

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
15 LUGLIO 2024

Svolgere i seguenti esercizi,

—————→ *giustificando pienamente tutte le risposte.* ←————

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Sia $A = \mathcal{P}_2(\mathbb{Z})$ l'insieme delle parti di \mathbb{Z} di cardinalità 2. Sia σ la relazione d'ordine definita da: $\forall a, b \in A$

$$a \sigma b \iff (a = b \vee \forall x \in a (\forall y \in b (x \text{ divide } y)))$$

Sia $B = \{\{0, 12\}, \{0, 16\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}\}$

- (i) Disegnare un diagramma di Hasse di (B, σ) . Stabilire se (B, σ) è un reticolo e, nel caso, se è distributivo, complementato, booleano.
- (ii) Determinare un sottoinsieme C di B della cardinalità massima possibile tale che (C, σ) sia un reticolo complementato.
- (iii) Determinare in (A, σ) i minoranti di $\{\{1, 4\}\}$ e, se esistono, $\inf \{\{1, 4\}, \{1, 6\}\}$ e $\sup \{\{1, 4\}, \{1, 6\}\}$.
- (iv) Determinare, se ne esistono, gli elementi minimali, massimali, minimo, massimo in (A, σ) .
- (v) Esiste $a \in A$ tale che $(B \cup \{a\}, \sigma)$ sia un reticolo?

Esercizio 2. Stabilire per quali $c \in \{1, 3, 20, 24, 55, 60\}$ l'equazione congruenziale $470x \equiv_{350} 3c$ ha soluzioni in \mathbb{Z} e, per ciascun tale c , fornire l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 3. Sia S un insieme tale che $|S| = 13$ e sia h un suo elemento. Indicare (ma non calcolare): (a) il numero delle parti di S di cardinalità 8; (b) il numero delle parti di S di cardinalità 18; (c) il numero delle parti T di S tali che $|T| = 7$ e $h \in T$; (d) il numero delle relazioni binarie in S .

Esercizio 4. Per ciascuno degli insiemi \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_6 e \mathbb{Z}_3 si consideri l'operazione binaria (che indichiamo sempre con lo stesso simbolo) $*$ definita da: per ogni a, b appartenenti all'insieme, $a * b = 3a + b$. Che tipo di strutture algebriche (semigrupp, monoidi, gruppi; commutativi o no?) sono $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Z}_6, *)$ e $(\mathbb{Z}_3, *)$? In ciascuna di esse determinare gli eventuali elementi neutri a sinistra o a destra.

Esercizio 5. Siano $S = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ed $f: S \rightarrow S$ l'applicazione che ad ogni $n \in S$ associa la somma $\sum_{n \geq p \in \mathbb{P}} p$ dei numeri interi positivi primi minori o uguali a n (ad esempio, $f(4) = 2 + 3 = 5$). Sia poi \mathfrak{R} il nucleo di equivalenza di f .

- (i) Determinare $\bar{f}(\{10\})$ e $\bar{f}(\{11\})$.
- (ii) f è iniettiva? f è suriettiva? f è biiettiva?
- (iii) Elencare gli elementi di $[8]_{\mathfrak{R}}$.
- (iv) $|S/\mathfrak{R}|$ è finito o infinito?
- (v) Esiste $a \in S$ tale che $a \notin [a]_{\mathfrak{R}}$?
- (vi) Posto $T = \{n \in S \mid 10 \leq n \leq 20\}$, detta \mathfrak{R}_T la relazione di equivalenza indotta da \mathfrak{R} su T , descrivere esplicitamente le classi appartenenti a T/\mathfrak{R}_T , elencandone gli elementi. Quanto vale $|T/\mathfrak{R}_T|$?

Esercizio 6.

- (i) Quali tra queste affermazioni sono vere, e quali no, per tutte le possibili scelte di un anello commutativo unitario A , di $f \in A[x]$ e di due elementi distinti a e b di A :
 - (a) se a e b sono radici di f , allora $(x - a)$ e $(x - b)$ dividono f in $A[x]$;
 - (b) se a e b sono radici di f , allora $(x - a)(x - b)$ divide f in $A[x]$;
 - (c) se A è un campo e a e b sono radici di f , allora $(x - a)(x - b)$ divide f in $A[x]$.
- (ii) Esistono un anello commutativo unitario A ed un polinomio di grado 2 in $A[x]$ tali che f abbia infinite radici in A ?
- (iii) Sia $f \in \mathbb{Z}_{13}[x]$. Supponiamo $f = pqr$ dove p, q ed r sono polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_{13}[x]$, p e q hanno grado 1 e r ha grado 4. Allora, in $\mathbb{Z}_{13}[x]$,
 - (a) quanti divisori monici di grado 3 ha f ?
 - (b) quanti divisori monici di grado 2 ha f ?
 - (c) assumendo p e q non associati tra loro, quanti divisori, monici o non monici, di grado 5 ha f ?