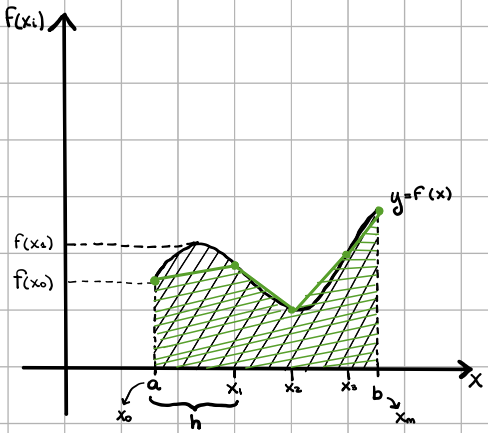
INTEGRAZIONE NUMERICA - FORMULA DEI TRAPEZI

È data una funzione (integrabile) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e si vuole calcolare un'approssimazione di

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



si suddivide l'intervallo $[a,b]$ in $n \geq 1$ sottointervalli tutti della stessa ampiezza

$$h = \frac{b-a}{m}$$

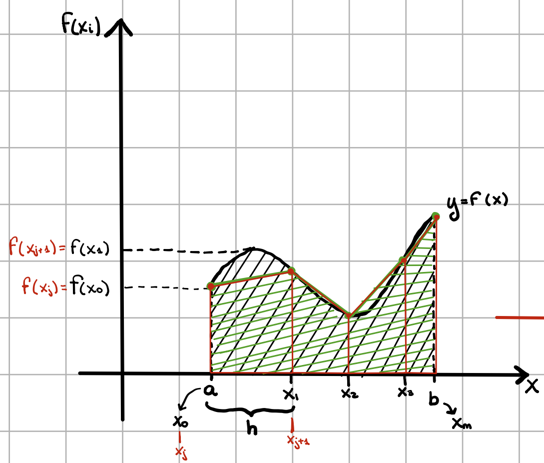
e si pone $x_j = a + jh$ con $j = 0, 1, \dots, m$

Il valore che si prende come approssimazione di

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{è} \quad \int_a^b s(x)\,dx$$

dove

$$s : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \begin{cases} s(x) = f(x_j) + \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j), \\ \text{per } x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, n-1, \end{cases}$$



→ Si chiama FORMULA DEI TRAPEZI per i trapezi sul grafico

Quindi il valore che si prende come approssimazione di $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ è

$$I_n = \int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} s(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j) \right] \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(x_j)(x - x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \frac{(x - x_j)^2}{2} \right]_{x_j}^{x_{j+1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(x_j)(x_{j+1} - x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{2}(x_{j+1} - x_j) \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} h = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(x_j) + f(x_{j+1}) \right]$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

$$= h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right]$$

In conclusione

$$\boxed{I_n = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right]} \longrightarrow$$

Questa si chiama FORMA DEI TRAPEZI DI ORDINE m per approssimare $\int_a^b f(x)\,dx$.

Si può chiamare anche $h = \frac{b-a}{m}$ PASSO DI DISCRETIZZAZIONE DI I_m

ERRORE O RESTO DELLA FORMULA DEI TRAPEZI

Vogliamo capire qual è l'errore che si commette approssimando $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ con I_n. Per far questo utilizzeremo il seguente lemma.

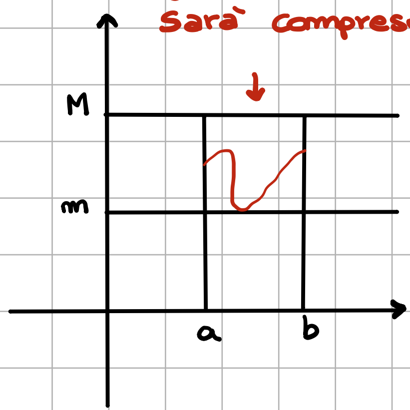
LEMMA (generalizzazione del teorema sulla media integrale)

Hp: *Siano $\omega, \alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni tali che*

- *$\omega(x)$ è continua e ≥ 0 su $[a, b]$,*
- *$\alpha(x)$ e $\beta(x)\omega(x)$ sono continue su $[a, b]$,*
- *$m \leq \beta(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, dove m e $\boxed{M}$ sono rispettivamente il minimo e il massimo di $\alpha(x)$ su $[a, b]$.*

$$\left[m = \min_{x \in [a,b]} \alpha(x) \qquad \text{e} \qquad M = \max_{x \in [a,b]} \alpha(x) \right]$$

il grafico della funzione sarà compreso qui



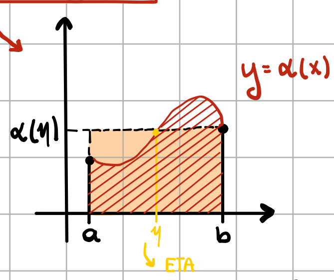
Ts: *Allora esiste un punto $\eta \in [a, b]$ tale che*

"ETA"

$$\int_a^b \beta(x)\omega(x)\mathrm{d}x = \alpha(\eta) \int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x.$$

Questo lemma è una generalizzazione del teorema della media integrale.

Per $\omega(x) = 1$ e $\beta(x) = \alpha(x)$ si ottiene infatti il teorema della media integrale.



Se $\alpha(x)$ continua su $[a,b]$

$$\exists \eta \in [a,b] : \int_a^b \alpha(x)\mathrm{d}x = \alpha(\eta)(b-a)$$

Dimostrazione:

Conosciamo per Ipotesi

Poiché $\omega(x) \geq 0$ su $[a, b]$ e $m \leq \beta(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$,

si ha $m\omega(x) \leq \beta(x)\omega(x) \leq M\omega(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ e $\longrightarrow$ (per monotonia dell'integrale si ha)

$$m \int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \beta(x)\omega(x)\mathrm{d}x \leq M \int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x.$$

Consideriamo la funzione $z : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$z(y) = \alpha(y) \int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x.$$

$Z(y)$ è continua su $[a, b]$ perché $\alpha(y)$ è continua su $[a, b]$.

Inoltre

$$\min_{y \in [a,b]} z(x) = m \int_a^b \omega(x)\,dx$$

$$\max_{y \in [a,b]} z(x) = M \int_a^b \omega(x)\,dx$$

per il teorema dei valori intermedi, $z(y)$ assume su $[a, b]$ tutti i valori compresi tra il suo minimo $m \int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x$ e il suo massimo $M \int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x$. In particolare $z(y)$ assume il valore $\int_a^b \beta(x)\omega(x)\mathrm{d}x$, ovvero esiste $\eta \in [a, b]$ tale che

$$z(\eta) = \int_a^b \beta(x)\omega(x)\mathrm{d}x.$$

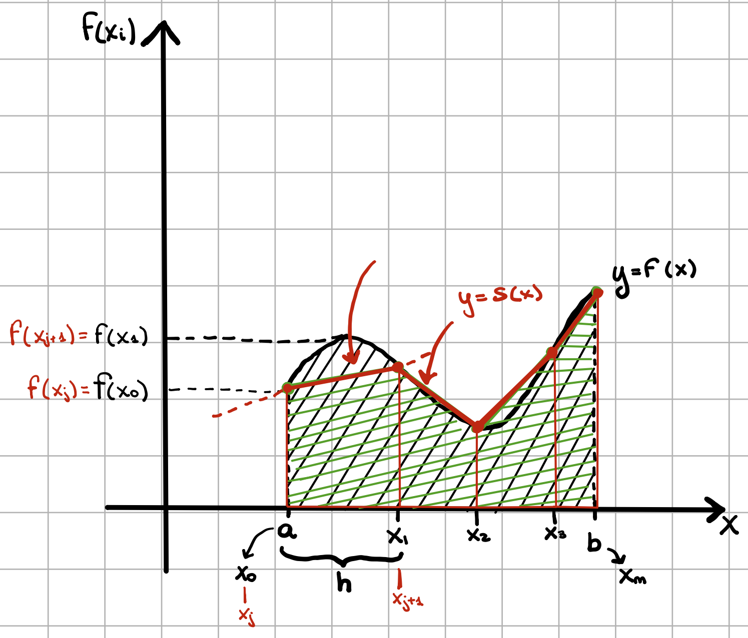
[FINE DIMOSTRAZIONE]

Derivabile 2 volte su $[a,b]$

Teorema 2.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2[a,b]$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n e passo $h = \frac{b-a}{n}$ per approssimare $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Allora esiste un punto $\eta \in [a,b]$ tale che*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_n = -\frac{(b-a)f''(\eta)}{12}h^2}$$

Dimostrazione:



Poniamo $x_j = a + jh$ per $j = 0, \ldots, n$ e indichiamo con $s(x)$ la funzione lineare a tratti mostrata in Figura ↑ Osserviamo che $s(x)$ coincide sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ con il polinomio (retta) d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_j e x_{j+1}.

(infatti il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ su x_j, x_{j+1} è l'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ tale che $p(x_j) = f(x_j)$ e $p(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ e dunque è la retta trattegiata in Figura)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) - s(x)]\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [f(x) - s(x)]\mathrm{d}x$$

Adesso entra in gioco il teorema sull'errore dell'interpolazione

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f''(\xi_j(x))}{2!}(x - x_j)(x - x_{j+1})\mathrm{d}x$$

sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$; $\xi_j(x)$ è un punto in (x_j, x_{j+1}))

$$= \underbrace{-\sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f''(\xi_j(x))\boxed{\frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2}}\mathrm{d}x}_{-[f(x)-s(x)]}$$

Applico il lemmma sulla generalizzazione della media integrale

Applico il lemmma precedente sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ con

- $w(x) = \dfrac{(x-x_j)(x_{j+1}-x)}{2}$
- $\beta(x) = f''(\xi_j(x))$
- $\alpha(x) = f''(x)$

Possiamo "verificare" le ipotesi del lemma

- $w(x)$ è continua e ≥ 0 su $[x_j, x_{j+1}]$
- $\alpha(x)$ è continua su $[x_j, x_{j+1}]$ perchè $f \in C^2[a,b]$

  $\beta(x) w(x)$ è continua su $[x_j, x_{j+1}]$ perchè "guardando indietro" nella dimostrazione vediamo che è $= -[f(x) - s(x)]$ che è continua su $[x_j, x_{j+1}]$
- $\min_{y \in [x_j, x_{j+1}]} \alpha(y) \leq \beta(x) \leq \max_{y \in [x_j, x_{j+1}]} \alpha(y) \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}]$ perchè $\beta(x) = \alpha(\xi_j(x))$ e

  $\xi_j(x) \in (x_j, x_{j+1}) \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}]$

<u>CONCLUSIONE</u>: $\exists\, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tale che $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \beta(x) w(x)\, dx = \alpha(\eta_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x)\, dx$

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x-x_j)(x_{j+1}-x)}{2} \mathrm{d}x$$

è un punto in $[x_j, x_{j+1}]$

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \int_0^h \frac{t(h-t)}{2} \mathrm{d}t$$

CAMBI VARIABILE

$t = x - x_j \rightarrow x = t + x_j$

$dx = dt$

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^h = -\sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j)\frac{h^3}{12} = -\frac{h^3 n}{12} \cdot \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j)} = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\eta),$$

MEDIA ARITMETICA

dove l'ultima uguaglianza vale perché, essendo $f''(x)$ continua su $[a,b]$ per ipotesi ed essendo la media aritmetica $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j)$ un valore compreso tra il minimo e il massimo di $f''(x)$ su $[a,b]$, per il teorema dei valori intermedi esiste sicuramente un $\eta \in [a,b]$ tale che $f''(\eta) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j)$.

[FINE DIMOSTRAZIONE]