Forma di Newton del polinomio d'interpolazione

Questa è una forma di rappresentazione del polinomio d'interpolazione

Definizione 1.2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione.

- Se $y \in [a, b]$, si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a y il numero $f[y] = f(y)$.
- Se $y_1, \dots, y_k \in [a, b]$ sono $k \geq 2$ punti distinti, si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a $y_1, \dots, y_k$ il numero

$$f[y_1, \dots, y_k] = \frac{f[y_1, \dots, y_{k-2}, y_k] - f[y_1, \dots, y_{k-1}]}{y_k - y_{k-1}}.$$

ESEMPIO: Nel caso in cui $k=2$

$$f[y_1, y_2] = \underbrace{\frac{F[y_1] - F[y_2]}{y_2 - y_1} = \frac{F(y_2) - F(y_1)}{y_2 - y_1}}_{\text{rapporto Incrementale di } f(x) \text{ relativo ai punti } y_1 \text{ e } y_2}$$

Teorema 1.3. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ nodi distinti. Allora il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ è*

$$\boxed{p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}$$

Questa è la FORMA DI NEWTON del polinomio d'interpolazione

Corollario 1.1. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ nodi distinti. Allora $f[x_0, \dots, x_n]$ non cambia se vengono permutati i suoi $n + 1$ argomenti, cioè*

PUNTI

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$$

per ogni permutazione σ dell'insieme $\{0, \dots, n\}$.

DIMOSTRAZIONE: Sia σ una fissata (generica) permutazione di $\{0, \dots, m\}$. Applichiamo il Teorema precedente con i nodi $x_0, x_1, \dots, x_m$ è dato da (N). Applicando il teorema con i nodi $x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}$ si deduce che il polinomio d'interpolazione $p_\sigma(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}$ è dato da

$$(N_\sigma)\ p_\sigma(x) = f[x_{\sigma(0)}] + f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}](x - x_{\sigma(0)}) + f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(m)}](x - x_{\sigma(0)})(x - x_{\sigma(1)}) + \dots$$
$$+ f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}](x - x_{\sigma(0)})(x - x_{\sigma(1)}) \dots (x - x_{\sigma(m-1)})$$

OSSERVAZIONE_1) Il polinomio d'interpolazione $p(x)$ non dipende dall'ordinamento dei nodi e quindi $p(x) = p_\sigma(x)$

OSSERVAZIONE_2)

Il coefficente direttore di $p(x)$ è $f[x_0, x_1, \dots, x_m]$ = il numero che moltiplica x^m

Il coefficente direttore di $p_\sigma(x)$ è $f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(m)}]$

CONCLUSIONI) Poichè $p(x) = p_\sigma(x)$ per OSSERVAZIONE_1, deve essere

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(m)}]$$

[FINE DIMOSTRAZIONE]