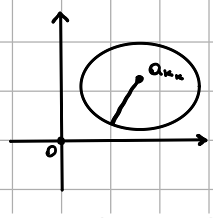
MATRICI A DIAGONALE DOMINANTE

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice.

- Si dice che A è a diagonale dominante (per righe) se
  - $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1, \ldots, n$; (questa condizione dice che 0 non può essere interno a nessun cerchio G di A)
  - esiste almeno un indice $k \in \{1, \ldots, n\}$ per il quale vale la disuguaglianza stretta $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$.

(questa condizione dice che $0 \notin K_k$)



- Si dice che A è a diagonale dominante in senso stretto (per righe) se $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.[13]

(questa condizione dice che 0 non appartiene a nessun cerchio G di A)

- Si dice che A è a diagonale dominante per colonne se
  - $|a_{jj}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ per ogni $j = 1, \ldots, n$; (questa condizione dice che 0 non può essere interno a nessun cerchio di G per colonna di A)
  - esiste almeno un indice $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ per il quale vale la disuguaglianza stretta $|a_{\ell\ell}| > \sum_{i \neq \ell} |a_{i\ell}|$.

(questa condizione dice che $0 \notin H_k$)

- Si dice che A è a diagonale dominante in senso stretto per colonne se $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Analogamente a quanto avviene per i cerchi di Gershgorin, *quando si parla di dominanza diagonale senza altre specificazioni, s'intende per righe.* Quando si vuole parlare di dominanza diagonale per colonne, questo va specificato ogni volta.

TEOREMA: *Supponiamo che la matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ soddisfi almeno una delle seguenti condizioni:*

- *A è a diagonale dominante e irriducibile;* *
- *A è a diagonale dominante in senso stretto;*
- *A è a diagonale dominante per colonne e irriducibile;*
- *A è a diagonale dominante in senso stretto per colonne.*

Allora A è invertibile.

DIM: [nel primo caso (*), le dim. negli altri casi sono un esercizio]

Mostriamo che 0 non è un autovalore di A usando il terzo teorema di Gershgorin.

Poichè A è a diagonale dominante, 0 non può essere interno a nessun cerchio di G. di A e dunque 0 sta (per forza) sul bordo di quegli eventuali cerchi di G. a cui appartiene.
Inoltre, sempre per definizione diagonale dominante, esiste un cerchio di G. tale che 0 non sta sul bordo di quel cerchio (in realtà non sta proprio in quel cerchio)

$\Rightarrow$ Poiché A è irriducibile per ipotesi, il terzo teorema di Gershgorin ci dice che 0 non può essere un autovalore di A e quindi A è invertibile.

[FINE DIMOSTRAZIONE]

Osservazione $\longrightarrow$ Nella dimostrazione del Teorema ↑ abbiamo dovuto usare la versione forte del terzo teorema di Gershgorin perché quella debole non basta.

NORME VETTORIALI

Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

La soluzione è $\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si supponga di aver ottenuto le seguenti approssimazioni della soluzione:

- $\mathbf{y} = [2.99972,\ 1.00023,\ 1.00030]^T$,
- $\mathbf{z} = [3.00027,\ 0.99971,\ 0.99955]^T$.

Come possiamo stabilire quale delle due è più vicina alla soluzione $\mathbf{x}$?

Occorre introdurre un concetto di distanza sullo spazio dei vettori e misurare la distanza di $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ da $\mathbf{x}$: la soluzione approssimata che dista di meno è quella più vicina.

DEF. DI NORMA VETTORIALE:

Una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ si dice norma vettoriale se soddisfa le seguenti proprietà:

(a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [positività];
(b) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ e ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ [omogeneità];
(c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ [disuguaglianza triangolare].

Data una norma vettoriale $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, definiamo la distanza fra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ come $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

TIPOLOGIE DI NORME:

NORMA 1 $\longrightarrow$ $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$,

NORMA 2 $\longrightarrow$ $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$,

NORMA ∞ $\longrightarrow$ $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.

Le relative $\boxed{\text{distanze}}$ sono definite nel modo seguente:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n|,$$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2},$$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|).$$

Tornando all'esempio precedente, ci calcoliamo la distanza di y e z dal vettore soluzione x, usando la NORMA ∞, ed avremo:

$$\mathbf{x}-\mathbf{y} = [0.00028,\ -0.00023,\ -0.00030]^T \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty = 0.00030,$$
$$\mathbf{x}-\mathbf{z} = [-0.00027,\ 0.00029,\ 0.00045]^T \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_\infty = 0.00045.$$

Quindi rispetto alla $\|\cdot\|_\infty$ il vettore $\mathbf{y}$ è più vicino a $\mathbf{x}$ rispetto al vettore $\mathbf{z}$.

[N.B: Norma 2 si chiama NORMA DI MANHATTAN]

EQUIVALENZA DELLE NORME VETTORIALI

TEOREMA → *Tutte le norme vettoriali in $\mathbb{C}^n$ sono equivalenti, nel senso che se prendiamo due norme vettoriali $\|\cdot\|', \|\cdot\|'' : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ allora si ha*

$$\alpha\|\mathbf{x}\|'' \leq \|\mathbf{x}\|' \leq \beta\|\mathbf{x}\|'' \ \ \textit{per ogni}\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$

dove $\alpha, \beta > 0$ sono due costanti indipendenti da $\mathbf{x}$.

IMP.

Verifichiamo ad esempio che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono equivalenti. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\max(|x_1|,\ldots,|x_n|) \leq |x_1| + \ldots + |x_n| \leq n\max(|x_1|,\ldots,|x_n|)$$
$$\Longrightarrow \underbrace{\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty}_{} \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{n}\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1}_{}.$$

Vale il teorema con $\alpha=1$, $\beta=n$ nel caso in cui $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$

Vale il teorema con $\alpha=\frac{1}{n}$, $\beta=1$ nel caso in cui $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_1$

SUCCESSIONI DI VETTORI

Una successione di vettori $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots$ in $\mathbb{C}^n$ si dice convergente al vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ rispetto alla norma vettoriale $\|\cdot\|$ se $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \to 0$.

Poiché tutte le norme vettoriali sono equivalenti per il Teorema ↑, una successione di vettori converge a $\mathbf{x}$ rispetto a una norma $\|\cdot\|$ allora converge a $\mathbf{x}$ rispetto a tutte le norme.

DIM: Supponiamo che $\underline{x}^{(k)} \longrightarrow \underline{x}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|$ e sia $\|\cdot\|'$ un'altra norma
Poiché $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ sono equivalenti, esistono due costanti $\alpha, \beta > 0$ tali che

$$\alpha\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y}\|' \leq \beta\|\mathbf{y}\| \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n,$$

dunque

$$\alpha\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|' \leq \beta\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \quad \text{per ogni} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Siccome $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \to 0$ (perchè $\underline{x}^{(k)} \longrightarrow \underline{x}$ rispetto a $\|\cdot\|$) deducendo dal teorema dei 2 carabinieri che $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|' \to 0$ (cioè $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$ in norma $\|\cdot\|'$).

[FINE DIMOSTRAZIONE]

Una successione di vettori $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots$ in $\mathbb{C}^n$ si dice convergente (componente per componente) al vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ se $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$ componente per componente, cioè se

$$\begin{cases} x_1^{(k)} \to x_1 \\ x_2^{(k)} \to x_2 \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \to x_n \end{cases} \iff \begin{cases} |x_1^{(k)} - x_1| \to 0 \\ |x_2^{(k)} - x_2| \to 0 \\ \vdots \\ |x_n^{(k)} - x_n| \to 0 \end{cases}$$

$$\iff \max(|x_1^{(k)} - x_1|, |x_2^{(k)} - x_2|, \ldots, |x_n^{(k)} - x_n|) \to 0$$

$$\iff \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty \to 0.$$

Vediamo quindi che la convergenza componente per componente altro non è che la convergenza in $\|\cdot\|_\infty$. Pertanto, ricordando l'equivalenza di tutte le norme, dire che $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$ componente per componente è lo stesso che dire che $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$ in una qualsiasi norma.