METODI ITERATIVI PER RISOLVERE SISTEMI LINEARI

È dato un sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

con $\underbrace{\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n}_{\text{VETTORE}}$ e $\underbrace{A \in \mathbb{C}^{n\times n}}_{\text{MATRICE}}$ invertibile. Tale sistema ha un'unica soluzione $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

essendo A invertibile

Ci proponiamo di risolvere Ax=b con un metodo iterativo, cioè un metodo che a partire da un vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ scelto dall'utente costruisce una successione di vettori $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots$

Vogliamo che tale successione sia "facile da costruire" e converga a $\mathbf{x}$ (componente per componente) qualunque sia il vettore iniziale scelto $\mathbf{x}^{(0)}$.

Consideriamo solo *metodi iterativi stazionari* cioè metodi iterativi della forma

$$* \quad \boxed{\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n \text{ dato}, \\ &\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}}$$

dove $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice fissata detta *matrice d'iterazione* e $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$ è un vettore fissato.

Osservazione $\longrightarrow$ Se una successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0,1,2,\ldots}$ generata dal metodo converge a un vettore $\mathbf{x}^{(\infty)}$ allora $\mathbf{x}^{(\infty)}$ soddisfa l'equazione [16]

$$\mathbf{x}^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} (P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}) = P\mathbf{x}^{(\infty)} + \mathbf{q} \implies \mathbf{x}^{(\infty)} = P\mathbf{x}^{(\infty)} + \mathbf{q}.$$

CONCLUSIONE $\longrightarrow$ se la soluzione $\mathbf{x}$ di Ax=b non soddisfa l'equazione $\mathbf{x} = P\mathbf{x} + \mathbf{q}$ allora non c'è speranza che una successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0,1,2,\ldots}$ generata dal metodo (4.2) converga a $\mathbf{x}$.

N.B: "soddisfare l'equazione $\mathbf{x} = P\mathbf{x} + \mathbf{q}$" vuol dire "essere punto fisso della funzione $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = P\mathbf{y} + \mathbf{q}$".

DEFINIZIONE: CONSISTENZA DI UN METODO ITERATIVO

Il metodo iterativo (4.2) si dice consistente con il sistema Ax=b se la soluzione $\mathbf{x}$ di Ax=b soddisfa l'equazione $\mathbf{x} = P\mathbf{x} + \mathbf{q}$.

DEFINIZIONE: CONVERGENZA DI UN METODO ITERATIVO

Il metodo iterativo (4.2) per risolvere il sistema Ax=b si dice convergente se per ogni scelta del vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ la successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0,1,2,\ldots}$ generata dal metodo converge (componente per componente) alla soluzione $\mathbf{x}$ di Ax=b

TEOREMA: CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE DI CONVERGENZA

Supponiamo che il metodo (4.2) sia consistente con Ax=b *Allora esso è convergente se e solo se* $\rho(P) < 1$.

DIM:

Dimostriamo soltanto che se $\rho(P) < 1$ allora il metodo è convergente. Dobbiamo dimostrare che la successione (4.2) converge alla soluzione $\mathbf{x}$ di $Ax=b$ indipendentemente dalla scelta del vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$. Poiché il metodo è consistente per ipotesi, vale l'equazione

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x} + \mathbf{q}. \tag{4.3}$$

Inoltre, ovviamente, vale anche l'equazione del metodo, cioè

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q} \text{ per ogni } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

Sottraendo membro a membro la (4.4) e la (4.3) si ottiene l'equazione dell'errore

$$\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x} = P\underline{x}^{(k)} + \cancel{q} - (P\underline{x} + \cancel{q})$$

$$\underbrace{\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}}_{e^{(k+1)}} = P\underbrace{(\underline{x}^{(k)} - \underline{x})}_{e^{(k)}}$$

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = P\mathbf{e}^{(k)} \text{ per ogni } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

dove $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$ è l'errore al passo k. Sviluppando per ricorrenza la (4.5) si ottiene

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = P\mathbf{e}^{(k)} = P^2\mathbf{e}^{(k-1)} = P^3\mathbf{e}^{(k-2)} = \ldots = P^{k+1}\mathbf{e}^{(0)} \text{ per ogni } k = 0, 1, 2, \ldots$$

da cui

$$\mathbf{e}^{(k)} = P^k\mathbf{e}^{(0)} \text{ per ogni } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

Siccome stiamo assumendo che $\rho(P) < 1$, $\Longrightarrow$ ci dice che $P^k \to O$. Dalla (4.6) si deduce quindi che $\mathbf{e}^{(k)} \to \mathbf{0}$[17] cioè $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$.

Corollario 4.1 (condizione sufficiente di convergenza) *Supponiamo che il metodo (4.2) sia consistente con (4.1). Se esiste una norma matriciale indotta* $\|\cdot\|$ *tale che* $\|P\| < 1$ *allora il metodo è convergente.*

DIM: Poiché $\rho(P) \leq \|P\|$ per il Teorema 3.9, la condizione $\|P\| < 1$ implica che $\rho(P) < 1$ e dunque il metodo è convergente per il Teorema **Precedente**

Corollario 4.2 (condizioni necessarie di convergenza) *Supponiamo che il metodo* $\ast\uparrow$ *sia consistente con* $Ax=b$

- *Se* $|\text{traccia}(P)| \geq n$ *allora il metodo non è convergente.*
- *Se* $|\det(P)| \geq 1$ *allora il metodo non è convergente.*

Quindi le condizioni $|\text{traccia}(P)| < n$ *e* $|\det(P)| < 1$ *sono necessarie per la convergenza del metodo* $\ast\uparrow$

DIM:

- Se $|\text{traccia}(P)| \geq n$ allora esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1. Infatti, se tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di P fossero di modulo < 1 allora avremmo

$$|\text{traccia}(P)| = |\lambda_1 + \ldots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| < n.$$

Poiché esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1 si deduce che $\rho(P) = \max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|) \geq 1$ e dunque il metodo non è convergente

- Se $|\det(P)| \geq 1$ allora esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1. Infatti, se tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di P fossero di modulo < 1 allora avremmo

  $$|\det(P)| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| = |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| < 1.$$

  Poiché esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1 si deduce che $\rho(P) = \max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|) \geq 1$ e dunque il metodo non è convergente