktivna točka predstavljena kot $(koren, (3, 3))$, v naslednjem koraku pa je začetna aktivna točka $(koren, (3, 4))$, ki se bo razcepila in bo postala novo vozlišče. Ta ista točka je lahko po koncu gradnje še vedno predstavljena z referenčnim parom $(koren, (2, 4))$, ki pa ni v kanonični obliki. Kanonična oblika te točke je $(a, (4, 4))$, pri čemer je vozlišče a otrok *koren*-a, na katerega kaže povezava z nizom »KO«.

Ukkonenov algoritem za gradnjo priponskega drevesa zgradi priponsko drevo s psevdokodo, ki je prikazana na Algoritmu **??**. V algoritmu par $(s, (k, i - 1))$ predstavlja kanonično obliko aktivne točke v trenutnem koraku. Zastavica *KončnaTočka* ima vrednost *true*, če je trenutna aktivna točka tudi končna točka, sicer ima vrednost *false*. Vozlišče v predstavlja vozlišče, v katerega bo pripet nov list v'. Povezava do lista v' bo predstavljala črko $T[i]$. Vozlišče *sVoz* pa predstavlja vozlišče, na katerga je bil nazadnje pripet list v i-tem koraku. Vozlišče *sVoz* je *NIL* zgolj v prvem dodajanju novega lista v vsakem koraku.

Algoritem **??** uporabi dve pomožni funkciji. Prva uporabljena pomožna funkcija je `kanoničnaOblika`, ki za trenutno aktivno točko, predstavljeno z referenčnim parom

$(s, (k, p))$, vrne njegovo kanonično obliko. Funkcija se sprehodi po drevesu dokler ne doseže najnižjega vozlišča pred aktivno točko. S tem korakom je omogočena učinkovitejša uporaba funkcije `razdeliTestiraj`.

Funkcija `razdeliTestiraj` prejme kot vhod trenutno aktivno točko, ki je podana kot referenčni par $(s, (k, p))$ v kanonični obliki, ter znak t, ki se želi vstaviti v priponsko drevo. Funkcija preveri, ali se niza $T[k : p + 1]$ in $T[k : p] \cdot t$ ujemata. Če se, potem je trenutna aktivna točka tudi končna točka, zato funkcija ne stori ničesar in vrne (true, s). Sicer pa funkcija razdeli povezavo in aktivna točka postane novo vozlišče v, če že ne obstaja vozlišče v, nato pa vrne (false, v).

Izrek 3.8. *Ukkonenov algoritem zgradi priponsko drevo nad besedo T dolžine n v času $O(n)$.*

Dokaz. Dokaz je razdeljen na dva dela: v prvem delu bomo dokazali, da se zanka, ki se začne v vrstici **??**, skozi celotno izvajanje algoritma izvede $O(n)$-krat, drugi del pa se bo osredotočil na časovno zahtevnost funkcije `kanoničnaOblika`.

Časovna zahtevnost funkcije `razdeliTestiraj` je $O(1)$, saj je aktivna točka podana v kanonični obliki, zato ni potrebnih odvečnih sprehodov po drevesu, ki bi povečali časovno zahtevnost. Funkcija preveri, ali je trenutna aktivna točka tudi končna točka, za kar potrebuje konstanten čas. Če ni končna točka, jo spremeni v notranje vozlišče, za kar je potreben konstanten čas. Sicer pa ne stori ničesar in vrne, da je aktivna točka tudi končna točka.

Zanka v i-tem koraku gradnje dodaja nove povezave na poti iz končne točke kt_{i-1} koraka $i - 1$ do končne točke kt_i koraka i, katera ni še obiskana. Natančno število obiskanih vozlišč na poti je $D(kt_{i-1}) - D(kt_i) + 2$, iz česar sledi, da se s pomočjo seštevalne amortizacije v n-tih korakih zanka izvede

$$\sum_{i=1}^{n} (D(kt_{i-1}) - D(kt_i) + 2) = D(kt_0) - D(kt_n) + 2n = O(n).$$

Pri tem je potrebno še dokazati, da tudi sprehod v funkciji `kanoničnaOblika` obišče $O(n)$ vozlišč skozi celotno gradnjo priponskega drevesa. Funkcija ob vsakem klicu pogleda največ $p - k$ vozlišč, kar je dolžina niza $\beta = T[k : p]$. Pri tem pa se niz β z vsakim obiskanim vozliščem skrajša, saj se poveča število k. Niz β pa se lahko poveča zgolj v **??** vrstici Algoritma **??**. Ker se niz β poveča n-krat skozi celotno gradnjo, se potemtakem tudi niz β lahko zmanjša največ n-krat skozi celotno gradnjo. Torej funkcija `kanoničnaOblika` obišče največ n vozlišč v celotni gradnji priponskega drevesa.

Zanka v vrstici **??** Algoritma **??** se izvede n-krat, medtem ko se zanka v vrstici **??** in funkcija `kanoničnaOblika` vsaka izvede v $O(n)$ časa skozi celotno gradnjo priponskega

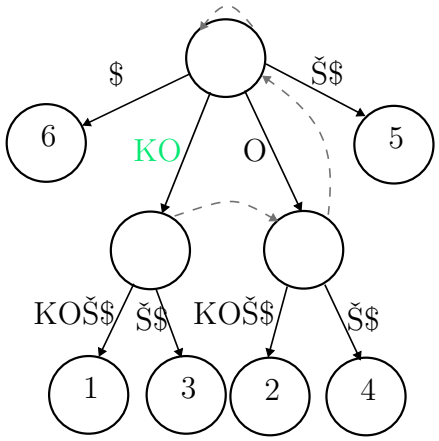
drevesa, iz česar sledi, da tudi gradnja priponskega drevesa potrebuje $O(n)$ časa, da se izvrši.

□

V nadaljevanju bo uporabljen Ukkonenov algoritem za gradnjo priponskih dreves, ki bodo uporabljena pri empirični analizi v Poglavju **??**, kjer bo tudi izmerjen vpliv pomanjkanja notranjega pomnilnika ter posledična uporaba zunanjega pomnilnika (Swap razdelek na zunanjem spominu) namesto notranjega pomnilnika.

4 PRIPONSKO POLJE

V priponskem drevesu nad besedo T dolžine n na vsako vozlišče, razen na koren, kaže ena povezavo, ki in priponska. To lahko vidimo na zgornjem delu Slike **??**, na katerem je prikazano priponsko drevo za besedo »KOKOŠ$«, da v vsako vozlišče kaže črna puščica. Vsako vozlišče razen korena ima tudi povezavo na svojega starša. Na Sliki **??** teh povezan ni prikazanih. Vsako notranje vozlišče v priponskem drevesu pa vsebuje tudi priponsko povezavo in le te so na Sliki **??** prikazane s sivo črtkano puščico. Priponsko drevo ima n listov in n_v notranjih vozlišč, zato potrebuje $2(n_v-1+n)+n_v = 3n_v-2+2n$ povezav. Priponsko drevo ima največ $n-1$ notranje vozlišče, torej priponsko drevo potrebuje med $2n+1$ in $5n-5$ povezav.



	1	2	3	4	5	6
LCP	-	0	2	0	1	0
SA	6	1	3	2	4	5

Slika 11: Primer priponskega drevesa in priponskega polja z dodatnim LCP poljem nad besedo »KOKOŠ$«.

Vsaka povezava iz vozlišča v_1 v v_2, pri čemer je $starš(v_2) = v_1$, predstavlja neprazen podniz besede T in sicer podniz α, ki je definiran kot $beseda(v_2) = beseda(v_1) \cdot \alpha$. To se lahko vidi na Sliki **??**, saj ima vsaka črna puščica zraven dopisan niz, ki ga predstavlja. Vsak podniz α je lahko predstavljen kot $T[s : e]$. Zato sta v vozlišču v_2 shranjena indeksa s in e z dvema celima številoma. Torej potrebuje priponsko drevo še prostor

za shraniti $2(n_v - 1 + n)$ celih števil oziroma med $2n$ in $4n - 2$ celih števil.

Vsak list v drevesu predstavlja eno pripono, zato se v vsakem listu hrani še indeks začetka pripone, ki jo predstavlja list, v besedi T. Z drugimi besedami, če je i indeks pripone, ki jo predstavlja list l, potem velja, da je $beseda(l) = T[i : n]$. To se lahko vidi tudi na Sliki **??**, kjer v je vsakem listu prikazan indeks pripone, ki jo predstavlja. Za predstaviti indekse začetkov pripon je potrebnih še dodatnih n celih števil. Če seštejemo vse skupaj, priponsko drevo potrebuje največ $5n - 5$ referenc na vozlišča in $5n - 2$ celih števil ali $10n - 7$ celih števil, če se uporabljajo cela števila kot reference.

Pri tem se pojavi vprašanje, ali je mogoče indeksirati celotno besedo T z zgolj n-timi celimi števili. Odgovor je da, saj vsak list v drevesu predstavlja eno pripono. To lahko storimo tako, da shranimo indekse, ki so shranjeni v listih priponskega drevesa, v polju celih števil in sicer polnimo polje iz leve proti desni z indeksi, ki jih dobimo ob premem sprehodu po drevesu. Pri tem se pojavi problem iskanja po takem polju, saj nam premi sprehod ne zagotavlja leksikografske urejenosti pripon. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da so povezave, ki kažejo na otroke vozlišč, urejene glede na zaporedje znakov v abecedi Σ. Torej so listi leksikografsko urejeni oziroma je $beseda(l_i) < beseda(l_{i+1})$. Ta predpostavka je bila uporabljena na vseh slikah do sedaj. Torej imamo polje indeksov pripon, ki so leksikografsko urejeni, in ga imenujemo priponsko polje (angl. *Suffix array* oziroma SA). Primer priponskega polja za besedo »KOKOŠ$« je prikazan na spodnjem delu Slike **??**.

V nadaljevanju poglavja bodo predstavljena implementacija poizvedb nad vhodno besedo z uporabo priponskega polja ter pospešitev iskanja z dodatno podatkovno strukturo, imenovano LCP polje. Nato pa bo predstavljen še način gradnje priponskega polja. Za tem bo predstavljena posplošitev LCP polja, ki omogoča simuliranje priponskega drevesa.

4.1 POIZVEDBE

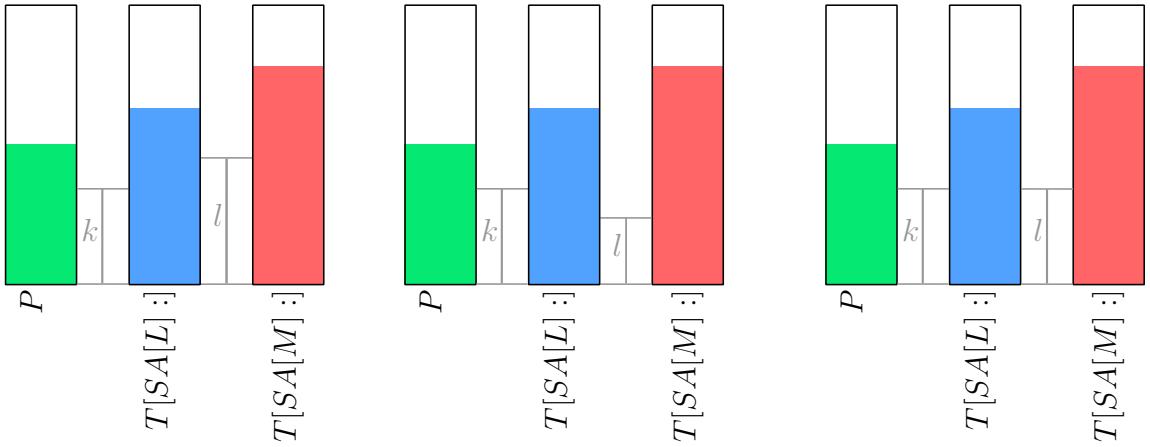
Priponsko polje je bilo izgrajeno kot alternativa priponskemu drevesu, zato se ga uporablja za indeksiranje besede T in posledično iskanje vzorcev v njej. V tem podpoglavju bodo predstavljene implementacije za priponsko polje istih poizvedb, ki so bile predstavljene za priponsko drevo.

Najbolj osnovna poizvedba, ki bo uporabljena kot osnova za ostali dve poizvedbi, je $prisotnost(T, P)$. Prisotnost vzorca P dolžine m v besedi T lahko preverimo z razpolavljanjem, saj so pripone v priponskem polju urejene. V vsakem koraku razpolavljanja preverimo, ali se pripona na sredini intervala $[L : R]$ (v prvem koraku je $L = 1$ in $R = n$) ujema z vzorcem P, pri čemer označimo indeks te pripone kot M. Če je $P = T[SA[M] : SA[M] + m - 1]$, potem je vzorec P prisoten v besedi T, sicer pa

obstaja tak k, za katerega velja $P[k] \neq T[SA[M]+k-1]$. V tem primeru obstajata dve možnosti: $P[k] < T[SA[M]+k-1]$ in zato nadaljujemo z iskanjem v intervalu $[L:M]$ ali pa $P[k] > T[SA[M]+k-1]$ in se nadaljuje z iskanjem v intervalu $[M:R]$. Postopek se nadaljuje dokler $R-L>1$ oziroma $P = T[SA[M] : SA[M]+m-1]$. Ko je $R-L=1$ in $P[k] \neq T[SA[M]+k]$ potem P ni prisoten v besedi T, sicer pa je vzorec prisoten v T, saj je $P = T[SA[M] : SA[M]+m-1]$. Tako opisan postopek potrebuje $O(m \log n)$ časa, saj razpolavljanje potrebuje $O(\log n)$ primerjav, vsaka primerjava pa potrebuje dodatnih $O(m)$ primerjav, ali se pripona in vzorec ujemata. Ta način iskanja je $O(\log n)$-krat počasnejši od iskanja v priponskem drevesu. To razliko si želimo znižati, pri tem pa ne želimo shraniti celotne topologije drevesa, ampak zgolj informacije, ki pospešijo iskanje po priponskem polju. Informacijo, ki jo želimo shraniti, je število znakov na začetku pripon, ki se ujemajo med dvema priponama, ali z drugimi besedami dolžino najdaljše skupne predpone. To informacijo shranimo v polje najdaljših skupnih predpon (angl. *Longest common prefix* oziroma LCP), ki za vsak pari indeksov i, j hrani

$$\begin{aligned} LCP[i,j]| &= lcp(T[SA[i],n], T[SA[j],n]) = \\ &= \max\{k \in [1,n]; T[SA[i], SA[i]+k] = T[SA[j], SA[j]+k]\}. \end{aligned}$$

Tako definirano LCP polje potrebuje $O(n^2)$ prostora. Problem, ki ga želimo rešiti z LCP poljem, je ponovno štetje znakov, za katere vemo, da se ujemajo med pripono $T[SA[M]:]$ in P. Le teh je v vsakem koraku n_s. S tem vedenjem lahko zmanjšamo število primerjav črk med P in priponami $T[SA[M]:]$ na $O(m)$ skozi celotno izvajanje razpolavljanja.



(a) $k < l = LCP[L,M]$ (b) $k > l = LCP[L,M]$ (c) $k = l = LCP[L,M]$

Slika 12: Prikaz razmerja med P in priponama $T[SA[L]:]$ in $T[SA[M]:]$

Na začetku vsakega koraka vemo, da se P ujema z vsaj n_s znaki in če smo v levem oziroma desnem podintervalom predhodnega intervala. Recimo, da smo v desnem,

torej L je bila predhodna sredinska točka. Vemo, da se P in $SA[L]$-ta pripona ujemata v k znakih ter $SA[L]$-ta pripona in $SA[M]$-ta pripona se ujemata v $LCP[L, M]$-tih znakih ter pripona $SA[L]$ je leksikografsko manjša od $SA[M]$. Torej obstajajo tri možne relacije med n_s in $LCP[L, M]$:

1. $n_s < LCP[L, M]$, potem se $SA[L]$-ta pripona in $SA[M]$-ta pripona bolj ujemata kot $SA[L]$-ta pripona in P. Ker smo v predhodnem koraku izvedeli, da je P večji od srednje vrednosti predhodnega intervala, to pomeni, da je $P[n_s + 1] > T[SA[L + n_s + 1]] = T[SA[M] + n_s + 1]$. Torej naslednji pregledani interval je $SA[M : R]$.

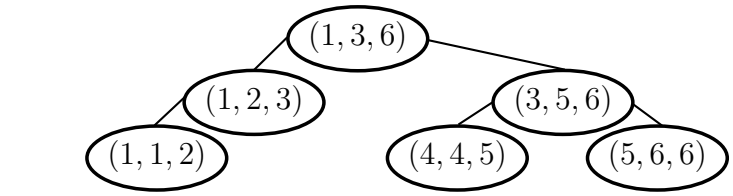
2. $n_s > LCP[L, M]$, potem se $SA[L]$-ta pripona in $SA[M]$-ta pripona manj ujemata kot $SA[L]$-ta pripona in P. Označimo $LCP[L, M] = l$. Torej $P[l+1] = T[SA[L+ l + 1]] < T[SA[M + l + 1]]$, saj je $L < M$, ker je $SA[L]$-ta pripona leksikografsko manjša od $SA[M]$-te pripone. Torej se razpolavljanje nadaljuje na intervalu $SA[L : M]$.

3. $n_s = LCP[L, M]$, potem je potrebno preveriti, ali je P večji od $SA[M]$-te pripone. Pri tem ni potrebno preveriti prvih n_s znakov, saj vemo, da se ujemajo, ker se $SA[L]$-ta pripona ujema s $SA[M]$-ta pripono v n_s znakih in se $SA[L]$-ta pripona tudi ujema s P v n_s znakih. Med preverjanjem štejemo, koliko znakov se ujema in to zabeležimo kot n'_s. Če je $P[n_s + n'_s + 1] < T[SA[M] + n_s + n'_s + 1]$ potem nadaljujemo v interval $SA[L : M]$, sicer je $P[n_s + n'_s + 1] > T[SA[M] + k + k' + 1]$ in nadaljujemo v interval $SA[M : R]$. Preden nadaljujemo v naslednji interval popravimo $n_s \leftarrow n_s + n'_s$, pri čemer novi $n_s \leq m$. Če je $n_s = m$ potem je vzorec P prisoten v besedi T.

Simetrično velja tudi, če smo v levem podintervalu, pri tem pa uporabimo celico $LCP[R, M]$, saj je R predhodna srednja točka intervala. Iz tega sledi naslednja lema.

Lema 4.1. *Poizvedba prisotnost(T, P), implementirana s priponskim poljem in do sedaj predstavljenim LCP poljem, potrebuje $O(m + \log n)$ časa in $O(n^2 + n)$ prostora.*

Pri tem se opazi, da velika večina celic LCP polja ne bo nikoli uporabljena pri razpolavljanju. V vsakem koraku razpolavljanja se preverja, ali je vzorec večji od sredinske točke M na intervalu $L : R$ indeksov v priponskem polju. Torej za vsak možen interval razpolavljanja je dovolj, da se hrani dolžina najdaljše predpone med M in L ter med M in R. Ker je vsaka pripona srednja točka natanko enega intervala v razpolavljanju, potem potrebujemo dve LCP polji, in sicer prvega za shraniti dolžino najdaljše predpone med M in L, ki ga imenujemo *L-LCP*, in drugega za shraniti dolžino najdaljše predpone med M in R, ki ga imenujemo *R-LCP*. Primer teh dveh polj je prikazan na Sliki **??**, na kateri je prikazano tudi drevo sledi razpolavljanja. Na vsakem vozlišču



	1	2	3	4	5	6
SA	6	1	3	2	4	5
Llcp	1	0	0	0	0	0
Rlcp	0	2	0	1	0	2

Slika 13: Primer *L-LCP* in *R-LCP* polji za priponskega polja nad besedo »KOKOŠ$«.

drevesa je prikazan tudi interval indeksov priponskega polja (L, M, R), pri čemer L predstavlja začetek intervala, R predstavlja konec intervala indeksov in M predstavlja sredinski indeks, katerega predstavljena pripona bo bila primerjana z vzorcem P [**?**].

Poizvedbo spremenimo tako, da se polje LCP zamenja z *L-LCP* poljem, ko se primerja priponi $SA[M]$ in $SA[L]$, oziroma z *R-LCP* poljem, ko se primerja priponi $SA[M]$ in $SA[R]$. Iz tega sledi naslednja lema.

Lema 4.2. *Poizvedba* $prisotnost(T, P)$*, implementirana s priponskim poljem in L-LCP in R-LCP poljema, potrebuje* $O(m + \log n)$ *časa in prostora za* $3n$ *celih števil.*

Priponsko polje s to izboljšavo LCP polja potrebuje manj kot tretjino prostora, ki ga potrebuje ekvivalentno priponsko drevo. Pri tem pa poizvedba $prisotnost(T, P)$ potrebuje zgolj $O(\log n)$ dodatnega časa. Opazimo še, da se za vsak interval uporablja bodisi *L-LCP* polje bodisi *R-LCP* polje, nikoli pa obe polji hkrati. Torej vrednosti, ki bodo uporabljene, se lahko zapiše v *Q-LCP* polje, tako da $Q\text{-}LCP[M] = R\text{-}LCP[M]$, če se primerja priponi $SA[M]$ in $SA[R]$, sicer je $Q\text{-}LCP[M] = L\text{-}LCP[M]$, ko se primerja priponi $SA[M]$ in $SA[L]$. Na ta način se lahko v poizvedbi zamenja *L-LCP* in *R-LCP* polji z *Q-LCP* poljem. Iz tega sledi izrek.

Izrek 4.3. *Poizvedba* $prisotnost(T, P)$*, implementirana s priponskim poljem in Q-LCP poljem, potrebuje* $O(m + \log n)$ *časa in prostora za* $2n$ *celih števil.*

Idejo poizvedbe $prisotnost(T, P)$ lahko uporabimo za implementacijo poizvedbe $številoPonovitev(T, P)$. Poizvedba vrne število *occ*, ki je število ponovite vzorca P v besedi T. Naivna implementacija bi bila štetje pripon levo in desno od M-te pripone, ki je prva pripona v razpolavljanju, ki se ujema z P. Ta postopek potrebuje $O(m+\log n+$ *occ*) časa. Poizvedbo se lahko pohitri na $O(m+\log n)$ z dvema razpolavljanjema. Prvo razpolavljanje je potrebna za iskanje začetka intervala L vseh pripon, ki se začnejo s P, drugo razpolavljanje pa je potrebna za iskanje konca intervala R vseh takih pripon.

Število pripon, ki se začnejo s P, je $occ = R - L + 1$. Vsako razpolavljanje potrebuje $O(m + \log n)$ časa, torej tudi poizvedba *številoPonovitev*(T, P) potrebuje $O(m + \log n)$ časa.

Na podoben način poizvedba *seznamPojavov*(T, P) uporabi interval vseh pripon $SA[L : R]$, ki se začnejo s P, za izdelati seznam indeksov ponovitev vzorca P v besedi T. Za najti interval $SA[L : R]$ je potrebno $O(m + \log n)$ časa. Za izdelavo seznama indeksov pripon pa je potrebnih še occ dostopov do priponskega polja oziroma $O(occ)$ časa. Torej poizvedba *seznamPojavov*(T, P) potrebuje $O(m + \log n + occ)$ časa.

4.2 GRADNJA

Podobno kot priponsko drevo je mogoče zgraditi priponsko polje za besedo T dolžine n z različnimi algoritmi. Časovna zahtevnost teh algoritmov je med $O(n^2 \log n)$ in $O(n)$. Algoritmi bodo predstavljeni od najbolj neučinkovitega do najbolj učinkovitega.

Izgradnja s priponskim drevesom: Priponsko polje je ekvivalentno listom priponskega drevesa, zato se lahko uporabi priponsko drevo za zgraditi priponsko polje. Pri tem pa ponovno predpostavimo, da so listi v drevesu leksikografsko urejeni. Priponsko polje je zgrajeno v dveh korakih:

1. izgradnja priponskega drevesa z $O(n)$ algoritmom, recimo z Ukkonenovim algoritmom (korak ni potreben, če je priponsko drevo že zgrajeno),
2. sprehod v globino po drevesu in zapis indeksov pripon iz listov v polje v vrstnem redu obiska.

Med sprehodom je mogoče zgraditi tudi LCP polje. Vrednosti v LCP polju so črkovne dolžine vozlišč, ki so najgloblji predhodnik dveh zaporednih listov. V teh vozliščih se obrne smer sprehoda, saj je do takrat sprehod potekal od lista navzgor in se je v vozlišču obrnil ter bo potekal od vozlišča do lista navzdol.

Opisan algoritem zgradi priponsko polje in LCP polje v $O(n)$ časa. Vsak korak potrebuje $O(n)$ časa, saj smo izbrali algoritem za izgradnjo priponskega drevesa s časovno zahtevnostjo $O(n)$ in sprehod po drevesu z $O(n)$ vozlišči potrebuje $O(n)$ časa. Pri tem pa algoritem potrebuje dodatni prostor za največ $10n - 7$ števil. Razlog za izgradnjo priponskega polja je zmanjšanje količine spomina, ki ga zasede indeks besede. Zato bi potrebovali algoritem, ki zgradi priponsko polje v $O(n)$ časa in ne zgradi priponskega drevesa.

Izgradnja z urejanjem pripon: Priponsko polje je polje indeksov pripon, urejenih v leksikografskem vrstnem redu, zato se lahko uporabi urejanje za izgradnjo priponskega polja. Najbolj učinkoviti algoritmi za urejanje (*Quck sort* oziroma *Merge*

sort) potrebujejo $O(n \log n)$ primerjav za izgradnjo priponskega polja. Ker so pripone urejene leksikografsko, vsaka primerjava potrebuje $O(n)$ časa, torej celotna izgradnja potrebuje $O(n^2 \log n)$ časa. Pri tem se potrebuje še dodatnega $O(n)$ časa za izgradnjo LCP polja, saj je potrebno izračunati vse *lcp* vrednosti zaporednih pripon [**?**].

Namesto tega lahko uporabimo korensko urejanje (angl. *RadixSort*). Torej v i-tem koraku korenskega urejanja so pripone urejene v vedrih glede na prvih i znakov. To dejstvo se lahko uporabi za izgradnjo LCP polja, saj se v i-tem koraku lahko zapiše vrednost i na začetek vsakega na novo ustvarjenega vedra. Korensko urejanje potrebuje $O(kn)$ časa, pri čemer je k dolžina korena, in v najslabšem primeru je $k = n$, torej metoda potrebuje $O(n^2)$ časa.

Namesto da se v vsakem koraku podaljša koren za en znak, se lahko dolžino korena podvoji. Na ta način potrebuje korensko urejanje $O(\log n)$ korakov in posledično se potrebuje $O(n \log n)$ časa za izgradnjo priponskega polja. Pri tem pa vrednost v LCP polju na začetku vsakega na novo ustvarjenega vedra ni enaka številu že opravljenih korakov, ampak je v intervalu med 2^{i-1} in 2^i, pri čemer je i število že opravljenih korakov urejanja. Torej je potrebno poiskati natančno vrednost znotraj intervala s primerjavo znakov, pri tem pa ni potrebno primerjati prvih 2^{i-1} znakov. Algoritem potrebuje $O(n)$ dodatnega prostora, in sicer 3 polja števil in 2 bitni polji dolžine n [**?**].

Obstaja pa bolj učinkovit algoritem za zgraditi priponskega pola, ki so ga predlagala Ko in Aluru [**?**] in potrebuje $O(n)$ časa. Ideja algoritma temelji na deljenju pripon na dva tipa: L pripone in S pripone. Pripona $T[i:]$ je L pripona natanko tedaj, ko je $T[i:]$ je manjša od $T[i+1:]$, sicer je $T[i:]$ S pripona, za katere velja, da je $T[i:]$ večja $T[i+1:]$. Pri tem velja tudi, da so L pripone manjše od S pripon, ki se začnejo z istim znakom c, torej L pripone nastopijo pred S priponami znotraj intervala pripon z istim začetnim znakom. Algoritem zgradi priponsko polje v štirih korakih:

1. deljenje pripon na S in L,
2. ureditev pripon glede na prvi znak pripone,
3. uredi S pripone ter jih premakni na konec vedra pripon z istim začetnim znakom in premakni konec za eno mesto v levo,
4. dodatno urejanje L pripon s premikom pripone na začetek intervala, če je pripona, ki je za en znak daljša, tudi L pripona ter se premakne začetek intervala za eno mesto v desno.

Vsak korak je lahko storjen z enim sprehodom po polju oziroma besedi, ki zahteva $O(n)$ časa. Podobno kot pri algoritmu s korenskim urejanjem je prostorska zahtevnost tega algoritma tudi $O(n)$, saj se potrebujejo tri polja števil dolžine n in 3 dodatna bitna polja (dva dolžine n in enega dolžine $n/2$) [**?**].

4.3 SIMULACIJA OPERACIJ PRIPONSKEGA DREVESA

V priponskem drevesu je črkovna dolžina najdaljše skupne predpone dveh pripon črkovna dolžina najglobljega skupnega predhodnika (angl. *Lowest common ancestor* oziroma LCA) obeh listov, ki predstavljata priponi. Ampak predhodno predstavljena implementacija LCP polja je namenjena pospešitvi iskanja po priponskem polju in uporablja Q-LCP polje. Zato se potrebuje bolj splošno LCP polje, ki bi nadomestilo Q-LCP polje in bi omogočalo simuliranje priponskega drevesa.

Če namesto Q-LCP polja, vzamemo vrednost v L-LCP, in sicer vrednost L-$LCP[M]$, ta predstavlja $lcp(T[SA[M]:], T[SA[L]:])$ dolžno najdaljše skupne predpone, pri čemer je L začetni indeks intervala razpolavljanja s sredinsko točko v M. Označimo vrednost funkcije lcp kot k. Vemo tudi, da je $SA[L]$ leksikografsko manjši od $SA[M]$, torej imajo vse pripone na intervalu med L in M paroma najdaljšo skupno predpono dolžine vsaj k, saj so vse pripone na tem intervalu leksikografsko večje od $SA[L]$ in manjše od $SA[M]$. To pomeni, da za vsak i, $L < i \leq M$, velja $k \leq lcp(T[SA[i-1]:], T[SA[i]:])$. Posledično obstaja tak i, za katerega velja $lcp(T[SA[i-1]:], T[SA[i]:]) = k$. Podoben sklep se lahko naredi tudi za R-$LCP[M]$, pri čemer uporabimo interval v priponskem polju med M in R. Zato se lahko naredi bolj splošno LCP polje $LCP[2:n]$, ki ima vrednosti

$$LCP[i] = lcp(T[SA[i-1]:],\ T[SA[i]:]).$$

Primer takega LCP polja je prikazan na Sliki **??**. Na sliki je z zeleno barvo označena vrednost $LCP[3]$, ki je najdaljša skupna predpona pripon $SA[2]$ in $SA[3]$. Ta je na sliki označena z zeleno tudi na priponskem drevesu [**?**, **?**].

Novo LCP polje potrebuje zgolj $n-1$ celih števil. Pri tem pa potrebuje dodatno podatkovno strukturo za učinkovito iskanje najmanjše vrednosti na intervalu oziroma rmq, ki je potrebna za nadomestiti Q-LCP polje. Prva možnost je izgradnja rmM-drevesa, ki v vsakem vozlišču vsebuje zgolj vrednost m. Iskanje v drevesu pa potrebuje $O(\log n)$ časa oziroma $O(m \log n + \log n)$ časa za poizvedbo, kar pa je prepočasno, saj potrebuje iskanje z Q-LCP poljem $O(m + \log n)$ časa za poizvedbo. Zato lahko uporabimo rmq strukturo, ki sta jo predlagala Fischer in Heun [**?**]. Predlagana podatkovna struktura potrebuje $O(n)$ dodatnega prostora in za dani interval vrne najmanjšo vrednost v $O(1)$ času, torej se lahko poizvedba izvrši v $O(m + \log n)$.

Posplošeno LCP polje se lahko uporabi tudi za simuliranje priponskega drevesa. Vrednost $LCP[i]$ predstavlja črkovno dolžino vozlišča v, za katerega velja $v = lca(l_{i-1}, l_i)$, pri čemer l_i predstavlja pripono $SA[i]$ in l_{i-1} predstavlja pripono $SA[i-1]$. Kasai idr. [**?**] so uporabili to dejstvo za simulacijo pregleda od spodaj navzgor (angl. *Bottom-Up Traversal*) in od desne proti levi (angl. *Post-Order Traversal*). S takim obhodom drevesa lahko rešimo problem sprehoda po podnizih (angl. *substring traversal pro-*

blem), ki oštevilči vse ponavljajoče se podnize. Podani algoritem potrebuje $O(n)$ časa in potrebuje enako časa kot obhod priponskega drevesa z n-timi listi.

V splošnem vsako notranje vozlišče v v priponskem drevesu predstavlja podniz besede dolžine l, s katerim se začnejo vse pripone, predstavljene z listi v poddrevesu s korenom v v. Ker je priponsko polje ekvivalentno listom priponskega drevesa, so vsi listi poddrevesa s korenom v v ekvivalentni intervalu priponskega polja $SA[L : R]$, pri čemer je $SA[L]$-ta pripona predstavljena s skrajno levim listom, $SA[R]$-ta pripona pa s skrajno desnim listom v poddrevesu. Torej so vse vrednosti intervala $LCP[L+1 : R]$ vsaj l. Pri tem velja tudi, da se priponi $SA[L-1]$ in $SA[R+1]$ zagotovo razlikujeta od pripon $SA[L]$ in $SA[R]$ vsaj v l-tem znaku, sicer bi bile v poddrevesu. Torej velja $LCP[L] < l$ in $LCP[R+1] < l$. Tak interval $[L : R]$ l-interval, ki je definiran z definicijo **??** [**?**].

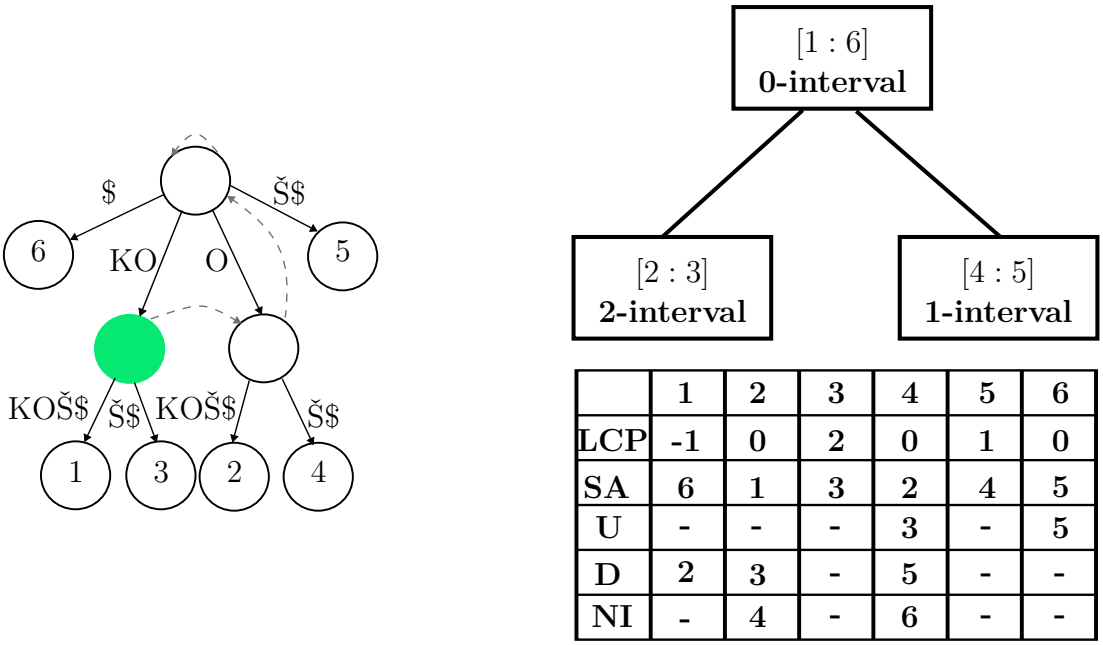
Definicija 4.4. Interval $[i : j]$ imenujemo l-interval v LCP polju, natanko tedaj ko velja:

1. $LCP[i] < l$,
2. obstaja vsaj en k, za katerega velja, da je $i < k \leq j$ in $LCP[k] = l$,
3. za vsak k velja, da je $i < k \leq j$ in $LCP[k] \geq l$,
4. $LCP[j+1] < l$.

Ker je LCP polje, definirano zgolj za indekse od 2 do n, in sta v definiciji **??** potrebna tudi indeksa 1 in $n+1$, se jih definira kot $LCP[1] = LCP[n+1] = -1$. Ta popravek ne vpliva na pravilnost delovanja priponskega polja, saj ne obstajata priponi $SA[0]$ in $SA[n+1]$.

Koren priponskega drevesa predstavlja prazen niz in njegovo poddrevo je celotno drevo, zato se koren lahko predstavi kot 0-interval $[1 : n]$. Znotraj vsakega l-intervala $[L : R]$ lahko obstajajo drugi l'-intervali, za katere velja $l < l'$. Takih l'-intervalov je največ $n_l + 1 \leq |\Sigma|$, pri čemer je n_l število ponovitev vrednosti l v LCP polju na intervalu $[L+1 : R]$. Torej lahko predstavimo relacijo med l-intervali kot LCP intervalno drevo (angl. *LCP interval tree*). Primer LCP intervalnega drevesa je prikazan na Sliki **??**. Na sliki se vidi tudi povezavo med notranjimi vozlišči priponskega drevesa in LCP intervalnim drevesom. Na primer, 2-interval $[2 : 3]$ pokriva priponi, ki se začneta na indeksih 1 in 3. V priponskem drevesu pa sta predstavljeni z listi v poddrevesu zelenega vozišča [**?**].

Alternativna predstavitev priponskega drevesa. Za učinkovito simulacijo operacij nad priponskim drevesom je potrebno učinkovito shraniti LCP intervalno drevo. Ker je LCP intervalno drevo ekvivalentno notranjim vozliščem priponskega drevesa,



	1	2	3	4	5	6
LCP	**-1**	**0**	**2**	**0**	**1**	**0**
SA	**6**	**1**	**3**	**2**	**4**	**5**
U	**-**	**-**	**-**	**3**	**-**	**5**
D	**2**	**3**	**-**	**5**	**-**	**-**
NI	**-**	**4**	**-**	**6**	**-**	**-**

Slika 14: Primer LCP intervalnega drevesa nad priponskim poljem in LCP poljem besede »KOKOŠ$« ter njegova predstavitev s tabelo. Na sliki je dodano tudi priponsko drevo besede »KOKOŠ$«.

se lahko zapiše vsako vozlišče v kot četvorko $\langle L, R, l, D\rangle$, pri čemer interval $SA[L : R]$ predstavlja vse pripone vozliča v, l predstavlja dolžino niza vozlišča v in polje D (angl. *down* oziroma dol) predstavlja vse otroke vozliča v. Če se vsa vozlišča shrani v polje V dolžine $n_v + n$, so v poljih D shranjeni indeksi v polju V. Na ta način potrebujemo $3(n_v + n)$ števil za predstaviti vse R-je, L-je in l-je ter dodatnih $(n_v + n - 1)$ indeksov na vozlišča shranjenih v poljih D. Skupaj potrebujemo $4(n_v + n) - 1$ števil ter n števil za priponsko polje, torej potrebujemo največ $9n - 5$ števil oziroma n manj števil kot za za originalno implementacijo priponskega drevesa.

Polje D se lahko nadomesti z indeksoma D in NI (angl. *next index* oziroma naslednji indeks ali naslednji brat), torej je vsako vozlišče predstavljeno kot peterka $\langle L, R, l, D, NI\rangle$, pri čemer D hrani indeks prvega sina v polju V, NI pa hrani indeks naslednjega brata vozlišča v v polju V. Če prvi sin oziroma naslednji brat vozlišča ne obstajata se v D oziroma NI shrani vrednost -1. Tako shranjena vozlišča potrebujejo $5(n_v + n)$ števil ter n števil priponskega polja oziroma največ $11n - 5$ števil.

Opazi se lahko, da je L od naslednjega brata od v $R+1$ od v oziroma ko je $NI = -1$ potem je vrednosti R od starša enaka vrednosti od v. Torej vrednosti R ni potrebo hraniti, saj se jo lahko naračuna. Vrednost l se lahko izračuna s pomočjo LCP polja, kot

$$l = \min_{L<i\leq R} LCP[i],$$

torej se lahko l nadomesti z LCP poljem. Zato si želimo shraniti tudi vrednost D in NI v polji dolžine n. Pri tem se pojavi problem, da je vrednost L od prvega otroka vozlišča v enaka vrednosti L vozlišča v. Problem se lahko reši tako, da D kaže na drugega otroka vozlišča v. Na ta način pa je potrebno še zagotoviti možnost sprehajanja po prvem otroku. To se stori tako, da vozlišče postane četvorka $\langle L, D, NI, U\rangle$, pri čemer U (angl. *up* oziroma gor) kaže na drugega sina predhodnega brata. Tako predstavljena vozlišča potrebujejo $4(n_v + n)$ ter dodatnih $2n$ števil za priponsko polje in LCP polje, oziroma $10n - 4$ števil.

Na ta način lahko vrednosti v D, NI in U spremenimo v polja dolžine n in jih poravnamo z začetki intervala L. Vrednost $D[i]$ hrani največji indeks j večji od i, za katerega velja $LCP[j] > LCP[i]$ in vse vrednosti v LCP med indeksi i in j so večje od $LCP[j]$. Vrednost $NI[i]$ hrani prvi indeks j večji od i, za katerega velja $LCP[j] = LCP[i]$ in vse vrednosti v LCP med indeksi i in j so večje od $LCP[j]$. Vrednost $U[i]$ pa hrani položaj prvega indeksa j manjšega od i, za katerega velja $LCP[j] > LCP[i]$ in vse vrednosti v LCP med indeksi j in i so večje ali enake od $LCP[j]$. Torej za interval $SA[i : j]$ velja $D[i] = U[j + 1]$. Začetek intervala drugega otroka v prvem podintevalu intervala $SA[i : j]$ izračunamo kot $U[D[i]]$. S temi polji se lahko sprehodimo po priponskem polju, kot bi se sprehodili po priponskem drevesu, pri tem pa potrebujemo $5n$ števil za shraniti vse te vrednosti [**?**]. Na Sliki **??** je prikazan tudi zapis intervalnega drevesa s polji U, D in NI.

Poizvedbe. Poizvedba se začne z indeksom $s = 1$ in $e = n$ in preverili smo prvih $o = 0$ znakov vzorca P. Nato povečamo vrednost o za ena in najdemo interval, ki se začne z vrednostjo $P[o]$, z Algoritmom **??**. Nato v vsakem koraku iskanja za trenutni interval $[s : e]$ poiščemo vrednost $l = \min_{s<k\leq e} LCP[k]$. Vemo tudi, da se prvih o znakov P-ja ujema s priponami na intervalu $[s : e]$. Nato preverimo, ali je $P[o : k] = T[SA[s] + o : SA[s] + k]$, pri čemer je $k = \min\{l, m\}$. Če se ujemata, popravimo $o \leftarrow k$ in začnemo iskati podinterval $[s' : e']$, za katerega velja $P[o+1] = T[SA[s']+o+1]$, ki bo postal novi interval $[s : e]$. Če je $o = m$, lahko vrnemo, da je P prisoten v T, poročamo, da se P ponovi $(s-e+1)$-krat v T, ali pa izgradimo seznam indeksov besede $[SA[s], \ldots, SA[e]]$, odvisno od poizvedbe. Če pa se $P[o : k]$ ne ujema s $T[SA[s]+o : SA[s]+k]$, pa vrnemo, da P ni prisoten v T, 0 ali prazen seznam, odvisno od poizvedbe. Iskanje podintervala je implementirano s polji D in U za najti prvi podinterval ter s poljem NI za najti interval, ki se začne z znakom $P[o + 1]$. Časovna zahtevnost iskanja podintervala je $O(|\Sigma|) = O(1)$, saj se velikost abecede med izvajanjem poizvedbe ne spreminja ter je število podintervalov $O(|\Sigma|)$, ker se vsak podinterval razlikuje od drugih vsaj v znaku na položaju $l + 1$. Algoritem za iskanje intervala $[s' : e']$ prikazuje Algoritem **??** in ne potrebuje LCP polja, saj smo predhodno že naračunali vrednost l, ko se je preverjalo prisotnost podniza vzorca $P[o : k]$.

Algoritem 5: Algoritem za iskanje pod intervala

Vhod: Začetek intervala s, konec intervala e, znak c, število pregledanih znakov l

Izhod: Interval $[i', j']$

```
1  če s < U[e+1] ≤ e potem
2      s' ← U[e+1]
3  sicer
4      s' ← D[s]
5  če T[SA[s]+l+1] == c potem
6      vrni [s, s'−1]
7  dokler NI[s'] ≠ −1
8      e' ← NI[s']
9      če T[SA[s']+l+1] == c potem
10         vrni [s', e'−1]
11     s' ← e'
12 če T[SA[s']+l+1] == c potem
13     vrni [s', e]
14 vrni [−1, −1]
```

Torej iskanje s simulacijo operacij nad priponskim drevesom z uporabo priponskega polja in LCP polja ter l-intervalov potrebuje $O(m)$ časa za poizvedbo *prisotnost*(T, P) ter omogoča pospešitev časa poizvedbe *številoPonovitev*(T, P) na $O(m)$. V priponskem drevesu ta poizvedba potrebuje $O(m+occ)$ časa, saj je potrebno prešteti število listov v poddrevesu. Z uporabo simulacije priponskega drevesa tega štetja ni potrebno storiti, saj poznamo velikost intervala, ki ga pokriva vozlišče, ki je koren poddrevesa, čigar pripone se začnejo z iskanim vzorcem. Število pripon je natanko razlika med začetkom in koncem intervala, pri je čemer konec intervala začetek naslednjega intervala, ki je shranjen v polju NI. Poizvedba *seznamPojavov*(T, P) še vedno potrebuje $O(m + occ)$ časa, ker je potrebno prehoditi priponsko polje.

Opomba. Metoda iskanja z LCP intervali se lahko uporabi tudi za iskanje po ostalih kompaktnih številskih drevesih (na primer Patricijinih drevesih). Pri tem se nadomesti priponsko polje s poljem listov LA (angl. *leaf array*), kjer i-ta celica polja predstavlja besedo, ki jo predstavlja i-ti list številskega drevesa. Pri tem pa ostaja definicija LCP polja podobna, in sicer je definirano tako, da so za vsaki i med 2 in n vrednosti $LCP[i] = lcp(LA[i-1], LA[i])$ in vrednost $LCP[1] = -1$.

5 KOMPAKTNA PREDSTAVITEV PRIPONSKEGA DREVESA

Za daljše besede T lahko priponska drevesa presežejo velikost notranjega pomnilnika. Prva možna rešitev tega problema je uporaba priponskega polja ter LCP polja za simulirati operacije nad priponskim drevesom. Za dvakrat daljše besede se problem pojavi tudi za priponska polja. Torej potrebujemo prostorsko bolj učinkovito rešitev.

Vsako vozlišče priponskega drevesa hrani podniz in reference na otroke, starša ter na vozlišče, na katerega kaže priponska povezava. Zato prostor, ki ga zasedejo drevesa na pomnilniku, ni odvisen zgolj od števila vozlišč, ampak je odvisna tudi od arhitekture računalnika, ki določa velikost pomnilniškega naslova, s katerim se referencira druga vozlišča. Na primer, priponsko drevo človeškega genoma, ki ima dolžino 3 milijarde nukleotidov iz abecede velikosti pet (pri tem je vštet v abecedo tudi znak za konec besedila označen kot »$«), potrebuje med 60 in 144 GB notranjega pomnilnika. Ekvivalentno priponsko polje pa potrebuje med 12 in 60 GB notranjega pomnilnika odvisno od dodatnih podatkovnih struktur, ki so bile dodane priponskemu polju. Zato prostorsko učinkovita rešitev ne sme temeljiti na referencah pomnilniških naslovov [**?**].

Ta problem se da rešiti s kompaktno predstavitvijo podatkovnih struktur. Podatkovna struktura, ki bo predstavljena v tem poglavju, je imenovana kompaktno priponsko drevo (angl. *Compressed Suffix Tree* oziroma CST) in predstavlja eno možno kompaktno predstavitev priponskega drevesa. Preden se lahko definira kompaktno predstavitev, je potrebno definirati abstraktno podatkovno strukturo priponsko drevo, ki poda vse operacije, ki so potrebne za pravilno delovanje priponskega drevesa. Večina potrebnih operacij so operacije nad drevesi, ki so bile predstavljene v Definiciji 2.3. Pri tem so dodane tudi specifične operacije, ki so potrebne za pravilno delovanje priponskega drevesa, ter so nekatere operacije popravljene za delovanje z znaki iz abecede Σ. Operacije, ki jih podpira priponsko drevo, so predstavljene v naslednji definiciji [**?**].

Definicija 5.1. Abstraktna podatkovna struktura priponsko drevo nad besedilo T podpira sledeče operacije:

1. $koren()$: vrne koren priponskega drevesa,
2. $jeList(v)$: vrne *true*, če je vozlišče v list, sicer vrne *false*,
3. $otrok(v, z)$: vrne otroka w vozlišča v, katerega povezava se začne z znakom z. Če otrok ne obstaja vrne 0,
4. $prviOtrok(v)$: vrne vozlišče w, ki je prvi otrok vozlišča v,
5. $nBrat(v)$: vrne vozlišče w, ki je naslednji brat vozlišča v,
6. $pBrat(v)$: vrne vozlišče w, ki je predhodni brat vozlišča v,
7. $starš(v)$: vrne vozlišče w, ki je starš od vozlišča v,
8. $povezava(v, i)$: vrne i-ti znak na povezavi do vozlišča v,
9. $sd(v)$ vrne število znakov na poti od korena do vozlišča v,
10. $lca(v, w)$: vrne najnižjega skupnega prednika od v in w,
11. $sl(v)$: vrne vozlišče w, na katerega kaže priponska povezava iz vozlišča v.

V podpoglavju **??** je bil predstavljen način simulacije priponskega drevesa z uporabo priponskega polja SA in polja najdaljših skupnih predpon LCP. Ideja kompaktne predstavitve priponskega drevesa bo tudi temeljila na teh dveh podatkovnih strukturah. Pri tem pa bomo uporabili kompaktni različici podatkovnih struktur. Ker je veliko operacij iz Definicije **??** operacij nad drevesi, se lahko doda še kompaktno predstavitev topologije drevesa, saj le ta pospeši operacije nad drevesi. Iz tega sledi definicija za podatkovno strukturo kompaktno priponsko drevo.

Definicija 5.2. Kompaktno priponsko drevo nad besedilom T je sestavljeno iz:

1. kompaktne predstavitve topologije drevesa τ,
2. kompaktnega zapisa priponskega polja SA,
3. kompaktne predstavitve polja najdaljših skupnih predpon LCP.

V nadaljevanju poglavja bo predstavljena Sadakanejeva [**?**] implementacija kompaktnega priponskega drevesa, ki je prva kompaktna predstavitev priponskega drevesa. V podpoglavju 2.5 je bilo predstavljenih več različnih predstavitev topologije dreves. Implementacija kompaktnega priponskega drevesa pa uporablja predstavitev z zaporedjem uravnoteženih oklepajev.

Topologija drevesa. Ker se za kompaktno priponsko drevo uporablja BP kot predstavitev topologije drevesa, je potrebno podpirati operacije $rang_p$, $izbira_p$, *zapri*, *odpri* in *oklepa*, ki se izvajajo v konstantnem času za $p \in \{0,1\}^*$. Pri tem sta potrebni dodatni podatkovni strukturi za operacijo *rang* ($rang_0$, $rang_{01}$) in tri za operacijo *izbira* ($izbira_0$, $izbira_1$ in $izbira_{01}$). Operacije *zapri*, *odpri* in *oklepa* pa uporabljajo podatkovno strukturo za višek (razlika med uklepaji in zaklepaji), ki sta jo predlagala Munro in Raman [**?**], implementirano na podoben način kot dodatna podatkovna struktura za *rang*, ki nadomesti rmM-drevesa. To podatkovno strukturo imenujemo L, ki hrani polje najnižjih viškov L' in v celici $L'[i]$ je shranjen najnižji višek v i-tem vedru dolžine $O(\log n)$. To pomeni, da je za operacijo $otrok(v, i)$ potrebno $O(|\Sigma|) = O(1)$ časa.

Operacija $lca(v, w)$ pa potrebuje dodatno podatkovno strukturo, ki ji omogoča konstanten čas izvajanja *rmq* poizvedbe nad viškom. Ta podatkovna struktura potrebuje $o(n)$ dodatnih bitov. In sicer se zgradi dvodimenzionalno tabelo M in vrednost $M[i][k]$ hrani položaj najmanjšega viška na intervalu $L'[i : i + 2^k - 1]$. Torej operacija $lca(v, w)$ se izračuna kot

$$\min\left\{\min(L[v : e]), M[v'][k], M[w' - 2^k + 1][k], \min(L[s : w])\right\},$$

pri čemer je $k = \lfloor \log(w' - v') \rfloor$, v' predstavlja vedro v L', ki je prvo vedro po vedru z vozliščem v, w' je vedro v L', ki je zadnje vedro pred vedru z vozliščem w, e predstavlja konec vedra v L, ki vsebuje v, in s predstavlja začetek vedra, ki vsebuje w. Pri tem vsaka poizvedba v L in vsaka poizvedba v M potrebuje konstanten čas [**?**, **?**].

V primeru, da so potrebne dodatne operacije, ki temeljijo na $rMq(\cdot,,)$ operaciji, ali $|\Sigma| > \log n$, se lahko doda še rmM-drevo (angl. *range minumum maximum tree*, predstavljeno v podpoglavju 2.4), ki omogoča izvedbo operaciji v $O(\log n)$ ter pospeši izvajanje oziroma omogoča implementacijo tudi drugih operacij.

Lema 5.3. *Podatkovna struktura za predstavitev topologije priponskega drevesa τ nad besedilom T dolžine n potrebuje največ $4n + o(n)$ bitov.*

Dokaz. Priponsko drevo nad besedilom T ima največ $2n - 1$ vozlišč: od teh je $n - 1$ notranjih vozlišč in n listov. Vsako vozlišče se predstavi kot par oklepajev, torej potrebujemo 2 bita za predstaviti vsako vozlišče. Torej je potrebnih največ $4n - 2$ bitov za zapis topologije drevesa τ s sekvenco uravnoteženih oklepajev. Zato celotna podatkovna struktura topologije drevesa potrebuje največ $4n + o(n)$ bitov, saj vsaka dodatna podatkovna struktura potrebuje še dodatnih $o(n)$ bitov. □

Kompaktno priponsko polje. Naslednja podatkovna struktura, ki je potrebna za pravilno delovanje kompaktnega priponskega drevesa, je kompaktno priponsko polje (angl. *Compressed Suffix Array* oziroma CSA). Kompaktna priponska polja znižajo prostorsko zahtevnost priponskega polja iz $O(n \log n)$ oziroma $O(nw)$ na $O(n \log |\Sigma|)$

bitov [**?**] ali celo na $nH_h + o(n)$ bitov [**?**], pri čemer je red $h \leq \alpha \log_{|\Sigma|} n; 0 < \alpha < 1$ in H_h je entropija h-tega reda, ki se v praksi uporablja kot merilo prostorske zahtevnosti pri kodiranju besedil [**?**].

Obstajata dve različici kompaktnih priponskih polj: prva implementacija temelji na funkciji Ψ, druga implementacija imenovana FM-indeks pa uporablja LF funkcijo, ki je inverzna funkcija od Ψ. Funkcija $\Psi(i)$ vrne položaj pripone $T[i+1:]$ v priponskem polju ali z drugimi besedami

$$\Psi(i) = SA^{-1}[SA[i] + 1],$$

pri čemer $SA^{-1}[i]$ hrani položaj pripone $T[i:]$ v priponskem polju SA in polje $SA^{-1}[1 : n]$ imenujemo inverzno priponsko polje. Torej se lahko s funkcijo Ψ sprehajamo po priponskem polju oziroma besedi T iz leve proti desni. Funkcija LF pa omogoča sprehod v obratni smeri, iz desne proti levi [**?**, **?**].

Implementacije kompaktnega priponskega polja, ki so lahko uporabljajo pri implementaciji kompaktnih priponskih dreves, morajo podpirati sledeče operacije.

Definicija 5.4. Kompaktno priponsko polje nad besedilom T, ki je uporabljeno v kompaktnem priponskem drevesu, podpira sledeče operacije z dano časovno zahtevnostjo:

1. *pripona*(i): vrne začetni indeks pripone, shranjen v $SA[i]$, v času t_{SA},
2. *inverz*(i): vrne indeks $j = SA^{-1}[i]$, pri čemer je $SA[j] = i$, v času t_{SA},
3. $\Psi(i)$: vrne $SA^{-1}[SA[i] + 1]$ v času t_Ψ,
4. *besedilo*(i, d): vrne $T[SA[i], SA[i] + d - 1]$ v času $O(dt_\Psi)$.

Funkcija Ψ je uporabna v kompaktnih priponskih drevesih za izgradnjo priponskih povezav v času t_Ψ, čeprav ni potrebna za pravilno delovanje priponskega polja. Iz definicije funkcije Ψ je razvidno, da jo lahko simuliramo z uporabo operacij *inverz*$(\cdot)$ in *pripona*$(\cdot)$. Zato je čas, potreben za izvršiti funkcijo Ψ $t_\Psi \leq t_{SA}$. Toliko namreč potrebujeta operaciji *inverz*$(\cdot)$ in *pripona*$(\cdot)$. Iz Definicije **??** sledi, da mora kompaktno priponsko polje podpirati funkcijo Ψ, zato implementacije s FM-indeksom ne pridejo v poštev, saj morajo funkcijo Ψ simulirati kot *inverz*(*pripona*$(\cdot)$).

V nadaljevanju tega dela poglavja bo predstavljena preprosta različica kompaktnega priponskega polja. Ta različica je bila izbrana zaradi enostavne implementacije operaciji ter preproste vizualizacije podatkovne strukture. V tej implementacije so vse štiri operacije implementirane z uporabo Ψ funkcije ter z vzorčenjem priponskega polja SA in inverznega priponskega polja SA^{-1}. Na ta način ni potrebno hraniti besedila T in celotnega priponskega polja SA.

Funkcija Ψ je predstavljena z istoimenskim poljem, katerega i-ta celica je $\Psi[i] = \Psi(i) = SA^{-1}[SA[i]+1]$. Ideja kompaktnega zapisa priponskega polja temelji na dejstvu,

da se lahko premikamo po besedilu in posledično med priponami zgolj z uporabo Ψ funkcije, saj je $SA[\Psi[i]] = SA[i]+1$. Torej se lahko znebimo besede T in jo zamenjamo z bitnim poljem sprememb D, pri čemer $D[i] = 1$, ko je $i = 1$ ali $T[SA[i]] \neq T[SA[i+1]]$, ter s poljem znakov S, urejenih v leksikografskem vrstnem redu, tako da je $T[SA[i]] = S[rang_1(D, i)]$ [**?**].

Kompaktni zapis polja Ψ razdeli polje Ψ na $|\Sigma|$ delov in uvede polje C začetnih točk intervalov v Ψ polju, ki se začnejo s poljubnim znakom $c \in \Sigma$, oziroma $C[c] = i$ za poljuben znak iz Σ, tako da je $T[SA[i+1]] = c$ in $T[SA[i]] \neq c$. Polje C potrebuje $O(|\Sigma| \log n)$ bitov. Tako se lahko nadomesti Ψ polje s polji Ψ_c; $c \in \Sigma$, kjer je $\Psi[i] = \Psi_c[i']$, za $i' = i - C[S[rang_1(D, i)]]$. Vsako polje Ψ_c se lahko zapiše kot bitno polje B_c dolžine n, pri čemer $B_c[\Psi_c[i]] = 1$ za $1 \leq i \leq n_c$, kjer je n_c število ponovitev znaka c v besedilu T. Torej velja $\Psi_c[i'] = izbira_1(B_c, i')$ ali $\Psi[i] = izbira_1(B_c, i - C[c])$, kjer $c = S[rang_1(D, i)]$. Bitna polja B_c so zelo redka (število enic je bistveno manjše kot število ničel), torej se jih lahko stisne iz $n + o(n)$ bitov na $n_c \log \frac{n}{n_c} + O(n_c)$ bitov, pri čemer ohranimo možnost opravljanja operacije $izbira_1$ v konstantnem času, kar pomeni, da funkcija Ψ potrebuje $nH_0(T) + O(n + |\Sigma|w)$ bitov, pri čemer $H_0(T)$ je entropija besedila T, ter potrebuje $t_\psi = O(1)$ časa [**?**].

Do sedaj predstavljena podatkovna struktura omogoča zgolj iskanje števila ponovitev vzorca v besedilu, saj omogoča premikanje med intervali s priponami z istim začetnim znakom, pri tem pa ne omogoča lokacije pojavov vzorca v besedi. Za to sta potrebni dodatni podatkovni strukturi, ki nadomestita priponsko polje SA ter inverzno polje SA^{-1}. Polji se lahko nadomestita s poljema vzorcev. Priponsko polje SA se vzorči $l = \Theta(\log n)$-krat, kar je dober kompromis med časovno in prostorsko zahtevnostjo. Pri tem se uporabi dodatno bitno polje $B[1, n]$, kjer $B[i] = 1$ natanko tedaj, ko $i = 1$ ali $SA[i] \mod l = 0$. Polje vzorcev SA_S vsebuje vrednosti $SA_S[rang_1(B, i)] = SA[i]$, ko je $B[i] = 1$. Ostale vrednosti $SA[i]$ se izračuna kot $SA[i] = SA_S[rang_1(B, i_k)] - k$, pri čemer je i_k k-kratna uporaba funkcije Ψ nad vrednostjo i oziroma $i_k = \Psi^k(i)$ (na primer $i_2 = \Psi^2(i) = \Psi[\Psi[i]]$). Ker je $k < l$, je časovna zahtevnost poizvedbe v priponskem polju $t_{SA} = O(l) = O(\log n)$ [**?**].

Podobno se vzorči tudi polje inverzov pripon SA^{-1}, le da se vzorči polje SA^{-1} na enakomernih intervalih dolžine $l = \Theta(\log n)$, kar je dober kompromis med časovno in prostorsko zahtevnostjo. Torej ima i-ta celica polja $SA_S^{-1}[1, \lfloor n/l \rfloor]$ vrednost $SA_S^{-1}[i] = SA^{-1}[il]$. Poljubno vrednost SA^{-1} se izračuna tako, da se najprej izračuna $i' = \lfloor i/l \rfloor l$, nato se $(i - i')$-krat uporabi funkcija Ψ nad vrednostjo $j' = SA_S^{-1}[i'/l]$ oziroma $SA^{-1}[i] = \Psi^{i-i'}[j'] = \Psi^{i-i'}[SA_S^{-1}[i'/l]]$. Isti razmislek kot za časovno zahtevnost dostopa do polja SA velja tudi za časovno zahtevnost dostopa do polja SA^{-1}, ki ima časovno zahtevnost dostopa $t_{SA} = O(l) = O(\log n)$. Pri tem velja omeniti, da če se inverzno priponsko polje uporablja bolj poredko, se lahko vzorči z večjim faktorjem l, kot se je vzorčilo priponsko polje SA. Na ta način se zmanjša prostorsko zahtevnost,

poslabšajo pa se časovne zahtevnosti operacije, ki se jo bolj poredko uporablja [**?**].

Tako predstavljeno kompaktno priponsko polje potrebuje $|\Sigma|n + O(n)$ bitov. Ker pa je večina bitnih polji redkih, saj je število bitov z vrednostjo 0 veliko večje kot število bitov z vrednostjo 1, se lahko bitna polja zakodira na bolj kompakten način z enim od algoritmov za stiskanje. Torej stisnjena bitna polja potrebujejo $nH_0(T) + O(n + |\Sigma|w)$ bitov za implementacijo kompaktnega priponskega polja. Potrebni čas za izračun funkcije Ψ ostaja $t_\Psi = O(1)$, potrebni čas za iskanje po priponskem polju in inverznem priponskem polju pa je $t_{SA} = l \cdot t_\Psi = t_\Psi O(\log n) = O(\log n)$.

Polje najdaljših skupnih predpon. Zadnja podatkovna struktura, ki sestavlja kompaktno priponsko drevo, je polje najdaljših skupnih predpon oziroma LCP polje. Namesto LCP polja se bomo osredotočili na permutacijo LCP polja imenovano $PLCP$, za katero velja relacija $PLCP[i] = LCP[SA^{-1}[i]]$ ali $LCP[i] = PLCP[SA[i]]$ in jo je lažje predstaviti v kompaktnem zapisu [**?**, **?**].

Ideja kompaktnega zapisa LCP polja, če smo bolj natančni $PLCP$ polja, temelji na dejstvu, da je $LCP[i] = LCP[SA^{-1}[i] + 1] - 1$. Torej, če to dejstvo lahko zapišemo kot strogo naraščajoče zaporedje, se lahko zaporedje predstavi kot bitno polje H in vrednost $H[i] = 1$ za vsako vrednost v zaporedju, sicer je $H[i] = 0$. Torej se $LCP[i]$ lahko izračuna kot $izbira_1(H, i)$.

Zaporedje $PLCP[i] + 2i$ je za vsak i med 1 in $n - 1$ strogo naraščajoče, saj je $PLCP[i+1] \geq PLCP[i] - 1$. To lahko enostavno dokažemo, saj iz $PLCP[i] = 0$ sledi $PLCP[i + 1] = 0$. Drugače pa obstajata priponi $T[j :]$ in $T[i :]$, kjer je $T[i :] < T[j :]$ in imata najdaljšo skupno predpono dolžine $PLCP[j] > 0$. Potem imata $T[i + 1 :]$ in $T[j + 1 :]$ najdaljšo skupno predpono dolžine $PLCP[j] - 1$. Torej je $PLCP[j + 1] = PLCP[j] - 1$. Posledično velja, da je $PLCP[j] + 2j < PLCP[j + 1] + 2(j + 1) = PLCP[j] + 2j + 1$. Vrednost $PLCP[n - 1] + 2(n - 1) < 2n$, saj ima lahko pripona $T[n - 1 :]$ dolžino najdaljše skupne predpone s poljubno pripono 1. Zato se lahko permutacijo $PLCP$ in posledično LPC polje zapiše kot bitno polje $H[1 : 2n - 1]$. Celica $H[j] = 1$ za $j = PLCP[i] + 2i$, kjer je i med 1 in $n - 1$, sicer pa je $H[j] = 0$. Pri tem bitno polje H potrebuje dodatno podatkovno strukturo za $izbiro_1$ [**?**, **?**].

Vrednost $LCP[i]$ se lahko pridobi v času $O(t_{SA})$. Vrednost je izračunana z uporabo formule $LCP[i] = izbira_1(H, SA[i]) - 2SA[i]$. Poizvedba potrebuje $O(t_{SA})$ časa, saj je potrebno izračunati vrednost $SA[i]$, ki se jo izračuna v $O(t_{SA})$ časa, ostale operacije pa potrebujejo konstanten čas. Če je uporabljena predhodno predstavljena implementacija kompaktnega polja, je čas poizvedbe v LCP polju enak $O(\log n)$. Prostorska zahtevnost polja LCP je predstavljena s sledečo lemo:

Lema 5.5. *Podatkovna struktura LCP potrebuje* $2n + o(n)$ *bitov.*

Dokaz. Podatkovna struktura LCP je shranjena kot bitno polje $H[1, 2n - 1]$. Bitno

polje H potrebuje dodatnih $o(n)$ bitov za dodatno podatkovno strukturo, ki omogoča izvajanje operacije $izbira_1$ v konstantnem času. Ker je bitno polje H dolžine $2n-1$ in potrebuje dodatnih $o(n)$ bitov, potem celotna podatkovna struktura potrebuje $2n+o(n)$ bitov za shraniti polje LCP. □

Sedaj, ko so bile predstavljene vse podatkovne strukture, ki sestavljajo kompaktno priponsko drevo, je možno izračunati velikost celotnega kompaktnega priponskega drevesa. Ker obstaja več implementacij kompaktnega priponskega polja, ki se lahko uporabijo v kompaktnem priponskem drevesu, bo velikost priponskega drevesa vsebovala člen $|CSA|$, ki predstavlja velikost kompaktnega priponskega polja. Velikost kompaktnega priponskega drevesa je predstavljena v sledečem izreku:

Izrek 5.6. *Podatkovna struktura kompaktno priponsko drevo nad besedo T dolžine n potrebuje $|CSA| + 6n + o(n)$ bitov, pri čemer $|CSA|$ predstavlja velikost kompaktnega priponskega polja.*

Dokaz. Ker obstajajo različne implementacije kompaktnega priponskega polja, je potrebnih $|CSA|$ bitov za shraniti kompaktno priponsko polje SA. Iz Leme **??** sledi, da je potrebnih $4n + o(n)$ bitov za shraniti topologijo drevesa τ. Iz Leme **??** pa sledi, da je potrebnih $2n + o(n)$ bitov za shraniti polje LCP.

Torej je velikost kompaktnega priponskega drevesa CST enaka $|CSA| + 6n + o(n)$ bitov. □

Kot je bilo že rečeno, obstaja več različnih implementacij kompaktnega priponskega polja, zato Sadakane [**?**] predlaga dve implementaciji. Prva predlagana implementacija je prostorsko učinkovita in uporablja kompaktno priponsko polje, ki so ga predlagali Grossi idr. [**?**].

Posledica 5.7. *Naj bo kompaktno priponsko drevo CST implementirano z uporabo kompaktnega priponskega polja CSA, ki potrebuje $|CSA| = nH_h+O(n \log\log n/\log_{|\Sigma|} n)$ bitov. Potem takšno drevo potrebuje $|CST| = nH_h + 6n + O(n \log\log n/\log_{|\Sigma|} n)$ bitov.*

Druga predlagana implementacija pa je časovno učinkovita in uporablja kompaktno priponsko polje, ki ga sta ga predlagala Grossi in Vitter [**?**].

Posledica 5.8. *Naj bo kompaktno priponsko drevo CST implementirano z uporabo kompaktnega priponskega polja CSA, ki potrebuje $O(\epsilon^{-1} n \log|\Sigma|)$ bitov. Potem takšno drevo potrebuje $|CST| = O(\epsilon^{-1} n \log|\Sigma|)$ bitov. Pri tem je ϵ poljubna konstanta, ki ima vrednost $0 < \epsilon < 1$.*

Primer kompaktnega priponskega drevesa je prikazan na Sliki **??**. Prikazana podatkovna struktura potrebuje približno 12 B (natančno potrebuje 97 bitov). Pri tem so cela števila zapisana z $\log n$ biti ($n = 6$). Ekvivalentno priponsko drevo potrebuje vsaj

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
S	**$**	**K**	**O**	**Š**		
C	**0**	**1**	**3**	**5**		
D	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
B_1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
B_2	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
B_3	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
B_4	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
B	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
SA_S	**6**	**2**	**4**			
SA_S^{-1}	**4**	**5**	**1**			

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
H	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**							
τ	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Slika 15: Primer komponent kompaktnega priponskega drevesa nad besedo »KOKOŠ$«.

18B (oziroma 142 bita), priponsko polje pa potrebuje vsaj 9 B (oziroma 36 bitov, pri čemer priponsko polje, ki simulira priponsko drevo, potrebuje približno 12 B oziroma 90 bitov). Pri tem nobena podatkovna struktura ne vključuje dodatnih podatkovnih struktur, ki omogočajo operacije v konstantnem času. Nekompaktne podatkovne strukture po navadi ne uporabljajo zapisa celih števil z $O(\log n)$ biti, kot je bilo uporabljeno v teh izračunih, ampak se uporablja vsaj 1 B (8 bitov), po navadi 4 B, kar pa dodatno poveča razliko.

Izboljšave. Prostorsko zahtevnost kompaktnega priponskega drevesa je možno še dodatno znižati na $|CSA| + o(n)$. Russo idr. [**?**] so predstavili način, kako doseči to prostorsko zahtevnost. To so dosegli tako, da so vzorčili $O(n/\delta)$ vozlišč, pri čemer je $\delta = \omega(\log_{|\Sigma|} n)$ in predstavlja faktor vzorčenja. Vzorčeno drevo potrebuje $o(n) = O(n/\log_{|\Sigma|} n)$ bitov. Poleg vzorčenja topologije drevesa so se znebili tudi LCP polja. To jim je omogočalo znižanje prostorske zahtevnosti iz $|CSA|+6n+o(n)$ na $|CSA|+o(n)$ bitov. Na ta račun pa se je dvignila časovna zahtevnost nekaterih operacij za $\omega(\log n)$ krat, če se želi ohraniti $o(n)$ dodatnega prostora. Nekatere od teh operacij so predhodno potrebovale konstanten čas izvajanja.

Preden nadaljujemo z gradnjo in poizvedbami nad CST, si pogledamo primer člo-

veškega genoma iz začetka poglavja. S priponskim drevesom se potrebuje 144 GB notranjega pomnilnika za indeksirati celoten človeški genom. Z uporabo kompaktnega priponskega drevesa, namesto priponskega drevesa, pa je potrebnih približno 3 GB delovnega pomnilnika za indeksirati celoten genom. Razlika v zahtevanem prostoru omogoča, da je lahko celotno kompaktno priponsko drevo shranjeno v delovnem spominu, za razliko od priponskega drevesa, za katerega to ni mogoče[1].

5.1 POIZVEDBE

Kompaktna predstavitev priponskega drevesa je ekvivalentna priponskemu drevesu, zato mora podpirati iste poizvedbe nad besedo T, ki jih podpira priponsko drevo. Najbolj preprosta poizvedba je *prisotnost*(T, P). V kompaktnem priponskem drevesu se prisotnost vzorca P išče s pomočjo vzvratnega iskanja (angl. *Backward Search*) vzorca v priponskem polju SA. Vzvratno iskanje za predhodno predstavljeno kompaktno priponsko polje je prikazano na Algoritmu **??** in potrebuje $O(mt_\Psi)$ časa, da se izvrši. Za drugačno implementacijo kompaktnega priponskega polja se lahko nadomesti vrstico 6 v Algoritmu **??** z binarnim iskanjem nad Ψ_c, za kar je potrebno $O(m \log nt_\Psi)$ časa. Sicer se lahko uporablja drugi bolj učinkovit algoritem za iskanje vzorca. Algoritem **??** vrne interval v priponskem polju, zato je potrebno preveriti, ali je $[s, e] \neq [-1, -1]$, za kar je potrebno konstantno časa. Torej je potrebno $O(mt_\Psi)$ časa za preveriti prisotnost vzorca ali $O(m \log nt_\Psi)$ z uporabo binarnega iskanja. V primeru, da se uporabi predstavljeno kompaktno priponsko polje, pa se poizvedba izvrši v času $O(m)$.

Algoritem vzvratnega iskanja, ki je predstavljen na Algoritmu **??**, preveri prisotnost vzorca v priponskem polju tako, da se v koraku k najde interval pripon $[s, e]$ v priponskem polju, ki se začne z znakom $P[k]$ in se nadaljuje z nizom $P[k+1 : m]$. Prvi interval $[s, e]$ predstavlja vse pripone, ki se začnejo z znakom $P[m]$ [**?**]. Na primer, če želimo preveriti *prisotnost*(»KOKOŠ$«, »KO«), lahko to storimo s kompaktnim priponskim drevesom, prikaznem na Sliki **??**. Začetni interval $[s, e] = [4, 5]$, pri čemer je $C[P[m]] = C[O]$ oziroma je $C[3]$, saj je $S[3] = O$. V edinem koraku zanke je interval $[s', e']$ enak $[1, 2]$, saj je $c = K$ oziroma je $c = 2$, saj je $S[2] = K$. Postopek za vrednost s' je izračunana kot $rang_1(B_2, 3) + 1$ in z uporabo Slike **??** izračunamo, da je $s' = 0 + 1 = 1$. Podobno lahko prevrimo tudi za $e' = rang_1(B_2, 5) = 2$. Zadnji korak izračuna je novi interval $[s, e] = [C[2] + 1, C[2] + 2] = [1 + 1, 1 + 2] = [2, 3]$. Ker s ni večji od e, vzvratno iskanje vrne $[2, 3]$, kar pomeni, da je vzorec prisoten v besedi.

Naslednja poizvedba je *številoPonovitev*(T, P), ki vrne število pojavov vzorca P v besedilu. V kompaktnem priponskem drevesu pa je poizvedba ponovno imple-

[1]Nekateri strežniki omogočajo večjo količino delovnega pomnilnika, ki presega 144 GB. Večina potrošniških računalnikov pa še vedno uporablja med 8 GB in 64 GB delovnega pomnilnika.

Algoritem 6: Iskanje intervala v SA (del CST-ja), v katerem je prisoten vzorec P [**?**]

Vhod: Kompaktno priponsko drevo CST, vzorec P

Izhod: Del priponskega polja, ki se začne z P

```
(s, e) = (C[P[m]] + 1, C[P[m] + 1])
za i = (m − 1)..1
    če s > e potem
        return [−1, −1]
    c = P[i]
    (s′, e′) = (rang_1(B_c, s − 1) + 1, rang_1(B_c, e))
    (s, e) = (C[c] + s′, C[c] + e′)
če s > e potem
    return [−1, −1]
return [s, e]
```

mentirana z uporabo vzvratnega iskanja, prikazana na Algoritmu **??**. Poizvedba *številoPonovitev*(T, P) je implementirana kot razlika $e - s + 1$, kjer s predstavlja prvo pripono, ki se začne z vzorcem P, in e je zadnja taka pripona, torej je razlika $e - s + 1$ število pripon. Torej operacija ponovno potrebuje $O(mt_\Psi)$ oziroma $O(mt_\Psi \log n)$ časa, da se izvrši.

Zadnja predstavljena poizvedba pa je *seznamPojavov*(T, P), ki vrne vse indekse pojavov vzorca P v besedi T. V kompaktnem priponskem drevesu je poizvedba ponovno implementirana z uporabo vzvratnega iskanja, prikazana na Algoritmu **??**. Z vzvratnim iskanjem se naračuna interval v priponskem polju $SA[s : e]$. Za izračun položajev ponovitev vzorca v besedilu, je potrebno ustvariti seznam $[SA[s], SA[s+1], \ldots, SA[e]]$, kar zahteva še dodatnih $occ = e - s$ korakov, pri čemer vsak korak potrebuje $O(t_{SA})$ časa, da se izvrši. Torej poizvedba *seznamPojavov*(T, P) potrebuje $O(mt_\Psi + occ \cdot t_{SA})$ oziroma $O(mt_\Psi \log n + occ \cdot t_{SA})$ časa. S predhodno predstavljeno implementacijo kompaktnega priponskega drevesa pa je potrebno $O(m + occ \cdot \log n)$ časa.

Iz implementacij poizvedb nad kompaktnim priponskim drevesom se lahko vidi, da so vse tri poizvedbe implementirane zgolj z uporabo kompaktnega priponskega polja. Iz tega se lahko sklepa, da sta topologija drevesa τ in LCP polje odvečni podatkovni strukturi. To je res zgolj za osnovne poizvedbe nad besedilom T, ki so lahko izvršene zgolj z uporabo kompaktnega priponskega polja v enakem času. Poizvedbe, kot so najdaljši ponavljajoči se podniz, najdaljši palindrom in najdaljši skupni niz besed T_1 in T_2 pa potrebujejo vse tri podatkovne strukture. Na primer, poizvedba najdaljši ponavljajoči podniz vrne podniz $T[SA[i] : SA[i] + sd(v)]$, pri čemer je i skrajno levi list

poddrevesa s korenom v notranjem vozlišču v in velja, da je $LCP[i]$ največji element v LCP polju, torej zahteva $O(nt_{SA})$ časa. Operacije $sd(v)$ ni potrebno naračunati, saj je enaka $LCP[i]$, torej se še vedno izvede v $O(nt_{SA})$ času, pri tem pa ni uporabljena topologija drevesa. V primeru, da želimo najti drugi najdaljši ponavljajoč se podniz $T[SA[j], SA[j] + sd(u)]$ v priponskem polju, pri čemer je j skrajno levi list poddrevesa s korenom v notranjem vozlišču $u = sl(v)$, pa potrebujemo tudi topologijo drevesa τ za izračunati priponsko povezavo. Le ta se izračunana kot:

$$sl(v) = lca(izbira_{01}(\tau, \Psi(rang_{01}(\tau, v-1)+1)), izbira_{01}(\tau, \Psi(rang_{01}(\tau, zapri(\tau, v))))).$$

Za izračunati drugi najdaljši ponavljajoč se podniz je potrebno $O(nt_{SA} + t_\Psi)$ časa ter se uporabijo vse tri podatkovne strukture kompaktnega priponskega drevesa [**?**, **?**, **?**].

5.2 GRADNJA

Kompaktno priponsko drevo je možno zgraditi iz priponskega drevesa. Tak način gradnje kompaktnega priponskega drevesa ni prostorsko učinkovit, saj je potrebno najprej zgraditi celotno priponsko drevo, ki ga želimo nadomestiti s kompaktno predstavitvijo. Zato bi bilo bolje zgraditi kompaktno priponsko drevo neposredno iz besede, kot je to storjeno za priponsko drevo in priponsko polje.

Kompaktno priponsko drevo je mogoče zgraditi neposredno iz vhodnega besede T. Pri tem so potrebne dodatne podatkovne strukture za izgradnjo posamičnih komponent. Tudi te dodatne podatkovne strukture so kompaktne podatkovne strukture, zato bo zgrajeno v kompaktnem prostoru. Izgradnja kompaktnega priponskega drevesa poteka v sledečih treh korakih:

1. izgradnja kompaktnega priponskega polja SA iz besede T,
2. izgradnja kompaktne predstavitve polja LCP iz kompaktnega priponskega polja SA in besede T,
3. izgradnja kompaktne predstavitve topologije drevesa τ iz LCP polja.

Izgradnja CSA. Prva zgrajena podatkovna struktura je kompaktno priponsko polje SA. Obstajajo različne implementacije kompaktnega priponskega polja, zato ni mogoče predstaviti splošnega algoritma za izgradnjo le-tega. V nadaljevanju bo predstavljen algoritem izgradnje predhodno predstavljene implementacije CSA. Ker je priponsko polje implementirano s funkcijo Ψ (shranjeno v istoimenskem polju), je potrebno naračunati polje Ψ. Funkcijo Ψ se gradi od leksikografsko najmanjše pripone do največje pripone s pomočjo polja $L[1, n]$, pri čemer je $L[i] = T[SA[i] - 1]$ ter $T[0] = T[n] = \$$. Polje L se lahko zgradi v manjših delih, zato se priponsko polje izgradi v delih dolžine b.

Za $b = n/\log n$ je potrebnih $o(n)$ bitov dodatnega prostora za shraniti del priponskega polja in $O(n \log n)$ časa za zgraditi kompaktno priponsko polje [**?**].

Priponsko polje SA se ne razdeli na b delov, ampak je lažje najti najmanjše število predpon, ki se pojavijo na začetku največ b-tim priponam, ter se na ta način razdeli priponsko polje SA na SA_k za $1 \leq k \leq b$. Sledi izračun pripon, ki sodijo v določen del priponskega polja SA_k. Pripone v tem delu se leksikografsko uredijo, najpogosteje z uporabo korenskega urejanja. V k-tem koraku je polje L zgrajeno za indekse od 1 do $kb - 1$. Vrednost celice $kb + j$ se izračuna kot $L[kb + j] = T[SA[j] - 1]$ [**?**].

Ko je polje L izračunano, se kompaktno predstavitev polja Ψ zapiše kot bitna polja B_c za vsak znak $c \in \Sigma$. Vsako bitno polje B_c se inicializira z ničlami. Če je $L[i] = c$ potem se nastavi $B_c[i] = 1$. To je lahko storjeno brez dodatnega prostora za polje L, saj ni potrebno zapisati črke $c = T[A[j] - 1]$ v polju L, ampak se lahko neposredno zapiše enico v celico $B_c[kb + j] = 1$ [**?**].

Vzporedno z izdelavo kompaktne predstavitve polja Ψ se lahko naračuna tudi polji vzorcev SA_S in SA_S^{-1}, saj se za izgradnjo sprotno naračunava priponsko polje SA. Torej za izgradnjo polj vzorcev ni potrebnega dodatnega časa. Čas, potreben za izgradnjo kompaktnega priponskega polja SA, je $O(n \log n)$. Večina operacij potrebuje $O(n)$ časa. Iskanje pripon, ki spadajo v določeno vedro, potrebuje $O(n)$ časa za vsako vedro, torej potrebuje $n/b \cdot O(n) = (n \log n)/n \cdot O(n) = O(n \log n)$ časa za naračunat vse pripone.

Izgradnja LCP strukture. Bitno polje H, ki predstavlja LCP polje, je naslednja zgrajena podatkovna struktura. Ker je $H[j] = 1$ za $j = PLCP[i] + 2i$, se H izračuna direktno iz polja $PLCP$.

Vrednosti v polju $PLCP$ so izračunane od 1 do n. Vrednost $PLCP[1]$ je izračunana s štetjem zaporednih znakov, ki se ujemajo med $T[1, n]$ in $T[SA[SA^{-1}[1]-1], n]$. Ker je $PLCP[i-1] \leq PLCP[i]+1$, je vrednost $PLCP[i]$ število skupnih zaporednih znakov med $T[i + d, n]$ in $T[SA[SA^{-1}[i] - 1] + d, n]$, pri čemer $d = \max\{PLCP[i - 1] - 1, 0\}$. Pri izgradnji bitnega polja H ni potrebo najprej naračunati polja $PLCP$, saj se lahko sprotno vpiše enico na mesto izračunane vrednosti $PLCP[i] + 2i$ v bitnem polju H [**?**].

Za izgradnjo LCP polja, ki je predstavljeno kot bitno polje H, je potrebnih $O(n)$ dostopov do priponskega polja SA. Vsak dostop do priponskega polja potrebuje $O(t_{SA})$ časa (natančen čas je odvisen od implementacije priponskega polja), ki je za predhodno predstavljeno implementacijo $t_{SA} = O(\log n)$, in potemtakem je za izgradnjo potrebno $O(nt_{SA})$ ali za predhodno predstavljeno implementacijo $O(n \log n)$.

Izgradnja topologije drevesa. Zadnja izgrajena podatkovna struktura je topologija priponskega drevesa τ. Čeprav se zdi, da ni mogoče zgraditi topologije drevesa, ne da bi se izgradilo celotno priponsko drevo, je to mogoče storiti zgolj z uporabo

priponskega polja SA in LCP polja. Ideja algoritma za izgradnjo topologija priponskega drevesa τ je podobna algoritmu Kasai idr. [**?**], ki je bil predhodno predstavljen v podpoglavju **??**.

To je storjeno s sprehodom po priponskem polju SA iz leve proti desni ter za vsako pripono i se doda nov list. Nov dodan list i je novo skrajno desno vozlišče v do sedaj izgrajenem drevesu ter ima skupnega predhodnika v z $(i-1)$-im listom na črkovni globini $sd(v) = LCP[i]$. Če je tako vozlišče v že v drevesu, potem list i postane njegov desni otrok. Sicer $sd(v) < LCP[i]$ in obstaja vozlišče u, ki je lahko $(i-1)$-vi list, za katerega velja $sd(u) > LCP[i]$. V tem primeru se ustvari novo vozlišče v', ki postane desni otrok od v ter ima dva otroka, in sicer levega otroka u ter desnega otroka listi i. Na ta način se zgradi priponsko drevo zgolj iz priponskega polja SA in LCP polja. Predstavljena metoda je implementirana z uporabo sklada, ki hrani vozlišče v ter črkovno globino $sd(v)$. Na skladu se ne shrani kazalec na vozlišče, ampak se shrani predstavitev poddrevesa s korenom v vozlišču v z zaporedjem uravnoteženih oklepajev $P(v)$. Vozlišče v, za katerega velja $sd(v) \leq LCP[i]$, se poišče s snetjem vozlišč iz sklada, dokler ne pridemo v vozlišče, za katerega pogoj drži. Tako vozlišče vedno obstaja, saj ima koren črkovno dolžino $sd(koren()) = 0$. Na sklad je dodanih največ $n-1$ vozlišč, ker ima priponsko drevo največ $n-1$ notranjih vozlišč. Da bo na koncu izgradnje sklad prazen in topologija drevesa τ pravilna, se sklad izprazni in na ta način se pridobi pravilno topologijo τ, saj vsa vozlišča na skladu ne shranjujejo topologije za njihovo skrajno desno poddrevo, ker le to še raste. Torej vsakič, ko se vozlišče sname iz sklada, se topologija poddrevesa doda staršu vozlišča, ki je vozlišče na vrhu sklada [**?**].

Izgradnja topologije drevesa poteka v času $O(nt_{SA})$ oziroma $O(n \log n)$ za predhodno predstavljeno implementacijo CSA. V vsakem koraku je v topologijo drevesa dodan nov list. Za vsak list je lahko dodano novo vozlišče na sklad, če za črkovno dolžino vozliča v, ki je trenutno na vrhu sklada, velja $sd(v) < LCP[i]$, pri čemer je i zaporedno število pripone, ki jo predstavlja list v priponskem polju. Za vsak list so iz sklada odvzeta vozlišča, za katera velja $sd(v) \geq LCP[i]$. V času izgradnje drevesa je na sklad potisnjenih in snetih največ $n-1$ vozlišč. Ker postopek ustvari n listov in največ $n-1$ notranjih vozlišč, je $O(nt_{SA})$ oziroma $O(n \log n)$ potrebni čas izgradnje topologije drevesa τ.

Izrek 5.9. *Časovna zahtevnost izgradnje kompaktnega priponskega drevesa za vhodno besedo T dolžine n je $O(n \log n)$ ter je v času izgradnje prostorska zahtevnost vedno kompaktna.*

Dokaz. Kompaktno priponsko drevo je sestavljeno iz treh delov, torej je potrebno analizirati časovno zahtevnost izgradnje vsakega dela. Za izgradnjo kompaktnega priponskega polja je potrebno $O(n \log n)$ časa, saj je treba najti pripone, ki so del posamičnega

vedra priponskega polja.

Za izgradnjo kompaktne različice LCP polja je tudi potrebno $O(n \log n)$ časa, saj je za vsako pripono potrebno izračunati dolžino predpone, v kateri se ujema s predhodno pripono. Pri tem je potreben za vsako pripono en dostop do priponskega polja, ki traja $O(\log n)$ časa za predstavljeno implementacijo CSA, torej je za n pripon potrebno $O(n \log n)$ časa.

Za izgradnjo topologije drevesa pa je tudi potrebno $O(n \log n)$ časa, saj je za vsako pripono potrebo ustvariti nov list ter novo notranje vozlišče, če ne obstaja vozlišče na poti do skrajno desnega lista, za katerega velja $sd(v) = LCP[i]$. V vsakem koraku je potrebno izračunati $LCP[i]$, ki potrebuje $O(\log n)$ časa.

Torej skupni čas za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa iz besede T je $O(n \log n) + O(n \log n) + O(n \log n) = O(n \log n)$. □

6 EMPIRIČNA EVALVACIJA

Do sedaj so bile predstavljene različne implementacije indeksov besed. V tem poglavju pa bodo empirično primerjane med seboj. In sicer se bodo testirale sledeče podatkovne strukture:

1. priponsko drevo,
2. kompaktno priponsko drevo,
3. priponsko polje in
4. priponsko polje z LCP poljem.

Za vsako od naštetih podatkovnih struktur bodo izmerjene tri stvari: velikost podatkovne strukture, čas potreben za njeno gradnjo in čas potreben za poizvedbe v podatkovni strukturi.

To poglavje je razdeljeno na tri dele, in sicer prvo bomo predstavili testno okolje, metodo testiranja ter testna besedila. Za tem bodo predstavljeni rezultati testov. V zadnjem delu poglavja pa bo narejena razprava rezultatov primerjav.

6.1 EKSPERIMENTALNO OKOLJE

Preden se lahko izdela primerjavo podatkovnih struktur je potrebno predstaviti okolje, v katerem bo izdelana primerjava, metoda uporabljena za izdelavo testnih primerov ter sami testni primeri, ki bodo uporabljeni za izdelavo primerjave. V tem podpoglavju bodo prvo predstavljeni testni primeri, za tem bo predstavljena uporabljena testna metoda ter na koncu bo predstavljen stroj in operacijski sistem, ki je uporabljen za izdelavo testiranja.

6.1.1 Testni primeri

Predstavljeno testno metodo bomo pognali nad dvema vhodnima besedama, ki sta prikazani v Tabeli **??**. Prva testirana beseda je Cankarjev kratki roman Na klancu [**?**]. Roman je bil izbran, saj predstavlja tipično vhodno besedo v naravnem jeziku, ki je v tem primeru slovenščina. Abeceda takih besed sestoji iz črk naravnega jezika (velikih in malih), presledkov in ločil. Pri tem se je pojavil problem, saj slovenščina

ne uporablja ASCII znake. Zato je potrebno pred samim začetkom testiranja vhodno besedo pred pripraviti. To je bilo storjeno tako, da so bili vsi ne ASCII znaki odstranjeni oziroma zamenjani z ASCII alternativami. Na primer znak, ki predstavlja '...', je bil zamenjan s tremi pikami, vse črke z naglasi (kot so strešice, ostrivci ter drugi) so bile zamenjani z osnovnim znakom, torej na primer š postane s in é postane e. Pri tem so bile tudi odstranjene vse prazne vrstice ter ločila poglavij, ki so bila označena z '***'. Odstranjeni so bili tudi vsi nevidni simboli, ki niso vidni bralcu, prisotni v besedilu. Na ta način se je začetno besedilo znižalo iz dolžine 319843 znakov na 317803.

Tabela 4: Primerjava besedil, ki smo jih uporabili za primerjavo različnih indeksov besed

Ime testne besede	Število znakov	Velikost abecede	Velikost na disku [MB]
Ivan Cankar, Na klancu [**?**]	317803	52	25, 851
DNK sekvenca [**?**]	52428800	4	26, 767

Druga testirana beseda pa je daljša DNK sekvenca [**?**], ki je zlepek različnih DNK sekvenc. Izbrana je bila kot primer vhodne besede, uporabljene v bioinformatiki. Ta vhodna beseda je bila predhodno uporabljena za testiranje implementacije kompaktnega priponskega drevesa od Välimäki idr. [**?**].

Podaljševanje besedila. V drugem stolpcu Tabele **??** so prikazane dolžine besed, ki bodo uporabljen za testiranje. Pri tem se opazi, da so nekatera besedila krajša kot 1024500 znakov, ki so potrebni za izgradnjo indeksov in za izdelavo vzorcev testiranja. Zato je treba te besede podaljšati. Ker je malo verjetno, da se vhodno besedilo ponovi k-krat, dokler ne doseže primerne velikosti, predvsem v naravnem jeziku, bo uporabljena bolj napredna metoda podaljševanja besedila. Metoda vzame manjše podnize besedila ter naredi stik med začetno besedo in podnizom. Tako dobljeno besedilo je bolj verjetno, saj je večja verjetnost, da se manjši deli besedila ponovijo za razliko od celotnega besedila. Predlagana metoda podaljševanja besedila je prikazana v Algoritmu **??**. Pri tem metoda predpostavi, da je besedilo dolgo vsaj 3000 znakov. Ta metoda je primerna za podaljševanje daljših besedil, sicer pa je možno metodi spremeniti parameter i in tako prilagoditi metodo drugim besedilom.

Predlagana metoda podaljša besedo na velikost s_{max}. Ta velikost je lahko dolžina najdaljše besede ali pa je poljubna vrednost, bodisi manjša od dolžine največje besede bodisi večja. Če je beseda daljša od velikosti $s_{max} < |T|$, bo predlagana metoda skrajšala besedo na $|T_0| = s_{max}$. Za potrebe testiranja smo se odločili, da je $s_{max} = 25000000$, kar je več kot zadostna dolžina.

Algoritem 7: Metoda podaljševanja vhodnega besedila

Vhod: Vhodna beseda T, velikost s_{max}

Izhod: Besedilo T_0

```
1 T_0 ← T
2 i ← 500
3 while |T_0| < s_max do
4 |   T_0 ← T_0 · T[i : 6i]
5 |   i ← i + 500
6 |   while 6i > |T| do
7 |   |   i = i/4
8 vrni T_0[1 : s_max]
```

6.1.2 Metoda testiranja

Strukturna primerjava je prikazana s psevdokodo na Algoritmu **??**. Vsak test v primerjavi se izvede petkrat, da se zmanjša vpliv drugih procesov na rezultate testiranja. Iz psevdokode opazimo, da je primerjava poizvedb bila storjena za poizvedbo $prisotnost(T, P)$, saj je pogosto vprašanje v biologiji prisotnost gena (vzorcev P) v DNK sekvenci (vhodna beseda T), ne pa natančen položaj tega gena ali števila ponovitev gena v DNK sekvenci. Poizvedba je bila izdelana za vzorce velikosti 5, 50, 500 in $\log |T|$ (na psevdokodi $\log i$). Rezultati testiranja so shranjeni v CSV datoteki in vsaka vrstica datoteke, shrani sledeče podatke: podatkovna struktura, velikost vhodne besede, čas izgradnje, čas iskanja vzorca dolžine 5, čas iskanja vzorca dolžine 50, čas iskanja vzorca dolžine 500, čas iskanja vzorca dolžine $\log |T|$ ter velikost podatkovne strukture. Velikost bo dodana ročno iz podatkov pridobljenih s pomnilniškim profilerjem (angl. *memory profiler*).

6.1.3 Stroj in operacijski sistem

Za izdelavo primerjav podatkovnih struktur bo uporabljen računalnik s procesorjem Intel Core i3 5005U z dvema jedroma in štirimi nitmi ter s taktom 1,9 GHz. Računalnik ima na razpolago 4 GB delovnega pomnilnika, od katerega je ob zagonu zasedenega 1,35 GB z operacijskim sistemom ter emulatorjem terminala (angl. *terminal emulator*). Poleg delovnega pomnilnika ima računalnik še 8 GB Swap razdelka na trdem disku, ki je namenjen shranjevanju neuporabljenih pomnilniških strani v primeru prezasedenega delovnega pomnilnika in posledično sproščanju le tega. Operacijski sistem računalnika je Fedora 42 in uporabljen Linux kernel je 6.14.11-300.

Algoritem 8: Psevdokoda primerjave indeksov vhodne besede T

Vhod: Vhodna beseda T, število znakov v najdaljšem testiranem nizu i_{max}

Izhod: CSV datoteka z izračunanimi časi

```
1  i ← 500
2  dokler i ≤ i_max
3      za S ∈ {ST, SA, SA + LCP, CST}
4          za k = 1, ..., 5
5              start ← čas()
6              Izgradi(S, T[1 : i − 1] · $)
7              konec ← čas()
8              t_Izg ← konec − start
9              dokler j ≤ 500
10                 start ← čas()
11                 prisotnost(S, T[i : i + j])
12                 konec ← čas()
13                 j ← j ∗ 10
14                 t_j ← konec − start
15             j ← log i
16             start ← čas()
17             prisotnost(S, T[i : i + j])
18             konec ← čas()
19             t_log ← konec − start
20             Shrani(S, i, t_Izg, t_5, t_50, t_500, t_log)
21             Izbriši(S)
22     i ← i + 500
```

Primerjava je izdelana v programskem jeziku C++[1]. Zato se časi, potrebni za izgradnjo struktur ter poizvedb v njih, izmerijo z beleženjem trenutnega časa pred začetkom, ki ga shranimo v spremenljivko `start`, in po koncu operacije, ki ga shranimo v spremenljivko `stop`. Meritve so implementirane s funkcijo `high_resolution_clock::now()`, ki je del standardne knjižnice programskega jezika C++ in vrne natančen čas trenutka, v katerem je funkcija izvedena. Čas izvajanja se lahko naračuna kot razlika med časom ob koncu izvajanja in časom ob začetku izvajanja operacije, kar se v C++ stori s funkcijo `duration_cast<nanoseconds>(stop - start) .count()`. Za izgradnjo podatkovnih struktur bodo uporabljene sledeče knjižnice: za priponsko drevo je uporabljena implementacija iz knjižnice [**?**], za kompaktna priponska drevesa je upo-

[1]Koda je dostopna na povezavi `https://github.com/GioGiou/MagisterskaNalogaKoda`.

rabjena implementacija iz knjižnice SDSL [**?**] in za priponska polja pa je uporabljena implementacija iz knjižnice [**?**]. Le-ta zgradi priponsko polje v $O(n)$ časa z algoritmom, ki sta ga predstavila Timoshevskaya in Feng [**?**]. Algoritem je izboljšava predhodno predstavljenega algoritma od Ko in Aluru [**?**]. Pri tem pa je uporabljena različica LCP polja imenovana $Q - LCP$ polje, ki je bila predstavljena v podpoglavju **??**.

Poleg časovne zahtevnosti gradnje in poizvedb v podatkovnih strukturah nas zanima, koliko prostora zasede posamična podatkovna struktura na delovnem pomnilniku. In sicer nas zanima največji zaseden prostor v času izgradnje posamične podatkovne strukture. Le-ta bo izmerjen z uporabo pomnilniškega profilerja. Uporabljen bo pomnilniški profiler Bytehound [**?**], saj omogoča grafični prikaz porabe pomnilnika v času izvajanja programa.

Ker je primerjava izdelana v C++, je potrebno kodo prevesti v izvršljivo datoteko. To je strojeno s prevajalnikom GCC 15.1.1. Program je bil preveden s sledečim ukazom:

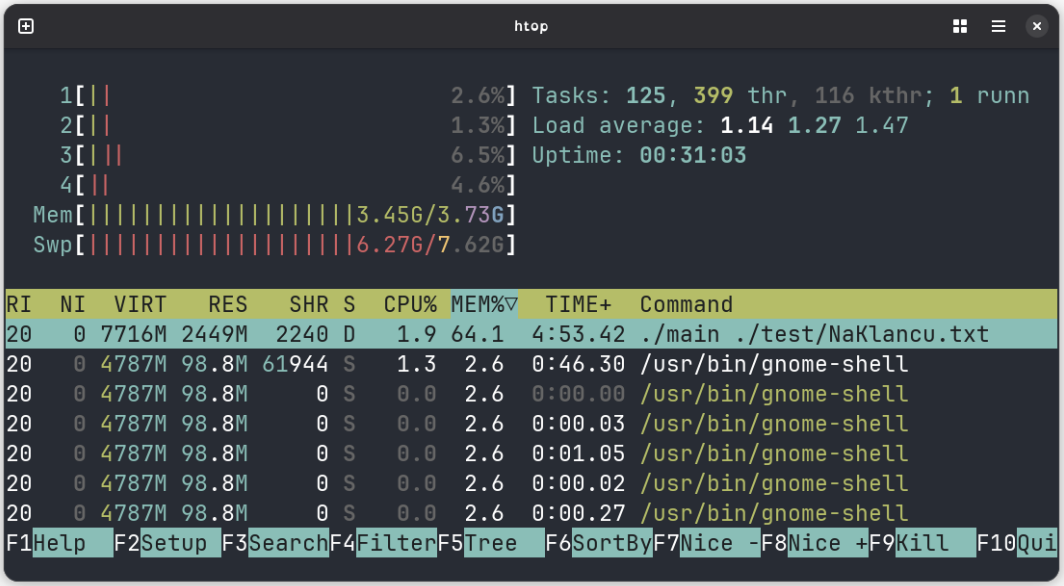
```
g++ -std=c++11 -O3 -DNDEBUG -I ./include -L ./lib //
main.cpp -o main -lsdsl -ldivsufsort //
-ldivsufsort64 -lsuffix -lsais
```

Pri prevajanju programa je uporabljenih nekaj zastavic, ki določajo vrednosti parametrov prevajalnika. Večina zastavic je vezana na uvažanje knjižnic v prevajanje, in sicer `-I ./include` nastavi pot do zaglavnih datotek (angl. *header files*), `-L ./lib` nastavi pot do strojne kode knjižnice ter zastavice `-lsdsl`, `-ldivsufsort`, `-ldivsufsort64`, `-lsais` in `-lsuffix` uvozijo potrebne knjižnice za izgradnjo izvršljive datoteke. Zastavica `-O3` določa nivo optimizacije izvršljive datoteke na nivo 3, ki je bil izbran, saj je uporabljen za prevajanje prve implementacije kompaktnega priponskega drevesa [**?**]. Ker se uporablja profiler, je potrebo pred začetkom testiranja indeksov besed zagnati tudi profiler, kar je storjeno z ukazom:

```
export MEMORY_PROFILER_LOG=info
LD_PRELOAD=~/bytehound/libbytehound.so ./main //
./test/NaKlancu.txt
```

Prva vrstica ukaza določa stopnjo profiliranja, ki ima v tem primeru vrednost `info`, ter se jo shrani v sistemsko spremenljivko `MEMORY_PROFILER_LOG`. Naslednja vrstica pa požene program ter se poda kot prvi parameter ime datoteke s testnimi podatki. Zgornji ukaz prikaže primer za vhodno besedilo Na klancu. S spremenljivko `LD_PRELOAD` je določen deljeni objekt (angl. *shared object*), ki je izvršen pred začetkom programa. V primeru testiranja je deljeni objekt profiler, kar mu omogoča dostop do programa in lažje beleženje zasedenega delovnega spomina.

Dolžina najdaljše vhodne besed i_{max} je bila sprva nastavljena na 4000000 znakov. Med testiranjem priponskega drevesa besede dolžine 2048000 znakov se je opazilo, da čas, potreben za izgradnjo prvega priponskega drevesa, presega 5 minut. Po petih



Slika 16: Posnetek zaslona upravljalnika opravil Htop med izgradnjo priponskega drevesa za besedilo dolžine 2048000 znakov.

minutah od začetka gradnje drevesa lahko opazimo, da je delovni pomnilnik skoraj v celoti zaseden ter je Swap razdelek zaseden že s 6 GB pomnilniški strani. Pri tem je računalnik neodziven in proces je v neprekinjenem spanju (angl. *Uninterruptible sleep* ali stanje D). Na Sliki **??** je prikazan upravljalnik opravil Htop v času izgradnje priponskega drevesa za besedo dolžine 2048000 znakov. Proces v modri vrstici predstavlja program za testiranje časa izgradnje in poizvedb ter prostorske zahtevnosti indeksov besed. V stolpcu, označenim S (Stanje ali angl. *Status*), je vidno, da je je stanje procesa označeno kot D, ker je proces v neprekinjenem spanju. Po več kot 5 minutah od začetka gradnje priponskega drevesa za besedo dolžine 2048000 znakov smo se odločili, da se proces ubije. Posledično se je znižala velikost besede za izgradnjo zadnjega indeksa na 1024000 znakov. Med testiranjem smo opazili tudi, da se LCP polje ne zgradi za besede dolžine 1024000 znakov, zato smo se odločil, da se ta test v tem koraku izpusti.

6.2 PRIMERJAVA

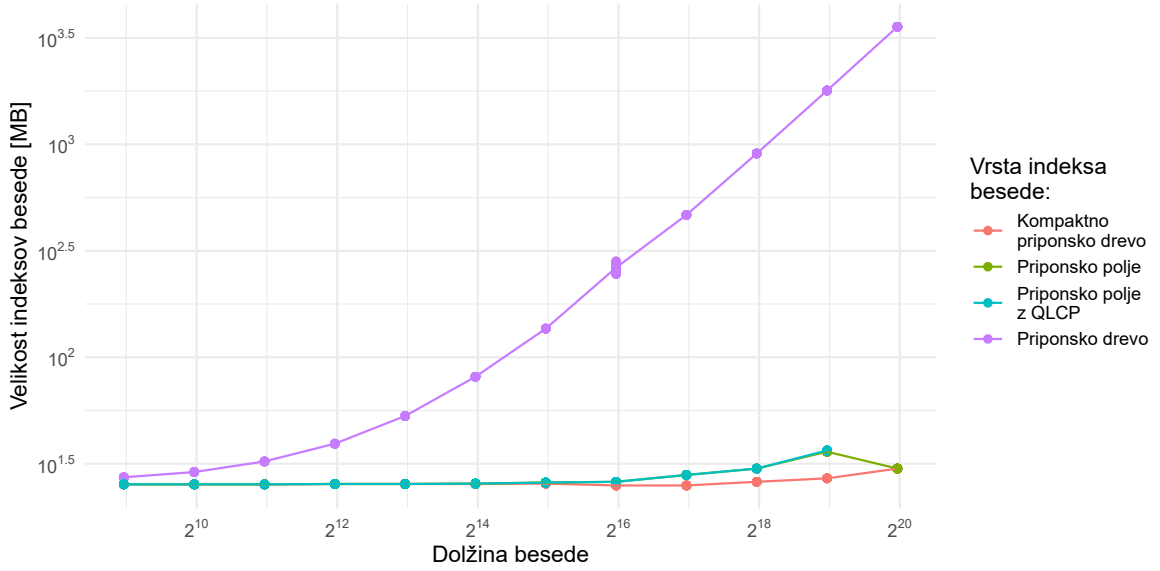
V tem podpoglavju bodo predstavljeni rezultati testiranja različnih indeksov besede, ki je bil izdelan z metodo in računalnikom predstavljenim v podpoglavju **??**. Metoda meri prostor, ki ga zasede indeks, čas potreben za izgradnjo indeksov in čas potreben za različne poizvedbe z indeksom. Meritve lahko ločimo na dva dela, in sicer: meritvi vezani na gradnjo, ki sta čas gradnje in velikost podatkovne strukture, ter poizvedbe

z indeksom. Zato bo sledeče podpoglavje tudi razdeljeno na dva dela. V vsakem delu bodo ločeno predstavljeni rezultati testiranja za vsako testno besedo iz Tabele **??**. V podpoglavju **??** pa bo narejena bolj podrobna razprava o rezultatih testiranja.

6.2.1 Gradnja

Testiranje se začne z izgradnjo indeksov. Pri tem smo merili čas potreben za gradnjo indeksov za besede različnih dolžin. Enkrat, ko je indeks zgrajen, se lahko izmeri tudi njegova velikost na pomnilniku.

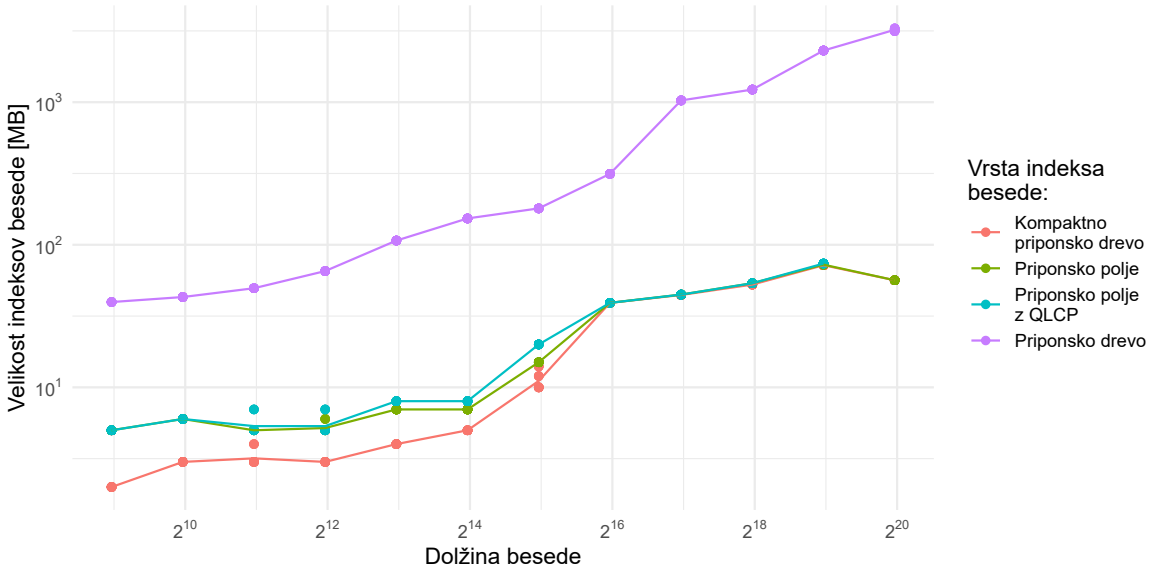
Prostorska zahtevnost podatkovne strukture. Rezultati meritve prostorske zahtevnosti so prikazani na Sliki **??** za DNK sekvenco in na Sliki **??** za roman Na klancu. Iz obeh testiranj se vidi, da je prostorska zahtevnost priponskega drevesa večja kot prostorska zahtevnost ostalih indeksov. Pri tem vidimo tudi, da prostorska zahtevnost linearno raste z velikostjo besede, za vse 4 testirane podatkoven strukture.



Slika 17: Graf velikosti indeksov izgrajenih iz besed različni velikosti. Vhodna beseda je DNK sekvenca.

Iz rezultatov testiranja za DNK sekvenco, Slika **??**, vidimo, da vse podatkovne strukture linearno rastejo. Pri tem pa priponsko polje (označeno z zeleno barvo), priponsko polje z LCP poljem (označenim z modro barvo) in kompaktno priponsko drevo (označeno z rdečo barvo) potrebujejo bistveno manj prostora, kot ga potrebuje priponsko drevo (označen z viola barvo).

Podobno se lahko vidi tudi za roman Na klancu, Slika **??**. Velikost vseh podatkovnih strukture linearno rastejo z dolžino vhodne besede, pri čemer priponsko drevo (označen z viola barvo) potrebuje bistveno več prostora kot ostale podatkovne strukture. Pri tem



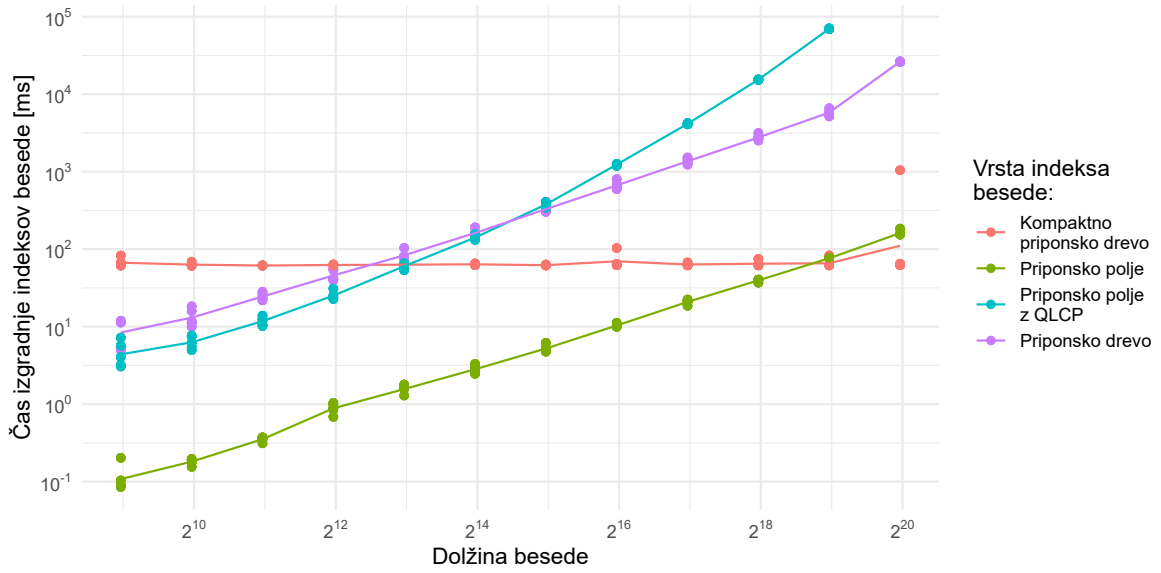
Slika 18: Graf velikosti indeksov izgrajenih iz besed različni velikosti. Vhodna beseda je roman Na klancu.

pa se vidi, da je razlika v zasedenem prostoru med priponskim drevesom in ostalimi indeksi nižja in konstantna skozi celotno izvajanje testa, za razliko od testa nad DNK sekvenco.

Časovna zahtevnost gradnje. Zdaj, ko poznamo velikost indeksov, pa si lahko pogledamo čas, ki ga potrebujemo za gradnjo le-teh. Rezultati so prikazani na Sliki **??** za DNK sekvenco ter na Sliki **??** za roman Na klancu. V obeh primerih vidimo, da čas gradnje indeksov raste linearno z dolžino besede. V obeh testnih primerih se priponsko polje (označeno z zeleno barvo) zgradi najhitreje. Iz slik se zdi, da kompaktno priponsko drevo (označeno z rdečo barvo) potrebuje konstanten čas za gradnjo, vendar se iz rezultatov testiranja vidi majhno rast, ki ni vidna na slikah.

Časi, izmerjeni pri testiranju z DNK sekvenco, prikazani na Sliki **??**, za indeksa priponsko drevo (označene z viola barvo) in priponsko polje z dodanimi LCP poljem (označen z modro barvo) so približno stokrat daljši od časov gradnje priponskih polj (označenih z zeleno barvo). Opazi se tudi, da test priponskih polji potrebuje manj kot 1 ms za zgraditi priponska polja za besede krajše od vključno 4000 znakov oziroma prve štiri dolžine besed.

Podobni rezultati so izmerjeni tudi za roman Na klancu, prikazani na Sliki **??**. Priponsko drevo (označene z viola barvo) in priponsko polje z dodanim LCP poljem (označen z modro barvo) potrebujeta približno stokrat daljši čas kot priponsko polje (označenih z zeleno barvo), da se zgradi. Opazi se tudi, da test priponskih polji potrebuje manj kot 1 ms za zgraditi priponska polja za besede krajše od vključno 4000 znakov oziroma prve štiri dolžine besed.



Slika 19: Graf prikazuje čas izgradnje indeksov besede za različne dolžine vhodnih besed. Vhodna beseda je DNK sekvenca.

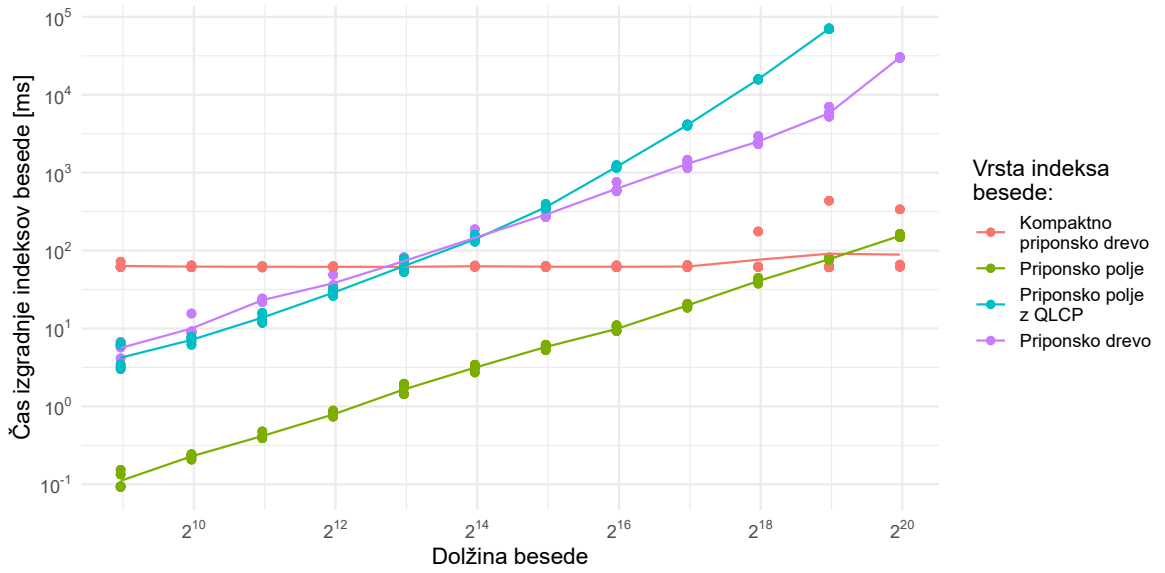
6.2.2 Poizvedbe

Rezultati testiranja so prikazani na Sliki **??** za poizvedbe v DNK sekvenci ter na Sliki **??** za poizvedbe v romanu Na klancu. Na obeh slikah so prikazani grafi rezultatov poizvedb za vzorce dolžine 5 znakov (prvi graf), vzorce dolžine 50 znakov (drugi graf), vzorce dolžine 500 znakov (tretji graf) in vzorce dolžine $\log n$ znakov (četrti graf).

Časovna zahtevnost poizvedbe za vzorec dolžine 5. Za DNK sekvenco, prikazano na Sliki **??** (prvi graf), se vidi, da je iskanje v kompaktnem priponskem drevesu (označeno z rdečo barvo) najhitrejše. V priponskih drevesih (označenih z viola barvo) in kompaktnih priponskih drevesih je čas iskanja neodvisen od dolžine vhodne besed. Iskanja s priponskimi polji (označenimi z zeleno barvo in z modro barvo) pa se povečujeta za daljše besede.

Na Sliki **??** (prvi graf), ki prikazuje rezultate za roman Na klancu, so še bolj vidne razlike med implementacijami priponskih dreves ter med implementacijami s priponskimi polji. Pri iskanju vzorca v besedi dolžine 1024000 z uporabo priponskega drevesa se vidi skok v času, ki je potreben za izvršiti poizvedbo, saj so nekatere strani pomnilnika morale biti ponovno naložene v pomnilnik iz Swap razdelka.

Časovna zahtevnost poizvedbe za vzorec dolžine 50. Ko se velikost vzorca poveča na 50 znakov, se čas poizvedbe za DNK sekvenco, prikazano na Sliki **??** (drugi graf), loči na dva dela, in sicer na hitrejše iskanje s priponskimi drevesi (označenimi z viola barvo) in kompaktnimi priponskimi drevesi (označenimi z rdečo barvo) ter na



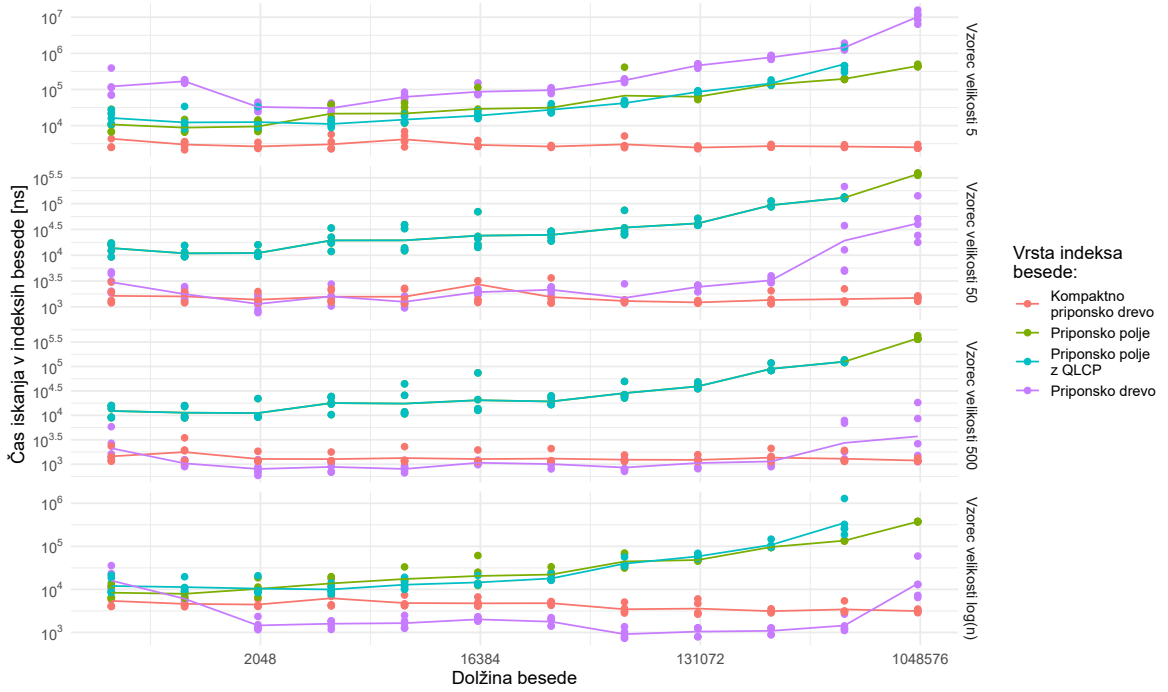
Slika 20: Graf prikazuje čas izgradnje indeksov besede za različne dolžine vhodnih besed. Vhodna beseda je roman Na klancu.

počasnejše iskanje s priponskimi polji (označenimi z zeleno barvo in z modro barvo). Pri tem se opazi tudi premik strani iz Swap razdelka na notranji pomnilnik pri testiranju priponskega drevesa besede dolžine 1024000.

Rezultati testiranja romana Na klancu, prikazano na Sliki **??** (drugi graf), so podobni rezultatom na DNK sekvenci. Vidi se lahko, da je iskanje s priponskimi drevesi oziroma kompaktnimi priponskimi drevesi desetkrat hitrejše kot s priponskimi polji. Opazi se lahko tudi vpliv premika strani, kot se je opazilo pri drugih že opravljenih testih.

Časovna zahtevnost poizvedbe za vzorec dolžine 500. Če nadaljujemo na vzorce dolžine 500 znakov, so za DNK sekvenco, prikazani na Sliki **??** (tretji graf), podobni rezultatom iskanja vzorcev dolžine 50 znakov. Pri tem je iskanje najhitrejše v priponskih drevesih (označenimi z viola barvo), razen za daljše besede, ki ne morejo biti shranjeni v celoti na delovnem pomnilniku. Pri tem pa se ne vidi tako drastičnega poslabšanja kot pri vzorcih dolžine 50 znakov.

Rezultati testiranja romana Na klancu so prikazani na Sliki **??** (tretji graf). Opazimo lahko, da so približno enaki kot za DNK sekvenco in za vzorce dolžine 50 znakov. Za razliko od DNK sekvence se v tem primeru izrecno vidi čas potreben za zamenjavo strani v notranjem pomnilniku na iskanje s priponskim drevesom (označenim z viola barvo). Vidi se tudi, da je priponsko drevo za vse teste razen za zadnja dva najhitrejši način iskanja vzorcev v besedah.



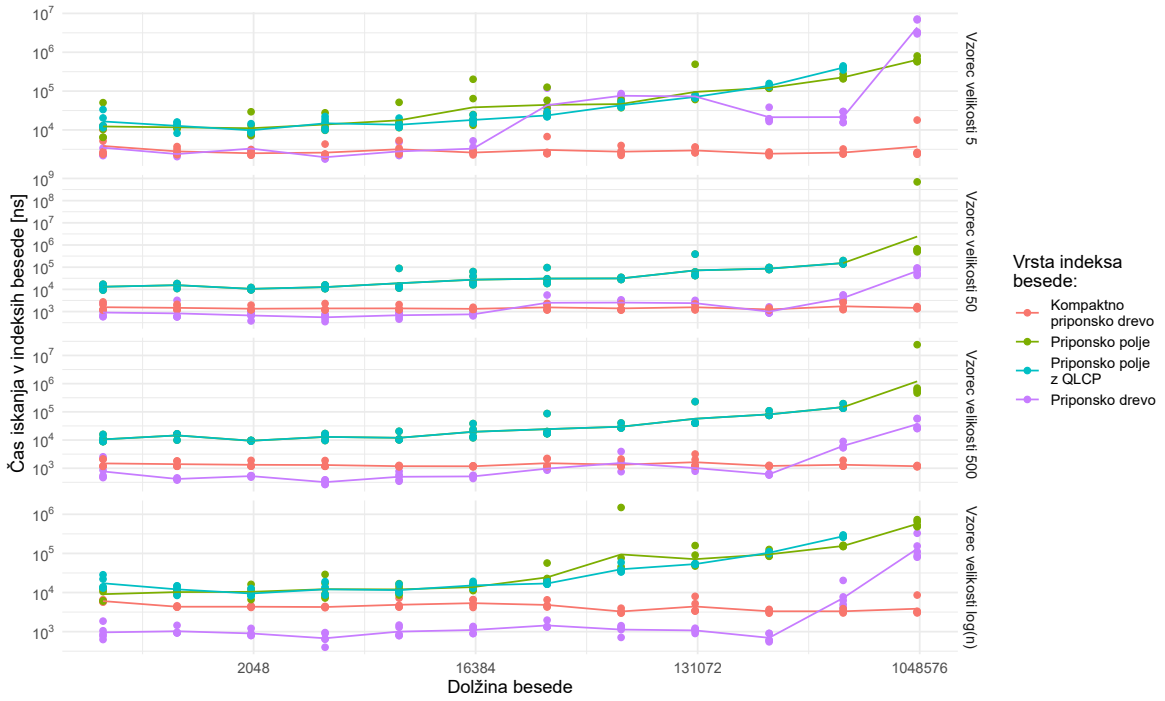
Slika 21: Graf prikazuje čas iskanja vzorcev različnih dolžin v različnih indeksih besede. Vhodna beseda je DNK sekvenca.

Časovna zahtevnost poizvedbe za vzorec dolžine $\log n$**.** Zadnja izdelana testa sta prisotnost vzorcev dolžine $\log n$ s pomočjo indeksov. Za DNK sekvenco, prikazano na Sliki **??** (četrti graf), se vidi, da za krajše besede (besed, ki niso daljše od 1000 znakov) vse štiri podatkovne strukture potrebujejo približno isto časa. Za daljše besede pa je priponsko drevo (označeno z viola barvo) najhitrejši način iskanja. To velja zgolj dokler drevo ne preraste velikost notranjega pomnilnika in ne potrebuje zamenjave strani, kar negativno vpliva na rezultat iskanja.

Za roman Na klancu, prikazan na Sliki **??** (četrti graf), pa so rezultati podobni. Pri tem je priponsko drevo (označeno z viola barvo), konstantno najhitrejši način iskanja. To velja zgolj dokler drevo ne preraste velikost notranjega pomnilnika in ne potrebuje zamenjave strani, kar negativno vpliva na rezultat iskanja. To je v tem testu jasnejše vidno kot v DNK sekvenci.

6.3 RAZPRAVA

Iz rezultatov testiranja opazimo, da priponsko drevo zasede 3,56 GB pomnilnika pri izgradnji za DNK sekvenco, ki je prikazan z viola barvo na Sliki **??**, ter 3,27 GB pomnilnika pri gradnji za roman Na klancu, ki je prikazan z viola barvo na Sliki **??**. Čeprav priponsko drevo potrebuje manj pomnilnika kot ga razpolaga sistem (4 GB), ga operacijski sistem zasede 1,3 GB, torej je potrebno nekatere strani shraniti



Slika 22: Graf prikazuje čas iskanja vzorcev različnih dolžin v različnih indeksih besede. Vhodna beseda je roman Na klancu.

na Swap razdelku. Premalo pomnilnika je tudi razlog za omejitev testov na besede dolžine 1024000 znakov, saj je računalnik potreboval več kot 5 minut za gradnjo enega priponskega drevesa. Ti rezultati so v skladu z razliko v hitrosti dostopa do podatkov med notranjim pomnilnikom in zunanjim pomnilnikom, ki je v tem primeru trdi disk. Trdi disk potrebuje 7-krat več časa za dostopati do zaporedno zapisanih podatkov, kar se zgodi pri ne polno zasedenem Swap razdelku med testiranjem priponskega drevesa za besedo dolžine 1024000. Meritev hitrosti branja in pisanja med različnimi tipi pomnilnika je izmeril tudi Jacobs [**?**], ki je prišel do istih izmerjenih rezultatov. Ostali indeksi zasedejo približno isto prostora. To pa je povzročilo problem pri natančnem razlikovanju prostora dveh podatkovnih struktur s pomočjo pomnilniškega profilerja.

Naslednje vprašanje, ki ga želimo odgovoriti, je vpliv tipa abecede vhodne besede. Iz samega testiranja ni razvidnih bistvenih razlik pri času, potrebnem za gradnjo indeksov ter zasedenem prostoru. Pri tem pa se pojavi razlika v rezultatih iskanja vzorca dolžine 5 znakov z uporabo priponskega drevesa. Pri testiranju z vhodno besedo v naravnem jeziku je vzorec najverjetneje prisoten v besedi za besede dolžine vsaj 16000 znakov, glede na skok v potrebovanem času, ki je viden na prvem grafu na Sliki **??** (označeno z viola barvo).

Zadnje vprašanje, ki ga želimo odgovoriti, je o razlikah med podatkovnimi strukturami ter kdaj se uporabi posamična struktura. Prvo stvar, ki jo vidimo, je približno ista časovna zahtevnost poizvedb med priponskim poljem brez in z dodatno LCP strukturo.

Najbolj verjeten razlog je predčasna prekinitev razpolavljanja, kar zniža čas poizvedbe. Opazi se tudi dodatni čas, potreben za izgradnjo LCP polja. Najbolj verjeten razlog so neučinkoviti rekurzivni klici. Če pa se vrnemo nazaj na vprašanje, kdaj se uporabi posamični indeks, je potrebno ločiti tri scenarije:

1. nizko število poizvedb, ki ne omogočajo amortizacije izgradnje,
2. visoko število poizvedb, ki omogočajo amortizacije izgradnje, pri čemer indeks je lahko v celoti shranjen v delovnem pomnilniku,
3. visoko število poizvedb, ki omogočajo amortizacije izgradnje, pri čemer indeks ni v celoti shranjen v delovnem pomnilniku.

Podatkovna struktura, primerna za prvi scenarij, je priponsko polje, saj se ga najhitreje izgradi (Sliki **??** in **??**) ter zasede malo prostora. Pri tem se iskanje lahko pospeši z uporabo LCP polja. Za drugi scenarij je najbolj primerna podatkovna struktura priponsko drevo, saj je od testiranih indeksov najhitrejši za iskanje vzorcev v besedi, če nismo prostorsko omejeni. Če pa smo prostorsko omejeni, kot smo v scenariju tri, pa uporabimo kompaktno priponsko drevo, saj potrebuje malo prostora, čas izgradnje je kratek ter je drugi najhitrejši indeks za iskanje vzorcev v besedi.

Dobljene rezultate lahko primerjamo tudi z rezultati od Välimäki idr. [**?**]. Naši rezultati sovpadajo z rezultati, ki so jih dobili, za DNK sekvenco. Pri tem pa ne moremo primerjati rezultate za naravni jeziki, saj smo uporabljali kot vhodno besedo besedilo v slovenščini, oni pa so uporabljali besedilo v angleščini.

7 ZAKLJUČEK

Namen magistrske naloge je bil predstavitev podatkovne strukture kompaktno priponsko drevo ter primerjava le-te s priponskim drevesom in priponskim poljem. Podatkovne strukture so bile med seboj empirično primerjane.

Najprej smo vsako podatkovno strukturo predstavili. Predstavitev ni vsebovala samo predstavitev implementacije podatkovne strukture, ampak tudi predstavitev algoritmov za izgradnjo podatkovne strukture ter implementacijo poizvedb nad besedo s strukturo.

Glavna razlika med priponskim drevesom, priponskim poljem in kompaktnim priponskim drevesom je v časovni zahtevnosti izgradnje ter prostorska zahtevnost. Priponsko drevo za besedo T dolžine n potrebuje $O(n)$ povezav, kar pomeni, da potrebuje $O(n \log n)$ bitov ali $O(nw)$ bitov, če se uporabljajo sistemski naslovi. Podobno priponsko polje, ki mu lahko dodamo LCP polje za pospešiti poizvedbe, potrebuje $O(n)$ celih števil, ki so shranjena z $O(n \log n)$ biti ali $O(nw)$ biti. Kompaktno priponsko drevo pa potrebuje $|CSA| + 6n + o(n)$ bitov, kar v obeh predstavljenih implementacijah kompaktnega priponskega polja ohrani prostorsko zahtevnost $O(n)$ bitov. Časovna zahtevnost izgradnje priponska drevesa in priponska polja potrebuje $O(n)$ časa. Le-ta se poslabša na $O(n \log n)$ časa za kompaktna priponska drevesa, kar omogoča, da je celoten postopek izgradnje kompaktnega priponskega drevesa v celoti storjen s kompaktnimi podatkovnimi strukturami.

Z empirično primerjavo so bile potrjene razlike v prostorski zahtevnosti ter razlike v časovnih zahtevnosti operacij. Empirična primerjava je bila opravljena nad zaporedjem genov ter nad besedilom v naravnem jeziku (slovenščina). Empirična primerjava je merila časovno zahtevnost poizvedbe $prisotnost(T, P)$ nad besedili različnih velikosti ter vzorcev različnih dolžin. Merila je tudi časovno zahtevnost gradnje podatkovnih struktur različnih velikosti ter prostorsko zahtevnost le-teh. Z empirično primerjavo se lahko potrdijo teoretične časovne razlike gradnje in poizvedb med priponskimi drevesi, priponskimi polji in kompaktnimi priponskimi drevesi. Pri tem pa se tudi opazi razlika med časovno zahtevnostjo gradnje in poizvedb, če je priponsko drevo v celoti shranjeno na delovnem pomnilniku ter če je del drevesa shranjen na Swap razdelku. Te razlike ni mogoče opaziti na priponskih poljih in kompaktnih priponskih drevesih, saj dolžina besedila je prekratka, da bi jih bilo potrebno shraniti na Swap razdelku.

Rezultati testiranja so bili izdelani na računalniku z zgolj 4 GB delovnega pomnilnika in 8 GB Swap razdelka, kar je relativno malo spomina, saj imajo novi osebni

računalniki vsaj 16 GB delovnega pomnilnika in procesorji za strežnike podpirajo več 100 GB delovnega pomnilnika. Torej se pojavi vprašanje, ali so kompaktne podatkovne strukture sploh še potrebne, saj imajo trenutni računalniki na razpolago dovolj delovnega pomnilnika za shraniti celotno priponsko drevo. Menimo, da so še vedno potrebne, saj omogočajo shranjevanje in iskanje po večjem številu priponskih dreves hkrati. Iskanje vzorcev v večjem številu priponskih dreves naenkrat je mogoče, saj večina procesorjev podpira izvajanje večjega števila procesov naenkrat. Računalnik, na katerem je bilo izdelano testiranje, omogoča izvajanje do štirih procesov naenkrat, saj ima dve jedri in štiri niti.

V prihodnosti bi bilo zanimivo raziskovati uporabo kompaktnih priponskih dreves za reševanje problema, kot je iskanje v drsečem oknu. Ta problem se do sedaj rešuje s priponskimi drevesi. Zato je potrebno izdelati dinamično verzijo kompaktnih priponskih dreves, ki omogoča dodajanje in brisanje pripon iz drevesa. Druga zanimiva raziskava pa je izdelava kompaktnega priponskega drevesa, ki potrebuje konstantni čas za dostopanje do podnizov besede. To bi omogočalo, da se poizvedba $seznamPojavov(T, P)$ izvede v času $O(m+occ)$, to je čas, ki ga ta poizvedba potrebuje v priponskem drevesu.

8 LITERATURA IN VIRI

[1] E. Ukkonen, On-line construction of suffix trees. *Algorithmica* 14 (1995) 249–260. *(Citirano na strani 23.)*

[2] K. Sadakane, Compressed Suffix Trees with Full Functionality. *Theory of Computing Systems* 41 (2007) 589–607. *(Citirano na straneh 45, 46, 47, 48, 50 in 51.)*

[3] N. Välimäki, W. Gerlach, K. Dixit in V. Mäkinen, Engineering a Compressed Suffix Tree Implementation. V *6th International Workshop on Experimental and Efficient Algorithms*, 2007, 217–228. *(Citirano na straneh 47, 55, 60, 63 in 71.)*

[4] E. M. McCreight, A Space-Economical Suffix Tree Construction Algorithm. *Journal of the Association for Computing Machinery* 23 (1976) 262–272. *(Citirano na strani 23.)*

[5] P. Weiner, Linear pattern matching algorithms. V *14th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (swat 1973)*, 1973, 1–11. *(Citirano na straneh 1 in 55.)*

[6] G. Navarro, *Compact Data Structures: A Practical Approach*, Cambridge University Press, 2016. *(Citirano na straneh 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 18, 48, 49, 50, 53, 54, 55, 56 in 57.)*

[7] D. E. Knuth, J. H. Morris in V. R. Pratt, Fast Pattern Matching in Strings. *SIAM Journal on Computing* 6 (1977) 323-350. *(Citirano na strani 19.)*

[8] D. Gusfield, *Algorithms on Strings, Trees, and Sequences: Computer Science and Computational Biology*, Cambridge University Press, 1997. *(Citirano na strani 19.)*

[9] *Pizza&Chili Corpus – Compressed Indexes and their Testbeds*, `https://pizzachili.dcc.uchile.cl/`. (Datum ogleda: 8. 10. 2024.) *(Citirano na strani 60.)*

[10] I. Cankar, *Na Klancu*, Genija, 2012. *(Citirano na straneh 59 in 60.)*

[11] S. Gog, T. Beller, A. Moffat in M. Petri, From Theory to Practice: Plug and Play with Succinct Data Structures. V *13th International Symposium on Experimental Algorithms, (SEA 2014)*, 2014, 326–337. *(Citirano na strani 63.)*

[12] K. Ganesh, *ganesh-k13/suffix-tree: C++ implementation of Suffix Tree (Ukkonens)*, `https://github.com/ganesh-k13/suffix-tree`. (Datum ogleda: 8. 10. 2024.) *(Citirano na strani 62.)*

[13] E. Miller, *Genome — Knowledge Hub*, `https://www.genomicseducation.hee.nhs.uk/genotes/knowledge-hub/genome`. (Datum ogleda: 30. 10. 2024.) *(Citirano na strani 45.)*

[14] T. Kasai, G. Lee, H. Arimura, A. Setsuo in K. Park, Linear-Time Longest-Common-Prefix Computation in Suffix Arrays and Its Applications. *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching* 2089 (2001) 181-192. *(Citirano na straneh 39, 40 in 57.)*

[15] J. I. Munro in V. Raman, Succinct representation of balanced parentheses, static trees and planar graphs. *Proceedings 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (1997) 118-126. *(Citirano na strani 47.)*

[16] R. Grossi in J. S. Vitter, Compressed suffix arrays and suffix trees with applications to text indexing and string matching . *Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (2000) 397–406. *(Citirano na straneh 48 in 51.)*

[17] R. Grossi, A. Gupta in J. S. Vitter, High-Order Entropy-Compressed Text Indexes . *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2003) 841–850. *(Citirano na straneh 48 in 51.)*

[18] L. M S. Russo, G. Navarro in A. L. Oliveira, Fully-Compressed Suffix Trees. *LATIN 2008: Theoretical Informatics* (2008) 362–373. *(Citirano na strani 52.)*

[19] D. Harel in R. E. Tarjan, Fast Algorithms for Finding Nearest Common Ancestors. *SIAM Journal on Computing* 13 (1984) 338-355. *(Ni citirano.)*

[20] Koute, *koute/bytehound: A memory profiler for Linux.*, `https://github.com/koute/bytehound`. (Datum ogleda: 30. 10. 2024.) *(Citirano na strani 63.)*

[21] A. Jacobs, The Pathologies of Big Data: Scale up your datasets enough and all your apps will come undone. What are the typical problems and where do the bottlenecks generally surface?. *Queue* 7 (2009) 10–19. *(Citirano na strani 70.)*

[22] M. L. Fredman in D. E. Willard, BLASTING through the information theoretic barrier with FUSION TREES. V *STOC '90: Proceedings of the twenty-second annual ACM symposium on Theory of Computing*, 1990, 1-7. *(Citirano na strani 4.)*

[23] P. Morin, *Open Data Structures, An Introduction*, Athabasca University Press, 2013. *(Citirano na strani 4.)*

[24] U. Manber in G. Myers, Suffix arrays: a new method for on-line string searches. V *SODA '90: Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, 1990, 319-327. *(Citirano na straneh 37 in 39.)*

[25] P. Ko in S. Aluru, Space efficient linear time construction of suffix arrays. *Journal of Discrete Algorithms* 3 (2005) 143-156. *(Citirano na straneh 39 in 63.)*

[26] M. I. Abouelhoda, S. Kurtz in E. Ohlebusch, Replacing suffix trees with enhanced suffix arrays. *Journal of Discrete Algorithms* 2 (2004) 53-86. *(Citirano na straneh 40, 41 in 43.)*

[27] D. Knuth, *Art of Computer Programming, The: Combinatorial Algorithms, Volume 4A*, Addison-Wesley Professional, 2011. *(Citirano na strani 6.)*

[28] J. Fischer in V. Heun, A new succinct representation of RMQ-information and improvements in the enhanced suffix array. V *International Symposium on Combinatorics, Algorithms, Probabilistic and Experimental Methodologies*, 2007, 459–470. *(Citirano na strani 40.)*

[29] A. Brodnik, *Searching in Constant Time and Minimum Space*, Ph.D. dissertation, University of Waterloo, 1995. *(Citirano na strani 6.)*

[30] I. Grebnov, *GitHub - IlyaGrebnov/libsais: The libsais library provides fast linear-time construction of suffix array (SA), generalized suffix array (GSA), longest common prefix (LCP) array, permuted LCP (PLCP) array, Burrows-Wheeler transform (BWT) and inverse BWT based on the induced sorting algorithm with optional OpenMP support for multi-core parallel construction.*, `https://github.com/IlyaGrebnov/libsais`. (Datum ogleda: 30. 6. 2025.) *(Citirano na strani 63.)*

[31] N. Timoshevskaya in W. Feng, SAIS-OPT: On the characterization and optimization of the SA-IS algorithm for suffix array construction. V *IEEE 4th International Conference on Computational Advances in Bio and Medical Sciences, ICCABS*, 2014, 1-6. *(Citirano na strani 63.)*