ERRORE O RESTO DELL'INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

TEOREMA) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{n+1}[a,b]$* → Insieme delle funzioni f da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ tale che f è derivabile m+1 volte sull'intervallo chiuso $[a,b]$ e $f, f', \dots, f^{(m+1)}$ sono continue su $[a,b]$

e sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sugli $n+1$ nodi distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$.

Allora, per ogni $x \in [a,b]$ esiste un punto $\xi = \xi(x) \in (a,b)$ tale che

"Xi" "Xi di x"

$$\boxed{f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)} \quad (\epsilon)$$

DIMOSTRAZIONE) Sia $x \in [a,b]$ fissato

- **CASO 1:** X coincide con uno dei modi $x_0, x_i, \dots, x_m$. In tal caso posso scegliere un qualsiasi $\xi \in (a,b)$ e sono sicuro che la formula (ϵ) vale perchè ottengo $0=0$

  (il primo membro è 0 perchè $p(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 0, \dots, m$ per definizione di $p(x)$ mentre il 2° membro è 0 perchè si annulla)

- **CASO 2:** X se non coincide con uno dei modi $x_0, x_i, \dots, x_m$.

Definiamo $\pi(y) = (y-x_0)(y-x_1)\cdots(y-x_n)$ e $r(y) = f(y) - p(y)$, e consideriamo la funzione

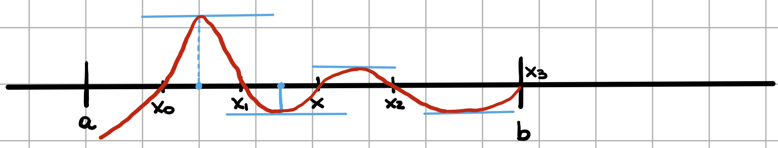
$$z : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad z(y) = r(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y);$$

1. $z(y)$ Questa funzione è di classe $C^{n+1}[a,b]$ "ereditata" da $f(y)$

2. $z(y)$ si annulla in almeno $n+2$ punti di $[a,b]$, perchè

   - Si annulla in tutti i nodi $x_0, x_1, \dots, x_m$
   - Si annulla in x → [ES: $z(x) = r(x) - \frac{r(x)}{\pi(x)} \cdot \cancel{\pi(x)}$]

Possibile grafico di $z(y)$ per $m=3$



Pertanto, per il teorema di Rolle, $z'(y)$ si annulla in almeno $n+1$ punti di (a,b), $z''(y)$ si annulla in almeno n punti di (a,b), $z'''(y)$ si annulla in almeno $n-1$ punti di (a,b), e così via fino ad avere $z^{(n+1)}(y)$ si annulla in almeno un punto $\xi \in (a,b)$.

Dimostriamo che questo punto ξ fa valere la formula

$$\boxed{f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

$$Z(y)=r(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y)=f(y)-p(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\underbrace{(y-x_0)(y-x_1)\dots(y-x_m)}_{\pi(y)}$$

$$Z(m+1)(y)=f^{(m+1)}(y)-\underbrace{\cancel{p^{(m+1)}(y)}}_{=0}-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi^{(m+1)}(y)$$

identicamente nulla xchè

$f=y^3\to f'=3y^2\to f''=3\cdot 2y$
$\to f'''=3\cdot 2\cdot 1\to f''''=0$

Per capire cos'è $\pi^{(m+1)}(y)$ guardiamo il caso $m=2$

$$\pi(y)=(y-x_0\ (y-x_1)(y-x_2)$$
$$=(y^2-yx_1-yx_0-x_0x_1)(y-x_2)$$
$$=y^3-(x_0+x_1+x_2)y^2+(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)y-x_0x_1x_2$$

$$\pi^{(3)}(y)=\frac{d^3}{dy^3}y^3$$

In generale, $\pi^{(m+1)}(y)=\dfrac{d^{m+1}}{dy^{m+1}}y^{m+1}=(m+1)!$

$$0=z^{(n+1)}(\xi)=r^{(n+1)}(\xi)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-p^{(n+1)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{\pi(x)}(n+1)!$$
$$=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}(n+1)!$$

[FINE DIMOSTRAZIONE]