CALCOLO DEI DETERMINANTE

LAPLACE → Calcoliamo il determinante della seguente matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

- si sceglie una riga oppure una colonna della matrice;
- si sviluppa il determinante lungo quella riga o colonna tenendo conto della cosiddetta regola della scacchiera per la determinazione dei segni:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \longrightarrow \text{REGOLA DELLA SCACCHIERA}$$

Scegliendo la prima riga, si ha

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 2} \\ 0 \quad 1 \quad 4 \\ 2 \quad 5 \quad 10 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= +1(1 \cdot 10 - 5 \cdot 4) - 3(0 \cdot 10 - 2 \cdot 4) + 2(0 \cdot 5 - 2 \cdot 1) = -10 + 24 - 4 = 10.$$

Possiamo scegliere altre righe o colonne

[SOLITAMENTE QUELLA CON PIÙ ZERI, PER "SEMPLIFICARE" IL CALCOLO]

Scegliendo la seconda colonna, si ha

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -3(0 \cdot 10 - 2 \cdot 4) + 1(1 \cdot 10 - 2 \cdot 2) - 5(1 \cdot 4 - 0 \cdot 2) = 24 + 6 - 20 = 10.$$

TEOREMA DI BINET

Date due matrici $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, il teorema di Binet stabilisce che

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

"TEOREMA"

Ricordiamo infine che il determinante di una matrice A e uguale a quello della sua trasposta A^T: per ogni $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si ha

$$\det(A) = \det(A^T).$$

TRACCIA, DETERMINANTE, RAGGIO SPETTRALE E AUTOVALORI

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ciascuno dei quali compare nella sequenza appena scritta un numero di volte pari alla sua molteplicità algebrica come radice del polinomio caratteristico di A)

TRACCIA → è la somma degli elementi della diagonale ed è pure uguale alla somma degli autovalori

$$\text{traccia}(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,$$

DETERMINANTE → è il prodotto di tutti gli autovalori

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

RAGGIO SPETTRALE → è il massimo dei moduli degli autovalori (≥ 0)

$$\rho(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{raggio spettrale di } A \stackrel{\text{def}}{=} \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|).$$

MATRICI INVERTIBILI

MATRICE QUADRATA

Una matrice $A \in \boxed{\mathbb{C}^{n\times n}}$ si dice invertibile se esiste una matrice $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tale che $AB = BA = I$.

In tal caso, la matrice B è univocamente determinata, prende il nome di matrice inversa di A e viene denotata con A^{-1}.

Esiste un TEOREMA che ci dice

Ricordiamo che una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$ se e solo se 0 non è un autovalore di A.

EQUIVALE A DIRE LA STESSA COSA

poichè il DETERMINANTE è il prodotto di tutti gli autovalori

Un altro TEOREMA è

il prodotto AB di due matrici $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è invertibile se e solo se A e B sono invertibili; l'inversa in tal caso è $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ come si può verificare direttamente:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{I}B = I$$

MATRICI DIAGONALIZZABILI

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice diagonalizzabile se esistono una matrice invertibile $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e una matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tali che

$$\boxed{A = XDX^{-1}.}$$

Qui

c'è scritto che per ogni $i = 1, \ldots, n$ l'elemento diagonale λ_i di D è un autovalore di A con corrispondente autovettore $\mathbf{x}_i$ = i-esima colonna di X.

DIM: Moltiplichiamo a destra per X avremo:

$$AX = XD$$

Guardiamo la 1° colonna di AX e XD (sono uguali per l'uguaglianza AX = XD)

$$(AX)^{(1)} = AX^{(1)} = A\underline{x}_1$$

$$(XD)^{(1)} = XD^{(1)} = X\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 x_{11}\\\lambda_1 x_{21}\\\vdots\\\lambda_1 x_{m1}\end{bmatrix} = \lambda_1 \underline{x}_1$$

In generale, $\forall\, i = 1, \ldots, m$

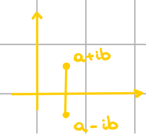
$$\left.\begin{aligned}(AX)^{(i)} &= AX^{(i)} = A\underline{x}_i\\ (XD)^{(i)} &= XD^{(i)} = \lambda_i X^{(i)} = \lambda_i \underline{x}_i\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$A\underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i \Rightarrow \underline{x}_i$ è un autovettore di A con autovalore corrispondente a λ_i

[FINE DIMOSTRAZIONE]

TEOREMA → ogni matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ che possiede n autovalori *distinti* è diagonalizzabile.

MATRICI HERMITIANE E SIMMETRICHE



$\overline{a+ib} = a - ib$

MATRICE RETTANGOLARE

Data una matrice $A \in \boxed{\mathbb{C}^{m\times n}}$, indichiamo con A^* la trasposta coniugata di A. Se A e B sono matrici moltiplicabili, allora

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (AB)^* = B^* A^*.$$

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice hermitiana se $A^* = A$.

Nel caso in cui le componenti di A sono reali (cioè $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$),

si ha $A^T = A^*$, per cui dire che A è hermitiana è equivalente a dire che A è simmetrica (cioè $A^T = A$).

Gli elementi diagonali di una matrice hermitiana A sono uguali ai loro coniugati e dunque sono reali.

per via dell'uguaglianza $A^* = A$

TEOREMA → gli autovalori di una matrice hermitiana A sono reali.

DIM: Sia $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ hermitiana e sia λ un autovalore di A

Dimostro che λ è reale. Prendo $\underline{x} \neq 0$ autovettore di A corrispondente a λ:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \implies \mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{x} = \lambda\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \implies \lambda = \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \in \mathbb{R}$$

perché $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$ è un numero reale essendo uguale al suo complesso coniugato:

$$\overline{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^* A\mathbf{x})^* = \mathbf{x}^* A^* (\mathbf{x}^*)^* = \mathbf{x}^* A\mathbf{x}.$$

[FINE DIMOSTRAZIONE]