

# Αριθμητική Ανάλυση-Εργασία Εξαμήνου

Αλγόριθμος επιλογής αριθμών: Παρακάτω τα  $a, b, c$  θα δίνονται από τον AM σας με τον παρακάτω αλγόριθμο:

$a=1+((\text{τα τελευταία δύο ψηφία του αριθμού μητρώου σας}) \bmod 3)$

$b=1+((\text{ο τριψήφιος αριθμός που προκύπτει με πρώτο ψηφίο το όγδοο του AM σας και τα δύο τελευταία να έπονται}) \bmod 7)$

$c=1+((\text{τα ψηφία του αριθμού μητρώου σας από το 4ο έως και το 7ο}) \bmod 11)$

## Άσκηση 1

### Μέρος I

Έστω η παρακάτω εξίσωση:

$$x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$$

Με τρεις πραγματικές ρίζες τις  $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 5$ .

i) Να εφαρμόσετε τπολογιστικά τη μέθοδο διχοτόμησης σε κατάλληλα διαστήματα (αιτιολογήστε την επιλογή διαστήματος) ώστε να καταλήξετε κάθε φορά σε μία από αυτές τις ρίζες. Υπολογίστε το απόλυτο και σχετικό σφάλμα σε κάθε περίπτωση.

ii) Εξετάστε όλες τις διαφορετικές μορφές που μπορεί να πάρει η εξίσωση για να έρθει στη μορφή που απαιτεί η μέθοδος των διαδοχικών επαναλήψεων. Επιλύστε κάθε μία υπολογιστικά με αυτή τη μέθοδο, υπολογίστε απόλυτο και σχετικό σφάλμα για κάθε ρίζα και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

iii) Εφαρμόστε υπολογιστικά την μέθοδο του Newton για να καταλήξετε σε κάθε μία ρίζα τις εξίσωσης, αιτιολογώντας το αρχικό  $x^*$  που επιλέξατε. Υπολογίστε το απόλυτο και σχετικό σφάλμα για κάθε ρίζα και σχολιάστε.

### Μέρος II

Έστω η παρακάτω εξίσωση:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

Με προφανείς λύσεις τις  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ . Να φέρετε την εξίσωση στη μορφή της εξίσωσης του μέρους (I) και να απαντήσετε εκ νέου τα ερωτήματα i),ii),iii) για την νέα εξίσωση.

## Άσκηση 2

### Μέρος I

Έστω τα παρακάτω σημεία:

$$A = (0.5, 1.2), B = (0.7, 1.6), C = (1.2, 1.4), D = (4, 2.4), E = (3.2, 5)$$

i) Για τα σημεία  $A, B$  να υπολογιστούν αναλυτικά η γραμμική παρεμβολή (με τον τύπο διαιρεμένων διαφορών) και η προσέγγιση ευθείας ελαχίστων τετραγώνων. Στη δεύτερη περίπτωση να υπολογιστεί και το σφάλμα της προσέγγισης.

ii) Για τα σημεία  $A, B, C$  να υπολογιστούν αναλυτικά η πολυωνυμική παρεμβολή δεύτερης τάξης(με τον τύπο Lagrange) και η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων δεύτερης τάξης. Στη δεύτερη περίπτωση να υπολογιστεί και το σφάλμα της προσέγγισης.

iii) Για τα σημεία  $A, B, C, D, E$  να υπολογιστούν με χρήση προγραμμάτων η πολυωνυμική παρεμβολή τρίτης τάξης(με τον τύπο των διαιρεμένων διαφορών) και η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων δεύτερης τάξης. Στη δεύτερη περίπτωση να υπολογιστεί και το σφάλμα της προσέγγισης.

## Μέρος II

Έστω τα παρακάτω σημεία:

$$A = (0.5a, 1.2b), B = (a^2, c), C = (3 + a, b + c)$$

Να απαντηθούν τα ερωτήματα i),ii) του πρώτου μέρους με αυτά τα σημεία.

### Άσκηση 3

#### Μέρος I

Έστω η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

i) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης της συνάρτησης γύρω από το  $x = 2$ .

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης με τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, του Simpson και των 3/8 στο διάστημα  $[0, 2]$  όταν  $h = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$  αντίστοιχα. Να συγκριθούν τα απόλυτα και σχετικά σφάλματα μεταξύ τους με βάση την θεωρητική τιμή

$$I(f) = 0.454210902$$

#### Μέρος II

Έστω η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x) = ax^3 e^{-bx^2}$$

i) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης της συνάρτησης γύρω από το  $x = 2$ .

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης με τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, του Simpson και των 3/8 στο διάστημα  $[0, 2]$  όταν  $h = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$  αντίστοιχα. Να συγκριθούν τα απόλυτα και σχετικά σφάλματα μεταξύ τους με βάση την θεωρητική τιμή

$$I(f) = \frac{ae^{-4b}(-4b + e^{4b} - 1)}{2b^2}$$