NORME MATRICIALI

Si vuole introdurre un concetto di distanza sullo spazio delle matrici per misurare la "vicinanza" tra due matrici $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

IDEA:

si può interpretare una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ come un vettore di n^2 componenti e utilizzare come distanza una delle norme vettoriali già introdotte.

! Questo procedimento spesso conduce a norme che "non si comportano bene" rispetto al prodotto di matrici **!**

DEF. DI NORMA MATRICIALE:

Una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ si dice norma matriciale se soddisfa le seguenti proprietà:

(a) $\|A\| \geq 0$ per ogni $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\|A\| = 0$ se e solo se $A = O$ [positività];
(b) $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ e ogni $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ [omogeneità];
(c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ per ogni $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ [disuguaglianza triangolare].

Data una norma matriciale $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, definiamo la distanza fra due matrici $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ come $\|A - B\|$.

Un esempio di norma matriciale è dato dall'analoga della norma ∞ dei vettori: data $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, s'immagina A come se fosse un vettore di n^2 componenti e si definisce la sua norma come se fosse la norma ∞ del vettore di n^2 componenti:

$$|A|_\infty = \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}|.$$

La norma $|\cdot|_\infty$ "non si comporta bene" rispetto al prodotto di matrici perché non è submoltiplicativa:

> Ecco un esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{B=A^T}, \qquad AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$|A|_\infty = 1, \qquad |B|_\infty = 1, \qquad |AB|_\infty = 2.$$

NORME MATRICIALI INDOTTE

Data una norma vettoriale $\|\cdot\|$ in $\mathbb{C}^n$ e una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definiamo il numero

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \left\| A \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \|A\mathbf{y}\|.$$

$\max_{x\neq 0} \frac{1}{\|x\|} \|Ax\|$

pongo $y = \frac{x}{\|x\|}$
e la norma di y è
$\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1$

Si può dimostrare che $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ è una norma matriciale che prende il nome di norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|$.

TEOREMA: *Sia $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ una norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|$ e siano $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. $\|I\| = 1$.
2. $\|A\mathbf{x}\| \le \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$ *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.
3. $\|A\|$ *è la più piccola costante* C *che soddisfa* $\|A\mathbf{x}\| \le C\|\mathbf{x}\|$ *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.
4. $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ [submoltiplicatività].
5. $\rho(A) \le \|A\|$.

DIMOSTRIAMO LE 5 PROPRIETÀ:

• 1)
$$\|I\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|I\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{x}\| = 1.$$

• 2) Per ogni $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ si ha

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \max_{\mathbf{y}\ne\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} = \|A\| \quad \Longrightarrow \quad \|A\mathbf{x}\| \le \|A\|\,\|\mathbf{x}\|.$$

vale ovviamente anche per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

• 3) Presa una qualsiasi costante C che soddisfa $\|A\mathbf{x}\| \le C\|\mathbf{x}\|$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, si ha

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le C \ \text{ per ogni } \ \mathbf{x} \ne \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \|A\| = \max_{\mathbf{x}\ne\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le C.$$

• 4) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\|AB\mathbf{x}\| \le \|A\|\,\|B\mathbf{x}\| \le \|A\|\,\|B\|\,\|\mathbf{x}\|.$$

Poichè $\|AB\|$ (la norma di AB) è la più piccola costante C tale che $\|AB\underline{x}\| \le C\|\underline{x}\|$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^m$ e siccome la costante $\|A\|\cdot\|B\|$ è una delle tante C che soddisfano $\|AB x\| \le C\|x\|$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^m$ si conclude che $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$.

• 5) Sia λ un autovalore di A di modulo massimo ($|\lambda| = \rho(A)$ ↳ raggio spettrale di A) e sia $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ un corrispondente autovettore.

Ciò significa: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

Otteniamo

$$\|A\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\| = \rho(A)\|\mathbf{x}\| \quad \Longrightarrow \quad \rho(A) = \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \max_{\mathbf{y}\ne\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} = \|A\|.$$

TIPOLOGIE DI NORME MATRICIALI:

NORMA 1 $\longrightarrow$ $\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \dfrac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1,$

NORMA 2 $\longrightarrow$ $\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \dfrac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2,$

NORMA ∞ $\longrightarrow$ $\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \dfrac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty.$

TEOREMA $\longrightarrow$ *Per ogni $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ valgono le seguenti formule.*

- $\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max(\|A^{[1]}\|_1, \|A^{[2]}\|_1, \ldots, \|A^{[n]}\|_1).$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}.$
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max(\|A_{[1]}\|_1, \|A_{[2]}\|_1, \ldots, \|A_{[n]}\|_1).$

NOTAZIONE: Se $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, denotiamo con $A^{[1]}, A^{[2]}, \ldots, A^{[m]}$ le colonne di A e con $A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots, A_{[m]}$ le righe di A.

TEOREMA DELL' EQUIVALENZA DELLE NORME MATRICIALI

Tutte le norme matriciali in $\mathbb{C}^{n\times n}$ sono equivalenti, nel senso che se prendiamo due norme matriciali $\|\cdot\|', \|\cdot\|'' : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ allora si ha

$$\alpha\|A\|'' \leq \|A\|' \leq \beta\|A\|'' \quad \textit{per ogni } A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

dove $\alpha, \beta > 0$ sono due costanti indipendenti da A.

SUCCESSIONI DI MATRICI

Una successione di matrici $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... in $\mathbb{C}^{n\times n}$ si dice convergente alla matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ rispetto alla norma matriciale $\|\cdot\|$ se $\underbrace{\|A^{(k)} - A\| \to 0}_{\text{DISTANZA DA } A^k \text{ AD } A \text{ TENDE A } 0}$.

Poiché tutte le norme matriciali sono equivalenti se una successione di matrici converge ad A rispetto a una norma $\|\cdot\|$ allora converge ad A rispetto a tutte le norme.

DIM = uguale a quella fatta per i vettori

Una successione di matrici $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... in $\mathbb{C}^{n\times n}$ si dice convergente (componente per componente) alla matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se $A^{(k)} \to A$ componente per componente, cioè se

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^{(k)} \to a_{ij} \text{ per ogni } i,j = 1,\dots,n \quad &\iff \quad |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \to 0 \text{ per ogni } i,j = 1,\dots,n \\
&\iff \quad \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \to 0 \\
&\iff \quad |A^{(k)} - A|_\infty \to 0.
\end{aligned}
$$

CONCLUSIONE: la convergenza componente per componente altro non è che la convergenza in $|\cdot|_\infty$.

Pertanto, ricordando l'equivalenza di tutte le norme, dire che $A^{(k)} \to A$ componente per componente è lo stesso che dire che $A^{(k)} \to A$ in una qualsiasi norma.

TEOREMA → *Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Allora*

$$\lim_{k\to\infty} A^k = O \quad \iff \quad \rho(A) < 1.$$

DIM: (nel caso in cui la matrice A è diagonalizzabile)

Esistono una matrice invertibile X e una matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (avente sulla diagonale gli autovalori di A) tali che

$$
\begin{aligned}
A &= XDX^{-1}, \\
A^2 &= XDX^{-1}XDX^{-1} = XD^2X^{-1}, \\
A^3 &= XDX^{-1}XDX^{-1}XDX^{-1} = XD^3X^{-1}, \\
&\vdots \\
A^k &= XD^kX^{-1}.
\end{aligned}
$$

($\Longleftarrow$) Se $\rho(A) < 1$ allora dall'equazione $A^k = XD^kX^{-1}$ e dalla proprietà di submoltiplicatività applicata alla norma $\|\cdot\|_\infty$ si ottiene

$$\|A^k\|_\infty = \|XD^kX^{-1}\|_\infty \le \|X\|_\infty \|D^k\|_\infty \|X^{-1}\|_\infty = \|X\|_\infty \rho(A)^k \|X^{-1}\|_\infty \to 0,$$

per cui $\|A^k\|_\infty \to 0$ e $A^k \to O$.

($\Longrightarrow$) Viceversa, se $A^k \to O$ allora dall'equazione $A^k = XD^kX^{-1}$ si ottiene $D^k = X^{-1}A^kX$ e

$$\rho(A)^k = \|D^k\|_\infty = \|X^{-1}A^kX\|_\infty \le \|X^{-1}\|_\infty \|A^k\|_\infty \|X\|_\infty \to 0,$$

per cui $\rho(A)^k \to 0$ cioè $\rho(A) < 1$.