# CALCOLO NUMERICO

## › Lezione 1: Interpretazione Polinomiale

### Esistenza, unicità, forma canonica e forma di Lagrange del polinomio d'interpolazione

È data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di cui sono noti i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ negli $n+1$ punti distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$.

[ Avendo una funzione su un intervallo $[a,b]$, conosciamo i suoi valori solo in alcuni punti $x_0, x_1, \dots, x_n$ distinti ]

Si sceglie una classe $\mathcal{C}$ di funzioni definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$ e si vuole approssimare la funzione $f(x)$ con una funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ che appartiene alla classe $\mathcal{C}$ e che nei punti $x_0, x_1, \dots, x_n$ assume i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Una scelta comune per la sua semplicità è quella di prendere $\mathcal{C}$

[ Vogliamo approssimarla con una funzione $g(x)$ appartenente alla classe $C$ di funzioni definite in $[a,b]$ in modo tale da avere $g(x_i) = f(x_i)$ $\forall\, i=0,\dots,m$ ]

Scegliamo per semplicità, che la classe $C$ sia uguale reale dei polinomi di grado $\leq m$, ovvero:

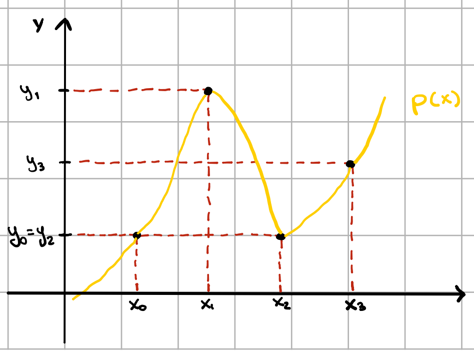
$$C = R_m[x] = a_0 \underbrace{x^0}_{1} + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

Con questa scelta, siamo sicuri che $\exists!\; g \in R_m[x]$ tale che $g(x_i) = f(x_i)$ $\forall\, i=0,\dots,m$

**Teorema 1.1.** *Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x_0, x_1, \dots, x_n$ sono tutti distinti. Allora esiste un unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$.*

[ Avendo $n+1$ punti distinti esiste un polinomio $P(x)$ tale che $p(x_i) = y_i$ $\forall\, i=0,\dots,m$ ]

Rappresentazione Grafica del Teorema




$\exists!\; p(x) \in R_3[x]$ tale che

$p(x_0) = y_0,\; p(x_1) = y_1,\; p(x_2) = y_2,\; p(x_3) = y_3$

<u>OSS</u>: Il teorema implica che, data $f : [a,b] \to R$ e $x_0, x_1, \dots, x_m \in [a,b]$ punti distinti $\exists!\; p(x) \in R_3[x]$ tale che $p(x_i) = f(x_i)$ $\forall\, i=0,\dots,m$

Applicando il teorema con $y_i = f(x_i)$ $\forall i = 0, \dots, m$ si ottiene che $\exists!$ $p(x) \in \mathbb{R}_i(x)$ tale che $p(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 0, \dots, m$

Del seguente teorema avremo 2 dimostrazioni

DIM 1:

Sia Un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[x]$ soddisfa la proprietà che $p(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n$ se e solo se

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

cioè se e solo se il suo vettore dei coefficienti $(a_0, a_1, \ldots, a_n)^T$ soddisfa il sistema lineare

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Questa prende il nome di MATRICE DI VANDERMONDE}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rightarrow \text{TERMINE NOTO} \qquad (1.1)$$

VETTORE COEFFICIENTI

Dimostriamo che la matrice di Vandermonde è invertibile e per farlo dimostreremo che

$$\det[\underbrace{V(x_0, \dots, x_m)}_{\text{indica la Matrice di Vandermonde}}] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \prod_{\substack{i,j=0 \\ j<i}}^{n} (x_i - x_j) = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \cdot \ \cdots \ \cdot (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) & \text{se } n \geq 1, \end{cases} \qquad (1.2)$$

da cui segue che $\det[V(x_0, \ldots, x_n)] \neq 0$ in quanto $x_0, \ldots, x_n$ sono distinti per ipotesi. Quindi esiste un'unica soluzione del sistema (1.1), e questa soluzione è

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [V(x_0, \ldots, x_n)]^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Ciò significa che esiste un unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n$, e questo polinomio è precisamente quello che ha il vettore dei coefficienti dato dalla (1.3).

Per concludere la dimostrazione ci resta solo da dimostrare la (1.2) e lo facciamo nel caso $n = 3$.* Per $i = 1, \ldots, 3$ definiamo $d_i = \det[V(x_0, \ldots, x_i)]$. Il nostro obiettivo è quello di calcolare $d_3 = \det[V(x_0, \ldots, x_3)]$.

* Per $m=0$ è ovvia $(V(x)=1)$. Mentre per $n=1$ la dimostrazione è uguale a quella fatta da noi per $m=3$

Se in un determinante si sostituisce una riga R [colonna C] con se stessa più un multiplo scalare di un'altra riga [colonna] allora il determinante non cambia e dopodiché sviluppo il determinante secondo il metodo di Laplace

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 - x_0^2 x_3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 - x_1^2 x_3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_2^2 x_3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 - x_0 x_3 & x_0^2(x_0 - x_3) \\ 1 & x_1 & x_1^2 - x_1 x_3 & x_1^2(x_1 - x_3) \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_2 x_3 & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Voglio far diventare questo termine 0

$\to C^{[4]} \to C^{[4]} - x_3 C^{[3]}$

Stesso procedimento di prima per azzerarli

$C^{[3]} \to C^{[3]} - x_3 C^{[2]}$

$C^{[2]} \to C^{[2]} - x_3 C^{[1]}$

e avrò la seguente matrice dove applicherò Laplace

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_3 & x_0(x_0 - x_3) & x_0^2(x_0 - x_3) \\ 1 & x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ 1 & x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Ora per fare il determinante applichiamo la "REGOLA DELLA SCACCHIERA" $\to$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

lo porto fuori essendo uguali

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} x_0 - x_3 & x_0(x_0 - x_3) & x_0^2(x_0 - x_3) \\ x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \end{vmatrix} = (-1)^3 (x_0 - x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \end{vmatrix}$$

porto fuori

$$= (-1)^3 (x_0 - x_3)(x_1 - x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \end{vmatrix}$$

porto fuori

$$= (-1)^3 (x_0 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) d_2.$$

Approfondiamo il procedimento per fare Laplace di d2

$$d_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 - x_2 x_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 - x_2 x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_2 x_2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0(x_0 - x_2) \\ 1 & x_1 & x_1(x_1 - x_2) \\ 1 & x_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Voglio far diventare questo termine 0 $\rightarrow C^{[3]} \rightarrow C^{[3]} - x_2 C^{[2]}$

Stesso procedimento di prima per azzerarlo $C^{[2]} \rightarrow C^{[2]} - x_2 C^{[1]}$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_2 & x_0(x_0 - x_2) \\ 1 & x_1 - x_2 & x_1(x_1 - x_2) \\ 1 & x_2 - x_2 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_2 & x_0(x_0 - x_2) \\ 1 & x_1 - x_2 & x_1(x_1 - x_2) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_2 & x_0(x_0 - x_2) \\ 1 & x_1 - x_2 & x_1(x_1 - x_2) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow (x_0 - x_2)(x_1 - x_2) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}_{d_1}$$

$\rightarrow$ Essendo che il determinante di $d_1$ è $(x_1 - x_0)$

Avrò la soluzione finale $\rightarrow$

$$= \underbrace{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}_{d_3} \cdot \underbrace{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}_{d_2} \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{d_1},$$