

Escola de Engenharia da UFMG

Terceiro Trabalho Prático de Otimização

Otimização com Algoritmos Quase-Newton e Aproximações
Quadráticas

Aluno: Giovanni Martins de Sá Júnior - 2017001850

Belo Horizonte, 16 de agosto de 2024

1º Experimento: Avaliação das Funções Quadráticas

1º Função Analisada:

No primeiro momento, será avaliada a função da seção 2.1, em que a função é dada em duas dimensões, apresentada logo abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - c)^T \cdot A \cdot (x - c)$$

Assim, o número máximo de iterações do algoritmo a partir do método Quase-Newton escolhido dentre os possíveis será de 400 iterações. Diante disso, serão considerados quatro pontos iniciais sobre os quatro pontos distintos usando a técnica da seção áurea por meio de aproximações quadráticas e por avaliação direta da função:

- $x_{01} = [9 \ 9]$ \Rightarrow 1º Quadrante \Leftrightarrow Aproximações Quadráticas
- $x_{02} = [-3 \ 2]$ \Rightarrow 2º Quadrante \Leftrightarrow Avaliação Direta da Função
- $x_{03} = [-8 \ -6]$ \Rightarrow 3º Quadrante \Leftrightarrow Aproximações Quadráticas
- $x_{04} = [5 \ -7]$ \Rightarrow 4º Quadrante \Leftrightarrow Avaliação Direta da Função

Logo abaixo, são apresentados os resultados obtidos:

Método	x0 = [9 9] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,64748	9	9	0,0013882	2,54E-02
BFGS	0,61688	9	9	0,0010286	1,85E-08
Huang	0,5341	8	8	5,35E-05	3,16E-11
Biggs	0,51409	8	8	0,001733	3,02E-08

Método	x0 = [-3 2] -> Avaliação Direta de f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,48305	6	6	0,032071	1,11E-05
BFGS	0,57826	8	8	9,27E-07	8,87E-15
Huang	0,40581	6	6	0,0015961	4,27E-08
Biggs	0,52444	7	7	0,010058	1,48E-06

Método	x0 = [-8 -6] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,83452	11	11	0,03289	1,86E-05
BFGS	0,90153	11	11	0,00088771	1,57E-08
Huang	0,6744	9	9	0,0029523	1,23E-07
Biggs	0,72456	10	10	0,00051012	3,56E-09

Método	x0 = [5 -7] -> Avaliação Direta de f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,55103	7	423	0,000037043	3,51E-09
BFGS	0,50969	7	423	0,00024382	1,55E-09
Huang	0,51795	7	355	7,86E-05	1,18E-10
Biggs	0,41721	7	355	7,86E-05	1,18E-10

2º Função Analisada:

No segundo momento, será avaliada a equação da seção 2.2, em que apresenta duas variáveis de decisão, apresentada a seguir:

$$f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1$$

Assim, o número máximo de iterações do algoritmo a partir do método Quase-Newton escolhido dentre os possíveis será de 400 iterações. Diante disso, será executada os métodos de Quase-newton por dois pontos distintos, em que um ponto será aplicada a técnica da seção áurea da avaliação direta da função, e para o segundo ponto, o método das aproximações quadráticas:

- $x_{01} = [9 \ 9]$ \Rightarrow 1º Quadrante \Leftrightarrow Avaliação Direta de $f(x)$
- $x_{02} = [-3 \ 2]$ \Rightarrow 2º Quadrante \Leftrightarrow Aproximações Quadráticas para $f(x)$

Logo abaixo, são apresentados os resultados obtidos:

Método	x0 = [9 9] -> Avaliação Direta de f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,43422	6	293	58,6314	27,1268
BFGS	0,48796	6	288	58,6314	27,1268
Huang	0,45933	6	283	59,6314	27,1268
Biggs	0,43049	6	294	58,6314	27,1268

Método	x0 = [-3 2] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,39925	6	6	58,6314	27,1268
BFGS	0,45559	6	6	58,6314	27,1268
Huang	0,34019	6	6	58,6314	27,1268
Biggs	0,48808	6	6	58,6314	27,1268

3º Função Analisada:

No terceiro momento, será avaliada a equação da seção 2.3, em que apresenta duas variáveis de decisão, apresentada a seguir:

$$f(x) = -8 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_1^3 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2^3$$

Assim, o número máximo de iterações do algoritmo a partir do método Quase-Newton escolhido dentre os possíveis será de 400 iterações, sob o intervalo de [0, 3]. Diante disso, será executada os métodos de Quase-newton por dois pontos distintos, em que um ponto será aplicada a técnica da seção áurea da avaliação direta da função, e para o segundo ponto, o método das aproximações quadráticas:

- $x_{01} = [9 \ 9]$ \Rightarrow 1º Quadrante \Leftrightarrow Aproximações Quadráticas para f(x)
- $x_{02} = [-3 \ 2]$ \Rightarrow 2º Quadrante \Leftrightarrow Avaliação Direta de f(x)

Logo abaixo, são apresentados os resultados obtidos:

Método	x0 = [9 9] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	1,1262	15	15	3,25E-06	3,89E-13
BFGS	1,2505	15	15	3,25E-06	3,89E-13
Huang	0,94385	11	11	6,22E-07	1,11E-14
Biggs	1,3241	17	17	4,31E-05	7,44E-11

Método	x0 = [-3 2] -> Avaliação Direta de f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	4,1887	46	2484	956,1221	773505,58
BFGS	4,1646	46	2484	956,1221	773505,58
Huang	4,1131	46	2484	956,1221	773505,58
Biggs	3,881	46	2484	956,1221	773505,58

2º Experimento: Avaliação das Funções Não Quadráticas

Função Analisada:

No segundo experimento, será novamente utilizada a equação 2.2, detentora de duas variáveis de decisão, apresentada a seguir:

$$f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + a \cdot (x_1^3 + x_2^3)$$

Assim, o número máximo de iterações do algoritmo a partir do método Quase-Newton escolhido dentre os possíveis será de 400 iterações, sob o intervalo de [10, 10]. Como diferencial neste experimento, será avaliado agora a variação do parâmetro alfa sob um mesmo ponto inicial. Nesse sentido, será aplicado a técnica da seção áurea por meio da avaliação direta e também pela aproximação quadrática sob a função definida.

$$a = -0,0263 \rightarrow f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 - 0,0263 \cdot (x_1^3 + x_2^3)$$

$$a = 0,0263 \rightarrow f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 0,0263 \cdot (x_1^3 + x_2^3)$$

$$a = 1 \rightarrow f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + (x_1^3 + x_2^3)$$

Para os diferentes parâmetros de alfa, são apresentados os resultados obtidos:

Método	Parâmetro a = - 0.0263				
	x0 = [-3 2] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,44138	6	6	1,3047	0,013431
BFGS	0,45171	6	6	1,3047	0,013431
Huang	0,46697	6	6	1,3047	0,013431
Biggs	0,43169	6	6	1,3047	0,013431
Método	x0 = [-3 2] -> Avaliação direta para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,33219	4	211	1,3048	0,013431
BFGS	0,37636	5	209	1,3041	0,013431
Huang	0,35675	5	214	1,3041	0,013431
Biggs	0,36095	5	230	1,3041	0,013431

	Parâmetro a = 0.0263				
Método	x0 = [-3 2] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,44956	6	6	1,4315	0,016172
BFGS	0,44177	6	6	1,4315	0,016172
Huang	0,44071	6	6	1,4315	0,016172
Biggs	0,51336	6	6	1,4315	0,016172
Método	x0 = [-3 2] -> Avaliação direta para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,23736	4	211	1,43314	0,016172
BFGS	0,29722	5	209	1,4322	0,016172
Huang	0,30541	5	214	1,4322	0,016172
Biggs	0,48104	5	230	1,4322	0,016172

	Parâmetro a = 1				
Método	x0 = [-3 2] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,36813	6	6	58,6314	27,1268
BFGS	0,52782	6	6	58,6314	27,1268
Huang	0,52279	6	6	58,6314	27,1268
Biggs	0,41556	6	6	58,6314	27,1268
Método	x0 = [-3 2] -> Avaliação direta para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,29314	4	211	58,6315	27,1268
BFGS	0,3649	5	209	58,6312	27,1268
Huang	0,37488	5	214	58,6312	27,1268
Biggs	0,43809	5	230	58,6312	27,1268

3º Experimento: Avaliação do Custo Computacional em Função da Variação da Dimensão

Função Analisada:

Para o terceiro experimento, será utilizada a função da seção 2.4, fixando-se o parâmetro alfa = 0.0263.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - c)^T \cdot A \cdot (x - c) + 0,0263 \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - 1)^3$$

Diante da função, será variado o número de dimensões para a função objetivo, entre 5 até 25, com o limite inferior e superior delimitado no intervalo $[-10, 10]$. Ademais, o parâmetro alfa será fixado em 0,0263.

Abaixo são apresentados os resultados obtidos:

Método	Dimensão igual a 5				
	Tempo (s)	N° de Iterações	N° de Avaliações de $f(x)$	Erro x' (%)	Erro $f(x)$ (%)
DFP	3,4656	45	2433	956,114	773473,08
BFGS	3,4920	45	2433	956,114	773473,08
Huang	3,6494	45	2433	956,114	773473,08
Biggs	3,4141	45	2433	956,114	773473,08

Método	Dimensão igual a 10				
	Tempo (s)	N° de Iterações	N° de Avaliações de $f(x)$	Erro x' (%)	Erro $f(x)$ (%)
DFP	3,6721	45	2429	9,56E+02	7,73E+05
BFGS	3,9389	45	2429	956,1114	773462,32
Huang	4,0361	45	2429	956,1114	773462,32
Biggs	3,4781	45	2429	956,1114	773462,32

Método	Dimensão igual a 15				
	Tempo (s)	N° de Iterações	N° de Avaliações de $f(x)$	Erro x' (%)	Erro $f(x)$ (%)
DFP	4,0792	45	2428	956,1105	773458,73
BFGS	4,2118	45	2428	956,1105	773458,73
Huang	4,6351	45	2428	956,1105	773458,73
Briggs	3,9588	45	2428	956,1105	773458,73

Método	Dimensão igual a 20				
	Tempo (s)	N° de Iterações	N° de Avaliações de $f(x)$	Erro x' (%)	Erro $f(x)$ (%)
DFP	3,9835	44	2388	956,11	773456,70
BFGS	4,0036	44	2388	956,11	773456,70
Huang	3,9854	44	2388	956,11	773456,70
Briggs	3,6761	44	2388	956,11	773456,70

Método	Dimensão igual a 25				
	Tempo (s)	N° de Iterações	N° de Avaliações de $f(x)$	Erro x' (%)	Erro $f(x)$ (%)
DFP	3,9011	44	2387	956,1097	773455,63
BFGS	4,0918	44	2387	956,1097	773455,63
Huang	3,6509	44	2387	956,1097	773455,63
Briggs	3,6523	44	2387	956,1097	773455,63

4º Experimento: Técnica da Seção Áurea - avaliação direta da função e aproximações quadráticas da função a cada iteração

1º Função Analisada:

Neste quarto experimento, a primeira função a ser analisada será a apresentada na seção 2.5, referente ao problema *Rosen-Suzuki*, tratando-se de uma função quadrática dada pela soma da função objetivo e penalidades que impõem um conjunto de restrições não lineares.

Assim, a função objetivo se dará por duas dimensões, limitando-se o número de iterações em 400, com limites inferiores e superiores delimitados pelo intervalo $[-10, 10]$. Na execução dos algoritmos que implementam os métodos Quase-Newton, será considerado um ponto inicial e comparar a técnica da seção áurea por meio da avaliação direta e nas aproximações quadráticas. Abaixo são apresentados os pontos iniciais e os resultados obtidos:

- $x_0 = [6 \ -5] \Rightarrow 3^\circ \text{ Quadrante} \Leftrightarrow \text{Avaliação Direta de } f(x)$
- $x_0 = [6 \ -5] \Rightarrow 3^\circ \text{ Quadrante} \Leftrightarrow \text{Aproximações Quadráticas para } f(x)$

Método	x0 = [-6 -5] -> Avaliação direta de f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,66576	8	8	0,037657	1,07E-05
BFGS	0,67449	8	8	0,014016	1,15E-06
Huang	0,69819	8	8	0,014018	1,15E-06
Biggs	0,66029	8	8	0,014017	1,15E-06
Método	x0 = [-6 -5] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,39946	5	201	0,0013899	2,90E-08
BFGS	0,44104	5	216	0,0016755	1,93E-08
Huang	0,45247	5	218	0,0016755	1,93E-08
Biggs	0,41585	5	198	0,0016754	1,93E-08

2º Função Analisada:

Para a segunda função deste quarto experimento, utilizaremos novamente a função da seção 2.4, com o parâmetro alfa fixado em 0.0263.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - c)^T \cdot A \cdot (x - c) + 0,0263 \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - 1)^3$$

Para este problema, será fixado o número de 30 dimensões, com limites inferiores e superiores intervalados entre [-10, 10], e um ponto gerado aleatoriamente através da seguinte fórmula:

$$x_0 = -10 + 20 \times rand(30, 1)$$

Abaixo, são apresentados os resultados obtidos:

Método	x0 = [-6 -5] -> Avaliação direta de f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,84477	10	10	0,00072829	1,05E-08
BFGS	0,84786	10	10	0,00015068	3,03E-10
Huang	0,77027	9	9	8,70E-06	8,69E-13
Biggs	0,86132	10	10	4,99E-05	4,74E-11
Método	x0 = [-6 -5] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	0,75338	8	424	8,98E-08	8,46E-17
BFGS	0,67292	8	423	1,88E-07	3,66E-16
Huang	0,67535	8	428	1,31E-07	1,79E-16
Biggs	0,66218	8	428	1,31E-07	1,79E-16

5º Experimento: Avaliação dos métodos Quase-Newton em problemas com Hessiana Singular

Função Analisada:

Neste quinto experimento, será utilizada a função da seção 2.6, apresentando duas variáveis de decisão, limitando um número máximo de 400 iterações e delimitando o intervalo de mínimo e máximo de $[-10, 10]$.

$$f(x) = 8 \cdot \left\| x_1 + \frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} \right\|_2 + 7 \cdot \left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right)$$

Assim, será levado em conta um mesmo ponto inicial para as duas avaliações, utilizando as técnica da seção áurea feita através da avaliação direta da função e por meio das aproximações quadráticas para a função a cada iteração:

- $x_0 = [9 \ 9] \Rightarrow 1^\circ \text{ Quadrante} \Leftrightarrow \text{Avaliação Direta de } f(x)$
- $x_0 = [9 \ 9] \Rightarrow 1^\circ \text{ Quadrante} \Leftrightarrow \text{Aproximações Quadráticas para } f(x)$

Abaixo, são apresentados os resultados obtidos:

Método	x0 = [9 9] -> Avaliação direta de f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	28,1297	327	327	6,632100	0,990100
BFGS	23,9477	350	350	0,066848	0,011248
Huang	36,9843	374	374	0,045931	0,011630
Biggs	15,0841	171	171	0,023331	0,005061
Método	x0 = [9 9] -> Aproximações Quadráticas para f(x)				
	Tempo (s)	Nº de Iterações	Nº de Avaliações de f(x)	Erro x' (%)	Erro f(x) (%)
DFP	2,1873	22	1396	0,00042363	3,85E-05
BFGS	2,1475	21	1396	0,00063891	0,00015445
Huang	2,0014	21	1410	0,00063704	0,00015445
Biggs	2,0406	21	1404	0,00063704	0,00015445

6° Experimento: Avaliação Estatística dos métodos Quase-Newton com a variação do parâmetro α

Função Analisada:

Neste último experimento, será reavaliada a função da seção 2.2, no intuito de se fazer uma análise sobre diferentes valores de alfa. Assim, para um alfa fixado em zero, a função $f(x)$ será quadrática, e não quadrática em caso contrário. Logo, os pontos iniciais escolhidos serão determinados pela função `rand` presente no Matlab dentro da faixa de limites estabelecida pelo problema. Abaixo, é apresentada a função para o dado valor de alfa utilizado e a função que executa a escolha do ponto inicial:

$$\alpha = -0,0263 \rightarrow f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 - 0,0263 \cdot (x_1^3 + x_2^3)$$

$$\alpha = 0 \rightarrow f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1$$

$$\alpha = 0,0263 \rightarrow f(x) = 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 - 12 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 0,0263 \cdot (x_1^3 + x_2^3)$$

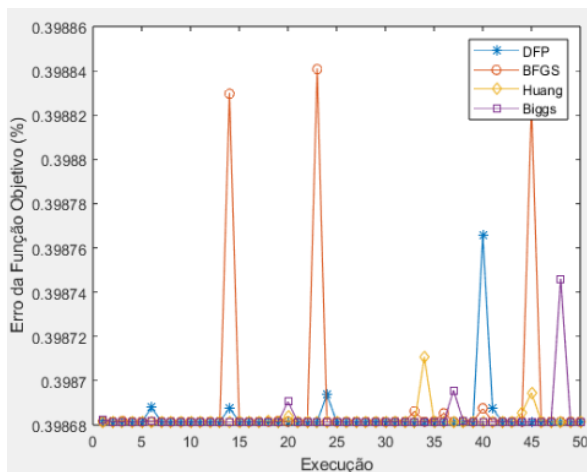
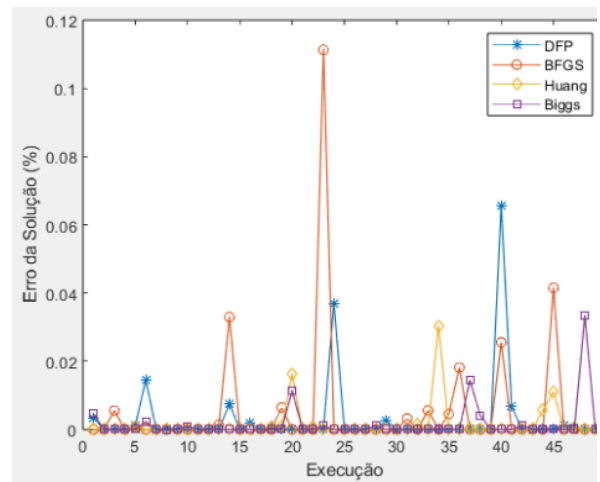
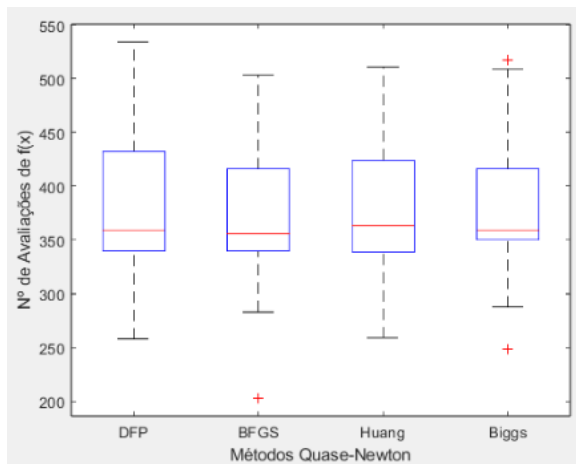
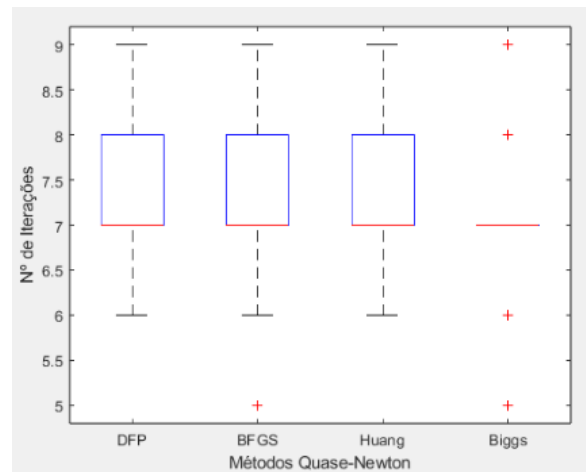
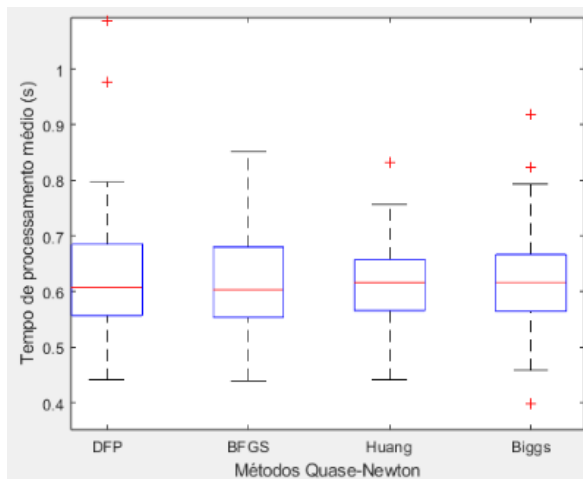
$$x_0 = 20 \times \text{rand}(2, 1) - 10$$

Assim, cada método irá ser executado 50 vezes, levando-se em conta a técnica da seção áurea feita por meio da avaliação direta da função objetivo e por meio da aproximação quadrática. Com isso, neste último experimento será feita uma apresentação estatística dos resultados, avaliando-se o tempo de processamento médio, número de iterações, número de avaliações da função objetivo, além do erro percentual da solução e o erro percentual do valor da função objetivo. Aliado a esta análise, também serão apresentadas as boxplots dos resultados para cada caso.

A seguir, são mostrados os resultados obtidos:

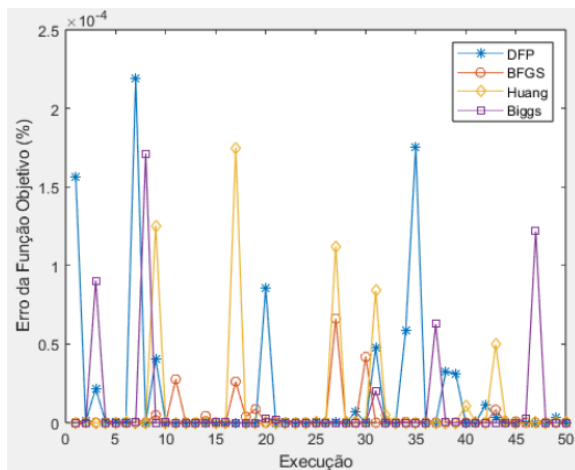
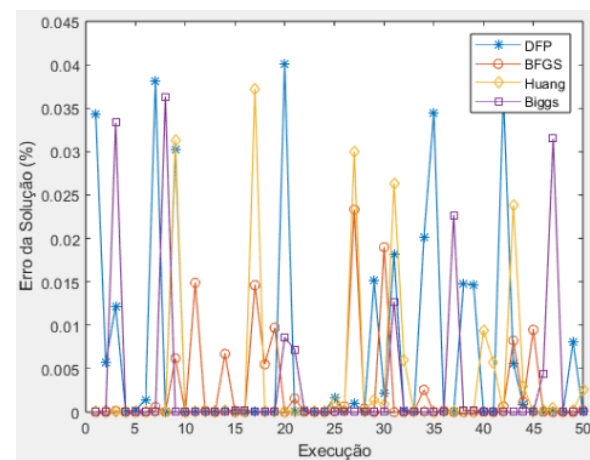
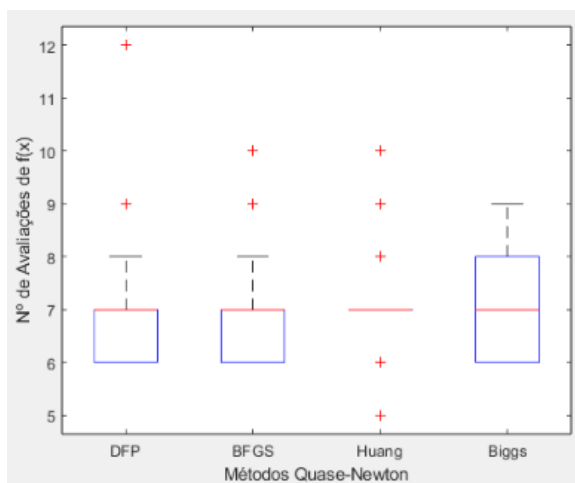
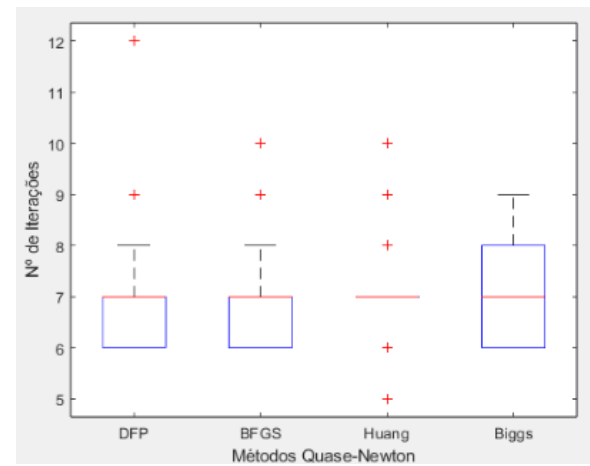
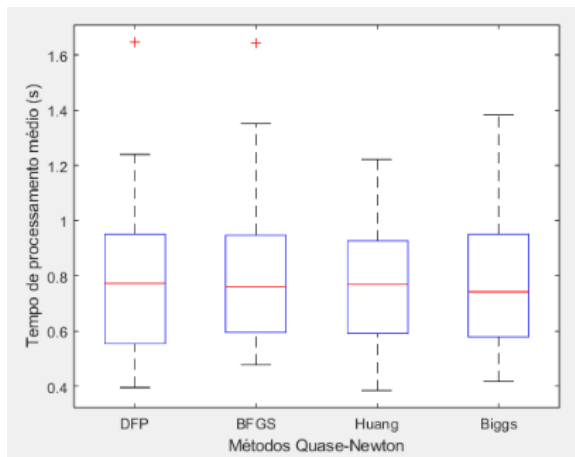
Seção Áurea por meio da Avaliação Direta de $f(x)$ e $\alpha = -0.0263$

Técnica da Seção Áurea feita por meio da Avaliação Direta de $f(x)$				
$\alpha = -0.0263$				
Tempo de Processamento Médio				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	0,62756	0,61216	0,61439	0,61938
Mediana	0,60813	0,60291	0,61613	0,61679
Desvio Padrão	0,11777	0,10369	0,083585	0,095957
Erro Padrão	0,016655	0,014664	0,011821	0,01357
Variância	0,01387	0,010751	0,0069864	0,0092077
Mínimo	0,44137	0,34732	0,44173	0,39786
Máximo	1,0873	0,85078	0,83299	0,91826
Nº de Dados	50	50	50	50
Nº de Iterações				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	7,2	7,14	7,22	7,18
Mediana	7	7	7	7
Desvio Padrão	0,78246	0,90373	0,81541	0,74751
Erro Padrão	0,11066	0,12781	0,11532	0,10571
Variância	0,61224	0,81673	0,6649	0,55878
Mínimo	6	5	6	5
Máximo	9	9	9	9
Nº de Dados	50	50	50	50
Nº de avaliações de $f(x)$				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	379,76	377,7	377,1	382,56
Mediana	358,5	356	363	358,5
Desvio Padrão	68,8226	64,8006	65,9141	60,3287
Erro Padrão	9,733	9,1642	9,3217	8,5318
Variância	4736,55	4199,11	4344,66	3639,55
Mínimo	258	203	259	249
Máximo	534	503	511	517
Nº de Dados	50	50	50	50



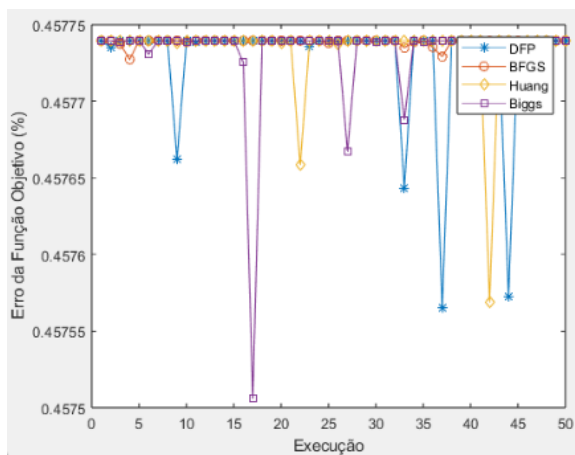
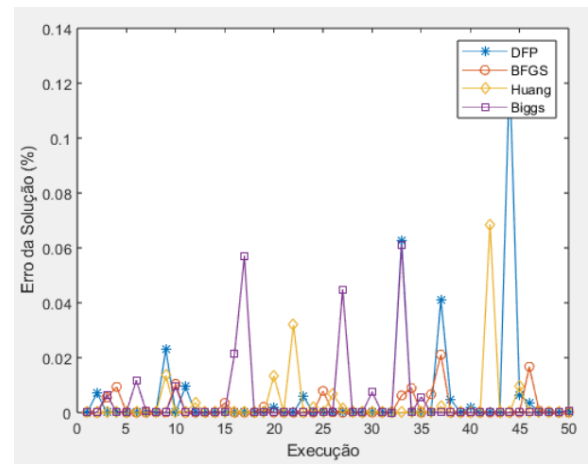
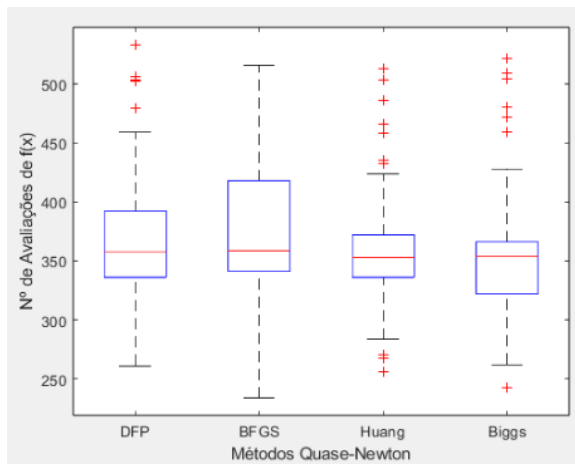
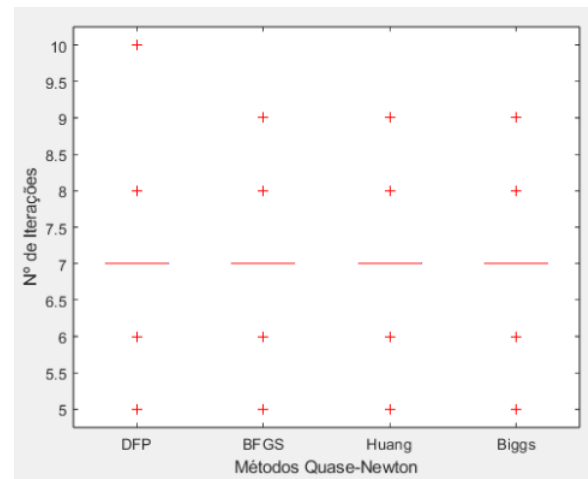
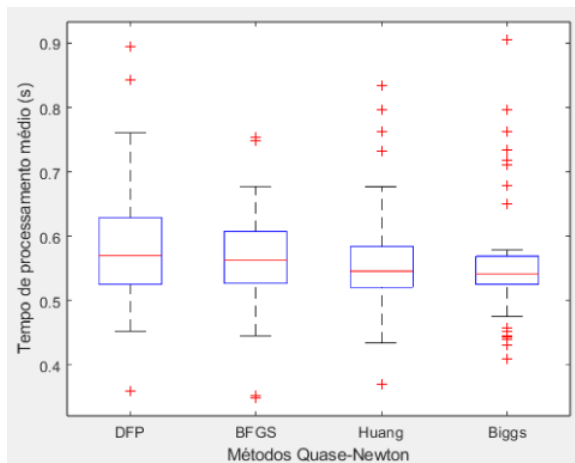
Seção Áurea por meio de Aproximações Quadráticas para $f(x)$ e $\alpha = 0$

Técnica da Seção Áurea feita por meio de Aproximações Quadráticas para $f(x)$				
$a = 0$				
Tempo de Processamento Médio				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	0,79038	0,79091	0,77033	0,77237
Mediana	0,77382	0,76227	0,76980	0,74288
Desvio Padrão	0,26284	0,23465	0,23053	0,23889
Erro Padrão	0,037172	0,033184	0,032601	0,033784
Variância	0,069087	0,055059	0,053142	0,057068
Mínimo	0,3956	0,47692	0,38565	0,41663
Máximo	1,646	1,6421	1,2223	1,3826
Nº de Dados	50	50	50	50
Nº de Iterações				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	6,94	7,1	7,06	6,98
Mediana	7	7	7	7
Desvio Padrão	0,99816	0,97416	0,93481	0,86873
Erro Padrão	0,14116	0,13777	0,1322	0,12286
Variância	0,99633	0,94898	0,87388	0,75469
Mínimo	6	6	5	6
Máximo	12	10	10	9
Nº de Dados	50	50	50	50
Nº de avaliações de $f(x)$				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	6,94	7,1	7,06	6,98
Mediana	7	7	7	7
Desvio Padrão	0,99816	0,97416	0,93481	0,86873
Erro Padrão	0,14116	0,13777	0,1322	0,12286
Variância	0,99633	0,94898	0,87388	0,75469
Mínimo	6	6	5	6
Máximo	12	10	10	9
Nº de Dados	50	50	50	50



Seção Áurea por meio de Aproximações Quadráticas para $f(x)$ e $\alpha = 0.0263$

Técnica da Seção Áurea feita por meio da Avaliação Direta de $f(x)$				
$\alpha = 0.0263$				
Tempo de Processamento Médio				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	0,58276	0,56024	0,55694	0,55924
Mediana	0,56678	0,56345	0,54596	0,5422
Desvio Padrão	0,096504	0,080734	0,09023	0,095705
Erro Padrão	0,013648	0,011418	0,01276	0,013535
Variância	0,0093131	0,006518	0,0081414	0,0091594
Mínimo	0,36042	0,34921	0,36979	0,40991
Máximo	0,89385	0,75356	0,83354	0,90511
Nº de Dados	50	50	50	50
Nº de Iterações				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	7,06	7,06	7	6,96
Mediana	7	7	7	7
Desvio Padrão	0,79308	0,81841	0,85714	0,85619
Erro Padrão	0,11216	0,11574	0,12122	0,12108
Variância	0,62898	0,6698	0,73469	0,73306
Mínimo	5	5	5	5
Máximo	10	9	9	9
Nº de Dados	50	50	50	50
Nº de avaliações de $f(x)$				
Métodos	DFP	BFGS	Huang	Biggs
Média	371,26	368,26	361,06	356,5
Mediana	358	358,5	353	354
Desvio Padrão	63,377	61,022	57,732	62,778
Erro Padrão	8,9629	8,6298	8,1647	8,8782
Variância	4016,64	3723,71	3333,08	3941,11
Mínimo	261	234	256	243
Máximo	533	516	513	522
Nº de Dados	50	50	50	50



Conclusão:

Por meio da análise e desenvolvimento deste trabalho, foi possível compreender como os métodos de Quase Newton representam abordagens muito interessantes e eficientes para a resolução de funções quadráticas e não quadráticas perfeitas. Os métodos aproximam a matriz Hessiana de forma iterativa, eliminando a necessidade de cálculos diretos dessa matriz, o que os torna bons candidatos para a resolução de problemas de otimização de grande complexidade. Assim, essas soluções apresentam um bom equilíbrio entre custo computacional e precisão da solução.

Ainda no cenário de aproximação da Hessiana, foi possível observar a convergência para a solução exata com menos iterações, em especial, quando se utiliza a aproximação quadrática. Para este caso, foi observado uma eficiência maior pelos métodos BFGS e DFP, já que a natureza quadrática da função objetivo está alinhada com a segunda derivada usada nesses métodos.

Em contrapartida, os métodos de Quase-Newton também se mostraram importantes em problemas com funções não quadráticas, porém levando mais iterações para que a solução do problema pudesse convergir, sobretudo em regiões em que a função objetivo se afastava do comportamento quadrático.

Por fim, os métodos Quase-Newton, em especial o método BFGS, são confiáveis para uma variedade de problemas de otimização, que incluem funções objetivo implícitas e não lineares, fornecendo uma solução balanceada entre custo computacional e precisão da solução.