DIMOSTRAZIONE_2)

Iniziamo definendo i polinomi

Per ogni $j = 0, \ldots, n$ definiamo il polinomio

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}.$$

Essendo la produttoria da $i=0$ a $i=m$ avremo

$n + 1$ polinomi $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ hanno tutti grado n e quindi appartengono a $\mathbb{R}_n[x]$. Mostriamo ora che essi costituiscono una base di $\mathbb{R}_n[x]$

Questi li chiameremo POLINOMI DI LAGRANGE

Mostriamo che questi polinomi sono una base di $R_m[x]$

Definiamo cos'è una BASE?

Una BASE dello spazio vettoriale è un insieme di elementi $V_1(x), \ldots, V_r(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ con le 2 proprietà seguenti:

- Sono LINEARMENTE INDIPENDENTI, cioè l'unica combinazione lineare $\alpha_1 V_1(x) + \ldots + \alpha_r V_r(x)$ che coincide con il polinomio nullo è la combinazione lineare con $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$
- Generano lo spazio $R_m[x]$, cioè ogni $q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ si può scrivere come combinazione lineare $\alpha_1 V_1(x) + \ldots + \alpha_r V_r(x)$

per fare questo è sufficiente dimostrare che essi sono linearmente indipendenti,
[perchè]
in quanto essi sono in numero di $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$.

Promemoria:

Tutte le basi di $R_m[x]$ hanno lo stesso numero di elementi e questo numero di elementi e questo numero di elementi comune a tutte le basi di $R_m[x]$ si chiama dimensione di $R_m[x]$. $(\dim R_m[x])$. Poichè una base di $R_m[x]$ famosa è la base canonica $1, x, x^2, \ldots, x^m$ e ha $m+1$ elementi, deduciamo che $\dim R_m[x] = m+1$

Esiste un Teorema dell'algebra lineare che ci dice:

Se si hanno m+1 elementi in uno spazio vettoriale di dimensione m+1, allora questi elementi sono una base dello spazio vettoriale se e solo se sono linearmente indipendenti

Per dimostrare che $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ sono linearmente indipendenti, osserviamo che per ogni $i, j = 0, 1, \ldots, n$ si ha

$$L_j(x_h) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = j, \\ 0 & \text{se } h \neq j. \end{cases}$$

Dimostriamo ora che $L_0(x), \ldots, L_m(x)$ sono linearmente Indipendenti

sia $\alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \ldots + \alpha_m L_m(x)$ una Combinazione lineare che coincide con il polinomio nullo

cioè tale che $\alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \ldots + \alpha_n L_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Allora $\forall i = 0, \ldots, m$ deve essere $\underbrace{\alpha_0 L_0(x_i) + \alpha_1 L_1(x_i) + \ldots + \alpha_m L_m(x_i)}_{\alpha_i L_i(x_i) = \alpha_i} = 0$

$\Longrightarrow$ Quindi $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_m(x)$ sono linearmente indipendenti e dunque una base di $\mathbb{R}_m[x]$

Definiamo il polinomio $p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_r(x)$

tale che

- $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$
- per ogni $i = 0, \ldots, n$ $\quad p(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i) = y_i$

$\rightarrow$ abbiamo provato l'esistenza di un polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che nei nodi x_i assume i valori y_i.

Finora non abbiamo dimostrato l'esistenza ma non l'unicità per farlo

Supponiamo che $q(x)$ sia un altro polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che nei nodi x_i assume i valori y_i.

[quindi che soddisfa $q(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \ldots, m$]

E dimostriamo che $q(x)$ coincide con $p(x)$

Poichè $q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ e $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ è una base di $\mathbb{R}_n[x]$,

esistono $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tali che $q(x) = \beta_0 L_0(x) + \beta_1 L_1(x) + \ldots + \beta_n L_n(x)$.

Poichè $q(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \ldots, m$ deve essere che $\forall i = 0, \ldots, m$

$$y_i = q(x_i) = \beta_0 L_0(x_i) + \beta_1 L_1(x_i) + \ldots + \beta_n L_n(x_i) = \beta_i,$$

da cui si ricava che $q(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x) = p(x)$. Questo prova che $p(x)$ è l'unico polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che nei nodi x_i assume i valori y_i.

[FINE DIMOSTRAZIONE]

Definizione 1.1. Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ punti distinti. L'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n$ si chiama *polinomio d'interpolazione dei dati* $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ o anche *polinomio d'interpolazione dei valori* $y_0, \ldots, y_n$ *sui nodi* $x_0, \ldots, x_n$.

La prima dimostrazione del Teorema 1.1 ci dice che $p(x)$ si scrive in *forma canonica* come

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}$$

dove

VETTORE COEFFICENTI

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{[V(x_0, x_1, \ldots, x_n)]^{-1}}_{\text{MATRICE DI VANDERMONDE ALLA MENO 1}} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} \tag{1.4}$$

VETTORE DEGLI Y

$$[V(x_0, x_1, \ldots, x_n)] = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

La seconda dimostrazione del Teorema 1.1 ci dice che $p(x)$ si scrive in FORMA DI LAGRANGE

$$\boxed{p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)} \tag{1.5}$$

dove per ogni $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\boxed{L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}}$$

Se $y_0, \ldots, y_m$ sono i valori nei punti $x_0, \ldots, x_m$ di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, cioè se risulta $y_i = f(x_i)$ per ogni $i = 0, \ldots, n$, allora l'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ tale che $p(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 0, \ldots, m$ si chiama anche *polinomio d'interpolazione della funzione* $f(x)$ *sui nodi* $x_0, \ldots, x_n$.

DOMANDA ORALE: Che cos'è il polinomio d'interpolazione di una funzione f sui nodi $x_0, \ldots, x_m$

RISPOSTA: È quell'unico polinomio che $p(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ tale che $p(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 0, \ldots, m$