TEOREMI DI CONVERGENZA (JACOBI, GAUSS-SEIDEL)

TEOREMA ⟶ *Supponiamo che la matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ soddisfi almeno una delle seguenti condizioni:*

- *A è a diagonale dominante e irriducibile;*
- *A è a diagonale dominante in senso stretto;*
- *A è a diagonale dominante per colonne e irriducibile;*
- *A è a diagonale dominante in senso stretto per colonne.*

Allora i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per risolvere un sistema lineare di matrice A sono convergenti.

OSSERVAZIONE ⟶ Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ soddisfa almeno una delle condizioni del Teorema su↑, allora:

- A è invertibile per un teorema visto
- gli elementi diagonali di A sono diversi da 0. Infatti, se per assurdo ce ne fosse uno uguale a 0, allora tutta la corrispondente riga (o colonna) sarebbe nulla in quanto A è a diagonale dominante (o a diagonale dominante per colonne): ciò è impossibile perché A è invertibile e non può avere una riga (o colonna) nulla.

CONCL: se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ soddisfa almeno una delle condizioni del Teorema 4.3, i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili per risolvere un sistema lineare di matrice A.

DIM: Dimostriamo il teorema per il metodo di Gauss-Seidel sotto l'ipotesi che A sia a diagonale dominante e irriducibile

Dobbiamo dimostrare che $\rho(G) < 1$, dove $G = I - E^{-1}A$ è la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel.

Per l'osservazione "smart", gli autovalori di G sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(\lambda E + A - E) = 0$$

Per $n=4$

$$\det(\lambda E + A - E) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & a_{34} \\ \lambda a_{41} & \lambda a_{42} & \lambda a_{43} & \lambda a_{44} \end{vmatrix}$$

Nessun numero λ di modulo ≥ 1 può essere radice di questo polinomio. Infatti, se $|\lambda| \geq 1$ allora la matrice $\lambda E + A - E$ è a diagonale dominante e irriducibile esattamente come A, per cui è invertibile (Teorema 3.7) e dunque $\det(\lambda E + A - E) \neq 0$. In definitiva, gli autovalori λ di G sono per forza in modulo minori di 1 e perciò $\underbrace{\rho(G) < 1}_{\text{RAGGIO SPETTRALE DI } G \text{ È} > 1}$.

se $|\lambda| \geq 1$ allora la matrice $\lambda E + A - E$ è a diagonale dominante e irriducibile esattamente come A. La dimostrazione si basa sulle due osservazioni seguenti.

- $\lambda E + A - E$ ha gli elementi nulli nelle stesse posizioni di A, quindi ha lo stesso grafo di A, quindi è irriducibile come A.

- $\lambda E + A - E$ è a diagonale dominante come A. Infatti $\forall$ riga $i = 1, \dots, m$

$$|\lambda a_{ii}| = |\lambda| \cdot |a_{ii}| \geq |\lambda| \cdot (|a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{im}|)$$

$$= |\lambda \cdot a_{i1}| + \dots + |\lambda \cdot a_{i,i-1}| + |\lambda| \cdot |a_{i,i+1}| + \dots + |\lambda| \cdot |a_{im}|$$

$$\geq |\lambda \cdot a_{i1}| + \dots + |\lambda \cdot a_{i,i-1}| + |\lambda| \cdot |a_{i,i+1}| + \dots + |\lambda| \cdot |a_{im}|$$

vale il > stretto se sulla riga i di A vale il > stretto

TEOREMA (GAUSS-SEIDEL)

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sia hermitiana definita positiva. Allora il metodo di Gauss-Seidel per risolvere un sistema lineare di matrice A è convergente.

OSSERVAZIONE $\longrightarrow$ Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è hermitiana definita positiva, allora:

- A è invertibile perché i suoi autovalori sono positivi* e dunque 0 non è un autovalore di A;
- gli elementi diagonali di A sono positivi per l'Esercizio 3.3.

Dunque, se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è hermitiana definita positiva, i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili per risolvere un sistema lineare di matrice A.

* reali in quanto A è Hermitiana e con parte reale positiva in quanto A è definita positiva

DIM: Dobbiamo dimostrare che $\rho(G) < 1$, dove $G = I - E^{-1}A$ è la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel. La dimostrazione è suddivisa in due parti.

$\boxed{\textit{Parte 1.}}$ Dimostriamo che $A - G^*AG$ è hermitiana definita positiva. Il fatto che $A - G^*AG$ è hermitiana segue direttamente dall'ipotesi che A è hermitiana e dalla proprietà $(XY)^* = Y^*X^*$ (che vale per ogni coppia di matrici X, Y moltiplicabili):

$$(A - G^*AG)^* = A^* - G^*A^*G^{**} = A - G^*AG.$$

$$A - G^*AG = A - (I - E^{-1}A)^*A(I - E^{-1}A) \longrightarrow \text{Sostituisco } G = I - E^{-1}A$$

$$= A - \underbrace{(I - F^*)A(I - F)}_{\text{Risolvi il prodotto}} \longrightarrow \text{Sostituisco } F = E^{-1}A$$

si noti che F è invertibile in quanto E^{-1} e A lo sono, e si ha $F^{-1} = A^{-1}E$

$$= \cancel{A} - \cancel{A} + F^*A + AF - F^*AF$$

$$= F^*(AF^{-1} + F^{-*}A - A)F$$

RACCOLGO

$\longrightarrow$ per F come per ogni matrice invertibile vale $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$ e si pone per definizione $F^{-*} = (F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$; per verificare che $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$ basta osservare che $(F^{-1})^*F^* = (FF^{-1})^* = I^* = I$ e similmente $F^*(F^{-1})^* = I$

$$= F^*(E + E^* - A)F \longrightarrow AF^{-1} = E \text{ ; } F^{-*}A = (A^*E^{-*})^{-1}A = (AE^{-*})^{-1}A = E^*A^{-1}A = E^*$$

$$= F^*DF \longrightarrow A \text{ è hermitiana} \implies E + E^* - A = D = \text{parte diagonale di } A$$

Pertanto, per ogni $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^*(A - G^*AG)\mathbf{y} &= \mathbf{y}^*F^*DF\mathbf{y} \\
&= (F\mathbf{y})^*D(F\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{u}^*D\mathbf{u} && (\mathbf{u} = F\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ perché } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ e } F \text{ è invertibile}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|u_i|^2 > 0 && (a_{ii} > 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \text{ perché } A \text{ è hermitiana definita positiva;} \\
& && \text{vedere Esercizio 3.3)}
\end{aligned}$$

per cui $A - G^*AG$ è definita positiva per il Teorema 3.1. (NO DIM.)

Parte 2. Dimostriamo che se λ è un autovalore di G allora $|\lambda| < 1$. Una volta fatto questo, avremo $\rho(G) < 1$ e la tesi è dimostrata. Sia dunque λ un autovalore di G e sia $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ un corrispondente autovettore: $G\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$. Siccome $A - G^*AG$ è hermitiana definita positiva,

$$\begin{aligned}
0 &< \mathbf{y}^*(A - G^*AG)\mathbf{y} = \mathbf{y}^*A\mathbf{y} - \mathbf{y}^*G^*AG\mathbf{y} = \mathbf{y}^*A\mathbf{y} - (G\mathbf{y})^*A(G\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*A\mathbf{y} - (\lambda\mathbf{y})^*A(\lambda\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{y}^*A\mathbf{y} - \overline{\lambda}\mathbf{y}^*A(\lambda\mathbf{y}) && (\text{vale in generale } (\alpha B)^* = \overline{\alpha}B^* \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{C} \text{ e ogni matrice } B) \\
&= \mathbf{y}^*A\mathbf{y} - |\lambda|^2\mathbf{y}^*A\mathbf{y} \\
&= (1 - |\lambda|^2)\mathbf{y}^*A\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathbf{y}^*A\mathbf{y} > 0$ per il Teorema 3.1 (essendo A hermitiana definita positiva per ipotesi), deve essere $1 - |\lambda|^2 > 0$ cioè $|\lambda| < 1$.

[FINE DIMOSTRAZIONE]