UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Kompaktna priponska drevesa

(Compact Suffix Tree)

Ime in priimek: *Jani Suban*
Študijski program: *Računalništvo in informatika, 2. stopnja*
Mentor: *prof. dr. Andrej Brodnik*
Somentor: *izr. prof. dr. Rok Požar*

Koper, april 2025

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Jani SUBAN
Naslov magistrskega dela: Kompaktna priponska drevesa

Kraj: Koper
Leto: 2025

Število listov: 73 Število slik: 17 Število tabel: 6
Število referenc: 21
Mentor: prof. dr. Andrej Brodnik
Somentor: izr. prof. dr. Rok Požar

UDK:
Ključne besede:
POPRAVI: Math. Subj. Class. (2010):
Izvleček:
POPRAVI:: Izvleček predstavlja kratek, a jedrnat prikaz vsebine naloge. V največ 250 besedah nakažemo problem, metode, rezultate, ključne ugotovitve in njihov pomen.

Key document information

Name and SURNAME: Jani SUBAN
Title of the thesis: Compressed Suffix Tree

Place: Koper
Year: 2025

Number of pages: 73 Number of figures: 17 Number of tables: 6
Number of references: 21
Mentor: prof. dr. Andrej Brodnik
Co-Mentor: izr. prof. dr. Rok Požar

UDC:
Keywords:
Math. Subj. Class. (2010):
Abstract:
Izvleček predstavlja kratek, a jedrnat prikaz vsebine naloge. V največ 250 besedah nakažemo problem, metode, rezultate, ključne ugotovitve in njihov pomen.

Kazalo vsebine

Kazalo preglednic

Kazalo slik in grafikonov

Seznam kratic

angl.	Angleščina
slo.	Slovenščina
idr.	in drugi
DNK	Deoksiribonukleinska kislina
KMP	Knuth–Morris–Pratt
ST	angl. *Suffix Tree* (slo. Priponsko drevo)
rmM	angl. *range minimum-maxsimum*
rmq	angl. *range minimum querry*
rMq	angl. *range maxsimum querry*
LOUDS	angl. *Level Order Unary Degree Sequence* (slo. Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč po plasteh)
DFUDS	angl. *Depth Frst Unary Degree Sequence* (slo. Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč v globino)
BP	angl. *Balanced Parentheses* (slo. Uravnoteženi oklepaji)
SA	angl. *Suffix Array* (slo. Priponsko Polje)
LCP	angl. *Longest Common Preffix* (slo. Najdaljša skupna predpona)
BWT	angl. *Burrows–Wheeler Transform* (slo. Burrows–Wheelerjeva preslikava)
CST	angl. *Compressed Suffix Tree* (slo. Kompaktno priponsko drevo)
CSA	angl. *Compressed Suffix Array* (slo. Kompaktno priponsko polje)
CSV	angl. *Comma-separated values*
GCC	angl. *GNU C Compiler* (slo. GNU C Prevajalnik)
SDSL	angl. *Succinct Data Structure Library* (slo. Knjižnica kompaktnih podatkovnih struktur)
ASCII	angl. *American Standard Code for Information Interchange* (slo. Ameriški standardni nabor za izmenjavo informacij)

Zahvala

Tu se zahvalimo sodelujočim pri zaključni nalogi, osebam ali ustanovam, ki so nam pri delu pomagale ali so delo omogočile. Zahvalimo se lahko tudi mentorju in morebitnemu somentorju.

1 UVOD

Pogosti problem pri obdelavi daljših besed je iskanje vzorcev v njih. V procesiranju naravnih jezikov vlogo vzorca pogosto prevzame iskana beseda naravnega jezika in vlogo vhodne besede pa prevzame besedilo, v katerem želimo iskati besedo. Medtem ko v bioinformatiki vlogo vzorca prevzame specifični gen ali druga DNK sekvenca, pri tem pa je vhodna beseda genomu.

Ko v besedi T dolžine n iščemo zgolj en vzorec P dolžine m, se za iskanje lahko uporabi Knuth–Morris–Pratt (KMP) algoritem s časovno zahtevnostjo $O(n + m)$. V primeru, da se v besedi išče več vzorcev, je smiselno nad besedo zgraditi indeks, recimo priponsko drevo, ki je lahko zgrajeno v času $O(n)$, in nato iskati vzorce. Časovna zahtevnost iskanja vzorca v priponskem drevesu je sorazmerna dolžini vzorca, $O(m)$. Ko je vzorec prisoten v besedi, se vsaj ena pripona besede začne z iskanim vzorcem. Torej se vzorec zagotovo nahaja na začetku sprehoda iz korena proti listom priponskega drevesa, zgrajenega nad besedo. Peter Weiner je kot prvi predstavil priponska drevesa leta 1973 [**?**] in jih uporabil v algoritmu za iskanje vzorcev v besedi. Časovna zahtevnost podanega algoritma za iskanje vzorcev v besedi je $O(m)$. Velikost priponskega drevesa je sorazmerna z dolžino vhodne besede, torej pri velikih besedah preraste velikost delovnega pomnilnika, kar močno vpliva na hitrost iskanja. Rešitev te težave je kompaktna predstavitev priponskega drevesa [**?**].

Namen magistrske naloge je preučevanje vpliva kompaktne predstavitve na izgradnjo priponskih dreves in na operacije nad njimi. V nalogi bodo predstavljene časovne zahtevnosti osnovnih operacij in poizvedb ter izgradnje priponskih dreves, priponskih polj in kompaktne predstavitve priponskih dreves. Izdelana bo tudi empirična primerjava različnih implementacij priponskih dreves.

1.1 STRUKTURA

Magistrska naloga je razdeljena na pet delov. V drugem poglavju bodo predstavljene notacije uporabljen v magistrski nalogi. Predstavljen bodo tudi osnovne podatkovne strukture in operacije nad njimi, ki bodo uporabljen za implementacijo kompaktne predstavitve priponskega drevesa.

V tretjem poglavju naloge bo podrobno predstavljena podatkovna struktura priponsko drevo (angl. *Suffix Tree* oziroma ST). Poleg predstavitve strukture bo v poglavju

prikazana tudi metoda, ki sprotno (angl. *on-line*) zgradi priponsko drevo v času $O(n)$ ter implementacija poizvedb nad vhodno besedo s pomočjo priponskega drevesa. Zatem sledi v četrtem poglavju predstavitev alternativnega indeksa besedila, priponsko polje (angl. *Suffix Array* oziroma SA). Predstavljena bo tudi metoda izgradnje priponskega polja v $O(n)$ času ter implementacija poizvedb s priponskim poljem.

V petem poglavju bo predstavljena podatkovna struktura kompaktno priponsko drevo (angl. *Compressed Suffix Tree* oziroma CST), ki omogoča iste operacije kot priponsko drevo, pri tem pa potrebuje manj prostora. V tem poglavju bodo tudi predstavljen algoritem za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa, ki skozi celotno izgradnjo ohranja kompaktnost podatkovne strukture. Zatem pa bodo predstavljene implementacije poizvedb nad vhodno besedo s pomočjo kompaktne predstavitve priponskega drevesa.

V šestem poglavju bodo izdelana primerjava med različnimi indeksi. Predstavljen bo kratki povzetek teoretičnih časovnih zahtevnosti različnih operacij, ki so bile predhodno predstavljen, ter prostorska zahtevnost predstavljenih podatkovnih struktur. Pri tem bo izdelana tudi empirična primerjava implementaciji priponskih dreves, ki bo merila prostorsko podatkovnih struktur in časovno zahtevnost izgradnje ter poizvedb nad njimi.

2 OZNAKE, DEFINICIJE IN OSNOVNE OPERACIJE

V tem poglavju bodo predstavljene osnovne oznake in definicije, ki bodo uporabljene skozi magistrsko nalogo. Za tem pa bodo predstavljene osnovne podatkovne strukture in predstavitve podatkovnih struktur, ki so potreben za implementacijo kompaktne predstavitve priponskih dreves.

2.1 OZNAKE IN OSNOVNE DEFINICIJE

Skozi magistrsko nalogo T predstavlja vhodno besedo dolžine n znakov, iz katere bomo zgradili priponsko drevo ali kompaktno priponsko drevo. Na podoben način P predstavlja iskani vzorec dolžine m znakov v T. Vhodna beseda T in vzorec P sta sestavljena iz znakov poljubne abecede Σ.

Niz znakov iz abecede Σ, ki je del besede in se začne na i-tem in se konča na j-tem znaku besede, imenujemo podniz in ga označimo kot $T[i, j]$. Poljubni nizi oziroma podnizi so označeni z grškimi črkami α, β in γ ter pri tem je dopisano, ali gre za podniz ali niz. Formalno je podniz definiran na sledeč način:

Definicija 2.1. Niz $\alpha \in \Sigma^*$ je podniz besede T, ko obstaja tak $1 \leq i \leq n$, za katerega velja, da je $\alpha = T[i, i + |\alpha|]$.

Dva poljubna niza se lahko združita v novi daljši niz s stikom, ki je definiran na sledeči način:

Definicija 2.2. Stik nizov α in β je niz $\gamma = \alpha \cdot \beta = \alpha\beta$, pri čemer je $\alpha = \gamma[1, |\alpha|]$ in $\beta = \gamma[|\alpha| + 1, |\alpha| + |\beta|]$.

Za razliko od nizov in podnizov so znaki iz abecede Σ označeni s črkama x ali t. Oznaka $T[i]$ pa predstavlja znak na i-tem mestu vhodne besede.

Ker bo nad besedo T izgrajeno priponsko drevo ali kompaktno priponsko drevo, ki je uporabljeno za hitrejše iskanje vzorcev v besedi, so skozi nalogo vozlišča označena s črkami s, v, w in u. Listi priponskega drevesa pa bodo označeni s črko l, ko se govori na splošno o listih, sicer pa bodo označeni z l_i, pri čemer i označuje zaporedno število lista od leve proti desni.

Skozi nalogo bodo $\log_2 n$ označeni kot $\log n$. Če zapisan logaritem ni dvojiški logaritem, bo osnova le tega označena.

2.2 ENIŠKI ZAPIS

Kot je iz samega imena zapisa razvidno, bodo števila predstavljena v eniškem sistemu. Torej bo nenegativno celo število s predstavljeno kot 1^s0, pričemer je abeceda $\Sigma = \{0, 1\}$.s s-timi enicami ter števila so med seboj ločena z ničlo. Na primer, seznam števil $[1, 3, 0, 4, 1]$ bi bil v eniškem zapisu predstavljen kot niz `10111001111010`.

Uniški zapis bo uporabljen pri kompaktni predstavitvi dreves. Razlog za uporabo eniškega zapisa števil namesto dvojiškega zapisa števil je lažja pretvorba operacij nad drevesi na operacije nad bitimi polji, saj imajo na ta način enice in ničle vsaka svoj pomen. Ker je zapis uporabljen za predstavitev stopenj vozlišč, potem predstavlja zaporedje 1^*0 eno vozlišče. Vsaka enica v vozlišču predstavlja otroka vozišča, ničla pa predstavlja, da je bilo vozlišče že obiskano v zapisu.

2.3 MODEL RAČUNANJA

Preden se lahko predstavi način shranjevanja bitnega polja, je potrebno predstaviti uporabljen model računanja. Splošen model računanja bo uporabljen, saj se različne arhitekture mikro procesorjev razlikujejo med seboj in bi bilo potreno narediti analizo za vsako arhitekuro posebaj. Zato bo izbran model računanja Računalnik z naključnim dostopom (angl. *random-access machine* oziroma RAM). Bolj natančno bo uporabljen besedni RAM (angl. *word RAM*).

Osnovna različica RAM modela podpira, da so vse aritmetične operacije nad celimi števili in logične operacijami nad biti izvedene v konstantnem času. Poleg tega RAM omogoča dostopa do pomnilnika v konstantnem času ter linearni čas za dodelitev zaporednega spomina. Vse te operacije so storjene v enakem času tudi v besednem RAM modelu. Edina razlika med modeloma je, da RAM predpostavlja neskončno velik pomnilnik za razliko od besednega RAM, ki pa omeji velikost pomnilnika na U naslovov in posledično je velikost ene pomnilniške besede na $w = \log U$ bitov, kar je velikost enega naslova [**?**, **?**, **?**]. Pri tem se lahko definira tudi »cela števila« (angl. *Integer*). »Cela števila« so definirana kot podmnožica celih števil, ki so lahko predstavljena v dvojiškem zapisu z eno računalniško besedo [**?**].

2.4 BITNO POLJE

Bitno polje (angl. *bit array*) B dolžine $b = |B|$ je polje, v katerem je shranjenih b bitov. Ker je dostop do posameznega bita možen v konstantnem času, se bitno polje lahko uporabi kot osnovna podatkovna struktura za implementacijo kompaktnih predstavitve drugih podatkovnih struktur. Primer take podatkovne strukture, ki uporabja bitno

polje za svojo kompaktno predstavitev, je drevo.

V nadajevanju tega podpoglavja bo predstavljeno, kako učinkovito shraniti bitno polje ter ohraniti dostop do podatkov v konstantem času. Predstavljene bodo še druge operacije nad bitnimi polji, ki se uporabljajo za reševanje problemov, ki so predstavljeni z bitnimi polji. Predstavljene operacije so: $dostop(B, i)$ (angl. *access*), $rang(B, i)$ (angl. *rank*), $izbira(B, i)$ (angl. *select*), $predhodnik(B, i)$, $NaslednikBi$ in dodatne operacije nad območji (angl. *range querry*) bitnega polja. Vse predstavljene operacije želimo opraviti čim bolj učinkovito ter pri tem uporabiti čim manj dodatnega prostora.

Shramba in dostop. Intuitivni način shranjevanja bitnega polja B dolžine b v spominu bi bil tak, da bi se vsaka celica polja shranila v pomnilniku na lastnem naslovu. Na ta način bo operacija $dostop(B, i)$ oziroma dostop do celice $B[i]$ potreboval konstanten čas, da se izvede. Pri tem pa bo bitno polje potrebovalo $O(b)$ bitov oziroma wb bitov. Na ta način imam vsaka celica bitnega polja $w - 1$ odvečnih bitov.

Zato se pojavi vprašanje, ali je mogoče izogniti teh $b(w - 1)$ odvečnih bitov. Če se je mogoče izogniti uporabi teh odvečnih bitov, bi bitno polje B potrebovalo zgolj $b + o(b)$ bitov (dodatnih $o(b)$ bitov je potrebnih, če b ni večkratnik od w). Torej bi se lahko bitno polje B predstavilo kot polje pomnilniških besede $W\left[1, \left\lceil \frac{b}{w} \right\rceil\right]$. Naslednji problem, ki ga je potrebno rešiti, je, kako učinkovito dostopati do i-tega bita v bitnem polju. V konstantnem času lahko dostopamo do celice v polju W, v kateri je shranjen i-ti bit. Le ta je shranjen v celici $W\left[\left\lceil \frac{i}{w} \right\rceil\right] = w_i$. Naivna metoda dostopa do bita v pomnilniški besedi bi bila z bitnim premikom (angl. *bit shift*) v desno, ponovljenim $(w - r)$-krat, pri čemer je $r = ((i - 1) \mod w) + 1$. Za to je potrebno $O(w)$ časa. Ker pa je en premik v desno enakovren celoštevilskemu deljenju števila z dva, se lahko nadomesti premike v desno s celoštevilskemu deljenjem števila, katerga predstavlja v pomniliška beseda w_i, s številom 2^{w-r}. Torej vrednost bita $B[i]$ je izračunana kot:

$$\left\lfloor W\left[\left\lceil \frac{i}{w} \right\rceil\right] / 2^{w-r} \right\rfloor \mod 2.$$

Ker besedni RAM model predpostavi, da so vse aritmetične operacije nad celimi števili, med katere sodi tudi celoštevilsko deljenje, opravljene v konstantnem času, je čas potreben za dostop do i-tega elementa tudi konstanten. Torej se mogoče izogniti uporabi odvečnih bitov iz naivne implementacije, ne da bi se časovna zahtevnost povečala [**?**].

Rang. Prva operacija, ki jo definiramo nad bitnim poljem B velikosti b, je $rang_v(B, i)$. Operacija vrne število bitov z vrednostjo $v \in \{1, 0\}$ v B do vključno položaja i. V nadaljevanju bo operacija $rang(B, i)$ predstavljala $rang_1(B, i)$. To je možno, saj velja sledeča zveza med $rang_0(B, i)$ in $rang_1(B, i)$:

$$rang_1(B, i) = i - rang_0(B, i). \tag{2.1}$$

Operacijo se lahko naivno implenetira s štetjem bitov z vrednostjo 1 v bitenem polju, za kar je potrebno $O(b)$ časa. Štetje bitov z vrednostjo 1 se v angl. imenuje *population count* (v nadaljevanju označeno `popcount`), ki se izračuna v konstantnem času za eno pomnilniško besedo [**?**, **?**]. Zaradi uporabnosti te funkcije je le ta že implementirana v različnih modernih arhitekturah procesorjev in je zato možno uporabiti strojno operacijo. Operacijo rang se lahko pospeši na konstantni čas, pri tem pa se potrebuje dodatne podatkovne strukture, ki zasedejo $o(b)$ bitov. Pri tem ni potrebno zgraditi dodatnih podatkovnih strukur za obe različici ranga, saj relacija iz enakosti (**??**) omogoča izgradnjo podatkovne strukture zgolj za operacijo $rang_1$.

Pomožna struktura shranjuje range različnih elementov bitnega polja B v polju R. Naivni pristop bi shranil v polju R range vseh elementov B-ja. Problem tega pristopa je prevelika prostorska zahtevnost, saj je zaželjeno, da je R čim manjši in pomožnosti ni večji od $o(b)$ bitov. Predlagana rešitev potrebuje $b \log r_1 = O(bw)$ dodatnih bitov, pričemer r_1 predstavlja število bitov z vrednostjo 1 v bitnem polju B.

Rešitev tega problema je vzorčenje rangov, tako da so v polju R shranjeni zgolj rangi nekaterih elementov B-ja. Polje R razdeli B na $s = kw$ delov, pri čemer je k poljubno število. Element $R[i] = rang_1(B, is)$, pri čemer $0 \leq i \leq \lfloor \frac{b}{s} \rfloor$. Na ta način je operacija rang implementiran kot

$$rang_1(B, i) = R\left[\left\lfloor \frac{i}{s} \right\rfloor\right] + \texttt{popcount}\left(B\left[\left\lfloor \frac{i}{s} \right\rfloor s, i\right]\right).$$

Polje R ima velikost $\lfloor \frac{b}{k} \rfloor$ bitov, saj shranjuje $\lfloor \frac{b}{s} \rfloor$ števil velikosti w bitov. Pri tem je potrebno funkcijo `popcount` pognati največ k-krat, kar naredi čas operacije rang $O(k)$ [**?**]. Na Sliki **??** je prikazan primer polja R za podano bitno polje B.

B	1011	1100	1101	1000	0000	1001	0110	0101	1011
R	1				9				16
R'	0	3	5	8	0	1	2	4	0

Slika 1: Primer dodatne podatkovne strukture za operacijo $rank_1$ v konstantnem času. Pri tem je bitno polje razdeljeno na posamične pomnilniške besede dolžine $w = 4$. Pri tem se je izbralo, da je število $k = 4$.

Podobno kot polje R se definira tudi polje R'. Polje R' hrani na i-tem mestu število bitov z vrednostjo 1 po vedru $R[\lfloor \frac{i}{k} \rfloor]$ ali $R'[i] = rang_1(B, iw) - R[\lfloor \frac{i}{k} \rfloor]$. Na ta način se zniža število klicev funkcije `popcount` na 1 klic. Ker so v R' sharnjena zgolj števila med 0 in s (vsako vedro v R ima k elementov v R'), se lahko R' shrani v $\lfloor \frac{b}{w} \rfloor \log s$

bitov, kar je $o(b)$ bitov. Tako je operacija rang implementirana z uporabo polji R in R'. In sicer je implementirana na sledeči način:

$$rang_1(B,i) = R\left[\left\lfloor \frac{i}{kw} \right\rfloor\right] + R'\left[\left\lfloor \frac{i}{w} \right\rfloor\right] + \texttt{popcount}\left(B\left[\left\lfloor \frac{i}{w} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{i}{w} \right\rfloor + (i \mod w)\right]\right).$$

Ta implementacija potrebuje konstanten čas za izračunati $rang(B,i)$. Dostop do polji R in R' je storjen v konstantnem času, kot tudi izračun funkcije `popcount`, ki je klicana samo enkrat [**?**]. Na Sliki **??** je prikazano tudi polje R'.

Izbira: Druga osnovna operacija nad bitnim poljem B je $izbira_v(B,i)$, ki vrne položaj i-te ponovitve vrednosti $v \in \{1,0\}$ v B. Podobno kot operacija rang tudi operacija izbira potrebuje pomožno podatkovno strukturo za izvedbo v konstantnem času.

Operacijo izbira si lahko predstavimo kot inverzno operacijo operacije rang, saj velja zveza $j = rang_v(B, izbira_v(B,i))$. Pri tem pa ne obstaja povezava med operacijo $izbira_1(B,i)$ in $izbira_0(B,i)$. To pomeni, da rešitev s pomožno podatkovno strukturo za $izbira_1(B,i)$ ne more biti uporabljena pri iskanju rešitve za $izbira_0(B,i)$. V nadaljevanju bo opisan časovno učinkovit postopek iskanja $izbira_1(B,i)$, saj se lahko $izbira_0(B,i)$ implementira na podoben način [**?**].

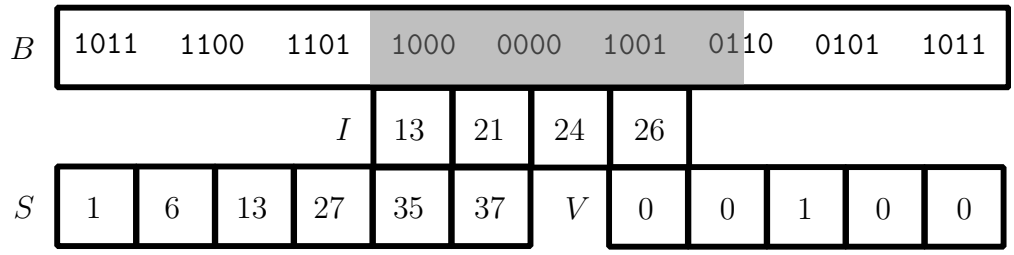
Ko operacija izbira ni ključna pri reševanju problemov, se lahko uporabi binarno iskanje v poljih R in R', ki sta del podatkovne strukture za rank, za kar se potrebuje $O(\log b)$ časa. Z binarnim iskanjem se najde območje dolžine k, pri čemer je potrebno še dodatnih k preiskav, da se najde natančno vrednost. Čas operacije se lahko zniža na $O(\log\log b)$ z uporabo pomožnih podatkovnih struktur. Podobno kot pri operacij rang se bitno polje razdeli na $\lceil \frac{r_1}{s} \rceil$ veder, pri čemer pa je r_1 število bitov z vrednostjo 1 v bitnem polju in s je število takih bitov v vsakem vedru. Polje $S[0, \lceil \frac{r_1}{s} \rceil]$ hrani vrednosti $S[i] = izbira_1(B, i \cdot s + 1)$, pri čemer $S[\lceil \frac{r_1}{s} \rceil] = b + 1$. Polje S potrebuje $w(\lceil \frac{r_1}{s} \rceil + 1)$ bitov. Ko je $s = w^2$, potem podatkovna struktura potrebuje $w(\lceil \frac{r_1}{w^2} \rceil + 1) = o(r_1) = o(b)$ bitov [**?**].

Vedra niso enako velika, zato se lahko razdelijo na velika vedra in mala vedra, pri čemer je vedro veliko natanko tedaj, ko je večje kot $s \log^2 b$ bitov, sicer je malo vedro. Pri tem je potrebno shraniti velikost vedra v bitno polje V, kjer $V[i] = 1$, če i-to vedro je veliko, sicer je $V[i] = 0$. Za velika vedra se izračuna vseh s vrednosti izbire, pri čemer so shranjeni v polju I položaji bitov z vrednostjo ena znotraj vedra. Za mala vedra pa se sproti naračuna izbira znotraj vedra. Operacija izbira se izračuna kot

$$izbira_1(B,j) = \begin{cases} I\left[(rang_1(V, \lceil \frac{j}{s} \rceil) - 1)s + x\right], & V\left[\lceil \frac{j}{s} \rceil\right] = 1 \\ S\left[\lceil \frac{j}{s} - 1 \rceil\right] + k, & V\left[\lceil \frac{j}{s} \rceil\right] = 0 \\ b + 1, & r_1 < j \end{cases},$$

kjer je $x = ((j-1) \mod s) + 1$ in k je relativni položaj x-tega bita z vrednostjo 1 na intervalu $B\left[S\left[\lceil \frac{j}{s} - 1 \rceil\right], S\left[\lceil \frac{j}{s} \rceil - 1\right]\right]$. Vrednost k je izračunana s pomočjo bisekcije

na podatovni strukturi za rank, ter šteje bitov na zadnjem intervalu [**?**]. Podatkova struktura za izbiro je prikazana na Sliki **??**.



Slika 2: Primer dodatne podatkovne strukture za operacijo $izbira_1$ v $O(\log\log n)$ času. Pri tem je bitno polje razdeljeno na posamične pomnilniške besede dolžine $w = 4$. Zaradi majhnosti primera velika vedra, ki vsebujejo vsaj 10 bitov namesto $s\log^2 b = 4\log^2 36$ bito, kar se zaokroži na 100 bito. Velika vedra so označena v bitem polju s sivo barvo.

Polje I mora shraniti $s\lceil\log b\rceil$ bitov za vsako veliko vedro, katerih je $\frac{b}{s(\log b)^2}$, torej potrebuje $O\left(\left\lceil\frac{b}{\log b}\right\rceil\right) = o(b)$ bitov. Bitno polje V pa potrebuje $\lceil\frac{m}{s}\rceil$ bitov za shraniti velikosti blokov ter dodatne bite za izvajanje operacije rang v konstantnem času, torej tudi V potrebuje $o(b)$ bitov [**?**].

Operacija se lahko izvede v konstantnem času. To je doseženo z dodatnim deljenjem majhnih veder, na podoben način, kot je bilo to storjeno nad celotnim bitnim poljem B. Vsako majhno vedro se dodatno razdeli na $s' = (\log\log b)^2$ mini veder, pri čemer mini vedro je veliko, ko je večje od $s'(\log\log b)^2$. Vsako majhno mini vedro potrebuje $s'\log(s(\log b)^2) = O((\log\log b)^3) = o(b)$ bitov ter vsako veliko mini vedro potrebuje isto prostora, pri čemer pa jih je največ $O\left(\frac{b}{(\log\log b)^4}\right)$, torej vsa velika mini vedra skupaj potrebujejo $O\left(\frac{b}{\log\log b}\right) = o(b)$ bitov [**?**].

Vse dodatne podatkovne, ki so strukture potrebne za izvajanje operacij rang in izbira v konstantnem času, so lahko izgrajene v dveh sprehodih po bitnem polj B, pri čemer vsak sprehod traja $O(b)$ časa. Pri tem je ves potrebni spomin že predhodno dodeljen.

Predhodnik/Naslednik. S pomočjo operaciji rang in izbira lahko implementiramo dodatne operacije, ki omogočajo lažje iskanje po bitnem polju B. Dve taki operaciji, ki bosta uporabljeni za implementacijo operacij nad drevesi, sta predhodnik in naslednik.

Operacija predhodnik elementa y najde največji indeks $i < y$, za katerega velja, da je $B[i] = v$. Operacija je implementirana kot

$$predhodnik_v(B, y) = izbira_v(B, rang_v(B, y)),$$

pri čemer je $v \in \{0, 1\}$. Na podoben način se definirana tudi operacijo naslednik. Operacija naslednik elementa y najde najmanjši indeks $i > y$, za katerega velja, da je $B[i] = v$. Pri tem je operacija implementirana kot

$$naslednik_v(B, y) = izbira_v(B, rang_v(B, y - 1) + 1),$$

kjer je $v \in \{1, 0\}$ [**?**].

Operaciji se uporablja za sprehod po bitnem polju B. Z njima se lahko najde indekse vseh bitov z vrednostjo v v $O(r_v)$ časa (r_v je število bitov z vrednostjo v v bitnem polj B).

Višek. Dosedaj so vse predstavljene operacije imele kot vhod zgolj en element v bitnem polju, ampak nekateri problemi zahtevajo rešitev za podani interval. Pogosta vprašanja na intervalih sta največje ali najmanjše število v intervalu. Na bitnih poljih pa se ta problem pretvori na razliko med številom bitov z vrednostjo 0 ter številom bitov z vrednostjo 1 do i-tega bita. To razmerje imenujemo *višek*(B, i) in je je izračunan kot:

$$višek(B, i) = rang_0(B, i) - rang_1(B, i) = 2\, rang_0(B, i) - i.$$

Na podoben način se lahko definira tudi relativni višek na intervalu med indeksom i in j, in sicer kot:

$$višek(B, i, j) = višek(B, j) - višek(B, i - 1).$$

Višek in posledično tudi relativni višek je izračunan zgolj z uporabo ranga, zato jih je možno izračunati v konstantnem času.

Operacije na območjih. Poznamo različne operacije na ombočijh, ampak za potrebe magistrske naloge bomo definirali štiri operacije. Prva operacija je $rmq(B, i, j)$ (angl. *range minimum query*), ki vrne indeks k, za katerega velja, da je $i \leq k \leq j$ in *višek*(B, k) je najnižji višek na intervalu med i in j ter se najnižji višek prvič pojavi na indeksu k. Podobno je definirana tudi operacija $rMq(B, i, j)$ (angl. *range maximum query*), ki pa vrne indeks k, pri čemer je $i \leq k \leq j$ in *višek*(B, k) je najvišji višek na intervalu med i in j ter se najvišji višek prvič pojavi na indeksu k. Operacija *minIzbira*(B, i, j, t) vrne položaj t-tega pojava najmanjšega viška na intervalu med i in j. Operacija *minŠtetje*(B, i, j) pa vrne število pojav najnižjega viška na intervalu med i in j. S pomočjo teh operaciji bodo v nadaljevanju implementirane operacije nad drevesi v enem od kompaktnih prikazov [**?**].

Vse predstavljene operacije na intervalih so lahko implementirane s časovno zahtevnostjo $O(\log b)$. Pri tem pa je potrebno zgraditi dodatno podatkovno strukturo rmM-drevo (angl. *range minumum maximum tree*), ki je lahko shranjeno z $O(b/\log b) = o(b)$ dodatnimi biti. Drevo je levo poravnano in se lahko zapiše kot polje vozlišč (podobno

kot podatkovna struktura kopica). Torej so otroci i-tega vozlišča na $2i$-tem in $(2i+1)$-vem mestu v polju ter starš i-tega vozlišča se nahaja na $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$-mestu. Vsako vozlišče drevesa, predstavlja interval v bitnem polju. Prvi otrok vozlišča prokriva prvo polovico intervala, drugi otrok pa pokriva drugo polovico intervala. Torej *koren* rmM-drevesa pokriva celotno bito polje B. Ker želimo časovno in prostorsko učinkovito podatkovno strukturo lahko B razdelimo na na $\frac{b}{a}$ veder velikosti a elementov. POsledično lahko vsak interval dolžine a predstavlja list rmM-drevesa. Za zagotoviti prostorsko yahtevnost $o(b)$ bitov in časovno zahtevnost $O(\log b)$ izberemo vrednost $a = \log b$. Vsako vozlišče v drevesu hrani štiri podatke: e relativni višek pokritega intervala, m najmanjši relativni višek v območju, M največji relativni višek na območju in n število najmanjših viškov na pokritem intervalu. Pri tem vozlišče pokriva celotno območje, ki ga pokrivata oba otroka, in listi pokrivajo zgolj eno vedro velikosti a elementov. Torej koren drevesa pokriva celotno bitno polje B. Vse predstavljene operacije so implementirane s pomočjo sprehoda po rmM-drevesu [**?**].

Vse štiri operacije temeljijo na sprehodu po rmM-drevesu, torej bo sprehod predstavljen zgolj za operacijo $rmq(B, i, j)$ na intervalu bitnega polja $B[i, j]$. Operacija $rmq(B, i, j)$ je izvedena v dveh korakih. Prvi korak je iskanje vrednosti najmanjšega viška na intervalu $B[i, j]$. Ker se lahko i nahaja sredi vedra bitov, se naračuna relativni višek d ter najnižji višek m na intervalu med i in začetkom vedra $\lceil i/a \rceil$ brez uporabe rmM-drevesa. Če je j med i in začetkom vedra $\lceil i/a \rceil$, se izračuna zgolj do j-tega bita in m predstavlja tudi najnižji višek na intervalu med i in j, za kar potrebujemo $O(a)$ časa. Sicer pa se nadaljuje s sprehodom po rmM-drevesu. Začetno vozlišče sprehoda je list, ki predstavlja vedro $\lceil i/a \rceil$, in ga označimo z v. Izračunamo tudi zaporedno število lista, ki vsebuje vedro s koncem intervala j, in ga označimo kot k. Zdaj lahko začnemo s sprehodom po drevesu navzgor. Če je v desni otrok (v je sodo število), se premaknemo v starša, torej $v \leftarrow (v-1)/2$. Sicer pa je potrebno preveriti, ali je desni brat tudi v intervalu, kar se lahko preveri, tako da preverimo, če trditev $\lfloor l/2^{\lfloor \log l \rfloor - \lfloor \log u \rfloor} \rfloor \neq u$ drži, potem je vozlišče u tudi znotraj intervala $B[i, j]$. Če je desni brat v intervalu preverimo, ali smo našli nov najmanjši višek na intervalu $(m > d + rmM[v+1].m)$. Če smo ga našli, potem $m \leftarrow d + rmM[v+1].m$. Nato pa se še popravi višek intervala na $d \leftarrow d + rmM[v+1].e$. Zatem pa se premaknemo v starša, torej $v \leftarrow v/2$ [**?**].

Ko desni brat ni v intervalu, torej ne velja prejšnji pogoj, pa nadaljujemo s sprehodom navzdol iz našega desnega brata $v \leftarrow (v+1)/2$. Tokrat pa preverjamo, ali je levi otrok vsebovan v intervalu ter če vozlišče v omogoča zmanjševanje najmanjšega viška. Če vozlišče v ne omogoča zmanjševanja, lahko sprehod končamo in vemo, da najmanjši višek je m, sicer pa nadaljujemo s sprehodom. Če levi otrok ni vsebovan, nadaljujemo s sprehodom v levem otroku, sicer pa preverimo, če velja $m > d + rmM[2v].m$ ter v primeru, da velja popravimo vrednost m. Nato popravimo vrednost $d \leftarrow d + rmM[2v].e$ ter nadaljujemo z iskanjem v desnem otroku $v \leftarrow 2v+1$. Sprehod nadaljujemo, dokler

ne dosežemo listov oziroma $v > \lceil n/a \rceil$. Če list v ne omogoča zmanjševanja najmanjše vrednosti viška na intervalu oziroma $m \leq d + rmM[v].m$, potem je m najmanjši višek na intervalu. Sicer pa pregledamo, na podoben način kot pred začetkom iskanja, še višek do j-tega bita in najmanjši višek na tem intervalu označimo m'. Če $m > d + m'$, potem je najmanjši višek na intervalu $B[i, j]$ enak $d + m'$, sicer pa je m [**?**].

Zadnji korak pa je iskanje točnega indeksa bita z relativnim viškom m. To je storjeno z operacijo $iskanjeNaprej(B, i, m)$, ki najde prvi $j > i$, za katerega velja $višek(B, j) = višek(B, i) + m$. Operacija je implementirana na isti način, samo tokrat se ne preverja vrednost polja $rmM[v].m$, ampak se išče prvo pojavitev viška, ki je enaka m. Ta isti postopek se lahko uporabi tudi za preostale tri operacije, pri čemer pa operacija $rMq(B, i, j)$ uporablja namesto polja $rmM[v].m$ polje $rmM[v].M$ in relacija manjše postane večje in obratno. Operaciji $minIzbira(B, i, j, t)$ in $minŠtetje(B, i, j)$ pa uporabljata polje $rmM[v].n$ [**?**].

Tako implementirane operacije potrebujejo $O(\log b)$ časa, da se izvršijo. Začetno in končno štetje bitov potrebuje $O(a) = O(1)$ čas. Ker je rmM-drevo dvojiško in polno (vsak globina drevesa, razen zadnje, ima maksimalno število otrok) drevo, je njegova višina enaka $O(\log \lceil b/a \rceil) = O(\log b)$, torej tudi sprehodi, ki gredo od lista proti korenu ali od korena proti listu, potrebujejo $O(\log b)$ časa. Z izdelavo manjših rmM-dreves, ki zavzamejo $\beta = \log^3 b$ elementov, in dodatne podatkovne strukture imenovane pospeševalnik (angl. *accelerator*), je možno implementirati te operacije v času $O(\log \log b)$ [**?**].

2.5 KOMPAKTNA PREDSTAVITEV DREVES

Z uporabo bitnih polj je mogoče predstaviti mnogo podatkovnih struktur. Ker pa se magistrska naloga osredotočila na priponska drevesa, bo zato predstavljena uporaba bitnih polj za kompaktno predstavitev topologije dreves. Običajno je podatkovna struktura drevo sestavljeno iz vozlišč ter referenc na njih. V vsakem vozlišču je shranjena vrednost, ki jo predstavlja vozlišče, ter referenca na svoje otroke. Drevo z n-timi vozlišči potrebuje $O(n \log n)$ bitov za shraniti topologijo drevesa (v praksi potrebuje $O(nw)$ bitov). Kompaktna predstavitev topologije dreves zniža prostorsko zahtevnost na $2n + o(n)$ bitov. Za vsako vozlišče je potrebno predstaviti referenco na vozlišče ter predstaviti, da je vozlišče bilo že obiskano, zato vskao vozlišče potrebuje 2 bita oziroma za predstavitev celotnega drevesa je potrebnih $2n$ bitov.

Pri tem obstajajo tri vrste kompaktne predstavitve dreves: Uravnoteženi oklepaji (angl. *Balanced Parentheses* oziroma BP), Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč po plasteh (angl. *Level Order Unary Degree Sequence* oziroma LOUDS) in Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč v globino (angl. *Depth-First Unary Degree Sequence*

oziroma DFUDS). Naslednja definicija prikaže operacije, ki so potrebne za pravilno delovanje dreves.

Definicija 2.3. Podatkovne struktura drevo mora podpirati naslednje operacije:

1. *koren*() vrne koren drevesa,
2. *jeList*(v) vrne *true*, če je vozlišče list, sicer pa vrne *false*,
3. *stOtrok*(v) vrne število otrok vozlišča v,
4. *otrok*(v, i) vrne vozlišče w, ki je i-ti otrok vozlišča v,
5. *prviOtrok*(v) vrne vozlišče w, ki je prvi otrok vozlišča v,
6. *nBrat*(v) vrne vozlišče w, ki je desni (naslednji) brat od vozlišča v,
7. *pBrat*(v) vrne vozlišče w, ki je levi (predhodni) brat od vozlišča v,
8. *starš*(v) vrne vozlišče w, ki je starš od vozlišča v,
9. *globina*(v) vrne število vozlišč na poti iz korena do vozlišča v,
10. *lca*(v,) vrne najnižjega skupnega prednika od v in w.

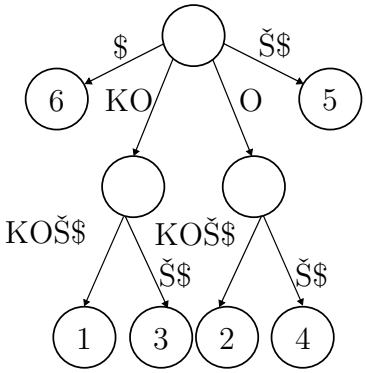
Iz definicije se lahko opazid, da večina operacij je lahko implementiranih zgolj s operacijo *Otrok*(v, i) ter operacio *starš*(v), s katerimi le lahko sprehajamo po drevesu. S pomočjo operacij iz definicije je možno implementirati ostale operacije na drevesih, ki so bolj specifične za posamično implementacijo drevesa, na primer `vstavi`, `izbriši`, `najmanjši_element` (v kopici) in ostale.

2.5.1 Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč po plasteh

Prvi način zapisa topologije drevesa je zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč po plasteh (LOUDS). Ideja zapisa temelji na sprehodu po palasteh po drevesu in zapisu stopenj vozlišč ob njihovem obisku. Pri tem pa se pojavi problem, kako implementirati sprehod polju stopen in posledično po drevesu. Potrebuje se dodatni strukturi, in sicer za vsoto stopenj vozlišč do trenutnega vozlišča ter strukturo za štetje vozlišč. Obe strukturi lahko implementiramo kot polji števil. Z uporabo eniškega zapisa, pa se te dve strukturi prevedeta na operaciji *rang* in *izbira* nad bitnim poljem z eniškim zapisom.

Topologijo drevesa se predstavi kot bitno polje B dolžine $2n + 1$, pri čemer je n število vozlišč v drevesu. Zapis drevesa se začne z nizom 10, temu pa sledijo stopnje vsakega vozlišča v eniškem zapisu. Kot je razvidno iz imena predstavitve, so vozlišča obiskana po nivojih: vozlišča z isto globino so zaporedno predstavljena [**?**].

Primer takega zapisa je predstavljen na Sliki **??**. Na sliki so vozlišča v zaporedju ločena s sivimi črtami. Koren drevesa je predstavljen z $B[3,7] = 11110$. Niz $B[3,7]$ vsebuje 4 bite z vrednostjo 1, ker ima koren 4 otroke.



10|11110|0|110|110|0|0|0|0|0

Slika 3: Primer predstavitve drevesa z metodo LOUDS za priponsko drevo besede »KOKOŠ$«.

Tabela 1: Implementacija operacij drevesa v LOUDS.

Operacija	**Implementacija v LOUDS**
$koren()$	3
$jeList(v)$	$B[v] == 0$
$stOtrok(v)$	$naslednik_0(B, v) - v$
$otrok(v, i)$	$izbira_0(B, rang_1(B, v - 1 + 1)) + 1$
$prviOtrok(v)$	$otrok(v, 1)$
$nBrat(v)$	$naslednik_0(B, v) + 1$
$pBrat(v)$	$predhodnik_0(B, v - 2) + 1$
$starš(v)$	$predhodnik_v(B, izbira_1(B, rang_0(B, v - 1))) + 1$
$globina(v)$	/
$lca(v, w)$	Algoritem **??**

Med izgradnjo kompaktne predstavitve se vozlišča indeksira s števili i med 1 in n. Število i predstavlja zaporedno število obiskanega vozlišča, torej koren ima vrednost 1, prvi otrok korena ima vrednost 2 in tako dalje. Indeks se uporabi za shranjevanje vrednosti, ki so po navadi shranjene znotraj vozlišča. V Tabeli **??** so predstavljene implementacije operacij z uporabo predstavitve drevesa LOUDS. Indek vozlišča se izračuna kot $izbira_1(B, v) + 1$ [**?**].

Vse operacije razen operacije *globina* in *lca* so izvršene v konstantnem času. Pri tem je treba izgraditi podatkovno strukturo zgolj za $izbira_0$, saj operacija $izbira_1$ ni

potrebna za pravilno delovanje operacij drevesa. Operacija *globina* ni podprta, saj LOUDS predstavitev ne omogoča učinkovitega iskanja. Operacija globina je lahko implementirana s štetjem, koliko karat se uporabi operacija $Starsv$ za doseči *koren* drevesa. Pri tem pa velja, da je $globina(u) \geq globina(v)$, ko je $u > v$. S pomočjo tega dejstva se lahko implementira operacijo lca, kot je prikazano v Algoritmu **??** [**?**].

Algoritem 1: Operacija $lca(v, w)$ (LOUDS)

Vhod: Bitno polje B, vozlišča v in w
Izhod: Vozlišče u

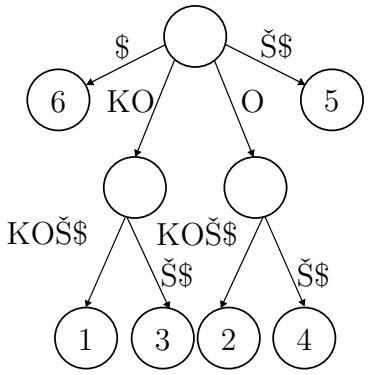
```
1 while v ≠ w do
2     če v > w potem
3         v ← starš(v)
4     sicer
5         w ← starš(w)
6 vrni v
```

2.5.2 Zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč v globino

Naslednja predstavitev topologije drevesa je zaporedje eniških zapisov stopenj vozlišč v globino (DFUDS). Ideja predstavitve temeli na preme sprehodu (angl. *Preorder traversal*) po drevesu. In prvič ko obiščemo vozlišče zapišemo njegovo stopnjo. Pri tem lahko opazimo, da so poddrevesa orokov vozlišča v zapisana v zaporednih celicah polja. Posledično se poddrevo naslednja brat od v zančne po skrajno desnem listu v poddrevesu s korenov v v. Torej se nadlednje poddrevo ne začne, dokler se ne »zapre« trenutnega poddrevesa.

Drevo je predstavljeno z bitnim poljem $B[1, 2n+2]$. Zapis temelji na uporabi zapisa stopenj vozlišč, zato je potrebno dodati na začetek bitnega polja $B[1, 3] = 110$. Zatem pa so zapisane stopnje vozlišč z eniškim zapisom. Zapis je zgrajen z uporab pregleda v globino, kot to ponazarja ime predstavitve. Vsa vozlišča imajo indeks, ki je zaporedno število obiskanega vozlišča. Predstavitev omogoča preprostejše implementacije operacij ter posledično manjše dodatne podatkovne strukture. Vseeno pa omogoča hitrejše implementacije nekaterih operacij v primerjavi z uporabo predstavitve LOUDS. Primer zapisa topologije drevesa z DFUDS je prikazan na Sliki **??**. Vozlišča so v zaporedju ločena s sivimi črtami.

V Tabeli **??** so predstavljene implementacije operaciji nad drevesom, implementirane z DFUDS. Indeks $izbira_0(B, v) + 1$ je uporabljen za shranjevanje dodatnih informacij o vozlišču, saj je vozlišče v predstavljeno s položajem vozlišča v bitnem polju B. Operacijo $zapri(B, i)$, ki zapre trenutno poddrevo, je definirana z uporabo operacije



110|11110|0|110|0|0|110|0|0|0

Slika 4: Primer predstavitve drevesa z metodo DFUDS za priponsko drevo besede »KOKOŠ$«.

Tabela 2: Implementacija operacij drevesa z DFUDS

Operacija	**Implementacija v DFUDS**
$koren()$	4
$jeList(v)$	$B[v] == 0$
$stOtrok(v)$	$naslednik_0(B, v) - v$
$otrok(v, i)$	$zapri(B, naslednik_0(B, v) - i) + 1$
$prviOtrok(v)$	$naslednik_0(B, v) + 1$
$nBrat(v)$	$iskanjeNaprej(B, v - 1, -1) + 1$
$pBrat(v)$	$zapri(B, odpri(B, v - 1) + 1) + 1$
$starš(v)$	$predhodnik_0(B, izbira_1(B, v - 1)) + 1$
$globina(v)$	/
$lca(v, w)$	$starš(rmq(B, naslednik_0(B, w), v - 1) + 1); v < w$

višek tako, da vrne prvi $j > i$, pri čemer je $višek(B, j) = višek(B, i) - 1$. Podobno se lahko definira tudi operacijo $odpri(B, i)$, ki vrne koren trenutnega poddrevesa, z uporabo operacije *višek* tako, da vrne zadnji $j < i$, pri čemer $višek(B, j) = višek(B, i) + 1$. V tabeli je vidno, da operacija $globina(v)$ ni podprta, saj ni mogoče implementirati te operacije brez sprehoda od vozlišča v do korena ter pri tem šteti potrebne korake. Operacija $lca(v, u)$ je lahko implementirana brez sprehoda po drevesu za razliko od implementacije z LOUDS.

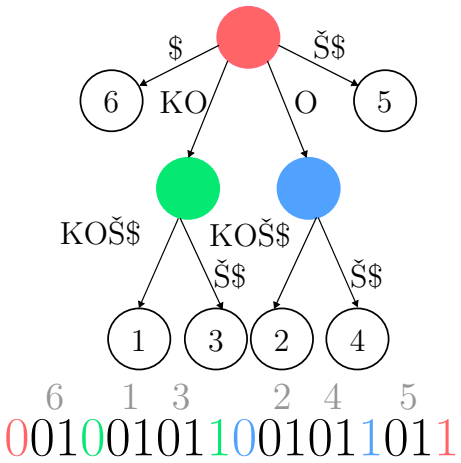
Vse operacije, ki temeljijo na operaciji *rang* in *izbira*, se izvršijo v $O(1)$ času. Operacije, ki temeljijo na rmM-drevesu, pa potrebujejo $O(\log n)$ časa. Pri tem so potrebne dodatne podatkovne strukture za $izbira_1$, $izbira_0$, *rang* ter rmM-drevo, pri čemer vsaka potrebuje $o(n)$ dodatnih bitov. Prostorsko zahtevnost rmM-drevesa je

mogoče zmanjšati, tako da se shranita zgolj polji e in m. Tako se razpolovi prostorsko zahtevnost rmM-drevesa, ki pa še vedno zahteva $o(n)$ dodatnih bitov, brez škode za implementacijo operacij drevesa.

Za lažjo implementacijo dodatnih operacij nad listi je mogoče ustvariti dve dodatni podatkovni struktur za $rang_{00}$ in $izbira_{00}$ v konstantnem času, ki omogočata iskanje in indeksiranje listov v drevesu. Podatkovni strukturi sta implementirani na podoben način kot podatkovni strukturi za $rang_0$ in $izbira_0$, pri tem pa $rang_{00}$ in $izbira_{00}$ temeljijo na številu ponovitev oziroma položaju i-te ponovitve dveh zaporednih bitov z vrednostjo 0.

2.5.3 Uravnoteženi oklepaji

Zadnji način zapisa topologije drevesa je zapis z zaporedjem uravnoteženih oklepajev (BP). Drevo se predstavi kot bitno polje B dolžine $2n$, pri čemer je n število vozlišč v drevesu. Zaporedje se zgradi z uporabo pregleda v globino. Ko je vozlišče prvič obiskano, se na konec do sedaj zapisane sekvence zapiše '('. Uklepaj je v bitnem polju predstavljen s številom 0. Ko se zapiše celotno poddrevo vozlišča, pa se na konec sekvence zapiše ')'. Zaklepaj pa je v bitnem polju zapisan s številom 1. Primer priponskega drevesa, ki je predstavljen z uporabo zaporedja uravnoteženih oklepajev, je prikazan na Sliki **??**. Na sliki so vsa notranja vozlišča obarvana z različnimi barvami za lažje prepoznavanje le teh v zaporedju uravnoteženih oklepajev. Ker so listi oštevilčeni, so ta števila tudi zapisana nad vsakim listom v zaporedju uravnoteženih oklepajev [**?**].



Slika 5: Primer predstavitve drevesa z metodo BP za priponsko drevo besede »KOKOŠ$«.

Torej je vsako vozlišče predstavljeno kot par '(' in ')'. Tako je mogoče definirati sledeče operacije nad oklepaji: *odpri*, *zapri* ter *oklepa*. Operacija $odpri(B, i)$ vrne položaj '(', ki odpre ')' na i-tem mestu v B. Operacija $zapri(B, i)$ pa v tej notaciji

predstavlja ')', ki zapra '(' na i-tem mestu B. Operacija $oklepa(B, i)$ pa vrne položaj j od '(' v bitem polju B, pri čemer velja, da $j < i < zapri(B, j)$. Z uporabo operacije *višek* operacija $OklepaBi$ vrne položaj največjega $j < i$, pri čemer je $višek(B, j-1) = višek(B, i) - 1$ [**?**].

Podobno kot pri predstavitvi drevesa LOUDS, tudi predstavitev BP potrebuje dodatno podatkovno strukturo za operaciji *izbira* in *rang*. Pri tem sta potrebni zgolj podatkovni strukturi za 0, saj operaciji $rang_1$ in $izbira_1$ nista potrebni za pravilno delovanje drevesa v tej predstavitvi. Podatkovni strukturi potrebujeta vsaka $o(n)$ dodatnih bitov in operaciji se izvršita v konstantnem času.

Tabela 3: Implementacija operacij drevesa z BP

Operacija	**Implementacija v BP**
$koren()$	1
$jeList(v)$	$B[v] == 0 \wedge B[v+1] == 1$
$stOtrok(v)$	$minŠtetje(B, v, zapri(B, v) - 2)$
$otrok(v, i)$	$minIzbira(B, v, zapri(B, v) - 2, i) + 1$
$prviOtrok(v)$	$v + 1$
$nBrat(v)$	$zapri(B, v) + 1$
$pBrat(v)$	$odpri(B, v - 1)$
$starš(v)$	$oklepa(B, x)$
$globina(v)$	$2 \cdot rang_0(B, v) - v$
$lca(v, w)$	$oklepa(B, rmq(B, v, w) + 1); v < w$

V Tabeli **??** so prikazane implementacije operacij, ki so potrebne za pravilno delovanje drevesa. Indeks $izbira_0(B, v)$ je uporabljen za pridobiti dodatne informacije o vozlišču, saj vrednost v predstavljata položaja '(' v zaporedju B, ne pa indeksa v tabeli z dodatnimi informacijami o vozlišču.

Zapis topologije drevesa s BP omogoča dodatne operacije. Primer operacije je oštevilčenje in iskanja listov drevesa, kar je storjeno z uporabo posplošitve operacij ranga in izbire na poljubno dolge nize. Ker imajo listi obliko »()« (oziroma 01, ko so zapisani v bitnem polju B), se lahko implementirata operaciji $rang_{01}(B, i)$ in $izbira_{01}(B, i)$. Operaciji potrebujeta konstanten čas, da se izvedeta, saj se lahko izgradi podobno dodatno strukturo, kot za osnovno verzijo ranga in izbire. V BP ni mogoče izbrisati vrednosti M in n iz listov rmM-drevesa, saj se uporablja poizvedbo $rMq(B, i, j)$, ki potrebuje vrednost M, pri implementaciji dodatnih operaciji. Primer take operacije je *najgloljeVozlišče*(v), ki vrne najgloljе vozlišče v poddrevesu s korenom v [**?**].

3 PRIPONSKA DREVESA

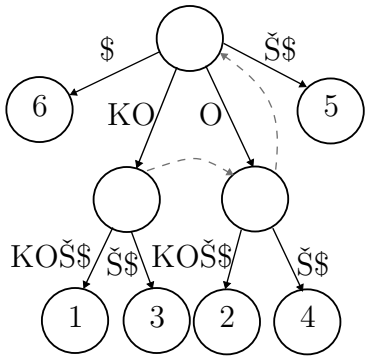
Priponska drevesa so posebna implementacija številskega drevesa, pri čemer vsak list predstavlja posamezno pripono besede. Na ta način priponsko drevo ne predstavlja zgolj vhodne besede T dolžine n, ki je sestavljeno iz znakov abecede Σ in je shranjena v pomnilniku kot polje črk `T[1,n]`, ampak zakodira tudi strukturo besede. Zato se pogosto uporabi za indeksiranje besede in posledično iskanja vzorcev v njej. Vzorec $P[1, m]$ se nahaja v besedi T, če obstaja podniz $T[i, j]$, za katerega velja $P[1, m] = T[i, j]$. Z uporabo indeksa je iskanje prisotnosti vzorca P dolžine m v besedi primerljivo s KMP algoritmom. KMP algoritmom potrebuje $O(n + m)$ časa za preveriti, ali se vzorec nahaja v besedi. Za razliko od KMP algoritma je prednost uporabe priponskega drevesa, da lahko iščemo različne vzorcev v isti besedi T. Za najti več vzorcev v priponskem drevesu je potrebno: $O(n)$ časa za izgradnjo priponskega drevesa ter $O(m)$ časa za vsak iskani vzorec. Pri iskanju več vzorcev v besedi T algoritem KMP potrebuje $O(n + m)$ časa za vsak iskan vzorec [**?**, **?**].

Nad priponskim drevesom lahko definiramo funkcijo $beseda(v)$. Funkcija vrne niz, ki je pridobljen s stikom podnizov na povezavah na poti od korena do vozlišča v. Torej priponsko drevo nad besedo T, ki je niz nad abecedo Σ, definiramo na sledeči način [**?**]:

Definicija 3.1. Priponsko drevo nad nizom T dolžine n je številsko drevo, ki zadošča sledečim zahtevam:

1. drevo ima natanko n listov oštevilčenih s števili med 1 in n,
2. vsako notranje vozlišče, razen korena, ima vsaj dva otroka,
3. vsaka povezava predstavlja neprazni podniz besede T,
4. ne obstajata povezavi, ki se začneta v istem vozlišču in z istim znakom,
5. za vsak list l_i velja, da je $beseda(l_i) = T[i, n]$.

Primer priponskega drevesa besede »KOKOŠ« je prikazan na Sliki **??**. Znak »$«, ki predstavlja konec besedila, omogoča bistveno poenostavitev podatkovne strukture, saj tako ni nobena pripona predpona druge pripone. Posledično je vsaka pripona shranjena v listu priponskega drevesa. V primeru, predstavljenem na Sliki **??**, znak »$« ne bi bil potreben, ker že znak »Š« jasno določi vse pripone besede »KOKOŠ«. Da zagotovimo, da vse so vse pripone shranjene v listih, se besedi na konec pripne znak »$«.



Slika 6: Primer priponskega drevesa nad besedo »KOKOŠ$«.

Ker povezave v priponskih drevesih predstavljajo podnize v besedi T, se lahko nad priponskimi drevesi definira tudi črkovna globina vozliča.

Definicija 3.2. Črkovna globina vozlišča $sd(v) = |\, beseda(v)|$.

Primer razlike med globino vozlišča in črkovno globino vozlišča se lahko vidi na Sliki **??**: vozlišči, do katerih se pride s povezavama »KO« in »O«, imata globino 1. Črkovna globina vozlišča, v katerega kaže povezava »KO«, je 2, medtem ko ima vozlišče, v katerega kaže povezava »O«, črkovno globino 1.

3.1 GRADNJA

V tem podpoglavju bodo predstavljene različne metode izgradnje priponskih dreves. Metode bodo predstavljene v zaporedju od najbolj počasne, ki izgradi priponsko drevo v času $O(n^3)$, do najhitrejše, ki izgradi drevo v času $O(n)$. Obstajata dve metodi izgradnje priponskega drevesa s časovno zahtevnostjo $O(n)$: McCreightov algoritem [**?**] in Ukkonenov algoritem [**?**]. V nadaljevanju bo bolj podrobno opisan Ukkonenov sprotni (angl. *on-line*) algoritem, saj v vsakem koraku podaljša vse pripone v drevesu za en znak. McCreightov algoritem pa ni sprotni algoritem, saj v i-tem koraku doda i-to najdaljšo pripono.

3.1.1 Naivna metoda

Naivna metoda je sprotna metoda gradnje priponskega drevesa. Ta metoda v vsakem koraku s sprehodom po drevesu podaljša vse pripone za en znak ter doda novo pripono. Metoda v i-tem koraku gradnje v dosedaj izgrajeno drevo, ki je bilo izgrajeno za podniz $T[1, i-1]$, doda znak $T[i]$ ter tako izgradi drevo za podniz $T[1, i]$. Naj bo α niz, ki z $x = T[i]$ tvori niz $T[a, i] = \alpha x$, pri čemer je $1 \leq a \leq i$ in posledično je α lahko tudi prazen niz. Znak x je lahko dodan v drevo na tri načine:

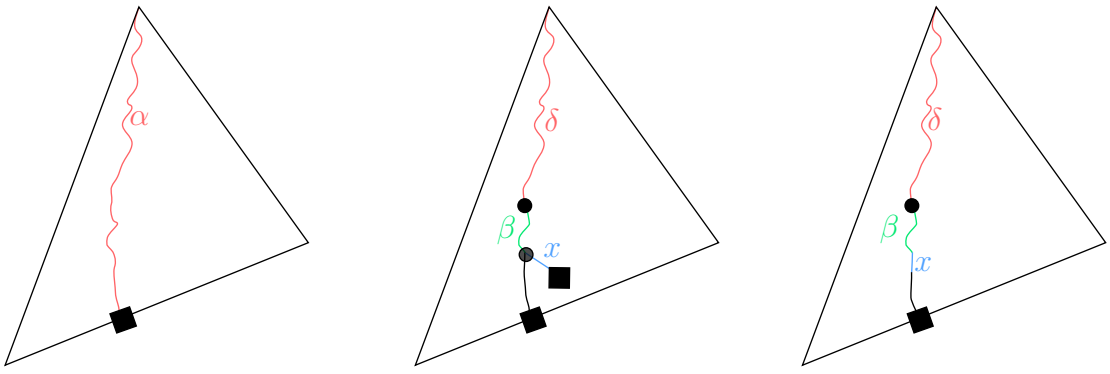
1. Če se niz α konča v listu, potem se zadnja povezava, ki je del niza α, podaljša za znak x. Torej enkrat, ko je list zgrajen, ne more postati notranje vozlišče. Način je prikazan na Sliki **??**.

2. Če pa se niz $\alpha = \delta\beta$ ne konča v listu, potem se konča bodisi v vozlišču v, bodisi na povezavi med vozliščema, recimo v_1 in v_2 ter δ predstavlja niz iz korena do vozlišča v_1, β pa predstavlja zadni del niza α na povezavi med v_1 in v_2. V tem primeru se lahko znak x doda na dva načina:

   (a) Če se nobena pot ne nadaljuje z znakom x, se ustvari nov list l, na katerega kaže poveznava z oznako x. Če se niz α konča v vozlišču v, potem l postane otrok vozlišča v. Če pa se α konča sredini niza na povezavi med vozliščema v_1 in v_2, se ustvari novo vozlišče v'. Povezava, ki kaže iz vozlišča v_1 na vozlišče v', predstavlja niz β. Iz novega vozlišča kažeta dve povezavi: prva povezava kaže na list l, druga povezava pa kaže na vozlišče v_2, ki predstavlja preostanek niza, ki ga je predstavljala predhodnja povezava. Način je prikazan na Sliki **??**.

   (b) Če pa obstaja taka pot, ki se nadaljuje po nizu α z znakom x, se ne stori ničesar, saj je drevo že v implicitni obliki. Način je prikazan na Sliki **??**.

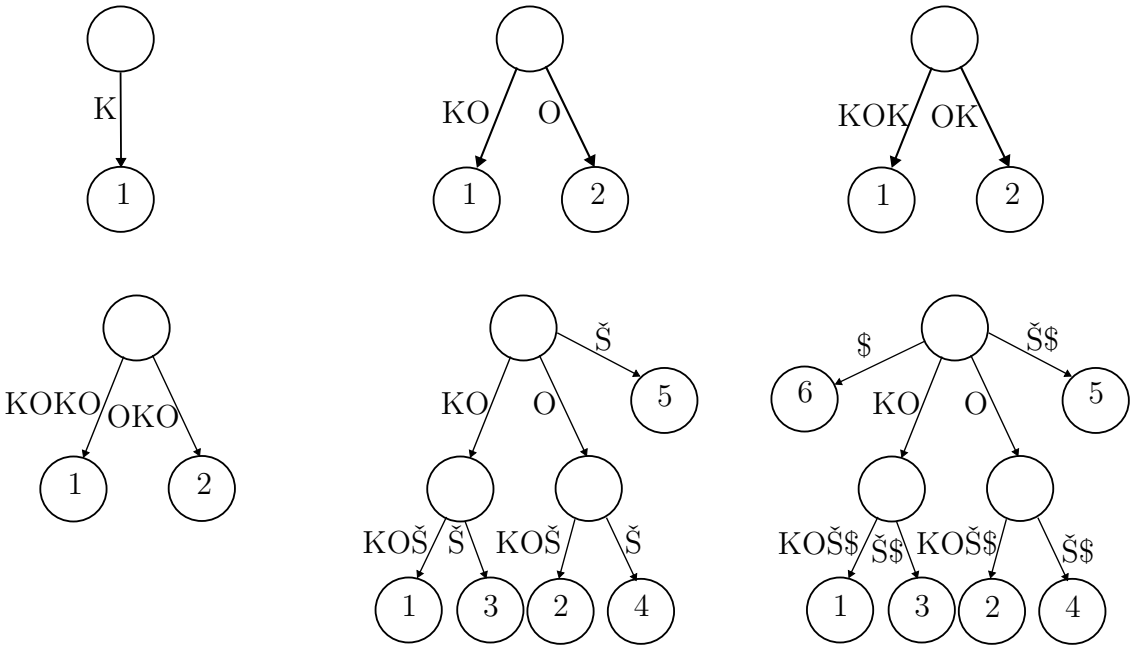
Ti načini podalševanja pripon veljajo za vse sprotne metode gradnje priponskega drevesa.



(a) (b) (c)

Slika 7: Načini dodajanja novih znakov v priponsko drevo. Na sliki kvadratki predstavljajo liste drevesa, krogci pa predstavljajo notranja vozlišča drevesa.

Opazimo, da drevo, ki je zgrajeno za podniz $T[1, i]$, $i < n$, ni nujno priponsko, saj niso vse pripone podniza $T[1, i]$ shranjene v listih. Še več, nekatere pripone niso niti eksplicitno predstavljene. Kljub temu pa to drevo vsebuje vso informacijo o pripadajočlh priponah, pri čemer moramo posebej beležiti vse implicitno predstavljene pripone. Takšnemu drevesu rečemo implicitno priponsko drevo. Algoritem gradnje priponskega



Slika 8: Primer izgradnje priponskega drevesa z uporabo Naivne metode za besedo »KOKOŠ$«.

drevesa z naivno metodo je prikazan v Algoritmu **??**. V algoritmu je uporabljena funkcija `najdiVozlišče`(α), ki vrne najglobje vozlišče pri iskanju niza α v drevesu. Primer gradnja priponskgea drevesa za besedo »KOKOŠ« z naivno metodo pa je prikazan na Sliki **??**. Na Sliki **??** zgolj tretje (zadnje drevo v prvi vrstici) in četrto (prvo drevo v drugi vrstici) drevo sta implicitna priponska drevesa.

Izrek 3.3. *Naivna metoda zgradi priponsko drevo nad besedo T, dolžine n, v času $O(n^3)$.*

Dokaz. Naivna metoda se v vsakem koraku sprehodi čez celotno drevo. Črkovna globina vsakega vozlišča je največ dolžina že dodanega besedila v drevesu, v i-tem koraku je črkovna globina $sd(v)$ vsakega vozlišča v je največ i. Podobno velja tudi za število listov v drevesu, ki ne presega dolžine že dodanega podniza. Globina lista je manjša ali enaka črkovni globini, torej velja, da se v i-tem koraku pregleda $\sum_{j=1}^{i-1} j = \frac{i(i-1)}{2}$ vozlišč.

Ker je niz T dolg n znakov, je skozi celotno izgradnjo priponskega drevesa število obiskanih vozlišč enako

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = O(n^3).$$

Torej naivna metoda potrebuje $O(n^3)$ časa. □

Algoritem 2: Naivna metoda gradnje priponskega drevesa

Vhod: Beseda T, dolžine n

Izhod: Priponsko drevo

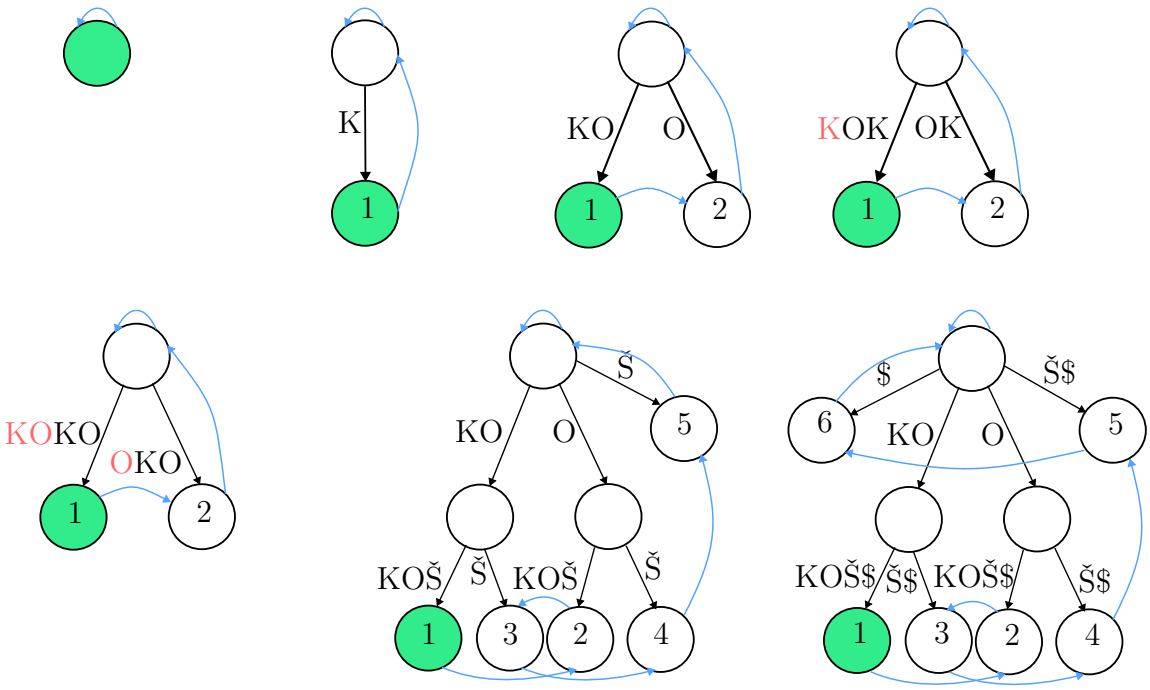
```
1  Ustvari vozlišče koren
2  skoren
3  za i = 1, ..., n
4      za j = 1, ..., i − 1
5          v ←najdiVozlišče(T[j, i])
6          u ← v.otrok[T[j + sd(v) + 1]]
7          če beseda(u)| = i − j potem
8              sicer če jeList(()u) potem
9                  Uporabi se način podalševanja pripon ??
10             sicer če u.otrok[T[i]] = NIL potem
11                 Ustvari list l_i, v.otrok[T[i]] ← l_i
12         sicer če | beseda(u)[i − j + 1] ≠ T[i] potem
13             Uporabi se način podalševanja pripon ??
14     če koren.otrok[T[i]] = NIL potem
15         Ustvari list l_i, koren.otrok[T[i]] ← l_i
```

3.1.2 Izboljšana naivna metoda

Naivna metoda je preprosti način izgradnje priponskega drevesa, vendar se hitro opazijo načini za pospešitev izgradnje drevesa. Prvi način izboljšave je pomnjenje implicitnih pripon. Na ta način ni potrebno iskanti vsako pripono preden se jo lahko podaljša. Na ta način lahko naslednjo črko dodamo zgolj z enim sprehodom po drevesu. Za tem pa opazimo, da metoda nepotrebno pregleduje celotno drevo. Možna rešitev za ta problem je povezan seznam vozlišč, ki predstavljajo pripone. Vozlišče v, ki predstavlja pripono, je list, če se pripona knoča v listu, sicer pa je vozlišče, iz katerega se začne povezava s konem pripone.

Definicija 3.4. Povezava na naslednjo pripono Ψ iz vozlišča v, ki predstavlja pripono $T[i, n]$, kaže na vozlišče w, ki predsatvlaj pripono $T[i + 1, n]$.

Na Sliki **??**, ki prikazuje postopek izgradnje priponskega drevesa za besedo »KOKOŠ« z izboljšano naivno metodo, so prikazane povezave na naslednjo vozlišče z modro puščico. Uvedba seznama pripon omogoča izogib nepotrebnim sprehodom po drevesu. Tako metoda podaljša vse liste zgolj s sprehodom po seznamu. Pritem velja, da je $\Psi(koren()) = koren()$. Na ta način lahko pregledamo vse pripone v drevesu. Me-



Slika 9: Primer izgradnje priponskega drevesa z uporabo Izboljšane naivne metode za besedo »KOKOŠ$«.

toda se v vsakem koraku sprehodi iz začetne točke, ki predstavlja najdaljšo pripono, po seznamu pripon. Na Sliki **??** je začetna točka označena z zeleno barvo. Ker je število vozliš v seznamu lahkomanjše od števila pripon in *koren*() kaže nase, metoda šteje koliko pripon je že podaljšala v trenutnem koraku. Na Sliki **??** so vse implcitno predstavljene pripone, prikazane z rdečo barvo.

V Algoritmu **??** je prikazana psevdokodo izbolšane naivne metode gradnje. V vsakem koraku izgradnje se metoda sprehodi po seznamu vozlišč, ki predstavljajo pripono, in podaljša vse pripone. Vsakič, ko se pripona podaljša z načinom **??**, je potrebno poraviti seznam vozlišč. V vsakem koraku je v seznamu največ toliko vozliš kot je pripon. Ker je lahko vozlišč manj, metoda šteje število že obiskanih pripon in vse ne obiskane pripone se obišče iz korena.

Iz Algoritma **??** je razvidno, da metoda se i-tem koraku koraku sprehodi po seznamu vozlišč velikosti $O(i)$ ter tako podaljša i pripon. Vhodna beseda je dolga n znakavo, zato je čas gradnje z izboljšano naivno metodo $O(n^2)$. Iz tega sledi izrek:

Izrek 3.5. *Izboljšana naivna metoda zgradi priponsko drevo nad besedo T v času $O(n^2)$.*

Algoritem 3: Izboljšana naivna metoda gradnje priponskega drevesa

Vhod: Beseda T, dolžine n

Izhod: Priponsko drevo

```
1  Ustvari vozlišče koren; ZacetnaTocka ← koren()
2  za i = 1, ..., n
3      v ← ZacetnaTocka
4      za j = 1, ..., i − 1
5          če jeList(v) potem  Uporabi se način podalševanja pripon ??
6          sicer
7              k ← |beseda(v)|, u ← v.otrok[T[j + k + 1]]
8              če u = NIL potem
9                  Ustvari list l_i; v.otrok[T[i]] ← l_i
10                 Popravi seznam pripon (v spremni v l_i)
11             sicer če j + |beseda(u)| < i potem
12                 če u.otrok[T[i]] = NIL potem
13                     Ustvari list l_i, u.otrok[T[i]] ← l_i
14                     Popravi seznam pripon (v spremni v l_i)
15                 sicer  Popravi seznam pripon (v spremni v u)
16             sicer če |beseda(u)[i − j + 1] ≠ T[i] potem
17                 Uporabi se način podalševanja pripon ??
18                 Popravi seznam pripon (v spremni v l_i)
19         v ← v.Ψ
20     če koren.otrok[T[i]] = NIL potem Ustvari list l_i; koren.otrok[T[i]] ← l_i
21     če ZacetnaTocka = koren() potem ZacetnaTocka ← l_1
```

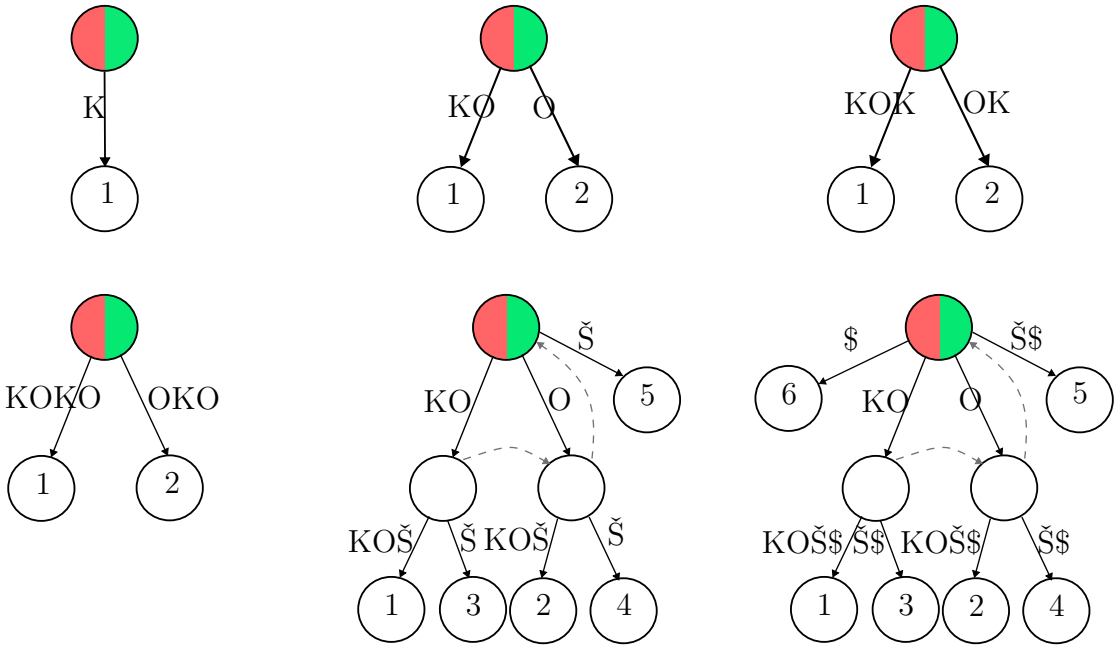
Čeprav te izboljšave znižajo čas izgradnje priponskega drevesa iz $O(n^3)$ na $O(n^2)$, ampak taka izboljšava ne omogoča izgradnje drevesa v času $O(n)$. Za izgradnjo priponskega drevesa v linearnem času obstajata dva algoritma: McCreightov algoritem [**?**] in Ukkonenov algoritem [**?**].

3.1.3 Ukkonenov algoritem

Ukkonenov algoritem deluje na podoben način naivna metoda in izboljšana naivna metoda, saj dodaja v drevo črko po črko. Torej algoritem v i-tem koraku izgradi priponsko drevo, ki je lahko implicitno priponsko drevo, in predstavlja besedo $T[1, i]$. Algoritem v i-tem koraku doda v obstoječe drevo črko $T[i]$. Črka je dodana v drevo na iste 3 načine kot pri ostalih dveh metodah in jih lahko vidimo tudi na primeru izgradnje

priponskega drevesa za besedo »KOKOŠ$«. Postopek izgranje z Ukkonenovim algoritmom in vmesna drevesa so prikazana na Sliki **??**. Iz načina dodajanja novih znakov v priponsko drevo, ki ga uporablja algoritem, se opazi, da se število vozlišč v drevesu spremeni samo z drugim načinom dodajanja (**??**). Torej se moramo sprehoditi zgolj po vozliščih, iz katerih kažejo povezave s konci implicitnih pripon. V teh točkah se lahko zgodi delitev povezave. Zato se potrebuje dodatno povezavo, ki bo nadomestila povezavo na naslednjo pripono, imenovano priponska povezava (angl. *Suffix link*).

Definicija 3.6. Vozlišče v je notranje vozlišče in $beseda(v) = x \cdot \alpha$. Priponska povezava $sl(v)$ je povezava na notranje vozlišče w in $beseda(w) = \alpha$.



Slika 10: Primer izgradnje priponskega drevesa z uporabo Ukkonenovaga algoritma za besedo »KOKOŠ$«.

Vse točke, v katerih se bo v tem koraku zgodila delitev, imenujemo aktivne točke (angl. *active point*). Da bo algoritem učinkovit hranimo začetno aktivno točko in končno aktivno točko imenovano tudi končna točka (angl. *end point*), rezčlembe in dodajanja novih vozlišč v drevesu v trenutnem koraku. Na Sliki **??** je z zeleno označeno vozlišče, ki se nahaja pred začetno točko. Premik po aktivnih točkah med začetno točko in končno točko poteka po priponskih povezavah. Pri tem pa algoritem v vsakem koraku poti izračuna, ali je že prišel v končno točko. Zato je potrebno hraniti zgolj trenutno aktivno točko ter zastavico, ki hrani vrednost, ali je ta točka tudi končna točka. Aktivna točka postane končna točka takrat, ko se način dodajanja spremeni

Algoritem 4: Ukkonenov algoritem za izgradnjo priponskega drevesa

Vhod: Beseda T, dolžine n

Izhod: Priponsko drevo

```
1  Ustvari vozlišče koren
2  s<- koren, k<-1
3  za i = 1, ..., n
4      sVoz<-NIL
5      (KončnaTočka, v)<-razdeliTestiraj((s, (k, i − 1)), T[i])
6      dokler ni KončnaTočka
7          ustvari list l na katerega kaže točka v
8          če sVoz ≠ NIL potem
9              Ustvari priponsko povezavo iz sVoz v v
10         sVoz<-v
11         (s, k)<-kanoničnaOblika((sl(s), (k, i − 1)))
12         (KončnaTočka, v)<-razdeliTestiraj((s, (k, i − 1)), T[i])
13     če sVoz ≠ NIL potem
14         Ustvari priponsko povezavo iz sVoz v s
15     (s, k)<-kanoničnaOblika((s, (k, i)))
```

iz **??** v **??** ali ko so vse implicitne pripone postale listi drevesa, saj od takrat ni več potrebno v trenutnem koraku izgradnje deliti povezave in ustavrjati nova vozlišča. Pri tem velja tudi, da končna točka v koraku $i-1$ postane začetna aktivna točka v koraku i, saj se prva nova delitev v koraku i lahko zgodi zgolj v točki, kjer so se končale delitve v koraku $i-1$, in to je končna točka koraka $i-1$.

Vsako aktivno točko lahko predstavimo kot referenčni par (s, α), pri čemer je s vozlišče pred aktivno točko in α je niz iz vozlišča s do aktivne točke. Za lažje shranjevanje niza α je le ta shranjen kot par indeksov (k, p), pri čemer je $\alpha = T[k, p]$. Aktivna točka je lahko predstavljena z različnimi pari $(s, (k, p))$. Če je s najglobje vozlišče pred aktivno točko, takšen par imenujemo kanonična oblika referenčenga para. Kanonična oblika je po definiciji enolična. Med vsemi referenčnimi pari za dano aktivno točko velja, da je pri paru, ki je v kanonični obliki, niz $\alpha = T[k, p]$ najkrajši. Na Sliki **??** v četrtem koraku izgradnje, ki ga predstavlja prvo drevo v spodnji vrstici, je začetna aktivna točka predstavljena kot $(koren, (3, 3))$, v naslednjem koraku pa je začetna aktivna točka v $(koren, (3, 4))$, ki se bo razcepila in bo postala novo vozlišče. Ta ista točka je lahko po koncu izgradnje še vedno predstavljena z referenčnim parom $(koren, (2, 4))$, ki pa ni v kanonični obliki. Kanonična oblika te točke je $(a, (4, 4))$, pri čemer je vozlišče a otrok *koren*-a, na katerega kaže povezava z nizom »KO«.

Ukkonenov algoritem za izgradnjo priponskega drevesa, ki je predstavljen v [**?**], izgradi priponsko drevo s psevdokodo, ki je prikazana v Algoritmu **??**. V algoritmu par $(s, (k, i-1))$ predstavlja kanonično obliko aktivnega vozlišča v trenutnem koraku. Zastavica *KončnaTočka* ima vrednost *true*, če je trenutna aktivna točka tudi končna točka, sicer ima vrednost *false*. Vozlišče v predstavlja vozlišče, v katerega bo pripet nov list v'. Povezava do lista v' bo predstavljala črko $T[i]$. Vozlišče *sVoz* pa predstavlja vozlišče, na katerga je bil nazadnje pripet list v i-tem koraku. Vozlišče *sVoz* je *NIL* zgolj v prvem dodajanju novega lista v vsakem koraku.

Algoritem **??** uporabi dve pomožni funkciji. Prva uporabljena pomožna funkcija je `kanoničnaOblika`, ki za trenutno aktivno točko, predstavljeno z referenčnim parom $(s, (k, p))$, vrne njegovo kanonično obliko. Funkcija se sprehodi po drevesu dokler ne doseže najnižjega vozlišča pred aktivno točko. S tem korakom je omogočena učinkovitejša uporaba funkcije `razdeliTestiraj`.

Funkcija `razdeliTestiraj` prejme kot vhod trenutno aktivno točko, ki je podana kot referenčni par $(s, (k, p))$ v kanonični obliki, ter znak t, ki se želi vstaviti v priponsko drevo. Funkcija preveri, ali se niza $T[k, p+1]$ in $T[k, p] \cdot t$ ujemata. Če se niza ujemata, potem je trenutna aktivna točka tudi končna točka, zato funkcija ne stori ničesar in vrne $(true, s)$. Sicer pa funkcija razdeli povezavo in aktivna točka postane novo vozlišče v, če že ne obstaja vozlišče v, nato pa vrne $(false, v)$.

Izrek 3.7. *Ukkonenov algoritem zgradi priponsko drevo nad besedo T v času $O(n)$.*

Dokaz. Dokaz je razdeljen na dva dela: v prvem delu bomo dokazali, da se zanka, ki se začne v vrstici **??**, skozi celotno izvajanje algoritma izvede $O(n)$-krat, drugi del pa se bo osredotočil na časovno zahtevnost funkcije `kanoničnaOblika`.

Časovna zahtevnost funkcije `razdeliTestiraj` je $O(1)$, saj je aktivna točka podana v kanonični obliki, zato ni potrebnih odvečnih sprehodov po drevesu, ki bi povečali časovno zahtevnost. Funkcija preveri, ali je trenutna aktivna točka tudi končna točka, za kar potrebuje konstanten čas. Če ni končna točka, jo spremeni v notranje vozlišče, za kar je potreben konstanten čas. Sicer pa ne stori ničesar in vrne, da je aktivna točka tudi končna točka.

Zanka v i-tem koraku izgradnje dodaja nove povezave na poti iz končne točke kt_{i-1} koraka $i-1$ do končne točke kt_i koraka i, katera ni še obiskana. Natančno število obiskanih vozlišč na poti je $D(kt_{i-1}) - D(kt_i) + 2$, iz česar sledi, da se s pomočjo seštevalne amortizacije v n-tih korakih zanka izvede

$$\sum_{i=1}^{n} (D(kt_{i-1}) - D(kt_i) + 2) = D(kt_0) - D(kt_n) + 2n = O(n).$$

Pri tem je potrebno še dokazati, da tudi sprehod v funkciji `kanoničnaOblika` obišče $O(n)$ vozlišč skozi celotno izgradnjo priponskega drevesa. Funkcija ob vsakem klicu

pogleda največ $p-k$ vozlišč, kar je dolžina niza $\beta = T[k, p]$. Pri tem pa se niz β z vsakim obiskanim vozliščem skrajša, saj se poveča število k. Niz β pa se lahko poveča zgolj v **??** vrstici Algoritma **??**. Ker se niz β poveča n-krat skozi celotno izgradnjo, potemtakem se tudi niz β lahko zmanjša največ n-krat skozi celotno izgradnjo. Torej funkcija `kanoničnaOblika` obišče največ n vozlišč v celotni izgradnji priponskega drevesa.

Zanka v vrstici **??** Algoritma **??** se izvede n-krat, medtem ko se zanka v vrstici **??** in funkcija `kanoničnaOblika` vsaka izvede v $O(n)$ časa skozi celotno izgradnjo priponskega drevesa, iz česar sledi, da tudi izgradnja priponskega drevesa potrebuje $O(n)$ časa, da se izvrši.

□

Zaključek. Tako McCreight algoritem [**?**] kot tudi Ukkonenov algoritem [**?**] zgradita priponsko drevo v času $O(n)$. Oba algoritma izdelata priponsko drevo, ki ima enake priponske povezave med vozlišči, pri tem pa se zalikujeta v umesnih drevesih. Za primerjavo umesnih dreves se lahko vzame Sliko **??** in Sliko **??**, na katerih sta prikazani izgradnji priponskih dreves z obema algoritma za besedo »KOKOŠ$«. V McCreightovem algoritmu vmesno drevo v i-tem koraku predstavlja i najdaljših pripon besedila. Pri čemer pa v Ukkonenovem algoritmu vmesno drevo v i-tem koraku predstavlja priponsko drevo besedila $T[1, i]$, ki je lahko bodisi implicitno bodisi eksplicitno predstavljeno, kar je posledica sprotne izgradnje priponskega drevesa.

Poleg linearne časovne zahtevnosti za izgradnjo priponskega drevesa, oba algoritma potrebujeta $O(n)$ prostora za hrambo in gradnjo priponskega drevesa, saj ima vsako drevo n listov in največ $n-1$ notranjih vozlišč. Vsako vozlišče ima $O(|\Sigma|)$ referenc, pri čemer je Σ abeceda vseh znakov uporabljenih v besedilu. Za daljša besedila je to lahko problem, saj velikost celotnega priponskega drevesa lahko presega velikost delovnega pomnilnika.

V nadaljevanju bo uporabljen Ukkonenov algoritem za izgradnjo priponskih dreves, ki bodo uporabljena pri empirični analizi v Poglavju **??**, kjer bo tudi izmerjen vpliv pomanjkanja notranjega pomnilnika ter posledična uporaba zunanjega pomnilnika (`Swap` razdelek na zunanjem spominu) namesto notranjega pomnilnika.

3.2 POIZVEDBE

Časovno učinkovito iskanje vzorcev v vhodni besedi T je doseženo z izgradnjo priponskega drevesa. Zato bodo v tem podpoglavju predstavljene implementacije poizvedb za iskanje vzorcev nad besedo T z uporabo priponskega drevesa. Obstajajo tri poizvedbe, in sicer:

1. *prisotnost*(T, P), ki preveri, ali je vzorec P prisoten v besedi T,
2. *številoPonovitev*(T, P), ki vrne število ponovitev vzorca P v besedi T, in
3. *seznamPojavov*(T, P), ki vrne seznam indeksov v besedi T, kjer se pojavi vzorec P.

Osnovna poizvedba nad besedo T je *prisotnost*(T, P), saj sta ostali dve poizvedbi nadgradnji le te. Osnovna ideja iskanja vzorcev s priponskimi drevesi je obstoj vzorca P na začetku vsaj ene pripone besede T natako tedaj, ko je P prisoten v T. Oziroma vzorec $P[1, m]$ je prisoten v besedi T natako tedaj, ko obstaja pripona $T[i, n]$, za katero velja $P = T[i, i + m]$ (P je predpona pripone $T[i, n]$).

Listi priponskega drevesa predstavljajo pripone besede T, zato je poizvedba *prisotnost*(T, P) z uporabo priponskega drevesa implementirana s sprehodom iz *korena* drevesa proti listom. Ker vsaka povezava predstavlja podniz besede $T[k, p]$, ki je lahko shranjen kot par indeksov k in p, je potrebno preveriti, ali se P ujema s $T[k, p]$. Če se vzorec ne ujema s podnizom, potem vzorec ni prisoten v besedi in zato poizvedba vrne *false*. Ko pa se P ujema s podnizom, potem je vzorec prisoten v besedi in zato poizvedba vrne *true*. Tako predstavljen način iskanja deluje zgolj za vzorce, ki niso daljši od $p - k$ znakov. Če pa je vzorec P daljši, se najprej pogleda prvih $p - k$ znakov. Če se podniza ujemata, se nadaljuje z iskanjem na naslednji povezavi, ki se začne v vozlišču v, do katerega smo prišli po povezavi $T[k, p]$ na poti proti listom. Pri tem si je potrebno zapomniti, koliko znakov smo že pregledali, in to označimo z o. V vsakem koraku povečamo o za $p - k$ ter perverimo, ali je $P[o + 1, o + p - k] = T[k, p]$. Poizvedba se konča na povezavi, za katero velja, da je $p - k \geq m - o$, če se je vseh o do takrat pregledanih znakov ujemalo. V vozlišču v je izbrana povezava, za katero velja, da se prvi znak povezave ujema z znakom $P[o + 1]$. Iskanje te povezave vzame od $O(1)$ časa (vsako vozlišče ima polje velikosti $|\Sigma|$, tako da ima vsak znak alociran prostor za svojo povezavo, čeprav otrok ne obstaja) do $O(|\Sigma|)$ časa (vsako vozlišče ima povezan seznam povezav do otrok), kar je še vedno konstanten čas, saj se abeceda Σ ne spreminja skozi postopek izgradnje in poizvedb.

Operacija *prisotnost*(T, P) potrebuje $O(m)$ časa, da preveri prisotnost vzorca v besedi. Operacija mora preveriti, ali se vsi znaki vzorca ujemajo z znaki na povezavah, ki so del poti od *korena* proti listom, za kar potrebuje $O(m)$ časa. V vsakem notranjem vozlišču na poti pa potrebuje še dodatno $O(1)$ časa, da najde naslednjo povezavo. Ker je notranjih vozlišč na poti največ m, potem tudi celotna poizvedba potrebuje $O(m)$ časa.

Za primer iskanja vzememo priponsko drevo na Sliki **??**, ki predstavlja besedo $T =$»KOKOŠ«. V besedi želimo preveriti prisotnost vzorca $P_1 =$ »KOŠ«, ki je prisoten v besedi, ter vzorca $P_2 =$ »KOT«, ki pa ni prisoten v besedi. Pri tem pred-

postavimo, da ima vsako vozlišče fiksno polje kazalcev na otroke (vsaka črka abecede ima eno celico v polju). Iskanje se začne v vozlišču `koren`. Preveri se, ali velja `koren.otroci['K']`$\neq NIL$. Ker `koren.otroci['K']` kaže na notranje vozlišče, ki ga imenujemo v, se lahko preveri, ali podniz na povezavi se ujema s P_1 oziroma P_2. Ker se oba vzorca začneta s »KO« in se ujema s podnizom na povezavi, si zapomnemo, da smo pregledali dve črki, in nadaljujemo s pregledovanjem. Za vzorec P_1 preverimo v vozlišču v, ali velja v`.otroci['Š']`$\neq NIL$. Ker obstaja taka povezava, lahko nadaljujemo z iskanjem, ampak smo že preverili vse črke vzorca, ker do vozlišča v sta bila že pregledana $o = 2$ znaka in za iskanje naslednje povezave se je pregledal tudi znak $P_1[3] = $ Š. Zato lahko trdimo, da vzorec P_1 je prisoten v besedi »KOKOŠ«. Za razliko od vzorca P_1 se za vrorec P_2 v vozlišču v preveri, ali velja v`.otroci['T']`$\neq NIL$. Ker ne obstaja povezava, ki predstavlja podniz z prvim znakom 'T', torej tudi vzorec P_2 ni prisoten v besedi »KOKOŠ«.

Preostali poizvedbi sta si zelo podobni in imata isto osnovno idejo implementacije. Brez škode za splošnost lahko uporabimo poizvedbo *številoPonovitev*(T, P), da razložimo idejo. Vzorec se nahaja na začetku sprehoda od *korena* proti listom, zato je število ponovtiev vzorca v besedi enako številu listov v drevesu, katerih pot do njih se začne z vzorcem P. Isto velja tudi za poizvedbo *seznamPojavov*(T, P), pri čemer pa indeksi pripon, ki so shranjeni v listih, predstavljajo indekse v besedi, kjer se pojavi vzorec P.

Začetka implementacije obeh poizvedb sta enaki kot pri poizvedba *prisotnost*(T, P). Če je vzorec P prisoten v besedi, potem se vzorec P konča na povezavi, ki vodi v vozlišče v. Zato velja, da so vsi listi priponskega drevesa, ki predstavljajo pripone s predpono P, tudi listi v poddrevesu s korenom v vozlišču v. Torej za najti oziroma prešteti vse ponovitve vzorca P v vhodni besedi T se je potrebno sprehoditi po poddrevesu. Poizvedba *številoPonovitev*(T, P) vrne število obiskanih listov v poddrevesu s korenom v v, če pa vzorec P ni prioten v besedi, pa vrne 0. Poizvedba *seznamPojavov*(T, P) pa vrne seznam vseh indeksov pripon, ki so predstavljeni z obiskanimi listi v sprehodu, če pa vzorec P ni prisoten v besedi, pa vrne prazen seznam [ ].

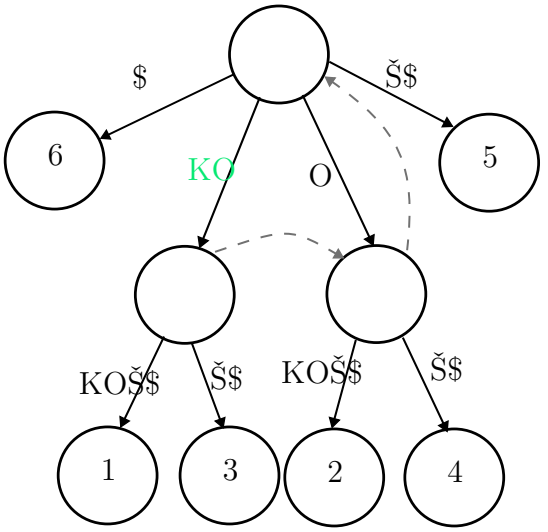
Časovna zahtevnost obeh poizvedb je $O(m + occ)$, pri čemer je occ število pojavov vzorca v besedi T. Ker je prvo potrebno preveriti, ali je vzorec prisoten v drevesu, je potrebno izvesti iste korake kot za poizvedbo *prisotnost*(T, P), za kar je potrebno $O(m)$ časa. Za najti vse liste v poddrevesu pa je potrebno še $O(occ)$ časa. Ker je v priponskem drevesu z n-timi listi $O(n)$ notranjh vozlišč, potem je v poddrevesu priponskega drevesa z occ listi $O(occ)$ vozlišč. Ker tako pregled v globino kot tudi pregled v širino potrebujeta v drevesih z n-timi vozlišči $O(n)$ časa, potemtakem za najti vse liste poddrevesa potrebujemo $O(occ)$ časa.

Za primer vzemimo besedo $T =$ »KOKOŠ«, za katero imamo zgrajeno priponsko drevo, ki je prikazano na Sliki **??**. V besedi želimo preveriti, kolikokrat se pojavi vzorec $P =$ »KO« oziroma želimo narediti poizvedbo *številoPonovitev*(T, P). Poizvedbo

začnemo v *korenu* priponskega drevesa, kjer preverimo, ali obstaja povezava na vozlišče, ki se začne z znakom $P[1] =$ *'K'*. Ker obstaja povezava `koren.otroci['K']`, imenujemo to vozlišče v in preverimo, ali se preostanek znakov na povezavi ujema z vzorcem. Povezava predstavlja podniz $T[1, 2] =$»KO«, in ker smo že preverili prvi znak, je potrebno preverit še drugi znak, ki pa se tudi ujema. Vzorec je dolg dva znaka, zato se preverjanje prisotnosti vzorca ustavi ter nadaljujemo s preštevanjem listov v poddrevesu s korenom v v. Brez škode za splošnost lahko uporabimo pregled v globino ter začnemo s pregledom pregledovati v levem poddrevesu. Skrajno levi otrok od v je list, ki predstavlja predpono z indeksom 1, zato povečamo število obiskanih listov iz 0 na 1. Nato pregledamo še drugega (zadnjega) otroka, ki je tudi list in predstavlja predpono z indeksom 3, zato se poveča število obiskanih listov iz 1 na 2. Ker smo pregledali celotno poddrevo, poizvedba vrne število 2, kar pomeni, da se vzorec $P =$ »KO« pojavi v besedi T dvakrat. Ča pa bi želeli poiskati indekse v besedi, kjer se vzorec pojavi, oziroma izvesti poizvedbo *seznamPojavov*(T, P), bi bil postopek enak. Pri tem bi beležili indekse pripon namesto štetja obiskanih listov. Ob obisku prvega lista bi se na konec praznega seznama vstavil indeks 1, za drugi list pa bi se na konec seznama vstavil še indeks 3. Torej bi poizvedba vrnila seznam $[1, 3]$.

4 PRIPONSKO POLJE

Priponsko drevo nad besedo T dolžine n potrebuje za vsako vozlišče vsaj en kazalec ter dva »cela števila«, ki predstavljata začetek in konec predstavljenega podniza, zato se potrebuje vsaj $6n$ »celih števil«. Pri tem se potrebuje še n dodatnih »celih števil« za shraniti priponske povezave, dodatnih $2n$ »celih števil« za shraniti povezave na starše vozlišč ter še dodatnih n »celih števil« za shraniti indekse pripon, ki so shranjeni v listih. Torej priponsko drevo potrebuje med $7n$ in $10n$ »celih števil« za pravilno delovanje. Ker so pripone besedila indeksi v besedilu, ki predstavljajo indeks prvega znaka v priponi, se jih lahko shrani z n »celimi števili«. Če se indekse pripon shranjenih v polju in se indeksi uredijo v leksikografskem vrstnem redu pripon, se ta podatkovna struktura imenuje priponsko polje (angl. *Suffix array* oziroma SA).



	1	2	3	4	5	6
LCP	-	0	2	0	1	0
SA	6	1	3	2	4	5

Slika 11: Primer priponskega polja nad besedo »KOKOŠ$«.

Priponsko polje je alternativni indeks besedila. Priponsko polje se uporablja namesto priponskega drevesa, ko se potrebuje prostorsko bolj učinkovito podatkovno strukturo in se lahko žrtvuje čas iskanja vzorcev v besedilu saj priponsko polje zasede

približno 8-krat manj prostora na delovnem pomnilniku kot priponsko drevo [**?**]. Priponsko polje si lahko predstavljamo kot polje listov priponskega drevesa, brez podatkov o notranjih vozliščih drevesa. To podobnost lahko vidimo tudi na Sliki **??**, na kateri je prikazano priponsko drevo in priponsko polje za besedo »KOKOŠ$«.

V nadaljevanju poglavja bodo predstavljena še podatkovna struktura, ki omogoča hitrejše iskanje v priponskem polju ter simuliranje priponskega drevesa. Zatem bodo predstavljeni še načini izgradnje priponskega polja ter implementacije poizvedb s pomočjo priponskega polja.

4.1 NAJDALJŠA SKUPNA PREDPONA

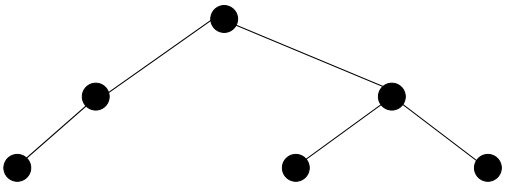
V priponskem polju so shranjene pripone besede T, ki so urejene v leksikografskem vrstnem redu, zato je najbolj učinkovita metoda iskanja bisekcija. Z bisekcijo je potrebnih $O(\log n)$ primerjav med sredinsko pripono trenutnega intervala, na katerem se izvaja bisekcija, ter vzorcem P, torej je potrebno $O(m \log n)$ časa za preveriti, ali je vzorec P prisoten v besedi T. Ta način iskanja je $O(\log n)$-krat počasnejši od iskanja v priponskem drevesu. To razliko si želimo znižati, pri tem pa ne želimo shraniti celotne topologije drevesa, ampak zgolj informacije, ki pospešijo iskanje po priponskem polju. V tem podpoglavju bo predstavljena predstavljen podatkovna struktura *LCP* polje. V podpoglavju **??** pa bo predstavljena uporab te podatkovne strukture za iskanje po priponskem polju.

Polje najdaljših skupnih predpon (angl. *Longest common prifix* oziroma LCP) hrani v vsaki celici

$$LCP[i][j] = lcp(T[SA[i], n], T[SA[j], n]),$$

kar je dolžina predpone, ki je skupna obema priponama. Za tako definirano LCP polje je potrebno $O(n^2)$ prostora. Pri tem velika večina celic ne bo nikoli uporabljena pri bisekciji. V vsakem koraku bisekcije se preverja, ali je vzorec večji od sredinske točke M na intervalu $[L, R]$. Torej za vsak možen interval bisekcije je dovolj, da se hrani dolžina najdaljše predpone med M in L ter med M in R. Ker je vsaka pripona srednja točka natanko enega intervala v bisekciji, potem potrebujemo dve LCP polji, in sicer prvega za shraniti dolžina najdaljše predpone med M in L, ki ga imenujemo *L-LCP*, in drugega za shraniti dolžina najdaljše predpone med M in R, ki ga imenujemo *R-LCP*. Primer teh dveh polj je prikazan na Sliki **??**, na kateri je prikazano tudi drevo sredinskih točk bisekcije [**?**].

Prostorska zahtevnost te implementacije LCP polja je $O(n)$. Če želimo biti bolj natančni *L-LCP* in *R-LCP* polji hranita vsak n »celih števil«, torej skupaj s priponskim poljem potrebujejo $3n$ »celih števil«, kaj je še vedno 2- do 5-krat manj prostora kot ga potrebuje ekvivalentno priponsko priponsko drevo.



	1	2	3	4	5	6
SA	**6**	**1**	**3**	**2**	**4**	**5**
Llcp	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Rlcp	**0**	**2**	**0**	**1**	**0**	**2**

Slika 12: Primer *L-LCP* in *R-LCP* polji za priponskega polja nad besedo »KOKOŠ$«.

4.1.1 Simulacija priponskega drevesa

V priponskem drevesu je dolžina najdaljše skupne predpone dveh pripon dolžina podniza najglobljega skupnega predhodnika (angl. *Lowest common ancestor* oziroma LCA) obeh listov, ki predstavljata priponi. Ampak trenutna implementacija *LCP*-polja je namenjena pospešitvi iskanja po priponskem polju in uporablja *L-LCP* in *R-LCP* polji. Zato se potrebuje bolj splošno *LCP*-polje, ki bi nadomestilo *L-LCP* in *R-LCP* polji in bi omogočalo simuliranje priponskega drevesa.

Vrednost v *L-LCP*$[M]$ predstavlja dolžno najdaljše skupne predpone $lcp(T[SA[M], n]$, $T[SA[L], n])$, pri čemer je L začetni indeks intervala bisekcije s sredinsko točko v M, in vrednost funkcije *lcp* označimo kot k. Vemo tudi, da je $SA[L] < SA[M]$, torej imajo vse pripone na intervalu med L in M paroma najdaljšo skupno predpono dolžine vsaj k, saj vse pripone na tem intervalu so leksikografsko večje od $SA[L]$ in manjše od $SA[M]$. To pomeni, da za vsak i, ki je $L < i \leq M$, velja $k \leq lcp(T[SA[i-1], n], T[SA[i], n])$. Posledično obstaja tak i, za katerega velja $lcp(T[SA[i-1], n], T[SA[i], n]) = k$. Podoben sklep se lahko naredi tudi za *R-LCP*$[M]$, pri čemer uporabimo interval v priponskem polju med M in R. Zato se lahko naredi bolj splošno LCP polje $LCP[2, n]$, za katerega velja

$$LCP[i] = lcp(T[SA[i-1], n], T[SA[i], n]).$$

Primer takega LCP polja je prikazan na Sliki **??**. Na sliki je označena z zeleno barvo vrednost $LCP[3]$, ki je najdaljša skupna predpona med priponama $SA[2]$ in $SA[3]$. Ta vrednost je tudi označena na priponskem drevesu na sliki [**?**, **?**].

Novo LCP polje potrebuje zgolj $O(n)$ »celih števil«. Pri tem pa potrebuje dodatno podatkovno strukturo za učinkovito iskanje najmanjše vrednosti na intervalu oziroma *rmq*, ki je potrebna za nadomestiti *L-LCP* in *R-LCP* polji. Prva možnost je izgradnja *rmM*-drevesa, ki v vsakem vozlišču vsebuje zgolj vrednost m. Iskanje v drevesu pa potrebuje $O(\log n)$ časa oziroma $O(m \log n + \log n)$ časa za poizvedbo, kar pa je prepo-

časno, saj potrebuje iskanje z *L-LCP* in *R-LCP* polji $O(m + \log n)$ časa za poizvedbo. Zato lahko uporabimo *rmq* strukturo, ki sta jo predlagala Fischer in Heun [**?**]. Predlagana podatkovna struktura potrebuje $O(n)$ dodatnega prostora in za dani interval vrne najmanjšo vrednost v $O(1)$ času, torej se lahko poizvedba izvrši v $O(m + \log n)$.

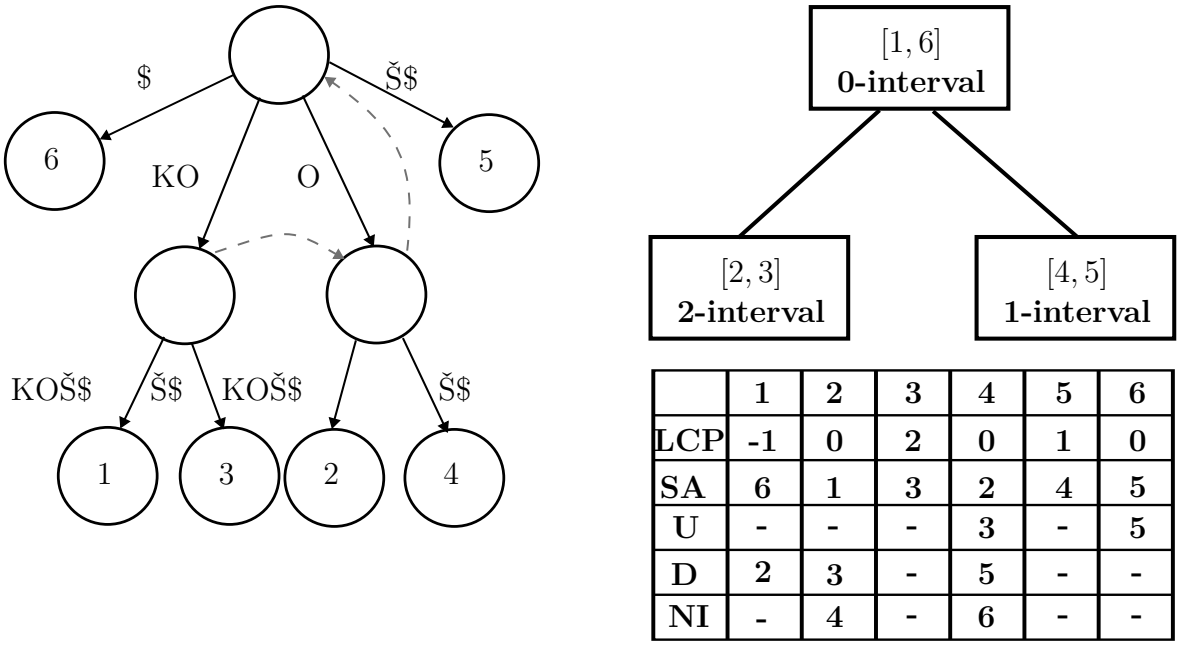
Posplošeno LCP polje se tudi lahko uporabi simuliranje priponskega drevesa. Vrednost $LCP[i]$ predstavlja črkovno dolžino vozlišča v, za katerega velja $v = LCA(l_{i-1}, l_i)$, pričemer l_i predstavlja pripono $SA[i]$ in l_{i-1} predstavlja pripono $SA[i-1]$. Kasai idr. [**?**] so uporabili to dejstvo za simulacijo pregleda od spodaj navzgor (angl. *Bottom-Up Traversal*) in od desne proti levi (angl. *Post-Order Traversal*). S takim obhodom drevesa lahko rešimo problem sprehoda po podnizih (angl. *substring traversal problem*), ki oštevilči vse ponavljajoče se podnize. Podani algoritem potrebuje $O(n)$ časa in potrebuje enako časa kot obhod priponskega drevesa z n-timi listi.

V splošnem vsako notranje vozlišče v v priponskem drevesu predstavlja podniz besede dolžine l, s katerim se začnejo vse pripone predstavljene z listi v poddrevesu s korenom v v. Ker je priponsko polje ekvivalentno listom priponskega drevesa, so vsi listi poddrevesa s korenom v v ekvivalentni intervalu priponskega polja $SA[L, R]$, pri čemer $SA[L]$-ta pripona je predstavljena s skrajno levim listom in $SA[R]$-ta pripona pa je predstavljena s skrajno desnim listom v poddrevesu. Torej so vse vrednosti intervala $LCP[L + 1, R]$ vsaj l. Pri tem velja tudi, da pripona $SA[L - 1]$ in pripona $SA[R + 1]$ se zagotovo razlikujeta s priponami $SA[L]$ in $SA[R]$ vsaj v l-tem znaku, sicer bi bile v poddrevesu. Torej velja $LCP[L] < l$ in $LCP[R + 1] < l$. Torej lahko imenujem tak interval $[L, R]$ l-interval, ki je definiran s sledečo definicijo [**?**].

Definicija 4.1. Interval $[i, j]$ je l-interval v LCP polju, natanko tedaj ko velja:

1. $LCP[i] < l$,
2. obstaja vsaj en k, za katerega velja, da je $i < k < j$ in $LCP[k] = l$,
3. za vsak k velja, da je $i < k < j$ in $LCP[k] \geq l$
4. $LCP[j + 1] < l$.

Koren drevesa predstavlja prazen niz in njegovo poddrevo je celotno drevo, zato koren predstavlja 0-interval $[1, n]$. Ker pa je LCP polje definirano zgolj za indekse od 2 do n, se lahko definira indeks 1 kot $LCP[1] = -1$. Ta popravek ne vpliva na pravilnost delovanja priponskega polja, saj ne obstaja pripona $SA[0]$. Znotrja vsakega l-intervala $[L, R]$ lahko obstajajo drugi l'-intervali, za katere velja $l < l'$. Takih l'-intervalov je največ $n_l + 1 = O(|\Sigma|)$, pri čemer je n_l število ponovitev vrednosti l v LCP polju na intervalu $[L, R]$. Torej lahko predstavimo relacijo med l-intervali kot LCP intervalno drevo (angl. *LCP interval tree*). Primer LCP intervalnega drevesa



	1	2	3	4	5	6
LCP	**-1**	**0**	**2**	**0**	**1**	**0**
SA	**6**	**1**	**3**	**2**	**4**	**5**
U	**-**	**-**	**-**	**3**	**-**	**5**
D	**2**	**3**	**-**	**5**	**-**	**-**
NI	**-**	**4**	**-**	**6**	**-**	**-**

Slika 13: Primer intervalnega drevesa nad priponskim poljem in LCP poljem besede »KOKOŠ$« ter njegova predstavitev s tabelo. Na sliki je dodano tudi priponsko drevo besede »KOKOŠ$«.

je prikazan na Sliki **??**. Prikazana je tudi relacija med priponskim drevesom in LCP intervalnim drevesom. [**?**].

Za učinkovito simulacijo priponskega drevesa je potrebno učinkovito shraniti LCP intervalno drevo. Najbolj intuitiven način za shraniti topologijo LCP intervalnega drevesa shrani za vsak interval polje D (angl. *down* oziroma dol), ki hrani indekse začetkov podintervalov vsebovanih znotraj intervala. Pri tem je potrebno $O(|\Sigma|n)$ prostora za shraniti vseh $O(n)$ polj D. Prostorsko zahtevnost se lahko zniža na $O(n)$ »celih števil«, tako da vsak interavl hrani vrednost D, ki kaže na začetek prvega podintervala, ter verednost NI (angl. *next index* oziroma naslednji indeks ali naslednji brat), ki pa hrani začetni indeks naslednjega podintervala mojega starša oziroma naslednjega brata v LCP intervalnem drevesu. Vsako vozlišče hrani dve »celi števili«, zato potrebujemo $O(n)$ prostora v $O(\log n)$ poljih (eno polje za vsako globino). Ker potrebujemo približno $2n$ »celi števili« se pojavi vprašanje, ali je možno predstaviti ta števila z dvema poljema D in NI dolžine n. Problem pri takem zapisu je razločevanje med začetkom intervala starša in začetkom intervala prvega otroka, česar ni mogoče storiti, torej ni mogoče predstaviti zapisa samo s poljema D in NI.

To pa se lahko stori s tremi dodatnimi polji »celih števil« dolžine n, torej potrebujemo $5n$ »celih števil« za simulirati priponsko drevo z LCP intervali. Pri tem pa se potrebuje med $1,4$- in 2-krat manj prostora kot ekvivalentno priponsko drevo. V polju D se na mestu i shranjeni začetek drugega intervala (drugega sina) od najdalj-

šega intervala (najbolj plitvega vozlišča), ki se začne na mestu i, oziroma $D[i]$ hrani največji indeks j večji od i, za katerega velja $LCP[j] > LCP[i]$ in vse vrednosti v LCP med indeksi i in j so večje od $LCP[j]$. V polju NI na mestu i so shranjeni začetki naslednjega intervala, ki ima istega starša kot interval z začetkom v i, oziroma $NI[i]$ hrani prvi indeks j večji od i, za katerega velja $LCP[j] = LCP[i]$ in vse vrednosti v LCP med indeksi i in j so večje od $LCP[j]$. S polji D in NI lahko iščemo po intervalih, ki se ne začnejo na istem mestu kot njihovi starši. Če se želimo sprehoditi po prvem podintervalu, pa potrebujemo dodatno polje, ki hrani informacijo o otrocih prvega podintervala. To polje imenujemo U (angl. *up* oziroma gor) in na i-tem mestu hrani začetek drugega podinterval predhodnega brata, ki se je končal na mestu $i - 1$. Z drugimi besedami $U[i]$ hrani položaj prvega indeksa j manjšega od i, za katerega velja $LCP[j] > LCP[i]$ in vse vrednosti v LCP med indeksi j in i so večje ali enake od $LCP[j]$. Torej za interval $[i, j]$ velja $D[i] = U[j + 1]$. Začetek intervala drugega otroka v prvem podintevalu intervala $[i, j]$ izračunamo kot $U[D[i]]$. S temi polji se lahko sprehodimo po priponskem polju, kot bi se sprehodili po priponskem drevesu [**?**]. Na Sliki **??** je prikazan tudi zapis intervalnega drevesa s polji U, D in NI.

Poizvedbe z simulacijo: Poizvedba se začne z indeksom $i = 1$ in $j = n$ in preverili smo prvih $o = 0$ znakov. Nato povečamo vrednost o za ena in najdemo interval, ki se začne z vrednostjo $P[o]$, z Algoritmom **??**. Nato v vsakem koraku iskanja za trenutni interval $[i, j]$ poiščemo vrednost $l = \min\{LCP[k]; i < k \leq j\}$. Vemo tudi, da se prvih o znakov P-ja ujema s priponami na intervalu $[i, j]$. Nato preverimo, ali je $P[o, k] = T[SA[i] + o, SA[i] + k]$, pri čemer je $k = \min\{l, m\}$. Če se ujemata, popravimo $o \leftarrow k$ in začnemo iskati podinterval $[i', j']$, za katerega velja $P[o + 1] = T[SA[i'] + o + 1]$, ki bo postal novi interval $[i, j]$. Če je $o = m$, lahko vrnemo, da je P prisoten v T, poročamo, da se P ponovi $(j - i + 1)$-krat v T, ali pa izgradimo seznam indeksov besede $[SA[i], \ldots SA[j]]$, odvisno od poizvedbe. Če pa se $P[o, k]$ ne ujema s $T[SA[i] + c, SA[i] + k]$ pa vrnemo, da P ni prisoten v T, 0 ali prazen seznam, odvisno od poizvedbe. Iskanje podintervala je implementirano s polji D in U za najti prvi podinterval ter s poljem NI za najti interval, ki se začne z znakom $P[o + 1]$, ter časovna zahtevnost iskanja podintervala je $O(|\Sigma|) = O(1)$, saj se velikost abecede med izvajanjem poizvedbe ne spreminja ter je število podintervalov $O(|\Sigma|)$, ker se vsak podinterval razlikuje od drugih vsaj v znaku na položaju $l + 1$. Algoritem za iskanje intervala $[i', j']$ je prikazan na Algoritmu **??** in ne potrebuje LCP polja, saj smo predhodno že naračunali vrednost l, ko se je preverjalo prisotnost podniza vzorca $P[o, k]$.

Torej iskanje s simulacijo priponskega drevesa z uporabo priponskega polja in LCP polja ter l-intervalov potrebuje $O(m)$ časa za poizvedbo *prisotnost*(T, P) ter omogoča pospešitev časa poizvedbe *številoPonovitev*(T, P) na $O(m)$. V priponskem drevesu ta

Algoritem 5: Algoritem za iskanje pod intervala

Vhod: Začetek intervala i, konec intervala j, znak c, število pregledanih znakov l

Izhod: Interval $[i', j']$

```
1  če i < U[j+1] ≤ j potem
2      i' ← U[j+1]
3  sicer
4      i' ← D[i]
5  če T[SA[i]+l+1] == c potem
6      vrni [i, i'−1]
7  dokler NI[i'] ≠ −1
8      j' ← NI[i']
9      če T[SA[i']+l+1] == c potem
10         vrni [i', j'−1]
11     i' ← j'
12 če T[SA[i']+l+1] == c potem
13     vrni [i', j]
14 vrni [−1, −1]
```

poizvedba potrebuje $O(m + occ)$ časa, saj je potrebno prešteti število listov v poddrevesu. Z uporabo simulacije priponskega drevesa tega štetja ni potrebno storiti, saj poznamo velikost intervala, ki ga pokriva vozlišče, ki je koren poddrevesa, čigar pripone se začnejo z iskanim vzorcem. Število pripon je natanko razlika med začetkom in koncem interval, pri čemer konec intervala je začetek naslednjega intervala, ki je shranjen v polju NI. Poizvedba *seznamPojavov*(T, P) še vedno potrebuje $O(m + occ)$ časa, ker je potrebno prehoditi priponsko pole.

Opazka: Metoda iskanja z LCP intervali se lahko uporabi tudi za iskanje po ostalih kompaktnih številskih drevesih (na primer Patricijinih drevesih). Pri tem se nadomesti priponsko polje s poljem listov LA (angl. *leaf array*), kjer i-ta celica polja predstavlja besedo, ki jo predstavlja i-ti list številskega drevesa. Pri tem pa ostaja definicija LCP polja podobna, in sicer je definirano tako, da so za vsaki i med 2 in n vrednosti $LCP[i] = lcp(LA[i-1], LA[i])$ in vrednost $LCP[1] = -1$.

4.2 IZGRADNJA

Podobno kot priponsko drevo, je mogoče izgraditi priponsko polje za besedo T dolžine n z različnimi algoritmi. Časovna zahtevnost teh algoritmov je med $O(n^2 \log n)$ in $O(n)$. Algoritmi bodo predstavljeni od najbolj neučinkovitega do najbolj učinkovitega.

Izgradnja s priponskim drevesom: Priponsko polje je ekvivalentno listom priponskega drevesa, zato se lahko uporabi priponsko drevo za izgraditi priponsko polje. Priponsko polje je zgrajeno v dveh korakih:

1. izgradnja priponskega drevesa z $O(n)$ algoritmom, recimo z Ukkonenovim algoritmom (korak ni potreben če je priponsko drevo že izgrajeno),
2. sprehod v globino po drevesu in zapis indeksov pripon iz listov v polje v vrstnem redu obiska.

V koraku sprehoda je mogoče izgraditi tudi LCP polje. Vrednosti v LCP polju so črkovne dolžine vozlišč, ki so najgloblji predhodnik dveh zaporednih listov. V teh vozliščih se obrne smer sprehoda, saj do takrat je sprehod poteka od lista navzgor in se je v vozlišču obrnil ter poteka od vozlišča do lista navzdol.

Opisan algoritem izgradi priponsko polje in LCP polje v $O(n)$ časa. Vsak korak potrebuje $O(n)$ časa, saj smo izbrali algoritem za izgradnjo priponskega drevesa s časovno zahtevnostjo $O(n)$ in sprehod po drevesu z $O(n)$ vozlišči potrebuje $O(n)$ časa. Pri tem pa algoritem potrebuje 5-krat več dodatnega prostora, kot ga zasede priponsko polje, in razlog za izgradnjo priponskega polje je zmanjšanje količine spomina, ki ga zasede indeks besede. Zato bi potrebovali algoritem, ki izgradi priponsko polje v $O(n)$ časa in ne izgradi priponskega drevesa.

Izgradnja s urejanjem pripon: Priponsko polje je polje indeksov pripon urejenih v leksikografskem vrstnem redu, zato se lahko uporabi urejanje za izgradnjo priponskega polja. Najbolj učinkoviti algoritmi za urejenaje (*Quck sort* oziroma *Merge sort*) potrebujejo $O(n \log n)$ primerjav za izgradnjo priponskega polja. Ker so pripone urejene leksikografsko, vsaka primerjava potrebuje $O(n)$ časa, torej celotna izgradnja potrebuje $O(n^2 \log n)$ časa. Pri tem se potrebuje še dodatnega $O(n)$ časa za izgradnjo LCP polja, saj je potrebno izračunati vse *lcp* vrednosti zaporednih pripon [**?**].

Namesto tega lahko uporabimo korensko urejanje (angl. *RadixSort*). Torej v i-tem koraku korenskega urejanja so pripone urejene v vedrih glede na prvih i znakov. To dejstvo se lahko uporabi za izgradnjo LCP polja, saj se v i-tem koraku lahko zapiše vrednost i na začetek vsakega na novo ustvarjenega vedra. Korensko urejanje potrebuje $O(kn)$ časa, pri čemer je k dolžina korena, in v najslabšem primeru je $k = n$, torej metoda potrebuje $O(n^2)$ časa.

Namesto da se v vsakem koraku podaljša koren za en znak, se lahko koren podvoji. Na ta način potrebuje korensko urejanje $O(\log n)$ korakov in posledično se potrebuje $O(n \log n)$ časa za izgradnjo priponskega polja. Pri tem pa vrednost v LCP polju na začetku vskaega na novo ustvarjenega vedra ni enaka številu že opravljenih korakov, ampak je v intervalu med 2^{i-1} in 2^i, pri čemer je i število že opravljenih korakov urejanja. Torej je potrebno poiskati natančno vrednost znotraj intervala s primerjavo znakov, pri tem pa ni potrebno primerjati prvih 2^{i-1} znakov. Algoritem potrebuje $O(n)$ dodatnega prostora, in sicer 3 polja »celih števil« in 2 bitni polji dolžine n [**?**].

Pri tem pa obstaja bolj učinkovit algoritem za igraditi priponskega pola, ki so ga predlagali Ko idr. [**?**] in potrebuje $O(n)$ časa. Ideja algoritma temelji na deljenju pripon na L pripone (pripona $T[i, n]$ je manjša od pripone $T[i + 1, n]$) in S pripone (pripona $T[i, n]$ je večja od pripone $T[i + 1, n]$), pri čemer so L pripone manjše od S pripon, ki se začnejo z istim znakom c, torej L pripone nastopijo pred S priponami znotraj intervala pripon z istim začetnim znakom. Algoritem izgradi priponsko polje v štirih korakih: deljenje pripon na S in L, ureditev polja glede na prvi znak pripone, premik L pripon na začetek veder s sprotnim urejanjem S pripon in dodatno urejanje L pripon s premikom pripone na začetek intervala, če je pripona, ki je za en znak daljša, tudi L pripona. Vsak korak je lahko storjen z enim sprehodom po polju oziroma besedi, za kar je potrebno $O(n)$ časa. Podobno kot algoritem s korenskim urejanjem, je prostorska zahtevnost tega algoritma tudi $O(n)$, saj se potrebuje 3 polja »celih števil« in 3 dodatna bitna polja (dva dolžine n in enega dolžine $n/2$) [**?**].

4.3 POIZVEDBE

Priponsko polje je bilo izgrajeno kot alternativa priponskemu drevesu, ki potrebuje manj prostora. Zato se ga uporablja za indeksiranje besede T in posledično iskanje vzorcev v njej. V tem podpoglavju bodo predstavljene implementacije za priponsko polje istih poizvedb, ki so bile predstavljene za priponsko drevo.

Najbolj osnovna poizvedba, ki bo uporabljena kot osnova za ostali dve poizvedbi, je *prisotnost*(T, P). Prisotnost vzorca P dolžine m v besedi T lahko preverimo z bisekcijo, saj so pripone v priponskem polju urejene. V vsakem koraku bisekcije preverimo, ali se pripona na sredini interval $[L, R]$ (v prvem koraku je $L = 1$ in $R = n$) ujema z vzorcem P, pri čemer označimo indeks te pripone kot M. Če je $T[SA[M], SA[M] + m - 1] = P$, potem je vzorec P prisoten v besedi T, sicer pa obstaja tak k, za katerega velja $P[k] \neq T[SA[M] + k - 1]$. V tem primeru obstajata dve možnosti: $P[k] < T[SA[M] + k - 1]$ in zato nadaljujemo z iskanjem v intervalu $[L, M]$ ali pa $P[k] > T[SA[M] + k - 1]$ in se nadaljuje z iskanjem v intervalu $[M, R]$. Postopek se nadaljuje dokler $R - L > 1$, ko je $R - L = 1$ in $P[k] \neq T[SA[M] + k]$ potem P in prisoten v besedi T. Tako opisan

postopek potrebuje $O(m \log n)$ časa, saj bisekcija potrebuje $O(\log n)$ primerjav, vsaka primerjava pa potrebuje dodatnih $O(m)$ primerjav, da ugotovimo, ali se pripona in vzorec ujemata.

V predhodnem podpoglavju je bila predstavljena podatkovna struktura LCP polje, ki se jo lahko uporabi za pospešiti iskanje, in sicer implementacija s polji $L\text{-}LCP$ in $R\text{-}LCP$. Poizvedba z LCP polji še vedno temelji na bisekciji, saj je bisekcija najbolj učinkovit način iskanja po urejenem polju. V osnovni različici poizvedbe v vsakem koraku bisekcije preverimo, ali je vzorec manjši, večji ali enak srednji priponi intervala $[L, R]$ z indeksom M. Pri tem lahko preštejemo, koliko znakov se ujema med pripono $SA[M]$ in P ter označimo to vrednost s k. To znanje lahko uporabimo za znižati število primerjav črk med P in $SA[M]$ na $O(m)$ skozi celotno izvajanje bisekcije. Torej na začetku vsakega koraka vemo, da se P ujema z vsaj k znaki in če smo v levem oziroma desnem podintervalom predhodnega intervala. Recimo, da smo v desnem, torej L je bila predhodna sredinska točka. Vemo, da se P in $SA[L]$-ta pripona ujemata v k znakih ter $SA[L]$-ta pripona in $SA[M]$-ta pripona se ujemata v $L\text{-}LCP[M]$ in pripona $SA[L]$ je leksikografsko manjša od $SA[M]$. Torej obstajajo tri možnosti:

1. $k < L\text{-}LCP[M]$, potem se $SA[L]$-ta pripona in $SA[M]$-ta pripona bolj ujemata kot $SA[L]$-ta pripona in P. Ker smo v predhodnem koraku izvedeli, da je P večji od sredne predhodnega intervala, po tem pomeni, da je $P[k{+}1] > T[SA[L{+}k{+}1]] = T[SA[M + k + 1]]$.Torej naslednji pregledani interval je $[M, R]$.

2. $k > L\text{-}LCP[M]$, potem se $SA[L]$-ta pripona in $SA[M]$-ta pripona manj ujemata kot $SA[L]$-ta pripona in P in označimo $L\text{-}LCP[M] = l$. Torej $P[l{+}1] = T[SA[L{+}l + 1]] < T[SA[M + l + 1]]$, saj je $L < M$, ker je $SA[L]$-ta pripona leksikografsko manjša $SA[M]$-ta pripona. Torej se bisekcija nadaljuje na intervalu $[L, M]$.

3. $k = L\text{-}LCP[M]$, potem je potrebno preveriti, ali je P večji od $SA[M]$-te pripone. Pri tem ni potrebno preveriti prvih k znakov, saj vemo, da se ujemajo, ker je se $SA[L]$-ta pripona ujema s $SA[M]$-ta pripona v k znakih in se $SA[L]$-ta pripona tudi ujema z P v k znakih. Med preverjanjem štejemo, koliko znakov se ujema in to zabeležimo kot k'. Če je $P[k{+}k'{+}1] < T[SA[M]{+}k{+}k'{+}1]$ potem nadaljujemo v interval $[L, M]$, sicer je $P[k + k' + 1] > T[SA[M] + k + k' + 1]$ in nadaljujemo v interval $[M, R]$. Preden nadaljujemo v naslednji interval popravimo $k \leftarrow k + k'$, pri čemer $k \leq m$.

Simetrično velja tudi, če smo v levem podintervalu, pri tem pa uporabimo $R\text{-}LCP$, saj je R predhodna srednja točka intervala.

Poizvedba $prisotnost(T, P)$ potrebuje $O(m + \log n)$ časa, da preveri prisotnost vzorca v besedi. Pri tem potrebujemo $O(\log n)$ primerjav, saj se uporablja bisekcijo za učinkovito iskanje po urejenem polju. Skozi celotno izvajanje poizvedbe pa se

potrebuje dodatnega $O(m)$ časa za primerjave med znaki vzorca P in zanki pripon na sredini intervalov bisekcije.

Idejo poizvedbe *prisotnost*(T, P) lahko uporabimo za implementacijo poizvedbe *številoPonovitev*(T, P). Poizvedba vrne število *occ*, ki je število ponovite vzorca P v besedi T. Naivna implementacija bi bila štetje pripon levo in desno od pripone $SA[M]$, ki je prva pripona v bisekciji, ki se ujema z P. Ta postopek potrebuje $O(m + \log n + occ)$ časa, pri čemer se lahko uporabi LCP polje za iskanje ponovitev, saj sta vrednosti $LCP[M]$ in $LCP[M + 1]$ večji ali enaki m natako tedaj, ko se priponi $SA[M - 1]$ in $SA[M + 1]$ začneta z vzorcem P. Poizvedbo se lahko pohitri na $O(m + \log n)$ z dvema bisekcijama. Prva bisekcija je potrebna za iskanje začetka intervala L vseh pripon, ki se začnejo z P, druga bisekcija pa je potrebna za iskanje konca intervala R vseh takih pripon. Število pripon, ki se začne s P, je $occ = R - L + 1$. Vsaka bisekcija potrebuje $O(m + \log n)$ časa, torej tudi poizvedba *številoPonovitev*(T, P) potrebuje $O(m + \log n)$ časa.

Na podoben način poizvedba *seznamPojavov*(T, P) uporabi interval vseh pripon, ki se začnejo s P, $[L, R]$ za izdelati seznam indeksov ponovitev vzorca P v besedi T. Za najti interval $[L, R]$ je potrbeno $O(m + \log n)$ časa, za pretveriti interval v priponskem polju v seznam indeksov pripon pa je potrebnih dodatnih *occ* dostopov do priponskega polja oziroma $O(occ)$ časa. Torej poizvedba *seznamPojavov*(T, P) potrebuje $O(m + \log n + occ)$ časa.

5 KOMPAKTNA PREDSTAVITEV PRIPONSKEGA DREVESA

Za daljše besede T lahko priponska drevesa presežejo velikost notranjega pomnilnika. Prva možna reštiev tega problema je uporaba priponskega polja ter LCP polja za simulirat priponsko drevo, ampak se pri $1,4$-krat dalši vhodni besedi ponovno pojavi problem preseženja velikosti notranjega pomnilnika. Torej se potrebuje reštitev, ki bo še bolj prostorsko učinkovita.

Vsako vozlišče priponskega drevesa hrani niz, ki prestavlja vhodno povezavo, in reference na otroke, starša ter na vozlišče, na katerega kaže priponska povezava. Zato prostor, ki ga zasedejo drevesa na pomnilniku, ni odvisna zgolj od števila vozlišč, ampak je odvisna tudi od arhitekture računalnika, ki določa velikost pomnilniškega naslova, s katerim se referencira druga vozlišča. Na primer priponsko drevo človeškega genoma, ki ima dolžino 3 milijarde nukleotidov iz abecede velikosti pet (pri tem je vštet v abecedo tudi, znak za konec besedila), potrebuje med 60 in 144 GB notranjega pomnilnika, ki je odvisno od podatkov shranijih v vozliščih [**?**]. Ekvivalentno priponsko polje pa potrebuje med 12 in 60 GB notranjega pomnilnika odvisno od dodatnih podatkovnih struktur, ki so bile dodane priponskemu polju. Zato prostorsko učinkovita reštiev ne sme temeljiti na referencah pomnilniških naslovov.

Ta problem se da rešiti s kompaktno predstavitvijo podatkovnih struktur. Podatkovna struktura, ki se jo bo predstavilo v tem poglavuju, je imenovana kompaktno priponsko drevo (angl. *Compressed Suffix Tree* oziroma CST) in predstavlja eno možno kompaktno predstavitev priponskega drevesa. Preden se lahko definira kompatno predstavitev je potrebno definirati abstraktno podatkovno strukturo priponsko drevo, ki poda vse operacije, ki so potrebne za pravilno delovanje priponskega drevesa [**?**].

Definicija 5.1. Abstraktna podatkovna struktura priponsko drevo nad besedilo T podpira sledeče operacije:

1. $koren()$: vrne koren priponskega drevesa,
2. $jeList(v)$: vrne »Da«, če je vozlišče list, sicer vrne »Ne«,
3. $otrok(v, z)$: vrne otroka w, katerega povezava se začne z znakom z. Če otrok ne obstaja vrne 0,
4. $prviOtrok(v)$: vrne vozlišče w, ki je prvi otrok vozlišča v,

5. $nbrat(v)$: vrne vozlišče w, ki je naslednji brat od vozlišča v,
6. $pbrat(v)$: vrne vozlišče w, ki je predhodni brat od vozlišča v,
7. $starš(v)$: vrne vozlišče w, ki je starš od vozlišča v,
8. $povezava(v, i)$: vrne i-to črko na povezavi do vozlišča v,
9. $globinaNiza(v)$ vrne število znakov na poti iz korena do vozlišča v,
10. $lca(v, w)$: vrne najnižjega skupnega prednika od v in w,
11. $sl(v)$: vrne vozlišče w, na katerega kaže priponska povezava iz vozlišča v.

V podpoglavju **??** je bil predstavili način simulacije priponskega drevesa s pomočjo priponskega polja SA in polja najdaljših skupnih predpon LCP. Z uporabo kompaktnih različic teh dveh podatkovnih struktur je možno implementirati kompaktno priponsko drevo. Ker pa je veliko operacij iz Definicije **??** operacij nad drevesi, se lahko doda še kompaktno predstavitev topologije drevesa, saj le ta pospeši operacije nad drevesi. Torej sledi definicija za podatkovno strukturo kompaktno priponsko drevo.

Definicija 5.2. Kompaktno priponsko drevo nad besedilom T je sestavljeno iz sledečih podatkovnih struktur:

1. topologija drevesa τ,
2. kompaktno priponsko polje SA,
3. kompaktna predstavitev polja najdaljših skupnih predpon LCP.

V nadaljevanju poglavja bo predstavljena Sadakanejeva [**?**] implementacija kompaktnega priponskega drevesa, ki je prva kompaktna predstavitev priponskega drevesa. V Poglavju **??** je bilo predstavljenih več različnih predstavitev topologije dreves. Implementacija kompaktnega priponskega drevesa pa uporablja predstavitev z zaporedjem uravnoteženih oklepajev.

Topologija drevesa: Ker se za kompaktno priponsko drevo uporablja BP kot topologijoa drevsa, je potrebno podpirati operacije $rang_p$, $izbira_p$, $zapri$, $odpri$ in $oklepa$, ki se izvajajo v konstantnem času za $p \in \{0, 1\}^*$. Pri tem so potrebne dve dodatni podatkovni strukturi za operacijo $rang$ ($rang_0$, $rang_{01}$) in tri za operacijo $izbira$ ($izbira_0$, $izbira_1$ in $izbira_{01}$). Ostale operacije pa uporabljajo podatkovno strukturo za višek predstavljeno, ki sta jo predlagala Munro in Raman [**?**] in je implementirana na podoben način kot dodatna podatkovna struktura za $rang$, namesto rmM-drevesa. To podatkovno strukturo imenujemo L, ki hrani polje najnižjih viškov L' in v celici $L'[i]$ je

shranjen najnižji višek v i-tem vedru dolžine $O(\log n)$. To pomeni, da je za operacijo $otrok(v, i)$ potrebno $O(|\Sigma|) = O(1)$ časa.

Operacija $lca(v, w)$ pa potrebuje dodatno podatkovno strukturo, ki ji omogoča konstanten čas izvajanja rmq poizvedbe nad viškom. Ta podatkovna struktura potrebuje $o(n)$ dodatnih bitov. In sicer se izgradi dvodimenzionalno celico tabele $M[i][k]$, ki shrani položaj najmanjšega viška na intervalu $L'[i..i+2^k-1]$. Torej operacija $lca(v, w)$ se izračuna kot

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \min\{L[v, e]\}, \\ \min\{M[v'][k], M[w' - 2^k + 1][k]\}, \\ \min\{L[s, w]\} \end{array} \right\},$$

pri čemer je $k = \lfloor \log (w' - v') \rfloor$, v' predstavlja vedro v L', ki je prvo vedro po vedru z vozliščem v, w' je vedro v L', ki je prvo vedro pred vedru z vozliščem w, e predstavlja konec vedra v L, ki vsebuje v, in s predstavlja začetek vedra, ki vsebuje w. Pri tem vsaka poizvedba v L in vsaka poizvedba v M potrebuje konstantno časa [**?**, **?**].

V primeru, da so potrebne dodatne operacije, ki temeljijo na rMq operaciji in $|\Sigma| > \log n$, se lahko doda še rmM-drevo, ki omogoča izvedbo operaciji v $O(\log n)$ ter pospeši izvajanje oziroma omogoča implementacijo tudi drugih operacij.

Lema 5.3. *Podatkovna struktura za predstavitev topologije priponskega drevesa τ nad besedilom T dolžine n potrebuje $4n + o(n)$ bitov.*

Dokaz. Priponsko drevo nad besedilom T ima $2n - 1$ vozlišč: od tega je $n - 1$ notranjih vozlišč in n listov. Zato je potrebnih $4n - 2$ bitov za zapis topologije drevesa τ s sekvenco uravnoteženih oklepajev. Torej celotna podatkovna struktura topologije drevesa potrebuje $4n + o(n)$ bitov, saj vsaka dodatna podatkovna struktura potrebuje še dodatnih $o(n)$ bitov. □

Kompaktno priponsko polje: Naslednja podatkovna struktura, ki je potrebna za pravilno delovanje kompaktnega priponskega drevesa, je kompaktno priponsko polje (angl. *Compressed Suffix Array* oziroma CSA). Kompaktna priponska polja znižajo prostorsko zahtevnost priponskega polja iz $O(n \log n)$ oziroma $O(nw)$ na $O(n \log |\Sigma|)$ bitov [**?**] ali celo na $nH_h + o(n)$ bitov [**?**], pri čemer je red $h \leq \alpha \log_{|\Sigma|} n; 0 < \alpha < 1$ in H_h je entropija h-tega reda, ki se v praksi uporablja kot merilo prostorske zahtevnosti pri kodiranju besedil [**?**].

Obstajata dve različici kompaktnih priponskih polj: prva implementacija temelji na funkciji Ψ, druga implementacija imenovan FM-indeks pa uporablja LF funkcijo, ki je inverzna funkcija od Ψ [**?**, **?**].

Implementacije kompaktnega priponskega polja, ki so lahko uporabljajo pri implementaciji kompaktnih priponskih dreves, morajo podpirati sledeče operacije.

Definicija 5.4. Kompaktno priponsko polje nad besedilom T, ki je uporabljeno za predstavitev kompaktnega priponskega drevesa, podpira sledeče operacije:

1. *pripona*(i) vrne $SA[i]$ v času t_{SA},
2. *inverz*(i) vrne $j = SA^{-1}[i]$, pri čemer je $SA[j] = i$, v času t_{SA},
3. $\Psi(i)$ vrne $SA^{-1}[SA[i] + 1]$ v času t_Ψ,
4. *besedilo*(i, d) vrne $T[SA[i], SA[i] + d - 1]$ v času $O(dt_\Psi)$.

Funkcija Ψ je uporabna v kompaktnih priponskih drevesih za izgradnjo priponskih povezav v času t_Ψ, čeprav ni potrebna za pravilno delovanje priponskega polja. Iz definicije funkcije Ψ je razvidno, da jo lahko simuliramo z uporabo operacij *inverz*(i) in *pripona*(i). Iz Definicije **??** sledi, da mora kompaktno priponsko polje podpirati funkcijo Ψ, zato implementacije z FM-indeksom ne pridejo v poštev.

V nadaljevanju tega dela poglavja bo predstavljena preprosta različica kopaktenga priponskega polja. Ta različica je bila izbrana zaradi enostavne implementacije operaciji ter preproste vizualizacije podatkovne strukture. V tej implementacije so vse štiri operacije implementirane z uporabo Ψ funkcije ter z vzorčenjem priponskega polja SA in inverznega priponskega polja SA^{-1}. Na ta način ni potrebno hraniti besedila T in celotnega priponskega polja SA.

Funkcija Ψ je predstavljena z istoimenskim poljem, katerega i-ta celica je $\Psi[i] = \Psi(i) = SA^{-1}[SA[i] + 1]$. Ideja kompaktnega zapisa polja Ψ temelji na dejstvu, da se lahko premikamo po besedilu in posledično med priponami zgolj z uporabo Ψ funkcije, saj je $SA[\Psi[i]] = SA[i] + 1$. Torej se lahko znebimo besede T in jo zamenjamo z bitno polje spremeb v prvem tanku D, pri čemer $D[i] = 1$, ko je $i = 1$ ali $T[SA[i]] \neq T[SA[i + 1]]$, ter s poljem znakov S urejenih v leksikografskem vrstnem redu, tako da je $T[SA[i]] = S[rang_1(D, i)]$ [**?**].

Kompaktni zapis polja Ψ razdeli polje Ψ na $|\Sigma|$ delov in uvede polje C začetkov intevalov v Ψ polju, ki se začnejo z poljubnim zankom $c \in \Sigma$, oziroma $C[c] = i$ za poljubn znak iz Σ, tako da je $T[SA[i + 1]] = c$ in $T[SA[i]] \neq c$. Polje C potrebuje $O(|\Sigma| \log n)$ bitov. Tako se lahko nadomesti Ψ polje z polji Ψ_c; $c \in \Sigma$, kjer je $\Psi[i] = \Psi_c[i']$, za $i' = i - C[S[rang_1(D, i)]]$. Vsako polje Ψ_c se lahko zapiše kot bitno polje B_c dolžine n, pri čemer $B_c[\Psi_c[i]] = 1$ za $1 \leq i \leq n_c$, kjer je n_c število ponovitev znaka c v besedilu T. Torej velja $\Psi_c[i'] = izbira_1(B_c, i')$ ali $\Psi[i] = izbira_1(B_c, i - C[c])$, kjer $c = S[rang_1(D, i)]$. Bitna polja B_c so zelo redka (število enic je bistveno manjše kot število ničel), torej se jih lahko stisne iz $n + o(n)$ bitov na $n_c \log \frac{n}{n_c} + O(n_c)$ bitov, pričemer ohranimomožnost opravljnja operacije *izbira*$_1$ v konstantnem času, kar pomeni, da funkcija Ψ potrebuje $nH_0(T) + O(n + |\Sigma|w)$ bitov, pri čemer $H_0(T)$ je entropija besedila T, ter potreuje $t_\psi = O(1)$ časa [**?**].

Do sedaj predstavljena podatkovna struktura omogoča zgolj iskanje števila ponovitev vzorca v besedilu, saj omogoča premikanje med intervali z priponami z istim začetnim zankom, ne pa lokacije pojavov vzorca v besedilu. Za to sta potrebni dodatni podatkovni strukturi, ki nadomestita priponsko polje SA ter inverzno polje SA^{-1}. Oba polja se lahko nadomesti s poljema vzorcev. Priponsko polje SA se vzorči $l = \Theta(\log n)$-krat, kar je dober kopromis med časovno in postorsko zahtevnostjo. Pri tem se uporabi dodatno bitno polje $B[1, n]$, kjer $B[i] = 1$ natanko tedaj, ko $i = 1$ ali $SA[i] \mod l = 0$. Polje vzorcev SA_S vsebuje vrednosti $SA_S[rang_1(B, i)] = SA[i]$, ko je $B[i] = 1$. Ostale vrednosti $SA[i]$ se izračuna kot $SA[i] = SA_S[rang_1(B, i_k)] - k$, pri čemer je i_k k-kratna aplikacija funkcije Ψ nad vrednostjo i oziroma $i_k = \Psi^k(i)$ (na primer $i_2 = \Psi^2(i) = \Psi[\Psi[i]]$). Ker je $k < l$, je časovna zahtevnost poizvedbe v priponskem polju $t_{SA} = O(l) = O(\log n)$ [**?**].

Podobno se vzorči tudi polje inverzov pripon SA^{-1} le, da se ta vzorči na enakomernih intervalih dolžine $l = \Theta(\log n)$, kar je dober kopromis med časovno in postorsko zahtevnostjo. Torej ima i-ta celica polja $SA_S^{-1}[1, \lfloor n/l \rfloor]$ vrednost $SA_S^{-1}[i] = SA^{-1}[il]$. Najprej se izračuna $i' = \lfloor i/l \rfloor l$, nato se $i - i'$-krat aplicira funkcija Ψ nad vrednostjo $j' = SA_S^{-1}[i'/l]$, kar se zapiše kot $SA^{-1}[i] = \Psi^{i-i'}[j'] = \Psi^{i-i'}[SA_S^{-1}[i'/l]]$. Isti razmisliek kot za polje SA velja tudi za polje SA^{-1}, ki ima časovno zahtevnost dostopa $t_{SA} = O(l) = O(\log n)$. Pri tem velja omeniti, da če se inverzno priponsko polje uporablja bolj poredko, se lahko vzorči z večjim faktorjem l kot se je vzorčilo priponsko polje SA. Na ta način se zmanjša prostorsko zahtevnost, ampak se poslabša časovne zahtevnosti operacije, ki se jo poredko uporablja [**?**].

Tako predstavljeno kompaktno priponsko polje potrebuje $|\Sigma|n + O(n)$ bitov pred stiskanjem zeloredkih bitnih polji. Ker pa je večina bitnih polji redkih, saj je število bitov z vrednostjo 0 veliko večje kot število bitov z vrednostjo 1, se lahko binta polja zakodira na bolj kompakten način z enim od algorimom stiskanja. Torje stisnjena bitna polja potrebujejo $nH_0(T) + O(n + |\Sigma|w)$ bitov za implementacijo kompaktenga priponskega polja. Potrebni čas za izračun funkcije Ψ je $t_\Psi = O(1)$ ter potrebni čas za iskanje po priponskem polju in inverznem priponskem polju je $t_{SA} = lt_\Psi = t_\Psi O(\log n) = O(\log n)$.

Polje najdaljših skupnih predpon: Zadnja podatkovna struktura, ki sestavlja kompaktno priponsko drevo, je polje najdaljših skupnih predpon oziroma LCP polje. Namesto LCP polja se bomo osredotočili na permutacijo LCP polja imenovano $PLCP$, za katero velja relacija $PLCP[i] = LCP[SA^{-1}[i]]$ ali $LCP[i] = PLCP[SA[i]]$ ter jo je lažje predstaviti v kompaktnem zapisu [**?**, **?**].

Permutacijo $PLCP[1, n-1]$ je lažje kompaktno predstaviti, saj je zaporedje $PLCP[i]+2i$ za vsak i med 1 in $n-1$ strogo naraščajoče. Zaporedje je strogo naraščajoče, saj je $PLCP[i+1] \geq PLCP[i] - 1$. To lahko enostavno dokažemo, saj če je $PLCP[i] = 0$

mora biti tudi $PLCP[i+1] = 0$. Drugače pa obstajata $T[j, n]$ in $T[i, n]$ ter $T[i, n] < T[j, n]$, ki imata najdaljšo skupno predpono dolžine $PLCP[j] > 0$. Potem ima $T[i+1, n]$ najdaljšo skupno predpono s $T[j+1, n]$ dolžine $PLCP[j] - 1$ in vse pripone, ki so leksikografsko manjši od $T[j+1, n]$ in imajo skupno predpono, imajo najdaljšo skupno predpono s $T[j+1, n]$ vsaj dolžino $PLCP[j]-1$. Torej je $PLCP[j+1] = PLCP[j]-1$ in posledično še vedno velja $PLCP[j]+2j < PLCP[j+1]+2(j+1) = PLCP[j]+2j+1$. Ker je $PLCP[n-1]+2(n-1) < 2n$, saj ima lahko $T[n-1, n]$ dolžino najdaljše skupne predpone s poljubno pripono 1, se lahko permutacijo $PLCP$ in posledično LPC polje zapiše kot bitno polje $H[1, 2n-1]$. Celica $H[j] = 1$ za $j = PLCP[i] + 2i$, kjer je i med 1 in $n-1$, sicer pa je $H[j] = 0$. Pri tem bitno polje H potrebuje dodatno podatkovno strukturo za $izbiro_1$ [**?**, **?**].

Vrednost $LCP[i]$ se lahko pridobi v času $O(t_{SA})$. Vrednost je izračunana z uporabo formule $LCP[i] = izbira_1(H, SA[i]) - 2SA[i]$. Poizvedba potrebuje $O(t_{SA})$ časa, saj je potrebno izračunati vrednost $SA[i]$, ki se jo izračuna v $O(t_{SA})$ časa, ostale operacije pa potrebujejo konstanten čas. Če je uporabljena predhono predstavljena implementacija kompaktnega polja je čas poizvedbe v LCP polj enak $O(\log n)$. Prostorska zahtevnost polja LCP je predstavljena s sledečo lemo:

Lema 5.5. *Podatkovna struktura LCP potrebuje $2n + o(n)$ bitov za pravilno delovanje.*

Dokaz. Podatkovna struktura LCP je shranjena kot bitno polje $H[1, 2n-1]$. Bitno polje H potrebuje dodatnih $o(n)$ bitov za dodatno podatkovno strukturo, ki omogoča izvajanje operacije $izbira_1$ v konstantnem času. Ker je bitno polje H dolžine $2n-1$ in potrebuje dodatnih $o(n)$ bitov, potem celotna podatkovna struktura za shraniti polje LCP potrebuje $2n + o(n)$ bitov. □

Sedaj, ko so bile predstavljene vse podatkovne strukture, ki sestavljajo kompaktno priponsko drevo, je možno izračunati velikost celotnega kompaktnega priponskega drevesa. Ker obstaja več implementacij kompaktnega priponskega polja, ki se lahko uporabijo v kompaktnem priponskem drevesu, bo velikost priponskega drevesa vsebovala člen $|CSA|$, ki predstavlja velikost kompaktnega priponskega polja. Velikost kompaktnega priponskega drevesa je predstavljena v sledečem izreku:

Izrek 5.6. *Podatkovna struktura kompaktno priponsko drevo nad besedo T dolžine n potrebuje $|CSA| + 6n + o(n)$ bitov, pri čemer $|CSA|$ predstavlja velikost kompaktnega priponskega polja.*

Dokaz. Ker obstajajo različne implementacije kompaktnega priponskega polja, je potrebnih $|CSA|$ bitov za shraniti kompaktno priponsko polje SA. Iz Leme **??** sledi, da je potrebnih $4n + o(n)$ bitov za shraniti topologijo drevesa τ. Iz Leme **??** pa sledi, da je potrebnih $2n + o(n)$ bitov za shraniti polje LCP.

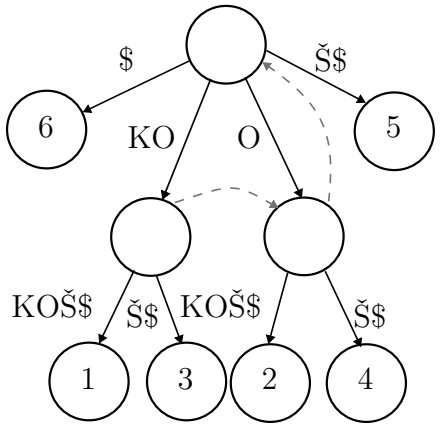
Torej je velikost kompaktnega priponskega drevesa CST enaka $|CSA| + 6n + o(n)$ bitov. □

Obstaja več različnih implementacij kompaktnega priponskega polja, zato Sadakane [**?**] predlaga dve implementaciji. Prva predlagana implementacija je prostorsko učinkovita in uporablja kompaktno priponsko polje, ki so ga predlagali Grossi idr. [**?**].

Posledica 5.7. *Kompaktno priponsko drevo implementirano s pomočjo kompaktnega priponskega polja, ki potrebuje* $|CSA| = nH_h + O(n \log\log n / \log_{|\Sigma|} n)$ *bitov, potrebuje* $|CST| = nH_h + 6n + O(n \log\log n / \log_{|\Sigma|} n)$ *bitov.*

Druga predlagana implementacija pa je časovno učinkovita in uporablja kompaktno priponsko polje, ki ga sta ga predlagala Grossi in Vitter [**?**].

Posledica 5.8. *Kompaktno priponsko drevo implementirano s pomočjo kompaktnega priponskega polja, ki potrebuje* $O(\frac{1}{\epsilon} n \log |\Sigma|)$ *bitov, potrebuje* $|CST| = O(\frac{1}{\epsilon} n \log |\Sigma|)$ *bitov. Pri tem je* ϵ *poljubna konstanta, ki ima vrednost* $0 < \epsilon < 1$.



	1	2	3	4	5	6
S	**$**	**K**	**O**	**Š**		
C	**0**	**1**	**3**	**5**		
D	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
B_1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
B_2	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
B_3	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
B_4	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
B	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
SA_S	**6**	**2**	**4**			
SA_S^{-1}	**4**	**5**	**1**			

	1	2	3	4	5	6
LCP	**-**	**0**	**2**	**0**	**1**	**0**
SA	**6**	**1**	**3**	**2**	**4**	**5**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
H	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**							
	0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Slika 14: Primer kompaktnega priponskega priponskega drevesa nad besedo »KOKOŠ$«. Za lažje razumevanje sta na levi strani sliki priazana tudi ekvivalentno priponsko drevo ter ekvivalentno priponsko polje.

Primer kompaktnega priponskega drevesa je prikazan na Sliki **??**. Poleg kompaktne predstavitve (na desni strani slike), so za lažjo berlivost in primerjavo prikazana tudi ekvivalentno priponsko drevo ter ekvivalentno priponsko polje (na levi strani slike). Prikazana podatkovna struktura potrebuje približno 12 B (natančno potrebuje 97 bitov).

Pri tem so cela števila zapisana z $\log n$ biti. Ekvivalentno priponsko drevo potrebuje vsaj 15 B (oziroma 102 bita), priponsko polje pa potrebuje vsaj 4 B (oziroma 33 bitov, pričemer priponsko polje, ki simulra priponsko drevo potrebuje približno 11 B oziroma 87 bitov). Pri tem nobena podatkovna struktura ne vključuje dodatnih podatkovnih struktur za opravljanje operacij v konstantnem času. Ne kompaktne podatkovne strukture ponavadi ne uporabljajo zapisa celih števil z $O(\log n)$ biti, kot je bilo uporabljeno v teh kalkulacijah, ampak se uporablja vsaj 1 B (8 bitov) ponavadi 4 B, kar poveča razliko.

Izboljšave: Prostorsko zahtevnost kompaktnega priponskega drevesa je možno še dodatno znižati na $|CSA| + o(n)$. Russo idr. [**?**] so predstavili način kako doseči to prostorsko zahtevnost. To so dosegli, tako da so vzorčili $O(n/\delta)$ vozlišč, pri čemer $\delta = \omega(\log_{|\Sigma|} n)$ in predstavlja faktor vzorčenja. Vzorčeno drevo potrebuje $o(n) = O(n/\log_{|\Sigma|} n)$ bitov. Poleg vzorčenja topologije drevesa, so se znebili tudi LCP polja. To jim je omogočalo znižanje prostorske zahtevnosti iz $|CSA| + 6n + o(n)$ bitov na $|CSA| + o(n)$ bitov. Na ta račun pa se je dvignila časovna zahtevnost nekaterih operacij za $\omega(\log n)$ krat, če se želi ohraniti $o(n)$ dodatnega prostora. Nekatere od teh operacji so predhodno potrebovale konstanten čas izvajanja.

Preden se nadaljuje z izgradnjo in poizvedbami nad CST, se lahko nadaljuje s primerom človeškega genoma iz začetka poglavja. S priponskim drevesom se potrebuje 144 GB notranjega spomina za indeksirati celoten človeški genom. Z uporabo kompaktnega priponskega drevesa, namesto priponskega drevesa, pa je potrebnih približno 3 GB delovnega spomina za indeksirati celoten genom. Razlika v zahtevanem prostoru omogoča, da je lahko celotno kompaktno priponsko drevo shranjeno v delovnem spominu, za razliko od priponskega drevesa, za katerega to ni mogoče[1].

5.1 IZGRADNJA

Kompaktno priponsko drevo je možno izgradi iz priponskega drevesa. Tak način izgradnje kompaktnega priponskega drevesa ni prostorsko učinkovit, saj je potrebno prvo izgraditi celotno priponsko drevo. Zato bi bilo bolje izgraditi kompaktno priponsko drevo neposredno iz besede, kot je to storjeno za priponsko drevo in priponsko polje.

Kompaktno priponsko drevo je mogoče izgradi neposredno iz vhodnega besede T. Pri tem so potrebne dodatne podatkovne strukture za izgradnjo posamičnih komponent. Tudi te dodatne podatkovne strukture so kompaktne podatkovne strukture. Izgradnja kompaktnega prionskega drevesa poteka v sledečih treh korakih:

[1]Nekateri strežniki omogočajo večjo količino delavnega spomina, ki presega 144 GB delovnega spomina. Večina potrošniških računalnikov pa še vedno uporablja med 8 GB in 64 GB delovnega spomina.

1. izgradnja kompaktnega priponskega polja SA iz besede T,
2. izgradnja polja LCP iz kompaktnega priponskega polja SA in besede T,
3. izgradnja topologije drevesa τ iz LCP polja.

Izgradnja CSA: Prva zgrajena podatkovna struktura je kompaktno priponsko polje SA. Obstajajo različne implementacije kompaktnega priponskega polja, zato ni mogoče predstaviti splošnega algoritma za izgradnjo le tega. V nadaljevanju bo predstavljen algoritem izgradnje predhono predstavljene implementacije CSA. Ker je priponsko polje implementirano s pomočjo funkcije Ψ (shranjena v istoimenskem polju), je potrebno naračunati polje Ψ. To je storjeno s pomočjo Burrows-Wheelerjeve preslikave (angl. *Burrows-Wheeler Transform* oziroma BWT), ki je izdelana s pomočjo priponskega polja in besede. Preslikavo se gradi iz leve proti desni, torej se lahko BWT izgradi postopoma z deli priponskega polja dolžine b, saj za $b = n/\log n$ je potrebnih $o(n)$ bitov dodatnega prostora in $O(n \log n)$ časa [**?**].

Priponsko polje SA se ne razdeli na b delov, ampak je lažje najti najmanjše število predpon, ki se pojavijo na začetku največ b-tim priponam, ter se na ta način razdeli priponsko polje SA. Sledi izračun pripon, ki sodijo v določeno vedro dolžine b priponskega polja SA. Pripone v tem vedru se leksikografsko uredijo, najpogosteje z uporabo korenskega urejanja. Vrednost BWT se naračuna s pregledom vseh pripon v vedru. Pripone se shrani v polje $L[1, n]$, kjer je $L[kb+j] = T[SA[j]-1]$, pri čemer k predstavlja zaporedno število vedra in $T[0] = \$$ [**?**].

Ko je polje L izračunano, se kompaktno predstavitev polja Ψ zapiše kot bitna polja B_c za vsak znak $c \in \Sigma$. Vsako bitno polje B_c se inicializira z ničlami. Če je $L[i] = c$ potem se nastavi $B_c[i] = 1$. To je lahko storjeno brez dodatnega prostora za polje L, saj ni potrebno zapisati črke $c = T[A[j] - 1]$ v polju L, ampak se jo lahko neposredno zapiše v bitno polje $B_c[kb + j] = 1$ [**?**].

Vzporedno z izdelavo kompaktne predstavitve poja Ψ se lahko naračuna tudi polja vzorcev SA_S in SA_S^{-1}, saj se za izgradnjo sprotno naračunava priponsko polje SA. Torej za izgradnjo poji vzorcev ni potrebno dodatnega časa. Čas potreben za izgradnjo kompaktnega priponskega polja SA je $O(n \log n)$. Večina operacij potrebuje $O(n)$ časa. Iskanje pripon, ki spadajo v določeno vedro, potrebuje $O(n)$ časa za vsako vedro, torej potrebuje $n/b \cdot O(n) = (n \log n)/n \cdot O(n) = O(n \log n)$ časa za naračunat vse pripone.

Izgradnja LCP strukture: Bitno polje H, ki predstavlja LCP polje, je naslednja izgrajena podatkovna struktura. Ker je $H[j] = 1$ za $j = PLCP[i] + 2i$, se H izračuna direktno iz polja $PLCP$.

Vrednosti v polju $PLCP$ so izračunane od 1 do n. Vrednost $PLCP[1]$ je izračunan s štetjem zaporednih znakov, ki se ujemajo med $T[1, n]$ in $T[SA[SA^{-1}[1]-1], n]$. Ker je

$PLCP[i-1] \leq PLCP[i]+1$, potem je vrednost $PLCP[i]$ število skupnih zaporednih znakov med $T[i+d,n]$ in $T[SA[SA^{-1}[i]-1]+d,n]$, pri čemer $d = \max\{PLCP[i-1]-1,0\}$. Pri izgradnji bitnega polja H ni potrebno prvo naračunati polje $PLCP$, saj se lahko sprotno vpiše enico na mesto izračunane vrednosti $PLCP[i]+2i$ v bitnem polju H [**?**].

Za izgradnjo LCP polja, ki je predstavljeno kot bitno polje H, je potrebnih $O(n)$ dostopov do priponskega polja SA. Vsak dostop do priponskega polja potrebuje $O(t_{SA})$ časa (natančen čas je odvisen od implementacije priponskega polja), ki je za predhodno predstavljeno implementacijo $t_{SA} = O(\log n)$, in potemtakem je za izgradnjo potrebno $O(nt_{SA})$ ali za predhodno predstavljeno implementacijo $O(n \log n)$.

Izgradnja topologije drevesa: Zadnja izgrajena podatkovna struktura je topologija priponskega drevesa τ. Čeprav se zdi, da ni mogoče izgraditi topologije drevesa, ne da bi se izgradilo celotno priponsko drevo, je to mogoče zgraditi zgolj z uporabo priponskega polja SA in LCP polja. Ideja algoritma za izgradnjo topologija priponskega drevesa τ je podobna algoritmu Kasai idr. [**?**], ki je bil predhodno predstavljen.

To je storjeno s sprehodom po priponskem polju SA iz leve proti desni ter za vsako pripono i se doda nov list. Novi dodani list i je novo skrajno desno vozlišče v do sedaj izgrajenem drevesu ter ima skupnega predhodnika v z $i-1$-im listom na črkovni globini $globinaNiza(v) = LCP[i]$. Če je tako vozlišče v že v drevesu potem list i postane njegov desni otrok. Sicer $globinaNiza(v) < LCP[i]$ in obstaja vozlišče u, ki je lahko $i-1$-vi list, za katerega velja $globinaNiza(u) > LCP[i]$. V tem primeru se ustvari novo vozlišče v', ki postane desni otrok od v ter ima dva otroka, in sicer levega otroka u ter desnega otroka listi i. Na ta način se izgradi priponsko drevo zgolj iz priponskega polja SA in LCP polja. Predstavljena metoda je implementirana z uporabo sklada, ki hrani vozlišče v ter črkovno globino $globinaNiza(v)$. Na skladu se ne shrani kazalca na vozlišče, ampak se shrani predstavitev poddrevesa s korenom v vozlišču v z zaporedjem uravnoteženih oklepajev $P(v)$. Vozlišče v, za katerega velja $globinaNiza(v) \leq LCP[i]$, se poišče s snetjem vozlišč iz sklada, dokler se pridemo vozlišče, za katerega pogoj drži. Tako vozlišče vedno obstaja, saj ima koren črkovno dolžino $globinaNiza(koren) = 0$. Na sklad je dodanih največ $n-1$ vozlišč, ker ima priponsko drevo največ $n-1$ notranjih vozlišč. Da bo na koncu izgradnje sklad prazen in topologija drevesa τ pravilna, se sklad sprazni in na ta način se pridobi pravilno topologijo τ, saj vsa vozlišča na skladu ne shranjujejo topologije za njihovo skrajno desno poddrevo, ker le to še raste. Torej vsakič, ko se vozlišče sname iz sklada, se topologija poddrevesa doda staršu vozlišča, ki je vozlišče na vrhu sklada [**?**].

Izgradnja topologije drevesa poteka v času $O(nt_{SA})$ oziroma $O(n \log n)$ za predhono predstavljeno implementacijo CSA. V vsakem koraku je v topologijo drevesa dodan nov list. Za vsak list je lahko dodano novo vozlišče na sklad, če za črkovno dolžino

vozliča v, ki je trenutno na vrhu sklada, velja $globinaNiza(v) < LCP[i]$, pri čemer je i zaporedno število pripone, ki jo predstavlja list, v priponskem polju. Za vsak list so iz sklada odvzeta vozlišča, za katera velja $globinaNiza(v) \geq LCP[i]$. V času izgradnje drevesa, je na sklad potisnjenih in snetih največ $n-1$ vozlišč. Ker postopek ustvari n listov in največ $n-1$ notranjih vozlišč, je $O(nt_{SA})$ oziroma $O(n \log n)$ potrebni čas izgradnje topologije drevesa τ.

Izrek 5.9. *Časovna zahtevnost izgradnje kompaktnega priponskega drevesa za vhodno besedo T je $O(n \log n)$ ter v času izgradnje je prostorska zahtevnost vedno kompaktna.*

Dokaz. Kompaktno priponsko drevo je sestavljeno iz treh delov, torej je potrebno analizirati časovno zahtevnost izgradnje vsakega dela. Za izgradnjo kompaktnega priponskega polja je potrebno $O(n \log n)$ časa, saj je treba najti pripone, ki so del posamičnega vedra priponskega polja.

Za izgradnjo kompaktne različice LCP polja je tudi potrebno $O(n \log n)$ časa, saj je za vsako pripono potrebo izračunati dolžino predpone, v kateri se ujema s predhodno pripono. Pri tem je potreben za vsako pripono en dostop to priponskega polja, ki traja $O(\log n)$ časa za predstavljeno implemetacijo CSA, torej je za n pripon potrebno $O(n \log n)$ časa.

Za izgradnjo topologije drevesa pa je tudi potrebno $O(n \log n)$ časa, saj je za vsako pripono potrebo ustvariti nov list ter novo notranje vozlišče, če ne obstaja vozlišče na poti do skrajno desnega lista, za katerega velja $globinaNiza(v) = LCP[i]$. V vsakem koraku je potrebno izračunati $LCP[i]$, ki potrebuje $O(\log n)$ časa.

Torej skupni čas za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa iz besea T je $O(n \log n) + O(n \log n) + O(n \log n) = O(n \log n)$. □

5.2 POIZVEDBE

Kompaktna predstavitev priponskega drevesa je ekvivalenta priponskemu drevesu, zato mora podpirati iste poizvedbe nad besedo T, ki jih podpira priposnsko drevo. Naj bolj preprosta poizvedba je *prisotnost*(T, P). V kompaktnem priponskem drevesu se prisotnost vzorca P išče s pomočjo vzvratnega iskanja (angl. *Backward Search*) vzorca v priponskem polju SA. Vzvratno iskanje za predhodno predstavljeno kompaktno priponsko polje, ki je prikazano s Algoritmom **??**, potrebuje $O(mt_{\Psi})$ časa, da se izvrši. Za drugačno implementacijo kompaktnega priponskega polja, se morda mora nadomesti vrstico 6 v Algoritmu **??** z binarnim iskanjem nad Ψ_c in zato je potrebno $O(m \log nt_{\Psi})$ časa, oziroma se uporablja drugi algoritem za iskanje vzorca. Algoritem vrne intreval v priponskem polju, zato je potrebno preveriti, ali je $[s, e] \neq [-1, -1]$, za kar je potrebno konstantno časa. Torej je potrebno $O(mt_{\Psi})$ časa za preveriti prisotnost vzorca

Algoritem 6: Iskanje intervala v SA (del CST-ja), v katerem je prisoten vzorec P [**?**]

Vhod: Kompaktno priponsko drevo CST, vzorec P

Izhod: Del priponskega polja, ki se začne z P

```
[s, e] = [C[P[m]] + 1, C[P[m] + 1]]
za i = m..1
    če s > e potem
        return [−1, −1]
    c = P[i]
    [s′, e′] = [rang_1(B_c, s − 1) + 1, rang_1(B_c, e)]
    [s, e] = [C[c] + s′, C[c] + e′]
return [s, e]
```

ali $O(m \log nt_\Psi)$ z uporabo binarnega iskanja. V primeru, da se uporabi opisano kompaktno priponsko polje, pa se poizvedba izvrši v času $O(m)$.

Naslednja poizvedba je *številoPonovitev*(T, P), ki vrne število pojavov vzorca P v besedilu. V kompaktnem priponskem drevesu, pa je operacija ponovno implementirana s pomočjo vzvratnega iskanja, prikazanega na Algoritmu **??**. Operacija *številoPonovitev*(T, P) je implementiran kot razlika $e - s$, kjer s predstavlja prvo pripono, ki se začne z vzorcem P, in e je zadnja tako pripona, torej je razlika $s - e$ število pripon. Torej operacija ponovno potrebuje $O(mt_\Psi)$ oziroma $O(mt_\Psi \log n)$ časa, da se izvrši.

Zadnja predstavljena poizvedba pa je *seznamPojavov*(T, P), ki vrne vsa začetna mesta pojavov vzorca P v besedi T. V kompaktnem priponskem drevesu pa je poizvedba ponovno implementirana s pomočjo vzvratnega iskanja, prikazanega na Algoritmu **??**. Z vzvratnim iskanjem se naračuna interval v priponskem polju $SA[s, e]$. Za pridobitev položajev ponovitev vzorca v besedilu, je potrebno ustvariti seznam $[SA[s], SA[s + 1], \ldots, SA[e]]$, kar zahteva še dodatnih $e - s$ korakov, pri čemer vsak korak potrebuje $O(t_{SA})$ časa za se izvršit. Torej poizvedba *seznamPojavov*(T, P) potrebuje $O(mt_\Psi + occ \cdot t_{SA})$ oziroma $O(mt_\Psi \log n + occ \cdot t_{SA})$ časa. Z predhodno predstavljeno implementacijo kompaktnega priponskega drevesa pa je potrebno $O(m + occ \cdot \log n)$ časa.

Iz implementacij poizvedb nad kompaktnim priponskim drevesom se lahko vidi, da so vse tri poizvedbe implementirane zgolj s pomočjo kompaktnega priponskega polja. Iz tega se lahko sklepa, da sta topologija drevesa τ in LCP polje odvečni podatkovni strukturi. To je res zgolj za osnovne poizvedbe nad besedilom T, ki so lahko izvršene zgolj s uporabo kompaktnega priponskim polje v enakem času. Poizvedbe, kot so najdaljši ponavljajoči podniz, najdaljši palindrom, ki je implementirana s pomočjo priponskega drevesa konkatenacije obrata T'_z besedila T_z, $T = T_z \# T'_z \$$, in najdaljši skupni

niz besedila T_1 in T_2, ki je implementirana s pomočjo priponskega drevesa konkatenacje obeh besedil $T = T_1\#T_2\$$. Na primer poizvedbe najdaljši ponavljajoči podniz je podniz $T[SA[i], SA[i] + globinaNiza(v)]$, pri čemer i je skrajno levi list poddrevesa s korenom v notranjem vozlišču v in velja, da je $LCP[i]$ največji element v LCP polju, torej zahteva $O(nt_{SA})$ časa. Operacije $globinaNiza(v)$ ni potrebno naračunati, saj je enaka $LCP[i]$, torej se še vedno izvede $O(nt_{SA})$ časa, pri tem pa ni uporabljena topologija drevesa. V primeru, da želimo najti drugi najdaljši ponavljajoč se podniz $T[SA[j], SA[j]+globinaNiza(u)]$, pri čemer je j skrajno levi list poddrevesa s korenom v notranjem vozlišču $u = sl(v)$. Za izračunat le tega pa je potrebo $O(nt_{SA} + t_\Psi)$ časa ter se uporabi vse tri podatkovne strukture kompaktnega priponskega drevesa [**?**, **?**, **?**].

6 OPERACIJE NAD PRIPOSKIMI DREVSESI

V tem poglavju bodo analizirane implementacije operacij nad priponskimi drevesi iz Definicije **??**, časovna zahtevnost izgradnje priponskega drevesa in prostorska zahtevnost priponskega drevesa ter kako je implementirano iskanje vzorcev s pomočjo priponskih dreves.

Poglavje je razdeljeno na tri dele. V prvem delu so predstavljene teoretične razlike med implementacijami (različne implementacije kompaktnega priponskega polja ter implementacija priponskega drevesa). V drugem delu je predstavljena metoda empiričnega testiranja med kompaktnim priponskim drevesom in priponskim drevesom. V zadnjem delu pa so predstavljeni rezultati empirične primerjave.

6.1 TEORETIČNA ANALIZA

Prostorska zahtevnost kompaktnega priponskega drevesa je nižja (velikost kompaktnega priponskega drevesa je $|CSA| + 6n + o(n)$ bitov za razliko od $O(n)$ kazalcev oziroma $O(n \log n)$ bitov priponskega drevesa), kar je tudi vidno iz primera človeškega genoma, vendar imajo nekatere operacije na račun kompaktne predstavitve višjo časovno zahtevnost. V Tabeli **??** so prikazane razlike: v prostorski zahtevnosti priponskega drevesa in kompaktnega priponskega drevesa ter v časovni zahtevnosti operacij priponskega drevesa, v časovni zahtevnosti različnih poizvedb nad priponskim drevesom in v časovni zahtevnosti izgradnje drevesa. Tabela **??** je razdeljena na tri dele: v prvem delu so zbrane operacije priponskega drevesa, v drugem delu so zbrane poizvedbe nad priponskim drevesom, v tretjem delu tabele pa sta zbrani časovna zahtevnost izgradnje ter prostorska zahtevnost.

Kompaktno priponsko drevo je lahko implementirano s pomočjo različnih različic kompaktnega priponskega polja, zato imajo operacije, ki so implementirane s pomočjo priponskega polja, različne časovne zahtevnosti. V Tabeli **??** imajo zato nekatere operacije časovno zahtevnost $O(t_\Psi)$ (časovna zahtevnost funkcije Ψ) ali $O(t_{SA})$ (časovna zahtevnost dostopa do priponskega polja) ter prostorska zahtevnost kompaktnega priponskega drevesa vsebuje člen $|CSA|$. Posledica **??** in Posledica **??** predstavljata prostorsko zahtevnost kompaktnega priponskega drevesa z uporabo dveh implementacij kompaktnega priponskega polja, zato so v Tabeli **??** predstavljene prostorske in časovne

Tabela 4: Časovna zahtevnost operacij priponskega drevesa, izgradnje priponskega drevesa in iskanja v priponskem drevesu ter prostorska zahtevnost priponskega drevesa.

	ST	CST
$koren()$	$O(1)$	$O(1)$
$jeList(v)$	$O(1)$	$O(1)$
$otrok(v, z)$	med $O(1)$ in $O(\|\Sigma\|)$	$O(\log \|\Sigma\| t_{SA})$
$prviOtrok(v)$	$O(1)$	$O(1)$
$starš(v)$	$O(1)$	$O(1)$
$nbrat(v)$	$O(1)$	$O(1)$
$pbrat(v)$	$O(1)$	$O(1)$
$povezava(v, i)$	$O(1)$	$O(t_{SA})$
$globinaNiza(v)$	$O(1)$	$O(t_{SA})$
$lca(v, w)$	$O(1)$	$O(1)$
$sl(v)$	$O(1)$	$O(t_\Psi)$
$številoPonovitev(vzorec)$	$O(m + occ)$	$O(mt_\Psi)$
$seznamPojavov(vzorec)$	$O(n + occ)$	$O(mt_\Psi + occ \cdot t_{SA})$
$prisotnost(vzorec)$	$O(m)$	$O(mt_\Psi)$
$izgradnja(T)$	$O(n)$	$O(nt_{SA} + n \log n)$
$velikost$	$O(n)$ kazalcev	$\|CSA\| + 6n + o(n)$ bitov

zahtevnosti obeh implementacij priponskega polja.

Tabela 5: Primerjava prostorske zahtevnosti ter časovne zahtevnosti različnih implementacij kompaktnega priponskega polja.

Implementacija	$\|CSA\|$ $[bit]$	t_Ψ	t_{SA}
Grossi idr. [?]	$nH_h + O(n \log\log n / \log_{\|\Sigma\|} n)$	$O(\log \|\Sigma\|)$	$O(\log^2 n / \log\log n)$
Grossi in Vitter [?]	$O\left(\frac{1}{\epsilon} n \log \|\Sigma\|\right)$	$O(1)$	$O(\log^\epsilon n)$

6.2 OPIS METODE EMPIRIČNE PRIMERJAVE

V tem poglavju je opisana empirična primerjava časovnih zahtevnosti različnih operacij, poizvedb in izgradnje ter prostorske zahtevnosti različnih implementacij priponskega drevesa. Priponsko drevo se uporablja za iskanje vzorcev v besedilu T, torej se je smiselno osredotočiti zgolj na primerjavo časovnih zahtevnosti za poizvedbe ter za izgradnjo priponskega drevesa. Primerjava posamičnih operacij priponskega drevesa

nima smisla, saj se le te uporabljajo pri implementaciji poizvedb in izgradnji.

Pri tem se bomo osredotočili zgolj na osnovne poizvedbe. Kot najbolj preprosta osnovna operacija bo izdelana primerjava nad poizvedbo $prisotnos(vzorec)$. Ta poizvedba je bila izbrana, saj je pogosto vprašanje v biologiji prisotnost genov (vzorcev) v DNK sekvenci, ne pa natančen položaj tega gena ali števila ponovitev vzorca. Čas izvajanja poizvedbe bo izmerjen kot razlika v času takoj pred začetkom izvajanja poizvedbe ter takoj po zaključku izvajanja poizvedbe. Poizvedba bo izmerjena na vzorcih dolžine 5 znakov, 50 znakov, 500 znakov in $\log n$ znakov, kjer je n dolžina znaka.

Na podoben način kot poizvedba $prisotnos(vzorec)$ bo izmerjen tudi čas izgradnje priponskega drevesa. Le ta bo izmerjen s pomočjo razlike v uri med časom ure takoj pred izgradnjo ter v časom ure takoj po izgradnji priponskega drevesa.

Izmerjeni časi bodo shranjeni v vektorju potrebnih časov $T_{i,v}$, pri čemer i predstavlja dolžino vhodnega besedila in v predstavlja tip priponskega drevesa (priponsko drevo z vrednostjo $v = ST$ ali kompaktno priponsko drevo z vrednostjo $v = CST$). Vektor bo sestavljen na sledeči način

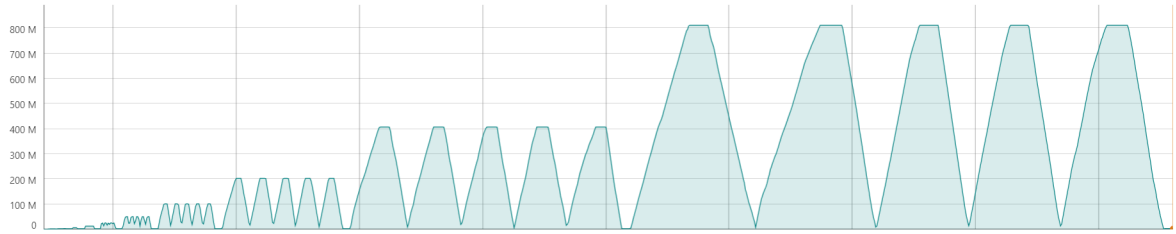
$$T_{i,v} = (t_{izg}, t_5, t_{50}, t_{500}, t_{\log n}),$$

pri čemer so izmerjeni časi za poizvedbe izmerjeni v nanosekundah, čas izgradnje t_{izg} pa v milisekundah.

Na podoben način bo shranjena tudi velikost, ki jo zasede priponsko drevo v delovnem spominu. Izmerjen prostor bo poleg prostora priponskega drevesa vseboval tudi besedilo B_0, katerega podniz $B_0[1, i]$ bo uporabljen za izgradnjo. Ker bodo vse meritve vsebovale velikost besedila B_0, le to ne bo vplivalo na primerjavo podatkov. Izmerjen prostor bo shranjen v vektorju $S_{i,v}$, pri čemer i predstavlja dolžino vhodnega besedila in v predstavlja tip priponskega drevesa (priponsko drevo z vrednostjo $v = ST$ ali kompaktno priponsko drevo z vrednostjo $v = CST$). V tem primeru bo vektor $S_{i,v}$ vseboval zgolj vrednost s_{max}, ki je največja dosežena velikost priponskega drevesa med izvajanjem izgradnje in poizvedbe. Največji izmerjeni zasedeni prostor na delovnem spominu bo izmerjen z uporabo pomnilniškega profilerja (angl. *memory profiler*).

Uporabljeni bo Bytehound [**?**] pomnilniški profiler, saj omogoča grafični prikaz porabe spomina v času izvajanja programa. Primer prikaza porabe delovnega spomina v času izvajanja testa je prikazan na Sliki **??**. Na sliki se jasno vidi, da večanje priponskega drevesa povzroči rast zasedenega prostor na delovnem spominu v času izgradnje in poizvedbe. Na sliki se lahko opazi, da izgradnja in poizvedbe v kompaktnem priponskem drevesu potrebujejo krepko manj časa in prostora, zato izgleda, kot da se graf konča malo pred koncem vodoravne osi. Razlog za to je izgradnja in poizvedba nad kompaktnim priponskim drevesom, ki potrebuje manj pomnilnika in posledično manj časa za dodeliti in sprostiti delovni spomin.

Za zmanjšati vpliv ostalih procesov na računalniku, se je vsak test ponovil 5-krat.



Slika 15: Zasedenost spomina testiranjem različnih implementacij priponskega drevesa skozi celotno izvajanje testa.

To je tudi vidno na Sliki **??**, zato ima zadnje izgrajeno prionsko drevo 5 vrhov in vsak vrh predstavlja eno ponovitev testiranja. S pomočjo profilerja je bila tudi izmerjena velikost originalnega besedila B_0, ki je prikazan v zadnjem stolpcu Tabele **??**, saj se velikost razlikuje glede na vhodno besedilo.

Tabela 6: Primerjava besedil, ki bodo uporabljena za primerjavo različnih implementacij priponskih dreves

Ime testnega besedila	Število znakov	Velikost abecede	Velikost na disku [MB]
Ivan Cankar, Na klancu [**?**]	317803	52	25,851
DNK sekvenca [**?**]	52428800	4	26,767

S tem načinom testiranja se želita ugotoviti dve stvari. Najprej se želi ugotoviti vpliv velikosti vhodnega besedila na čas izgradnje in poizvedb nad priponskim drevesom ter velikost spomina, ki ga zasede priponsko drevo. To bo izmerjeno z izgradnjo različnih dreves ter s poizvedbami nad njimi. Prvo drevo bo izgrajeno nad besedilom dolžine 500 znakov. Vsako naslednje priponsko drevo bo izgrajeno nad besedilom, ki je dvakrat daljše od predhodnega. Zadnje izgrajeno priponsko drevo bo imelo dolžino besedila, za katerega je bilo izgrajeno, manjšo od $|B_0| - 500$ znakov ali $|B_0| - \log(500 \cdot 2^{i-1})$ za besedila daljša od 2^{500} znakov. V besedilu mora bit vedno na voljo dovolj znakov, da se bodo lahko iz njih naredili vzorci vseh testiranih velikosti. Besedilo, ki bo uporabljeno za izgradnjo i-tega priponskega drevesa, bo podniz $B_0[1, 500 \cdot 2^{i-1}]$.

Druga stvar, ki se želi ugotoviti, je vpliv uporabe `swap` razdelka za namene delovnega spomina ter vpliv velikosti abecede vhodnega besedila in vzorca na iskanje vzorca v priponskem drevesu. Zato bo primerjava narejena na dveh besedilih, ki imata različno vhodno abecedo, in sicer prvo vhodno besedilo je kratki roman Ivana Cankarja, Na klancu [**?**], ki uporablja slovensko abecedo, ter daljša DNK sekvenca [**?**], ki pa uporablja abecedo $\Sigma = \{A, C, T, G\}$. Pri tem obe abecedi ne vsebujeta znaka, ki predstavlja konec besedila, \$, saj bo le ta dodan besedilu pred začetkom izgradnje. Več podatkov o vhodnih besedilih je prikazanih na Tabeli **??**.

6.2.1 Pred obdelava besedil

Kot je razvidno v drugem stolpcu Tabele **??** je potrebno najkrajše besedilo podaljšati. Ker je malo verjetno, da se vhodno besedilo ponovi k-krat, dokler ne doseže primerne velikosti, predvsem v naravnem jeziku, bo uporabljena bolj napredna metoda podaljševanja besedila. Metoda vzame manjše dele besedila dolžine $5i$ ter jih konkatenira na koncu besedila. Tako dobljeno besedilo je bolj verjetno, saj je večja verjetnost, da se manjši deli besedila ponovijo za razliko od celotnega besedila. Predlagana metoda podaljševanja besedila je prikazana z Algoritmom **??**. Pri tem metoda predpostavi, da je besedilo dolgo vsaj $6i$, kar je 3000 znakov dolgo. Ta metoda je primerna za podaljševanje daljših besedil, sicer pa je možno metodi spremeniti parameter i in tako prilagoditi metodo drugim besedilom.

Algoritem 7: Metoda podaljševanja vhodnega besedila

Vhod: Vhodno besedilo B, želena velikost s_{max}
Izhod: Besedilo B_0

```
1 B_0 = B
2 i = 500
3 while |B_0| < s_max do
4     B_0 = B_0 + B[i, 6i]
5     i = i + 500
6     while 6i > |B| do
7         i = i/4
8 vrni B_0[1, s_max]
```

Predlagana metoda podaljša besedilo na velikost s_{max}. Ta velikost je lahko dolžina najdaljšega besedila ali pa je poljubna vrednost, bodisi manjša od največjega besedila bodisi večja. Če je besedilo daljše od velikosti $s_{max} < |B|$, bo predlagana metoda skrajšala velikost besedila na $|B_0| = s_{max}$.

6.2.2 Iskanje vzorcev

Po izgradnji priponskega drevesa bo le to uporabljeno za iskanje vzorcev v besedilu. Kot je bilo predhodno omenjeno, se bo pregledovala zgolj prisotnost vzorca v besedilu. Velikosti vzorcev, ki bodo iskani v besedilu so 5, 50 in 500 znakov ter $\lfloor \log(500 \cdot 2^{i-1}) \rfloor$ znakov, pri čemer je i zaporedna številka testa velikosti priponskega drevesa. Vzorec dolžine x (x je ena od predhodno naštetih velikosti vzorca) je pridobljen kot $B_0[500 \cdot 2^{i-1} + 1, 500 \cdot 2^{i-1} + 1 + x]$.

Vzorci, ki so izdelani na tak način, zagotavljajo, da z visoko verjetnostjo niso prisotni v besedilu ter posledično niti v priponskem drevesu. To naredi test bolj realističen, saj

ko vemo, da je vzorec prisoten v besedilu, nima smisla preverjati pristnost vzorca. Če pa je besedilo B_0 podaljšano, na kakršen koli način, je prisotnost vzorca v besedilu večja.

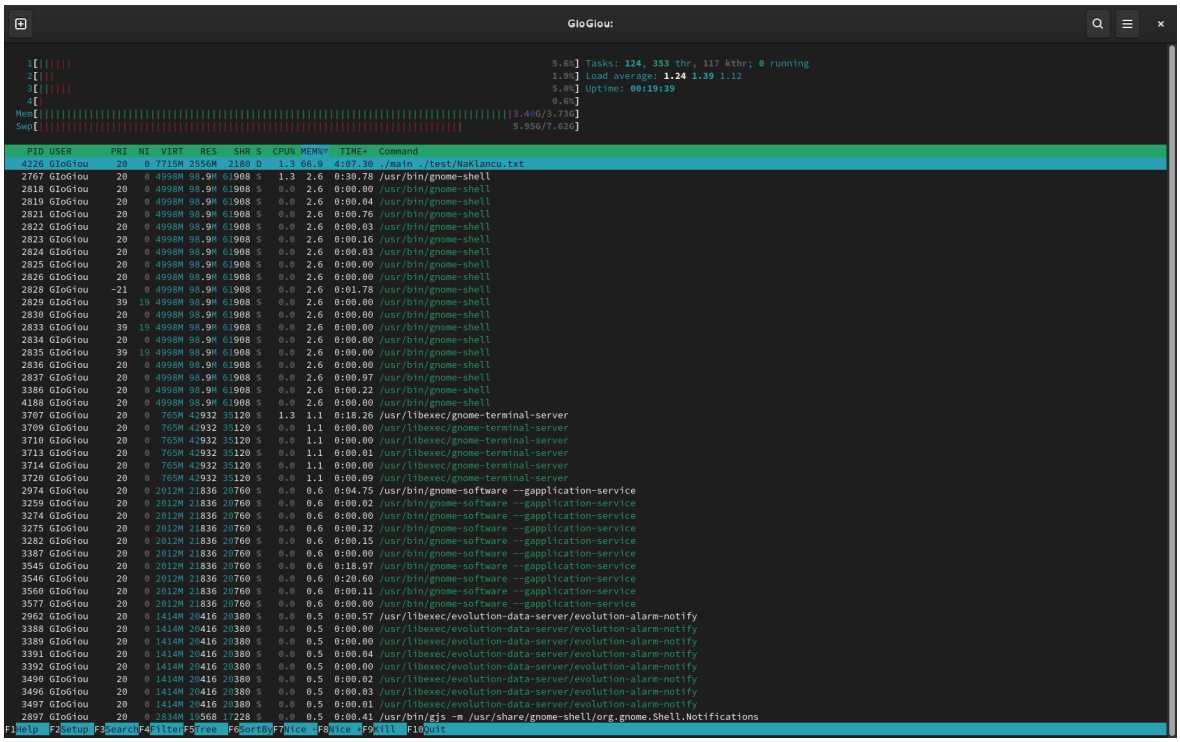
6.3 REZULTATI EMPIRIČNE PRIMERJAVE

Sedaj predstavljena metoda empirične primerjave, se lahko uporabi za empirično primerjavo med priponskimi drevesi in kompaktnimi priponskimi drevesi. Primerjava je bila izdelana s programskim jezikom C++ [1]. Priponska drevesa so bila izgrajena z Ukkonenovim algoritmom implementiran v C++ knjižnici [**?**]. Kompaktna priponska drevesa so bila izgrajena s predhodno predstavljeno metodo. Uporabljena je bila implementacija kompaktnih priponskih dreves iz C++ knjižnice [**?**].

Evalvacija je bila izvedena na računalniku s procesorjem Intel Core i3 5005U z dvema jedroma in štirimi nitmi ter s taktom 1,9 GHz. Računalnik ima na razpolago 4 GB delovnega spomina, od katerega je ob zagonu računalnika zasedenih 1,76 GB, ter ima še dodatnih 8 GB `Swap` razdelka na trdem disku. Operacijski sistem računalnika je Fedora 41, ki uporablja Linux kernel 6.11.10-300.

Ob testiranju izgradnje večjih priponskih dreves je bilo opaženo, da operacijski sistem ubije (angl. *kill*) proces, ki izvaja testiranje, zaradi nevarnosti o preseganja velikosti delovnega spomina. To se je zgodilo pri izgradnji priponskega drevesa velikosti 4000000 znakov. Pri tem se je tudi opazilo, da pri priponskem drevesu velikosti 2048000 znakov ni mogoče izgraditi drevesa do konca, saj računalnik ne uspe premakniti strani iz delavnega pomnilnika na `Swap` razdelek in obratno. To naredi računalnik neodziven in proces je v neprekinjenem spanju (angl. *Uninterruptible sleep* ali stanje D), pri tem računalnik doseže 6 GB zasedenega prostora na `Swap` razdelku. Na Sliki **??** je prikazan upravljalnik opravil Htop v času izgradnje priponskega drevesa za besedilo velikosti 2048000 znakov. Proces v modri vrstici predstavlja program za testiranje izgradnje besedil. V stolpcu označenim S (Stanje ali angl. *Status*) je vidno, da je je stanje procesa označeno kot D, ker je proces v neprekinjenem spanju. Po več kot 5 minutah od začetka izgradnje prvega priponskega drevesa sem se odločil, da se proces ubije. Posledično se je znižala velikost besedil za izgradnjo zadnjega priponskega drevesa na 1024000 znakov.

[1] Koda je dostopna na povezavi `https://github.com/GioGiou/MagisterskaNalogaKoda`.



Slika 16: Posnetek zaslona upravljalnika opravil Htop med izgradnjo priponskega drevesa za besedilo dolžine 2048000 znakov.

Pri tem se je tudi omejila velikost besedila B_0 na $S_{max} = 25000000$ znakov. To zagotavlja dovolj znakov za izgradnjo vhodnih besedil ter za izgradnjo besedil, ki bodo predstavljali vzorce. Ker je DNK sekvenca [**?**] daljša od velikosti S_{max}, je bila le ta odrezana na velikost S_{max} in sicer bo uporabljeni le prvih 25000000 znakov. Za razliko od DNK sekvence, je besedilo Na klancu [**?**] moralo biti podaljšano na $S_{max} = 25000000$ znakov. To je bilo storjeno z implementacijo Algoritma **??** v programskem jeziku C++. Pri tem ni bilo potrebno implementirati preverjanja, ali šestkratnik števca i presega velikost besedila B. Torej tega nisem storil.

Čas potreben za izgradnjo priponskega drevesa in izvršitev poizvedb je bil izmerjen s pomočjo razlike v uri pred in po izvršitvi testa, kot je to bilo predhodno opisano. Meritev je bila implementirana s funkcijo `high_resolution_clock::now()`, ki je del standardne knjižnice programskega jezika C++ in vrne natančen čas trenutka, v katerem je izvedena. S tako izmerjenim časom pred začetkom in takoj po koncu izvajanja se lahko naračuna razliko s funkcijo `duration_cast<milliseconds>(stop - start).count()`, kjer `stop` predstavlja čas konca izvajanja in `start` pa predstavlja čas začetka izvajanja operacije. Funkcija vrne v tem primeru razliko med tema dvema trenutkoma v milisekundah, ki pa se lahko po potrebi zamenja v druge časovne enote. V primeru poizvedb je bil čas iskanja vzorca izmerjen v nanosekundah in je bil implementiran s pomočjo funkcije `duration_cast<nanoseconds>(stop - start).count()`.

Vektorja rezultatov testiranja $T_{i,v}$ in $S_{i,v}$ sta bila zapisana v CSV (angl. *Comma-*

separated values) datoteko za lažjo nadaljnjo obdelavo rezultatov. Vsaka vrstica datoteke predstavlja rezultat enega testiranja. Poleg vektorjev $T_{i,v}$ in $S_{i,v}$, je v vsaki vrstici zapisana velikost začetnega besedila i ter vrsta priponskega drevesa v. Ker se med izvajanjem programa ne beleži velikost priponskega drevesa, se zato zapiše začasna vrednost.

Predhodno predstavljena implementacija je bila izdelana v datoteki `main.cpp`. Koda je bila prevedena iz programskega jezika C++ v izvršljivo datoteko z uporabo prevajalnika (angl. *compiler*) GCC 14.2.1. Program je bil preveden s sledečim ukazom:

```
g++ -std=c++11 -O3 -DNDEBUG -I ./include -L ./lib //
main.cpp -o main -lsdsl -ldivsufsort //
-ldivsufsort64 -lsuffix
```

Pri prevajanju programa je uporabljenih nekaj zastavic, ki določajo vrednosti parametrov prevajalnika. Večina zastavic je vezana na uvažanje knjižnic v prevajanje, in sicer `-I ./include` nastavi pot do zaglavnih datotek (angl. *header files*), `-L ./lib` nastavi pot do strojne kode knjižnice ter zastavice `-lsdsl`, `-ldivsufsort`, `-ldivsufsort64` in `-lsuffix` uvozijo potrebne knjižnice za izgradnjo izvršljive datoteke. Zastavica `-O3` določa nivo optimizacije izvršljive datoteke, na nivo 3, ki je bil izbran, saj je uporabljen za prevajanje prve implementacije kompaktnega priponskega drevesa [**?**]. Pri izgradnji programa je bila uporabljena standardna različica C++11 določena z zastavico `-std=c++11`. Razlog za izbiro starejše različice programskega jezika je knjižnica SDSL [**?**] (uporabljena kot implementacija kompaktnih priponskih dreves), ki je implementirana za to različico.

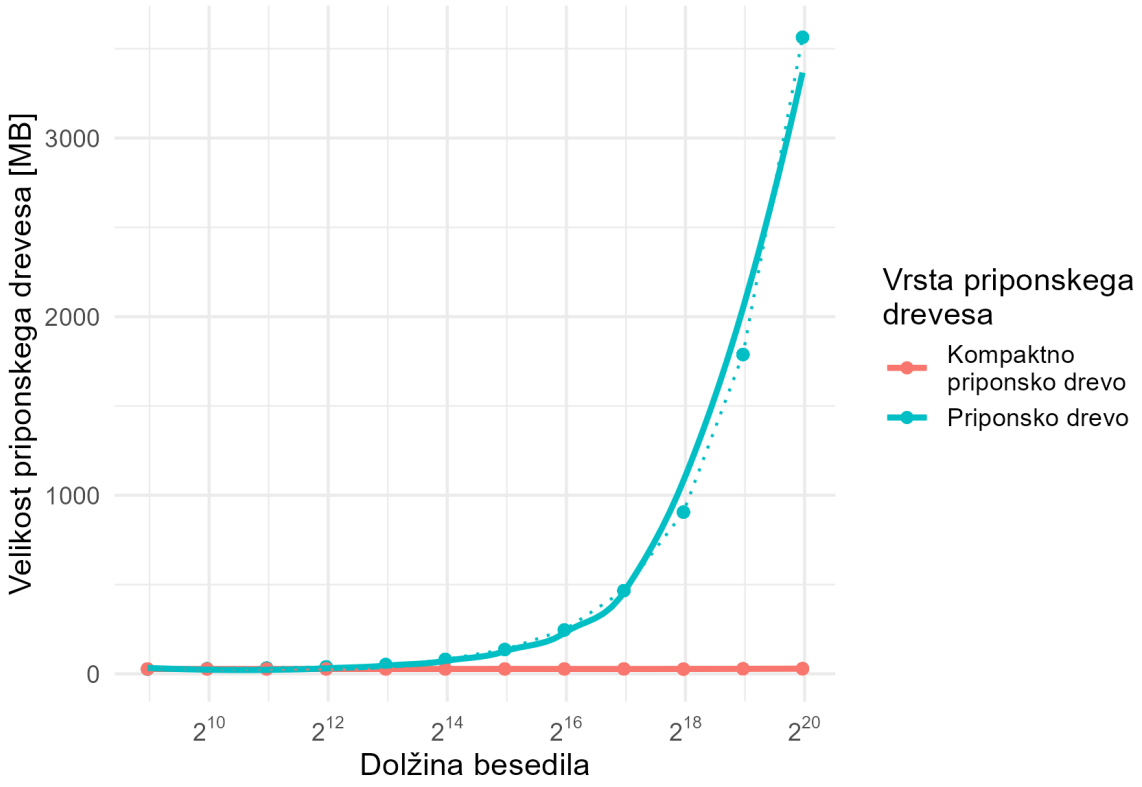
Ker tako prevedena datoteka ne omogoča neposrednega nadzorovanja velikosti podatkovnih struktur med izvajanjem, bo za ta namen uporabljen profiler spomina. Zato je potrebo pred začetkom testiranja priponskih dreves zagnati tudi profiler, kar je storjeno z ukazom:

```
export MEMORY_PROFILER_LOG=info
LD_PRELOAD=~/bytehound/libbytehound.so ./main //
./test/NaKlancu.txt
```

Prva vrstica ukaza določa stopnjo profiliranja, ki ima v tem primeru vrednost `info`, ter jo shrani v sistemsko spremenljivko `MEMORY_PROFILER_LOG`. Naslednja vrstica pa požene program na datoteki s testnimi podatki, ki so podani kot prvi argument (ime datoteke). Zgornji ukaz prikaže primer za vhodno besedilo Na klancu. S spremenljivko `LD_PRELOAD` je določen deljeni objekt (angl. *shared object*), ki je izvršen pred začetkom programa. V primeru testiranja priponskih dreves je deljeni objekt profiler, kar mu omogoča dostop do programa in lažje beleženje zasedenega delovnega spomina.

Prva izdelana primerjava priponskega drevesa in kompaktnega priponskega drevesa je izdelana nad 50 MB dolgo DNK sekvenco [?]. Kot vsa ostala testna besedila, je tudi DNK sekvenca shranjena v mapi `./test/` pod imenom `DNA.50MB`. Izbrana je bila, saj so jo uporabili kot testno besedilo v implementaciji od Välimäki idr. [?]. Sekvenca je zlepek različnih DNK sekvenc.

Kot je bilo predstavljeno v Tabeli **??** je besedilo sestavljeno iz 4+1 znakov. Izmerjen je bil tudi potreben prostor za shranjevanje vhodnega besedila, ki zasede 26,767 MB delovnega spomina. Velikost zasedenega prostora na delovnem spominu z vhodnim besedilom je potrebno odšteti od velikosti, ki jo potrebujejo implementirana priponska drevesa.

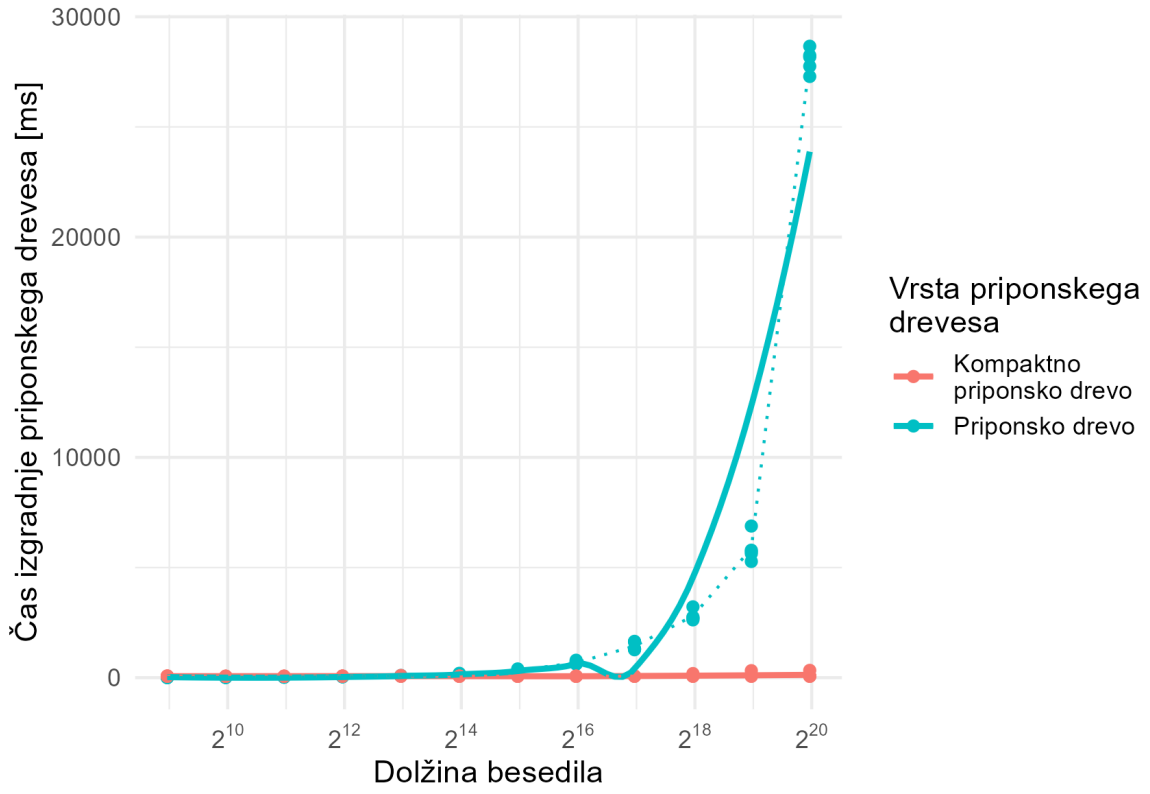


Slika 17: Graf velikosti priponskega drevesa izgrajenih iz besedil različne velikosti. Vhodno besedilo je DNK sekvenca.

Na Sliki **??** je prikazana potrebna količina delovnega spomina za izgradnjo priponskega drevesa, ki je označena z modro, ter kompaktnega priponskega drevesa, ki pa je označena z rdečo barvo. Na sliki je uporabljena, na vodoravni osi, logaritmična skala za velikost besedila, saj je vsako naslednje testirano besedilo dvakrat večje od predhodnega. Iz slike se lahko jasno vidi, da za besedila do dolžine 8000 znakov obe drevesi zasedeta približno enako količino prostora na delovnem spominu, in sicer priponsko drevo zasede 39,8 MB in kompaktno priponsko drevo zasede 27,4 MB. Vse nadaljnje razlike v velikosti med priponskim drevesom in kompaktnim priponskim drevesom so

izrazite. Čeprav se zdi, da je velikost kompaktnega priponskega drevesa konstanta, se ta v času izvajana testiranja dvigne iz približno $27,4$ MB na približno 29 MB.

Na Sliki ?? se lahko tudi opazi, da velikost priponskega drevesa ne presega 4 GB, kar je velikost notranjega spomina. Pri tem pa je potrebno upoštevati dejstvo, da operacijski sistem potrebuje $1,76$ GB delovnega spomina takoj po zagonu računalnika. To pomeni, da čeprav velikost priponskega drevesa ne presega velikosti delovnega pomnilnika, mora biti le ta shranjen v `Swap` razdelku, saj mora računalnik v vsakem trenutku zagotoviti dovolj prostora na delovnem pomnilniku za operacijski sistem, torej ima program na razpolago največ $2,24$ GB delovnega pomnilnika. Zadnje testirano priponsko drevo potrebuje $3,56$ GB dolgovnega pomnilnika, zato mora biti vsaj $1,22$ GB drevesa shranjenega v na `Swap` razdelku.



Slika 18: Graf prikazuje čas izgradnje priponskega drevesa za različne dolžine vhodnih besedil. Vhodno besedilo je DNK sekvenca.

Ker je zadnje izgrajeno priponsko drevo, moralo biti shranjeno tudi na `Swap` razdelku, je potrebno preveriti, na kakšen način to vpliva na čas izgradnje drevesa ter iskanje v njem. Rezultati testiranja časa izgradnje različnih implementacij priponskega drevesa so prikazani na Sliki ??, kjer z modro barvo je prikazan čas potreben za izgradnjo priponskega drevesa ter z rdečo pa čas potreben za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa. Vsi časi, ki so prikazani na sliki, so v milisekundah.

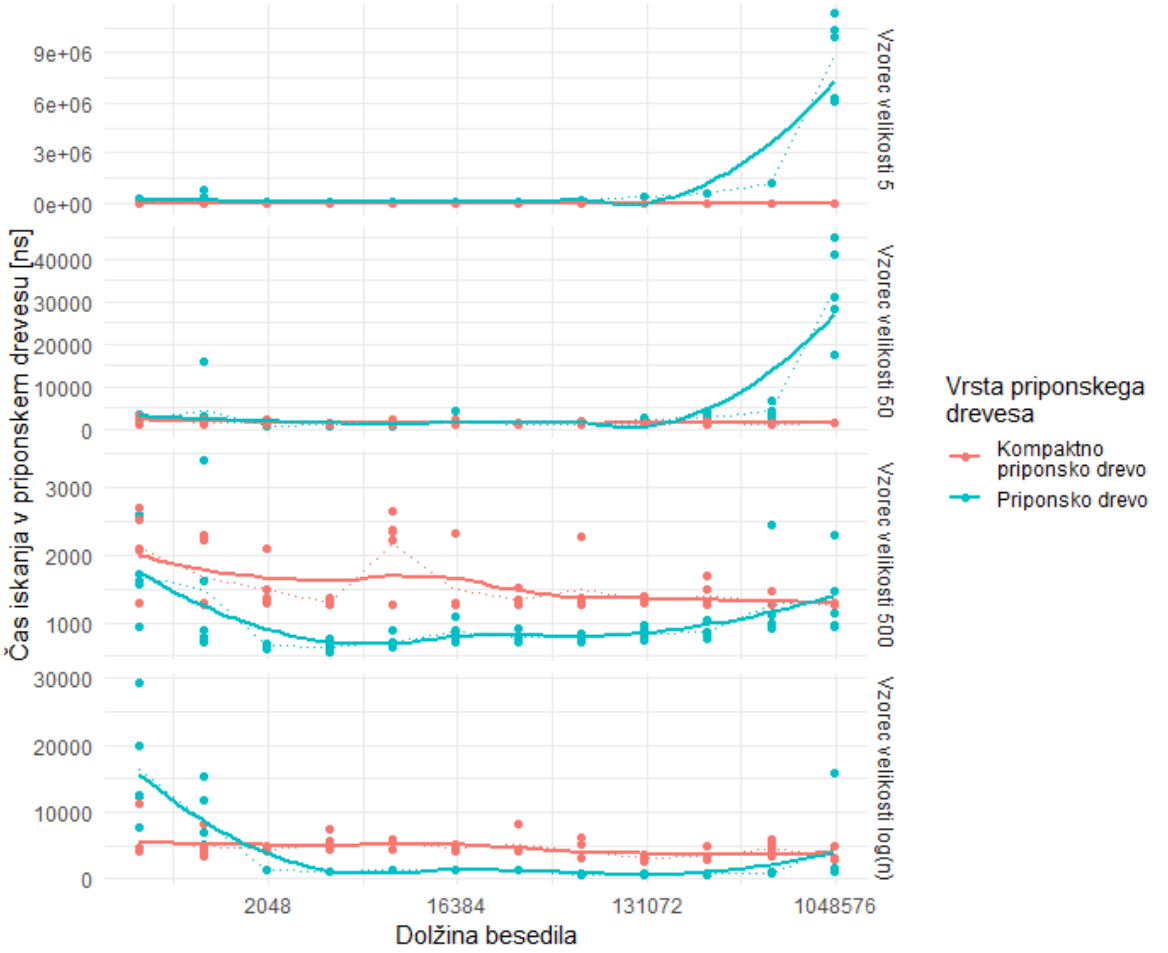
Pri izgradnji največjega priponskega drevesa se lahko opazi na Sliki **??**, da je potrebni čas višji od pričakovanega. Skok v časovni zahtevnosti se pojavi, pri izgradnji priponskega drevesa, ki je moral biti delno shranjen na `Swap` razdelku. Vsa ostala priponska drevesa so zgrajena dvakrat počasneje kot predhoden priponsko drevo, kar je tudi pričakovano, saj Ukkonenov algoritem izgradi priponsko drevo v času $O(n)$. Torej, ker se je velikost besedila podvojila, potemtakem se bo tudi čas izgradnje podvojil. Izjema je zadnje izgrajeno priponsko drevo (dolžina vhodnega besedila je 1024000 znakov), kjer se čas izgradnje poveča za $4,78$-krat. Iz tega se lahko sklepa, da uporaba `Swap` razdelka negativno vpliva na čas izgradnje priponskega drevesa.

Iz Slike **??** je tudi razvidno, da čas potreben za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa raste počasneje kot čas izgradnje priponskega drevesa. Čas potreben za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa za besedilo dolžine 500 znakov je $70,8$ milisekund, čas za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa za besedilo dolžine 1024000 znakov pa je 121 milisekund. Kompaktno priponsko drevo se zgradi hitreje od priponskega drevesa pri besedilih, ki so daljši od 8000 znakov. Priponsko drevo potrebuje $83,2$ milisekunde za izgradnjo, za razliko od kompaktnega priponskega drevesa, ki pa potrebuje $75,2$ milisekunde za biti izgrajeno nad besedilom dolžine 8000 znakov.

Nazadnje se lahko še analizira vpliv velikosti priponskega drevesa na potreben čas za izvršiti poizvedb nad njim. Na Sliki **??** so prikazani časi, v nanosekundah, potrebni za iskanje vzorcev, in sicer z modro barvo so predstavljeni časi za poizvedbe v priponskih drevesih, z rdečo pa so predstavljeni časi za poizvedbe v kompaktnem priponskem drevesu. Na sliki so predstavljeni rezultati za vse štiri velikosti vzorcev iskanih v priponskem drevesu: 5 znakov, 50 znakov, 500 znakov in $\log n$ znakov, pri čemer je n dolžina besedila.

Na Sliki **??** so prikazani rezultati primerjave iskanja vzorcev dolžine 5 znakov. Časi potrebni za iskanje vzorca so za obe implementaciji priponskih dreves podobni in konstantni. Edina vidna razlika je v času, ki je potrebnem za najdi vzorec v priponskem drevesu dolžine 1024000 znakov. To je posledica uporabe `Swap` razdelka, zato se potrebuje $7,46$-krat več čas od ostalih poizvedb s priponskim drevesom. Ostale poizvedbe, za vzorce dolžine 5 znakov, potrebujejo približno 1000 mikrosekund, pri čemer pa priponsko drevo za besedilo dolžine 1024000 znakov pa potrebuje $8,79$ milisekund za preveriti prisotnost vzorca. Čas, ki je potreben za poizvedbo v kompaktnih priponskih drevesih, je konstanten in je približno $3,2$ mikrosekunde.

Za vzorce dolžine 50 znakov je iz Slike **??** razvidno, da so potrebni časi za iskanje podobni kot pri iskanju vzorcev dolžine 5 znakov. Torej je čas, ki je potreben za iskanje v priponskem drevesu, konstanten in je približno $2,2$ mikrosekunde. Ko priponsko drevo preraste delovni spomin in mora bit delno shranjen na `Swap` razdelku se iskalni čas poveča za $7,44$-krat. Pri tem iskanje vzorcev dolžine 50 znakov potrebuje približno enako časa kot iskanje vzorcev v kompaktnem priponskem drevesu. V kompaktnem



Slika 19: Graf prikazuje čas iskanja vzorcev različnih dolžin v različnih implementacijah priponskega drevesa. Vhodno besedilo je DNK sekvenca.

priponskem drevesu je potrebnih približno $1,5$ mikrosekunde za preveriti ali je vzorec prisoten ali ni. Iz tega se lahko sklepa, da za iskanje vzorcev dolžine 50 znakov je bolj učinkovita uporaba priponskih dreves za besedila do 8000 znakov, ko je potrebno tudi izgraditi priponsko drevo. Za besedila daljša od 8000 znakov pa je bolje uporabiti kompaktno priponsko drevo.

Iskanje prisotnosti vzorca dolžine 500 znakov, rezultati so prikazani na Sliki **??** kot predzadnji graf, je bolj učinkovito s priponskimi drevesi. Čeprav je za vse testirane velikosti priponskega drevesa iskanje v priponskem drevesu hitrejše ali primerljivo z iskanjem v kompaktnem priponskem drevesu, se lahko opazi rast v potrebnem času v večjih priponskih drevesih, ki so deloma shranjena v `Swap` razdelku. Čeprav razlika ni tako očitna kot v primeru iskanja vzorca dolžine 5 ali 50 znakov, se lahko vseeno vidi rast iz grafa. Možen razlog za nižjo rast je prisotnost strani (angl. *page*), ki vsebujejo vzorec v delovnem spominu in ne na `Swap` razdelku. Pri tem je vseeno potrebna 1 mikrosekunda za najti vzorec dolžine 500 znakov. Čas iskanja vzorcev v kompaktnih priponskih drevesih še vedno ostane konstantno, pri čemer se potreben čas za iskanje

vzorcev dolžine 500 znakov zniža na $1,5$ mikrosekunde. Iz testiranja iskanja vzorcev velikosti 500 znakov v priponskih dresih se lahko sklepa, da če je na razpolago dovolj prostora na delovnem spominu, je boljše uporabiti priponsko drevo za te namene.

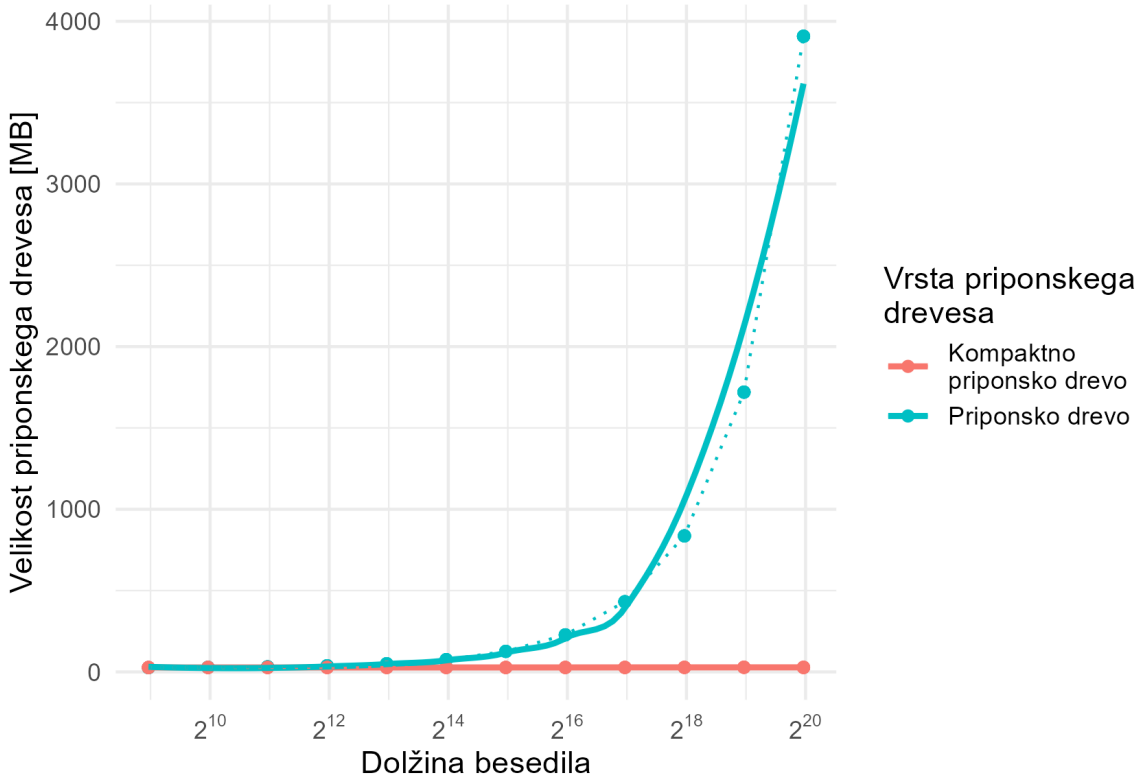
Zadnje testiranje, ki je prikazano na Sliki **??**, je iskanje vzorcev dolžine $O(\log(n)$, pri čemer je n velikost besedila, ki je predstavljeno s priponskim drevesom. Velikosti iskanih vzorcev se gibajo od 9 znakov do 20 znakov. Iz grafa je razvidno, da kompaktno priponsko drevo, označeno na grafu z rdečo barvo, potrebuje približno konstanto časa za najti vzorec v priponskem drevesu. Za iskanje vzorca potrebuje približno $4,5$ mikrosekunde. Pri tem pa je zgodba bistveno drugačna pri iskanju vzorcev s pomočjo priponskega drevesa, ki je prikazano z modro barvo na sliki. Za vzorce velikosti 9 in 10 znakov je čas iskanja v priponskem drevesu višji kot čas iskanja v kompaktnem priponskem drevesu. V vseh ostalih primerih pa je čas iskanja nižji kot v kompaktnem priponskem drevesu, podobno kot pri iskanju vzorcev dolžine 500 znakov. Iskanje vzorca dolžine 11 znakov ali več potrebuje približno 1 mikrosekundo, da se izvrši. Pri tem se lahko tudi opazi, da je čas iskanja v zadnjem drevesu $4,5$-krat višji zaradi uporabe `Swap` razdelka, kar pomeni, da potrebuje približno enako časa kot iskanje v ekvivalentnem kompaktnem priponskem drevesu. Iz tega testa se lahko sklepa, da za iskanje krajših vzorcev (vzorci do dolžine 10 znakov) je boljše uporabiti kompaktno priponsko drevo, sicer pa je boljše uporabiti priponsko drevo, če velikost delovnega spomina to omogoča ter če je število iskanih vzorcev dovolj veliko. S tem se lahko amortizira čas iskanja vzorcev, pri čemer je število vzorcev $O(n)$, kar zniža čas izgradnje drevesa za vsak vzorec na $O(1)$.

Iz testiranja izgradnje priponskega drevesa ter izvajanje poizvedb nad njim, za DNK sekvence je za iskanje v besedilih velikost do 8000 znakov boljše uporabiti priponsko drevo. Uporaba priponskega drevesa je tudi priporočljiva za daljše vzorce, kot so na primer vzorci dolžine 500 znakov. Pri tem mora biti število iskanih vzorcev dovolj veliko, da se amortizira čas, ki je potreben za izgradnjo priponskega drevesa (število vzorcev je $O(n)$), sicer je za vsako priponsko drevo zgrajeno nad besedilom z vsaj 8000 znaki bolj priporočljivo, da se za iskanje uporablja kompaktno priponsko drevo. Uporaba kompaktnih priponskih dreves se izkaže boljša pri iskanju krajših vzorcev ter ko velikost priponskega drevesa presega velikost notranjega pomnilnika in zato mora bit shranjeno delno ali v celoti na `Swap` razdelku.

Druga primerjava je bila narejena s Cankarjevim romanom Na klancu [**?**]. Namen te primerjave je primerjati lastnosti priponskega drevesa nad večjo začetno abecedo, kot je na primer abeceda naravnega jezika. Ker slovenščina uporablja ne ASCII znake, je potrebno pred samim začetkom testiranja besedilo pred pripraviti. To je bilo storjeno tako, da so bili vsi ne ASCII znaki odstranjeni oziroma zamenjani z ASCII alternativami. Na primer znak, ki predstavlja '...', je bil zamenjan s tremi pikami, vse črke z naglasi (kot so strešice, ostrivci ter drugi) so bile zamenjani z osnovnim znakom, torej

na primer š postane s in é postane e. Pri tem so bile tudi odstranjene vse prazne vrstice ter ločila poglavij, ki so bila označena z '***'. Odstranjeni so bili tudi vsi nevidni simboli, ki niso videni bralcu, prisotni v besedilu. Na ta način se je začetno besedilo znižalo iz dolžine 319843 znakov na 317803 znakov pred podaljševanjem. Naslednji korak je bila podaljšava besedila, ki podaljša velikost besedila iz 317803 na 25000000 znakov.

Uporabljeno besedilo uporablja abecedo velikosti $52 + 1$ znak, pri čemer je originalna abeceda sestavljena iz slovenske abecede brez črk 'č', 'š', in 'ž' (bodisi v velikih črkah bodisi v malih črkah), ločil, presledkov in narekovajev. Pri tem vhodno besedilo zasede $25,851$ MB delovnega spomina, kar je všteto v vse meritve velikosti različnih implementacij priponskih dreves.

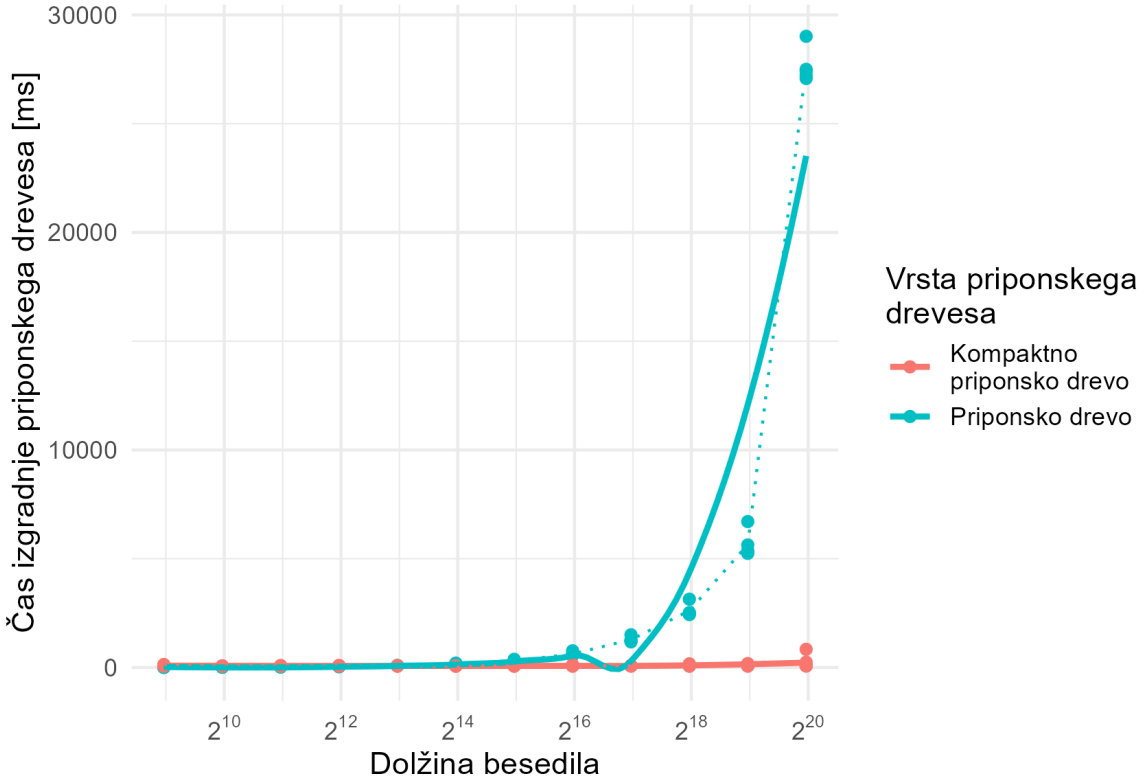


Slika 20: Graf velikosti priponskega drevesa izgrajenih iz besedil različnih velikosti. Vhodno besedilo je roman Na klancu.

Podobno kot za DNK sekvenco je bila izmerjena velikost, ki je potrebna za priponsko drevo na delavnem spominu. Rezultati meritve so prikazani na Sliki **??**, kjer je z modro barvo prikazana velikost priponskega drevesa z rdečo barvo pa velikost kompaktnega priponskega drevesa. Za to besedilo je velikost prionskega drevesa manjša ali približno enaka (manj kot $1,5$-krat večja od kompaktnega prionskega drevesa) kompaktnemu priponskemu drevesu, do besedila dolžine 4000 znakov. Velikosti priponskih dreves rastejo dokler ne dosežejo velikosti $3,9$ GB za besedilo dolžine 1024000 znakov. Čeprav

ima priponsko drevo velikost delovnega pomnilnika, mora biti skoraj polovica drevesa shranjena na `Swap` razdelku, saj operacijski sistem zasede $1,76$ GB delovnega spomina. Pri tem se zdi, kot da kompaktno priponsko drevo ohranja konstantno velikost v vsakem testiranju. To se zgolj zdi, saj kompaktno priponsko drevo potrebuje bistveno manj prostora kot največje testirano priponsko drevo. Velikost kompaktnega priponskega drevesa naraste iz $27,4$ MB na $28,4$ MB.

Iz Slike **??** je razvidno, da je priponsko drevo prostorsko bolj učinkovito za besedila, ki so krajša od 4000 znakov. Za vsa ostala daljša besedila je bolj prostorsko učinkovito uporabiti kompaktno priponsko drevo. To pa je zgolj eden od pogojev, kako izbrati primerno podatkovno strukturo.

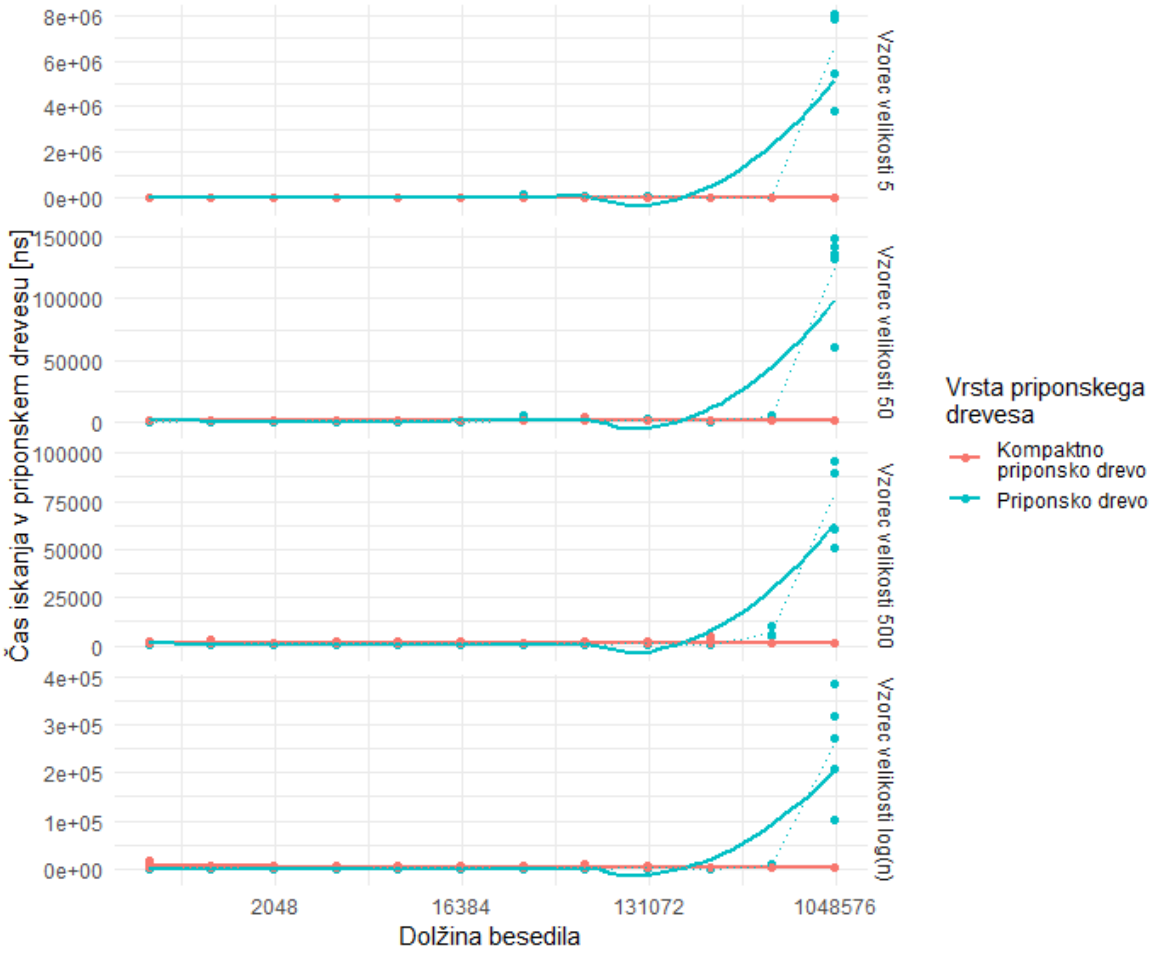


Slika 21: Graf prikazuje čas izgradnje priponskega drevesa za različne dolžine vhodnih besedil. Vhodno besedilo je roman Na klancu.

Naslednji pogoj, ki ga je potrebno upoštevati, je čas izgradnje priponskega drevesa, saj za je nekatere operacije bolj pomembno hitro izgraditi priponsko drevo, kot zasedati manj prostora na delovnem pomnilniku s priponskim drevesom. Na Sliki **??** je prikazan potreben čas za izgradnjo priponskega drevesa, ki je označen z modro barvo, ter čas potreben za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa, ki pa je označeno z rdečo barvo. Iz grafa je razvidno, da čas, ki je potreben za izgradnjo priponskega drevesa, je v vsakem koraku podvojen. Pri tem pa se razlikuje priponsko drevo nad besedilom velikosti 1024000 znakov, ki potrebuje $4,88$-krat več časa za izgradnjo, kot priponsko

drevo nad besedilom predhodne testirane velikosti. Kompaktno priponsko drevo potrebuje bistveno manj časa za izgradnjo in iz slike se zdi, kot da bi potrebovalo konstantno časa. Kompaktno priponsko drevo potrebuje za izgradnjo kompaktnega priponskega drevesa nad prvim testnim besedilom 89, 8 milisekund in za izgradnjo nad največjim besedilom pa 259 milisekund.

Torej iz Slike **??** se lahko opazi, da je za besedila krajša od 8000 znakov čas izgradnje priponskega drevesa krajši kot za kompaktno priponsko drevo. Za daljša vhodna besedila pa se časovno izplača uporabiti kompaktno priponsko drevo.



Slika 22: Graf prikazuje čas iskanja vzorcev različnih dolžin v različnih implementacijah priponskega drevesa. Vhodno besedilo je roman Na klancu.

Čas izgradnje priponskega drevesa vpliva na hitrost iskanja vzorcev v besedilu tedaj, ko se ne išče dovolj vzorcev v besedilu, v tem primeru se čas izgradnje ne amortizira na konstanten dodaten čas iskanja posamičnega vzorca. V tem primeru je bolj pomemben čas iskanja vzorcev v besedilu. Zato se nazadnje lahko pogleda vpliv velikosti priponskega drevesa na potreben čas za izvršiti poizvedbo nad njimi. Na Sliki **??** so prikazani časi v nanosekundah potrebni za iskanje vzorcev, in sicer z modro barvo so predstavljeni časi za poizvedbe v priponskih drevesih, z rdečo barvo pa so predstavljeni časi

za poizvedbe v kompaktnem priponskem drevesu. Na sliki so predstavljeni rezultati za vse štiri velikosti vzorcev iskanih v priponskem drevesu: 5 znakov, 50 znakov, 500 znakov in $\log n$ znakov, pri čemer je n dolžina besedila.

Na zgornjem grafu Slike **??** so prikazani rezultati iskanja vzorca dolžine 5 znakov. V priponskih drevesih je časovna zahtevnost iskanja vzorca konstantna skozi celotno izvajanje. Pri tem pa so bili izmerjeni 3 različni časi. Prvi izmerjen čas je približno $2,6$ mikrosekund, ki je potreben za preveriti prisotnost vzorca v besedilih do 32000 znakov. V besedilih med 64000 in 512000 znakov je čas iskanja $15,5$-krat večji, in sicer približno 45 mikrosekund. Najbolj verjetni razlog za ta skok v potrebnem času je dolžina niza, ki ga predstavljajo povezave med vozlišči. Nizi postanejo vedno krajši in zato je potrebno več časa za binarna iskanja v naslednje povezave. Drugi razlog za daljše iskanje je večja verjetnost prisotnosti vzorca v besedilu, saj imajo krajši vzorci v naravnem jeziku večjo verjetnost, da se ponovijo, ter vzorci, ki so narejeni iz podaljšanega besedila, so zagotovo prisotni v originalnem besedilu, razen če je vzorec lih zlepek dveh podnizov originalnega besedila. Zadnji izmerjen čas, pa je čas, ki je potreben za iskanje vzorca v besedilu dolžine 1024000 znakov. Le ta čas je $260,7$-krat večji od predhodnega potrebnega časa, kar pomeni, da za najti vzorec je potrebno $6,59$ milisekunde (6588 mikrosekunde). Razlogi za to povečavo v času so enaki kot za prejšnjo povečavo v času ter uporaba `Swap` razdelka, za shranjevanje priponskega drevesa.

Za razliko od priponskega drevesa, iskanje vzorca dolžine 5 v kompaktnem priponskem drevesu potrebuje konstantni čas, da se izvrši skozi celotno testiranje, kot je to lahko razvidno iz Slike **??**. Iskanje v kompaktnem priponskem drevesu potrebuje približno enako časa kot iskanje v priponskih drevesih nad besedilo krajšim od 32000 znakov, za kar je potrebno približno 3 mikrosekunde. Iz tega sledi, da za besedila krajša 8000 znakov je iskanje v priponskem drevesu boljše, saj porabi manj prostora in manj časa, da se izgradi. Iskanje v besedilih do 32000 znakov je ekvivalentno natanko tedaj, ko je možno amortizirati čas izgradnje priponskega drevesa s količino iskanih vzorcev. V daljših primerih pa je boljše uporabiti kompaktno priponsko drevo za iskanje krajših vzorcev.

Naslednja testirana poizvedba je iskanje vzorcev dolžine 50 znakov, kar je možno videti na drugem grafu Slike **??**. Opazi se, da je čas, ki je potreben za izvrši poizvedbo, konstanten skozi celotno izvajanje bodisi za kompaktno priponsko drevo, bodisi za priponsko drevo. Iskanje vzorcev dolžine 50 znakov s pomočjo priponskega drevesa potrebuje približno $1,5$ mikrosekund. Z uporabo kompaktnega priponskega drevesa pa je potrebnih približno $1,2$ mikrosekunde. Pri tem je samo ena izjema, in sicer priponsko drevo, ki mora biti delno shranjeno na `Swap` razdelku. Uporaba `Swap` razdelka na trdem disku poveča čas iskanja vzorca za $27,3$-krat, kar pomeni, da je potrebno 124 mikrosekund za preveriti, ali je vzorec prisoten v besedilu ali ni. Iz rezul-

tatov tega testiranja se lahko opazi, da ni časovne razlike med iskanjem vzorca dolžine 50 v besedilu z uporabo priponskega drevesa ali z uporabo kompaktnega priponskega drevesa. Torej, če je mogoče priponsko drevo shraniti v celoti na delovnem spominu in število iskanih vzorcev omogoča amortizacijo časa, ki je potrebnega za izgradnjo priponskega drevesa, je lahko le to uporabljeno za namene iskanja, sicer je bolje uporabiti kompaktno priponsko drevo.

Rezultati testiranja iskanja vzorca dolžine 500 znakov v besedilu, ki uporablja naravni jezik, so prikazani na tretjem grafu Slike **??**. Podobno kot v predhodnih testiranjih je čas iskanja v obeh primerih konstanten. Priponsko drevo potrebuje približno 1 mikrosekundo za preveriti obstoj vzorca, kompaktno priponsko drevo pa potrebuje $1,5$ mikrosekund. Pri tem pa obstaja ena izjema, in sicer priponsko drevo, ki je delno shranjeno na `Swap` razdelku. To priponsko drevo potrebuje $78,5$ mikrosekund za izvesti poizvedbo, kar je $12,4$-krat več čas kot v predhodnem priponskem drevesu ali pa $52,3$-krat več čas kot povprečni čas ostalih poizvedb. Iz rezultatov tega testiranja je zaključek isti kot v predhodnem testiranju (iskanje vzorcev dolžine 50). To pomeni, da če se lahko priponsko drevo shrani v celoti na delovnem spominu in število iskanih vzorec je dovolj veliko, da se lahko z vsako poizvedbo amortizira čas iskanja vzorcev, se lahko uporablja priponsko drevo, sicer je bolj priporočljivo uporabiti kompaktno priponsko drevo.

Zadnje izdelano testiranje je iskanje vzorcev dolžine $O(\log n)$ v besedilu. Rezultati tega testiranja so predstavljeni na spodnjem grafu Slike **??**. Podobno kot v primeru DNK sekvence so vzorci dolgi od 9 do 20 znakov. Skozi celotno izvajanje testiranja je čas poizvedbe v obeh primerih konstanten. Pri tem potrebuje poizvedba v priponskem drevesu približno $3,5$ mikrosekund, v kompaktnem priponskem drevesu pa potrebuje ista poizvedba približno $4,5$ mikrosekund. Izjema je priponsko drevo delno shranjeno v `Swap` razdelku, ki potrebuje $38,1$-krat več časa od predhodnega priponskega drevesa ali $70,4$-krat več časa od povprečnega časa poizvedbe. Torej potrebuje 257 mikrosekund za izvršiti poizvedbo. Podobno kot pri ostalih testiranjih nad besedilom v naravnem jeziku se lahko tudi iz teh rezultatov sklepa, da je priporočljivo uporabljati priponsko drevo za iskanje vzorcev v besedilu, če se lahko čas izgradnje le tega amortizira s količino iskanih vzorcev ter se lahko shrani celotno priponsko drevo v delovni spomin. Sicer pa je bolje, da se uporabi kompaktno priponsko drevo.

Iz vseh izvedenih testiranj nad priponskimi drevesi, ki so bila izgrajena nad besedilom v naravnem jeziku, se lahko sklepa, da je bolje uporabiti priponsko drevo za besedila do dolžine 4000 znakov, saj je potrebnega manj prostora in časa za izgradnjo drevesa, ter poizvedbe potrebujejo manj časa, da se izvršijo. Če pa je priponsko drevo zgrajeno nad daljšim besedilo in je lahko v celoti shranjeno v delovnem spominu, potem je potrebno preveriti ali je število iskanih vzorcev dovolj veliko, da vsaka poizvedba amortizira čas izgradnje besedila. Število vzorcev mora biti vsaj $O(n)$, da se lahko

amortizira čas izgradnje. Če ni dovolj vzorcev za to storiti, potem je bolje uporabiti kompaktno priponsko drevo. Le to omogoča malo počasnejše iskanje vzorcev, ampak za daljša besedila od 4000 znakov sta potreben čas za izgradnjo in prostor na pomnilniku bistveno nižja od prostora in časa izgradnje priponskega drevesa.

Iz rezultatov se lahko tudi opazi, da se priponskemu drevesu, ki je delno shranjeno na `swap` razdelku, bistveno poslabša čas potrebnem za izgradnjo in iskanje vzorcev v besedilu. Po tem takem ni priporočljivo uporabljati priponska drevesa, ki morajo biti shranjena izven delovnega spomina.

Pri primerjavi rezultatov obeh testiranj, testiranje nad DNK sekvenco in testiranje nad besedilom iz naravnega jezika, se lahko opazi, da so si rezultati zelo podobni. Edina bistvena razlika med obema testiranjema je skok v potrebnem času pri iskanju daljših vzorcev ter vzorcev dolžine $O(\log n)$ v besedilu, ki je zapisano v naravnem jeziku. Najbolj verjeten razlog je prisotnost vzorca v besedilu, ki poveča časovno zahtevnost iskanja. Torej iz testiranja se lahko ugotovi, da ni nobene razlike med časom potrebnim za poizvedbo in izgradnjo ter prostorsko zahtevnostjo priponskega drevesa (oziroma kompaktnega priponskega drevesa), glede na vhodno besedilo priponskega drevesa.

Obstaja pa izmerljiva razlika med priponskimi drevesi, ki so v celoti shranjeni v delovnem spominu, ter tistimi, ki so deloma shranjeni na `Swap` razdelku. Izmerjena razlika se pojavi tudi v primerjavi, ki so jo izdelali Välimäki idr. [**?**]. Izmerjena razlika je skladna z razliko v času branja zaporednih podatkov med trdim diskom in notranjim spominom, ki je približno 7-krat počasnejši, kar je izmeril Jacobs [**?**]. Iz ugotovitev od Jacobsa [**?**] in Välimäki idr. [**?**] je lahko pojasnjena velika časovna zahtevnost pri izgradnji priponskega drevesa velikost 2048000 znakov.

7 ZAKLJUČEK

Namen magistrske naloge je bila predstavitev podatkovne strukture kompaktno priponsko drevo ter primerjava le te s podatkovno strukturo priponsko drevo. Obe podatkovni strukturi sta bili primerjani med seboj, bodisi teoretično bodisi empirično.

Pred samo primerjavo obeh podatkovnikih struktur, je bila vsaka podatkovna struktura predstavljena. Predstavitev ni vsebovala samo predstavitev implementacije podatkovne strukture, ampak tudi predstavitev algoritmov za izgradnjo podatkovne strukture. Sama teoretična primerjava se je osredotočila na tri različne primerjave, in sicer na primerjavo osnovnih operacij, primerjavo osnovnih poizvedb ter primerjavo prostorske zahtevnosti in časovne zahtevnosti algoritmov za izgradnjo. Iz primerjave osnovnih operacij in primerjave osnovnih poizvedb je razvidno, da imajo nekatere operacije ter poizvedbe različen čas izvajanja v kompaktnem priponskem drevesu, in sicer se potreben čas pri osnovnih operacijah lahko dvige za $O(t_{SA})$-krat ali $O(t_\Psi)$-krat. Pri poizvedbah se čas dvigne zgolj za $O(t_\Psi)$ pri poizvedbi $prisotnost(vzorec)$, pri ostalih poizvedbah pa se potrebni čas zmanjša za $O(n)$. Časa $O(t_\Psi)$ in $O(t_{SA})$ sta odvisna od implementacije kompaktnega prionskega polja, ki je uporabljeno v kompaktnem priponskem drevesu. Če je kompaktno priponsko drevo implementirano s pomočjo časovno najbolj učinkovite implementacije kompaktnega priponskega polja, potem je čas $t_\Psi = O(1)$ in $t_{SA} = O(\log^\epsilon n)$, kar pomeni da vse osnovne operacije, ki so bile za $O(t_\Psi)$-krat počasnejše, ohranijo isto časovno zahtevnost, kot jo potrebujejo v priponskem drevesu.

Glavna razlika med priponskim drevesom in kompaktnim priponskim drevesom, je v časovni zahtevnosti izgradnje ter prostorski zahtevnosti. Priponsko drevo potrebuje $O(n)$ povezav, kar pomeni, da potrebuje $O(n \log n)$ bitov ali $O(nw)$ bitov, če se uporabljajo sistemski naslovi. Kompaktno priponsko drevo pa potrebuje $|CSA|+6n+o(n)$ bitov, kar v obeh predstavljenih implementacijah kompaktnega priponskega polja ohrani prostorsko zahtevnost $O(n)$ bitov. Časovna zahtevnost izgradnje priponskega drevesa se dvigne iz $O(n)$ za priponska drevesa na $O(n \log n)$ za kompaktna priponska drevesa, kar pa omogoča, da je celoten postopek izgradnje kompaktnega priponskega drevesa v celoti storjen s kompaktnimi podatkovnimi strukturami.

Z empirično primerjavo so bile potrjene razlike v prostorski zahtevnosti ter v razliki časovnih zahtevnosti operacij, ki so bile predhodno predstavljene. Empirična primerjava je bila opravljena nad zaporedjem genov ter nad besedilom v naravnem jeziku (Slovenščina). Empirična primerjava pa je merila časovno zahtevnost poizvedbe

prisotnost(*vzorec*) nad besedili različnih velikosti ter vzorcev različnih dolžin, časovno zahtevnost izgradnje priponskega drevesa različnih velikosti ter prostorsko zahtevnost le teh priponskih dreves. Z empirično primerjavo se lahko potrdijo teoretične časovne razlike operacij in poizvedb med priponskimi drevesi in kompaktnimi priponskimi drevesi. Pri tem pa se tudi opazi razlika med časovno zahtevnostjo operacij, ko je priponsko drevo v celoti shranjeno na delovnem spominu ter ko je del drevesa shranjen na `Swap` razdelku. Te razlike ni mogoče opaziti na kompaktnih priponskih drevesih, saj dolžina besedila je prekratka, da bi bilo potrebno shraniti kompaktno priponsko drevo na `Swap` razdelku. Pri tem se tudi lahko opazi, da je smiselno uporabljati kompaktna priponska drevesa za besedila, ki imajo dolžino vsaj 8000 znakov, saj takrat kompaktna priponska drevesa potrebujejo manj prostora ter manj časa, da se izgradijo.

Rezultati testiranja so bili izdelani na računalniku z zgolj 4 GB delovnega pomnilnika in 8 GB `Swap` razdelka, kar je relativno malo spomina, saj imajo novi osebi računalniki vsaj 8 GB delovnega spomina ter dodaten `Swap` razdelek in procesorji za strežnike podpirajo več 100 GB delovnega spomina. Torej se pojavi vprašanje ali so kompaktne podatkovne strukture sploh še potrebne, saj imajo trenutni računalniki na razpolago dovolj delovnega spomina za shraniti celotno priponsko drevo. Po mojem mnenju so še vedno potrebne, saj omogočajo shranjevanje in iskanje po večjem številu priponskih dreves hkrati. Iskanje vzorcev v večjem številu priponskih dreves na enkrat je mogoče, saj večina procesorjev podpira izvajanje večjega števila procesov na enkrat. Računalnik, na katerem je bilo izdelano testiranje, omogoča izvajanje do 4 procesov na enkrat, saj ima 2 jedri in 4 niti.

Nadaljnje raziskave bi se morale osredotočiti na implementacijo kompaktnega priponskega polja, ki zniža obe časovni zahtevnosti t_{SA} in t_{Ψ} na $O(1)$. Na ta način bi se znižala razlika med kompaktnimi priponskimi drevesi ter priponskimi drevesi, kar bi omogočalo vse prednosti priponskega drevesa ter vse prednosti kompaktnih podatkovnih struktur.

8 LITERATURA IN VIRI

[1] E. Ukkonen, On-line construction of suffix trees. *Algorithmica* 14 (1995) 249–260. *(Ni citirano.)*

[2] K. Sadakane, Compressed Suffix Trees with Full Functionality. *Theory of Computing Systems* 41 (2007) 589–607. *(Ni citirano.)*

[3] N. Välimäki, W. Gerlach, K. Dixit in V. Mäkinen, Engineering a Compressed Suffix Tree Implementation. V *6th International Workshop on Experimental and Efficient Algorithms*, 2007, 217–228. *(Ni citirano.)*

[4] E. M. McCreight, A Space-Economical Suffix Tree Construction Algorithm. *Journal of the Association for Computing Machinery* 23 (1976) 262–272. *(Ni citirano.)*

[5] P. Weiner, Linear pattern matching algorithms. V *14th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (swat 1973)*, 1973, 1–11. *(Ni citirano.)*

[6] G. Navarro, *Compact Data Structures: A Practical Approach*, Cambridge University Press, 2016. *(Ni citirano.)*

[7] D. E. Knuth, J. H. Morris in V. R. Pratt, Fast Pattern Matching in Strings. *SIAM Journal on Computing* 6 (1977) 323-350. *(Ni citirano.)*

[8] D. Gusfield, *Algorithms on Strings, Trees, and Sequences: Computer Science and Computational Biology*, Cambridge University Press, 1997. *(Ni citirano.)*

[9] *Pizza&Chili Corpus – Compressed Indexes and their Testbeds*, `https://pizzachili.dcc.uchile.cl/`. (Datum ogleda: 8. 10. 2024.) *(Ni citirano.)*

[10] I. Cankar, *Na Klancu*, Genija, 2012. *(Ni citirano.)*

[11] S. Gog, T. Beller, A. Moffat in M. Petri, From Theory to Practice: Plug and Play with Succinct Data Structures. V *13th International Symposium on Experimental Algorithms, (SEA 2014)*, 2014, 326–337. *(Ni citirano.)*

[12] K. Ganesh, *ganesh-k13/suffix-tree: C++ implementation of Suffix Tree (Ukkonens)*, `https://github.com/ganesh-k13/suffix-tree`. (Datum ogleda: 8. 10. 2024.) *(Ni citirano.)*

[13] E. Miller, *Genome — Knowledge Hub*, `https://www.genomicseducation.hee.nhs.uk/genotes/knowledge-hub/genome`. (Datum ogleda: 30. 10. 2024.) *(Ni citirano.)*

[14] T. Kasai, G. Lee, H. Arimura, A. Setsuo in K. Park, Linear-Time Longest-Common-Prefix Computation in Suffix Arrays and Its Applications. *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching* 2089 (2001) 181-192. *(Ni citirano.)*

[15] J. I. Munro in V. Raman, Succinct representation of balanced parentheses, static trees and planar graphs. *Proceedings 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (1997) 118-126. *(Ni citirano.)*

[16] R. Grossi in J. S. Vitter, Compressed suffix arrays and suffix trees with applications to text indexing and string matching . *Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (2000) 397–406. *(Ni citirano.)*

[17] R. Grossi, A. Gupta in J. S. Vitter, High-Order Entropy-Compressed Text Indexes . *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2003) 841–850. *(Ni citirano.)*

[18] L. M S. Russo, G. Navarro in A. L. Oliveira, Fully-Compressed Suffix Trees. *LATIN 2008: Theoretical Informatics* (2008) 362–373. *(Ni citirano.)*

[19] D. Harel in R. E. Tarjan, Fast Algorithms for Finding Nearest Common Ancestors. *SIAM Journal on Computing* 13 (1984) 338-355. *(Ni citirano.)*

[20] Koute, *koute/bytehound: A memory profiler for Linux.*, `https://github.com/koute/bytehound`. (Datum ogleda: 30. 10. 2024.) *(Ni citirano.)*

[21] A. Jacobs, The Pathologies of Big Data: Scale up your datasets enough and all your apps will come undone. What are the typical problems and where do the bottlenecks generally surface?. *Queue* 7 (2009) 10–19. *(Ni citirano.)*

[22] M. L. Fredman in D. E. Willard, BLASTING through the information theoretic barrier with FUSION TREES. V *STOC '90: Proceedings of the twenty-second annual ACM symposium on Theory of Computing*, 1990, 1-7. *(Ni citirano.)*

[23] P. Morin, *Open Data Structures, An Introduction*, Athabasca University Press, 2013. *(Ni citirano.)*

[24] U. Manber in G. Myers, Suffix arrays: a new method for on-line string searches. V *SODA '90: Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, 1990, 319-327. *(Ni citirano.)*

[25] P. Ko in S. Aluru, Space efficient linear time construction of suffix arrays. *Journal of Discrete Algorithms* 3 (2005) 143-156. *(Ni citirano.)*

[26] M. I. Abouelhoda, S. Kurtz in E. Ohlebusch, Replacing suffix trees with enhanced suffix arrays. *Journal of Discrete Algorithms* 2 (2004) 53-86. *(Ni citirano.)*

[27] D. Knuth, *Art of Computer Programming, The: Combinatorial Algorithms, Volume 4A*, Addison-Wesley Professional, 2011. *(Ni citirano.)*

[28] J. Fischer in V. Heun, A new succinct representation of RMQ-information and improvements in the enhanced suffix array. V *International Symposium on Combinatorics, Algorithms, Probabilistic and Experimental Methodologies*, 2007, 459–470. *(Ni citirano.)*

[29] A. Brodnik, *Searching in Constant Time and Minimum Space*, Ph.D. dissertation, University of Waterloo, 1995. *(Ni citirano.)*