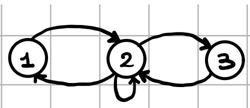
MATRICI IRRIDUCIBILI

Un grafo è un diagramma formato da un certo numero di nodi e da un certo numero di archi. Un arco è semplicemente una freccia che parte da un nodo e arriva a un altro nodo (che può anche coincidere con quello di partenza). Se il grafo possiede n nodi, questi vengono tipicamente indicati con i numeri $1, \ldots, n$, mentre l'arco che va dal nodo i al nodo j viene tipicamente indicato con una freccia $i \to j$ che parte da i e arriva a j.



Un *cammino* all'interno di un grafo è un percorso che parte da un nodo i e, seguendo gli archi del grafo, arriva a un altro nodo j. Se il nodo di arrivo j coincide con il nodo di partenza i, il cammino si chiama anche *ciclo*. Un grafo si dice *fortemente connesso* se per ogni coppia di nodi i e j esiste un cammino all'interno del grafo che va da i a j. Equivalentemente, un grafo è fortemente connesso se esiste un ciclo nel grafo che tocca tutti i nodi.

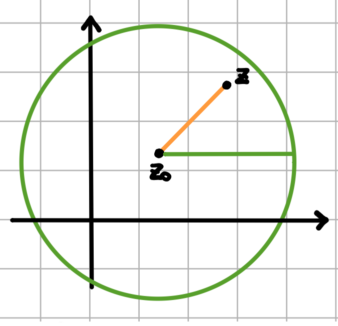
Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, il grafo associato ad A è il grafo così definito:
- i nodi sono $1, \ldots, n$;
- gli archi sono le frecce $i \to j$ tali che $a_{ij} \neq 0$.

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice *irriducibile* se il suo grafo è fortemente connesso.

LOCALIZZAZIONE DEGLI AUTOVALORI

"C CALLIGRAFICO"

$\mathscr{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ il cerchio nel piano complesso $\mathbb{C}$ di centro z_0 e raggio r.



Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, i cerchi di Gershgorin di A sono i cerchi $K_1, \ldots, K_n$ definiti nel modo seguente: per ogni $i = 1, \ldots, n$,

$$K_i = \mathscr{C}(a_{ii}, |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|) = \mathscr{C}\left(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right).$$

i cerchi di Gershgorin di A vengono chiamati anche cerchi di Gershgorin per riga di A.
Questo serve a distinguerli dai cerchi di Gershgorin per colonna di A che sono i cerchi $H_1, \ldots, H_n$ definiti nel modo seguente: per ogni $j = 1, \ldots, n$,

$$H_j = \mathscr{C}(a_{jj}, |a_{1j}| + \ldots + |a_{j-1,j}| + |a_{j+1,j}| + \ldots + |a_{nj}|) = \mathscr{C}\left(a_{jj}, \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\right).$$

> NOTA → *quando si parla di cerchi di Gershgorin senza altre specificazioni, s'intendono i cerchi di Gershgorin per riga.* Quando si vuole invece parlare dei cerchi di Gershgorin per colonna, questo va specificato ogni volta.

PRIMO TEOREMA DI GERSHGORIN

Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ stanno tutti nell'unione dei cerchi di Gershgorin di A.

DIM: Sia λ un autovalore di A. Mostriamo che λ sta nell'unione dei cerchi di Gershgorin di A. Prendiamo $u \neq 0$ autovettore di A corrispondente a λ:

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \iff (A\mathbf{u})_i = (\lambda\mathbf{u})_i \text{ per ogni } i = 1,\dots,n \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = \lambda u_i \text{ per ogni } i = 1,\dots,n.$$

Seleziono un indice $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ tale che u_{i_0} abbia modulo massimo rispetto a tutte le altre componenti di u $\left(|u_{i_0}| = \max_{i=1,\dots,n} |u_i|\right)$

La precedente equazione i_0-esima ci dice che

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = \lambda u_i \implies (\lambda - a_{ii})u_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}u_j$$

APPLICO IL MODULO A SX E A DX

$$\implies |\lambda - a_{ii}|\,|u_i| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}u_j\right| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,\cancel{|u_j|} \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,\cancel{|u_i|} = |u_i| \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

$$\implies |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

CONCLUSIONE: Si sta dicendo qui che λ ha una distanza da $a_{i_0 i_0}$ = centro del cerchio di G K_{i_0} $\le$ del raggio $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$ di K_{i_0}

$\Rightarrow$ Quindi λ appartiene a K_i e dunque appartiene all'unione dei cerchi di Gershgorin di A.

[FINE DIMOSTRAZIONE]

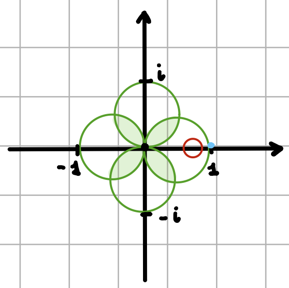
SECONDO TEOREMA DI GERSHGORIN

Supponiamo che l'unione di k cerchi di Gershgorin di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sia disgiunta dall'unione degli altri $n-k$ cerchi. Allora k autovalori di A stanno nella prima unione e $n-k$ nella seconda.

TERZO TEOREMA DI GERSHGORIN

FORTE → *Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sia irriducibile. Allora i punti che stanno sul bordo di quei cerchi di Gershgorin a cui appartengono ma non sul bordo di tutti i cerchi non sono autovalori di A.*

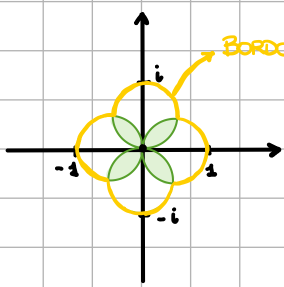
ESEMPIO:



1 non è autovalore di A

"B CALLIGRAFICO"

DEBOLE → *Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sia irriducibile e sia $\mathscr{B}$ il bordo dell'unione dei cerchi di Gershgorin. Allora i punti di $\mathscr{B}$ che non stanno sul bordo di tutti i cerchi non sono autovalori di A.*



DIM: Sia $z \in \mathscr{B}$ punto che non sta sul bordo di tutti i cerchi.

- Siccome $z \in \mathscr{B}$, z non può stare all'interno di nessun cerchio e dunque per forza sta sul bordo di quei cerchi a cui appartiene
- z non sta sul bordo di tutti i cerchi per ipotesi

$\Longrightarrow$ z non è un autovalore di A per il 3° TEOREMA DI G. FORTE

[FINE DIMOSTRAZIONE]