OSSERVAZIONE IMPORTANTE [TIPICA DOMANDA DA ORALE]

Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e della sua trasposta A^T coincidono perché i polinomi caratteristici di A e A^T coincidono:

$$C_{A^T}(\lambda) = \det(\lambda I - A^T) = \det((\lambda I - A)^T) = \det(\lambda I - A) = C_A(\lambda).$$

Di conseguenza, possiamo applicare i teoremi di Gershgorin non solo ad A ma anche ad A^T per ottenere localizzazioni migliori degli autovalori di A. In particolare, il primo teorema di Gershgorin applicato ad A e A^T ci dice quanto segue:

N.B: I cerchi di Gershgorin di A^T sono i cerchi di Gershgorin per colonna di A

[1° TEOREMA DI GERSHGORIN MIGLIORATO]

Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ stanno tutti sia nell'unione dei cerchi di Gershgorin $K_1, \ldots, K_n$ di A sia nell'unione dei cerchi di Gershgorin $H_1, \ldots, H_n$ di A^T, per cui stanno nell'intersezione delle due unioni $(K_1 \cup \cdots \cup K_n) \cap (H_1 \cup \cdots \cup H_n)$.

Osserviamo inoltre, in vista dell'applicazione del 2° TEOREMA DI G., che una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è irriducibile se e solo se A^T è irriducibile (DIM. X ESERCIZIO)

DISPENSE

Notiamo che i cerchi di Gershgorin $H_1, \ldots, H_n$ di A^T sono semplicemente i cerchi di Gershgorin per colonna di A, in quanto le righe di A^T sono le colonne di A. Pertanto, il risultato precedente può anche essere enunciato nel modo seguente.

> *Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ stanno tutti sia nell'unione dei cerchi di Gershgorin per riga $K_1, \ldots, K_n$ di A sia nell'unione dei cerchi di Gershgorin per colonna $H_1, \ldots, H_n$ di A, per cui stanno nell'intersezione delle due unioni $(K_1 \cup \cdots \cup K_n) \cap (H_1 \cup \cdots \cup H_n)$.*

Osserviamo inoltre, in vista dell'applicazione del terzo teorema di Gershgorin, che una matrice A è irriducibile se e solo se la sua trasposta A^T è irriducibile (Esercizio 3.6).