CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
10 SETTEMBRE 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ $\boxed{\textbf{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}}$ ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Decidere se la forma proposizionale $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big)$ è una tautologia.

Esercizio 2. Si consideri l'operazione binaria $*\colon (a,b) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \mapsto a + \bar{9}b \in \mathbb{Z}_{12}$.

(i) Che tipo di struttura (semigruppo, commutativo o meno, monoide, gruppo) è $(\mathbb{Z}_{12}, *)$?
(ii) Determinare gli insiemi D degli elementi neutri a destra e S degli elementi neutri a sinistra in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$. $D \cup S$ è una parte stabile in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$?
(iii) Sia $T = \{\overline{3n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. T è una parte stabile in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$? Se lo è, che tipo di struttura (semigruppo, commutativo o meno, monoide, gruppo) è $(T, *)$?
(iv) Risolvere, determinando tutte le soluzioni in $(\mathbb{Z}_{12}, *)$, le equazioni: (a): $\bar{7} * x = \bar{1}$; (b): $\bar{5} * x = \bar{1}$.

Esercizio 3. Consideriamo la funzione:[†]

$$\varphi\colon a_0 + a_1x + \cdots + a_{\deg f}x^{\deg f} \in \mathbb{Z}[x] \smallsetminus \{0\} \longmapsto \prod_{i=0}^{\deg f} a_i \in \mathbb{Z}.$$

(i) φ è suriettiva? È iniettiva?
(ii) Descrivere $\vec{\varphi}(\{1, x^5+1\})$, $\overleftarrow{\varphi}(\{3\})$ e $\overleftarrow{\varphi}(\{2,4\})$. Quanti polinomi irriducibili (in $\mathbb{Q}[x]$) di grado 1 contiene $\overleftarrow{\varphi}(\{3\})$?
(iii) Sia $\sim_\varphi$ il nucleo di equivalenza di φ. Se ha senso la domanda, determinare se ogni singolo elemento di $\mathbb{Z}[x]/{\sim_\varphi}$ è infinito.
(iv) Dopo aver dato la definizione di polinomio associato ad un polinomio dato in un generico anello di polinomi $A[x]$, dimostrare che ad ogni elemento di $\mathbb{Z}[x]/{\sim_\varphi}$ appartengono almeno due polinomi (distinti) tra loro associati.

Esercizio 4. Per ogni insieme X di numeri interi, sia ρ_X la relazione binaria in X definita da:

$$\forall a,b \in X\ (a\ \rho_X\ b \iff a|7b).$$

Siano $A = \{0,1,2,8,14,49,88\}$ e $B = \{0,1,2,-3,11,132,330,49\}$ (nota bene: $132 = 2 \cdot 66$).

(i) Spiegare perché una tra ρ_A e ρ_B è una relazione d'ordine e l'altra non lo è.

Detto S quello tra A e B tale che ρ_S sia una relazione d'ordine, e posto $\rho = \rho_S$,

(ii) disegnare un diagramma di Hasse di (S, ρ);
(iii) determinare, se esistono, $\inf_{(S,\rho)}(\{2,49\})$ e $\sup_{(S,\rho)}(\{2,49\})$;
(iv) stabilire se (S, ρ) è un reticolo e, nel caso se è distributivo o complementato.

Esercizio 5. Spiegare perché, per ogni insieme non vuoto $V \subseteq \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$[‡], è ben definito il grafo (semplice) G_V su V in cui, per ogni $a,b \in V$, a e b sono adiacenti se e solo se a e b sono tra loro coprimi.

(i) Cosa cambia se si assume, invece $V = \mathbb{N}^*$?
(ii) Se $V = \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$, G_V è connesso?
(iii) Esiste $V \subseteq \mathbb{N}^* \smallsetminus \{1\}$ tale che V non sia connesso?
(iv) Se $V = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, G_V ha cammini euleriani?

[†] $\deg f$ indica il grado del polinomio f.
[‡] $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$