21 Settembre 2015

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si considerino in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$V = Span\{(1,0,1,-1),(-1,1,0,1),(1,1,2,-1)\},$$

e il sottospazio W delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare basi e dimensioni dei sottospazi V, W, $V \cap W$, $V + W$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tra spazi di polinomi reali definita da

$$T(p(x)) = p'(x)(x^2+1) - 2xp(x).$$

Si scriva la matrice di T rispetto alle basi canoniche $\{1, x, x^2\}$ e $\{1, x, x^2, x^3\}$. Si dica se l'equazione $T(p(x)) = 1 - x + x^2$ ha soluzione in $p(x)$ e in caso affermativo si trovino tutte le soluzioni. Si ripeta il procedimento per l'equazione $T(p(x)) = 1 + x - x^2$.

3) Si scriva l'equazione in $\mathbb{R}^3$ della sfera S_1 di centro $C_1 = (-1,2,1)$ passante per $P = (1,1,1)$ e l'equazione della sfera S_2 di centro $C_2 = (2,-1,1)$ passante anch'essa per P. Si scrivano quindi le equazioni dei piani π_1, π_2 tangenti in P rispettivamente a S_1 e S_2. Si calcoli l'angolo tra i piani π_1 e π_2, e si scriva un'equazione parametrica della retta $\pi_1 \cap \pi_2$.

4) (Per il corso standard da 6 crediti) Si calcoli una base ortonormale del sottospazio di $Z \subset \mathbb{R}^4$ definito da

$$Z = Span\{(1,1,1,1),(1,0,1,-1)\}$$

e una base ortonormale del complemento ortogonale $Z^\perp$. Si calcolino dunque le proiezioni ortogonali del vettore $v = (1,1,-1,-1)$ su Z e $Z^\perp$.

21 Settembre 2015

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si considerino in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$V = Span\{(1,0,1,-1),(-1,1,0,1),(1,1,2,1)\},$$

e il sottospazio W delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare basi e dimensioni dei sottospazi V, W, $V \cap W$, $V + W$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tra spazi di polinomi reali definita da

$$T(p(x)) = p'(x)(x^2+1) - xp(x).$$

Si scriva la matrice di T rispetto alle basi canoniche $\{1, x, x^2\}$ e $\{1, x, x^2, x^3\}$. Si dica se l'equazione $T(p(x)) = x^2$ ha soluzione in $p(x)$ e in caso affermativo si trovino tutte le soluzioni. Si ripeta il procedimento per l'equazione $T(p(x)) = x^3$.

3) Si scriva l'equazione in $\mathbb{R}^3$ della sfera S_1 di centro $C_1 = (-1,1,1)$ passante per $P = (1,2,1)$ e l'equazione della sfera S_2 di centro $C_2 = (1,1,-1)$ passante anch'essa per P. Si scrivano quindi le equazioni dei piani π_1, π_2 tangenti in P rispettivamente a S_1 e S_2. Si calcoli l'angolo tra i piani π_1 e π_2, e si scriva un'equazione parametrica della retta $\pi_1 \cap \pi_2$.

4) (Per il corso standard da 6 crediti) Si calcoli una base ortonormale del sottospazio di $Z \subset \mathbb{R}^4$ definito da

$$Z = Span\{(1,1,-1,1),(1,-1,0,1)\}$$

e una base ortonormale del complemento ortogonale $Z^\perp$. Si calcolino dunque le proiezioni ortogonali del vettore $v = (1,1,1,1)$ su Z e $Z^\perp$.