È,			_:					Ì								-			-		-				
Ľd	lato	un	siste	ma l	ınea	re						A_{Σ}	$\mathbf{x} =$	b											
con	b	$\in \mathbb{C}$	n e	$A \in$	\mathbb{C}^n	$\times n$	inve	rtib	ile.	Tale	sist	tema	ha	un'u	nica s	soluz	zione	x =	= A	$^{-1}\mathbf{b}$.					
	Ves	TOR		MAT	₩ Rice	-							6	essen	b A	inve	ortib	ما:							
						_										11100									
(Ci j	oroj	oni	amo	di	ris	solv	ere	A×=	ь	con	un	me	todo	itera	tivo	, cio	ρè τ	in r	neto	do	che	a	oart	ire
la	un	. ve	etto	re i	niz	iale	$\mathbf{x}^{(}$	(0)	scel	to (dall'	utent	te c	costru	sce u	ina	succe	essio	ne o	li ve	ettor	i x ($^{0)}, {f x}$	$^{(1)},$ 3	$\zeta^{(2)},$
								V	oglia	amo	che	tale	suc	cessio	ne sia	a "fa	cile								
Ċ	la co	str	ıire''	е со	nve	rga	a x	(cor	npoi	hent	e pei	r com	npo	nente)	qu	alur	nque	sia i	l ve	ttore	ini	ziale	scel	to x	$\zeta^{(0)}$.
(on	side	riam	o so	lo n	net a	odi i	tera	tivi	staz	iona	ri cic	oè n	netod	itera	ativi	della	a for	rma						
								_ [,	r(0) c		date	2				┧_									
							4	K 3	$\mathbf{c}^{(k+1)}$	=	$P\mathbf{x}^{(k)}$	0 + \mathbf{a}	,	k = 0,	1, 2	-									
																Τ.,									
	dove	eP	$\in \mathbb{C}'$	$i \times n$	un	a m	atri	ce fi	ssata	a de	tta 1	matri	ice	d' $itere$	$zion \epsilon$	e (q	$j \in \mathbb{C}$	<i>n</i>) è 1	un y	etto	re fi	ssat	о.		
			ddis	sfa l'	equ	azio	ne 1	6						nerata $\mathbf{x}^{(\infty)}$									vetto	ore :	x ^(∞)
ra	x (°	o) so	oddis $\mathbf{x}^{(c)}$	sfa l' ∞) =	equal $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k}$	azio	one ¹	6	$\lim_{k o \infty}$	$(P\mathbf{x}$	^(k) +	- q) =	= <i>P</i>	$\mathbf{x}^{(\infty)}$	+ q	\Longrightarrow	x (∞) ₌	= P x	ζ ^(∞)	$+\mathbf{q}$		+		
ra	x (°	o) so	ddis	sfa l' ∞) =	equal $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k}$	azio	one ¹	6	$\lim_{k o \infty}$	$(P\mathbf{x})$	(k) + x di	- q) =	= <i>P</i>	$\mathbf{x}^{(\infty)}$	⊢ q oddisfa	⇒ a l'eq		∞) = ne x	= P	$\mathbf{c}^{(\infty)}$	$+\mathbf{q}$	ra no	on c'è	sper	¦ anza
ra	x (°	o) so	oddis $\mathbf{x}^{(c)}$	sfa l' ∞) =	equal $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k}$	azio	one 1 (k+1)	6 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 =	$\lim_{k \to \infty} soluz$	(Px	x di	A x ssione	= P = b	$ \begin{array}{c} \mathbf{p}_{\mathbf{X}^{(\infty)}} \\ \text{non so} \\ \mathbf{p}_{(k)} \\ \mathbf{p}$	+ q	⇒ a l'eq gene	x ($= P_{2}$ $= P_{2}$ $= P_{3}$ $= P_{3}$	$\mathbf{x}^{(\infty)}$ $\mathbf{x} + \mathbf{q}$ \mathbf{do}	+ q	ra no	on c'è	sper	anza
ra	x (°	o) so	oddis $\mathbf{x}^{(c)}$	sfa l' ∞) =	equal $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k}$	azio	one 1 (k+1)	6 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 =	$\lim_{k \to \infty} soluz$	(Px	x di	A x ssione	= P = b	$\mathbf{x}^{(\infty)}$	+ q	⇒ a l'eq gene	x ($= P_{2}$ $= P_{2}$ $= P_{3}$ $= P_{3}$	$\mathbf{x}^{(\infty)}$ $\mathbf{x} + \mathbf{q}$ \mathbf{do}	+ q	ra no	on c'è	sper	anza
ra	x (°	o) so	oddis $\mathbf{x}^{(c)}$	sfa l' ∞) =	equal $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k}$	azio	one 1 (k+1)	6 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 = 1 =	$\lim_{k \to \infty} soluz$	(Px	x di	A x ssione	= P = b	$ \begin{array}{c} \mathbf{p}_{\mathbf{X}^{(\infty)}} \\ \text{non so} \\ \mathbf{p}_{(k)} \\ \mathbf{p}$	+ q	⇒ a l'eq gene	x ($= P_{2}$ $= P_{2}$ $= P_{3}$ $= P_{3}$	$\mathbf{x}^{(\infty)}$ $\mathbf{x} + \mathbf{q}$ \mathbf{do}	+ q	ra no	on c'è	sper	anza
ra	x ^{(°}	sc	x ⁽⁽	sfa l' ∞) =	equal $k \to 0$	azio	one 1 (k+1)	e la :	lim k→∞ soluz u	(Px	x di	Ax: ssione	= P	$ \begin{array}{c} \mathbf{p}_{\mathbf{X}}(\infty) \\ \text{non s} \\ \frac{c(k)}{k} = e^{-kx} + e^{-kx} \end{array} $	+ q	a l'eq	x(" quazion erata ""esser	∞) = ne x dal 1 re pur	= Prometo	$\mathbf{x}^{(\infty)}$ $\mathbf{x} + \mathbf{q}$ \mathbf{do}	+ q	ra no	on c'è	sper	anza
ra	x ^{(°}	sc	x ⁽⁽	sfa l' ∞) =	equal $k \to 0$	azio	one 1 (k+1)	e la :	lim k→∞ soluz u	(Px	x di	Ax: ssione	= P	$ \begin{array}{c} \mathbf{p}_{\mathbf{X}^{(\infty)}} \\ \text{non so} \\ \mathbf{p}_{(k)} \\ \mathbf{p}$	+ q	a l'eq	x(" quazion erata ""esser	∞) = ne x dal 1 re pur	= Prometo	$\mathbf{x}^{(\infty)}$ $\mathbf{x} + \mathbf{q}$ \mathbf{do}	+ q	ra no	on c'è	sper	anza
ra	X(°)	Fin	x ⁽⁽⁾	one One	equivalent $\lim_{k\to \infty}$	azio	se N.B	e la : "se	lim k→∞ soluz u	(Px	x di	Ax- ssione azione	= P	$P\mathbf{x}^{(\infty)}$ non s $\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}$ $\mathbf{x}^{(k)}$	+ q oddisfa	a l'eq	x("uazionerata "esser	ne x dal 1	= Px	$\zeta^{(\infty)}$	+ q	conv	on c'è	sper a \mathbf{x}	ranza
ra	x ^(°)	Fin	x ⁽⁽⁾	one One	equivalent $\lim_{k\to \infty}$	azio	se N.B	e la :	lim k→∞ soluz u	(Px	x di	Ax- ssione azione	= P	$ \begin{array}{c} \mathbf{p}_{\mathbf{X}}(\infty) \\ \text{non s} \\ \frac{c(k)}{k} = e^{-kx} + e^{-kx} \end{array} $	+ q oddisfa	a l'eq	x("uazionerata "esser	ne x dal 1	= Px	$\zeta^{(\infty)}$	+ q	conv	on c'è	sper a \mathbf{x}	ranza
ra	x(°°	Fin	x (Sic	one 1.2) s	equality $\lim_{k \to \infty} \lim_{k $	x x x x x x x x x x x x x x x x x x x	ne 1 (k+1) so N.B	e la : "so	lim k→∞ u u con j	(Px ione ione fare l	x di uccess 'equa	- q) = Ax- ssione azione		$P(\mathbf{x}^{(\infty)})$ non s $\frac{e(k)}{k} = P(\mathbf{x} + \mathbf{x})$ e la so	+ q oddisfa ,1,2, q" vuo	in l'equipe de l'e	valuazionerata erata eraser di A	man x dal 1 dal 1 re pur	= Pr	$\zeta^{(\infty)}$	+ q	conv	on c'è	sper a \mathbf{x}	ranza
ra	x(°°	Fin	x (Sic	one 1.2) s	equality $\lim_{k \to \infty} \lim_{k $	x x x x x x x x x x x x x x x x x x x	ne 1 (k+1) so N.B	e la : "so	lim k→∞ u u con j	(Px ione ione fare l	x di uccess 'equa	- q) = Ax- ssione azione	= P	$P\mathbf{x}^{(\infty)}$ non s $\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}$ $\mathbf{x}^{(k)}$	+ q oddisfa ,1,2, q" vuo	in l'equipe de l'e	valuazionerata erata eraser di A	man x dal 1 dal 1 re pur	= Pr	$\zeta^{(\infty)}$	+ q	conv	on c'è	sper a \mathbf{x}	ranza
ra J	x(°°	Fin Ein	x (izic	one 1.2) s	equivalent equivalent $k \rightarrow 0$	azicon x ∞	N.B	e la : "so	lim k→∞ soluz u oddis	(Px	x di	Ax- ssione azione	= P = b e {x = b s	$P(\mathbf{x}^{(\infty)})$ non s $\frac{e(k)}{k} = P(\mathbf{x} + \mathbf{x})$ e la so	+ q oddisfa ,1,2, q" vuo	a l'equilibrie l'e	di A	ne x dal 1 re pur	$= P_{2}$ $= P_{2}$ $= P_{3}$ $= P_$	$\mathbf{x} + \mathbf{q}$ $\mathbf{do} \ (\mathbf{do} \ (\mathbf{disfa})$ \mathbf{disfa}	+ q	ra no	on c'è	$sper = \mathbf{A} \mathbf{X}$ $= P$	ranza Py+
ra	x(°°)	Fin Fin	x (Sico () izio	$\sin(4.2) = \cos(4.2)$	equation in disconnection in the contraction of the contraction is disconnected by the contraction of the c	n x	N.B	e la : "se ERC	lim k→∞ u u oddis	(Px ione ione fare last last six last last last last last last last last	x di ucces 'equa	si di	= P = b = {x = ibs	$P\mathbf{x}^{(\infty)}$ non s $\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}$ $\mathbf{x}^{(k)}$ $$	+ q oddisfa oddisfa oddisfa oddisfa oddisfa oddisfa	in l'equipe de la l'e	di A	ogni	= Pr	tta de	+ q allo 4.2) l'equelle veel veel veel veel veel veel veel	ranc	on c'è verga e g(y	sper a \mathbf{x}	$\mathbf{x} + \mathbf{c}$
ra	x(°°)	Fin Fin	x (Sico () izio	$\sin(4.2) = \cos(4.2)$	equation in disconnection in the contraction of the contraction is disconnected by the contraction of the c	n x	N.B	e la : "se ERC	lim k→∞ u u oddis	(Px ione ione fare last last six last last last last last last last last	x di ucces 'equa	si di	= P = b = {x = ibs	$P\mathbf{x}^{(\infty)}$ non s $\frac{\mathbf{x}^{(k)}}{k} = P\mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^{(\infty)}}{k}$ e la so	+ q oddisfa oddisfa oddisfa oddisfa oddisfa oddisfa	in l'equipe de la l'e	di A	ogni	= Pr	tta de	+ q allo 4.2) l'equelle veel veel veel veel veel veel veel	ranc	on c'è verga e g(y	sper a \mathbf{x}	$\mathbf{x} + \mathbf{c}$
Ta eto	x(°°)	FIN Eerat	x (ivo (4	one (4.2)	equation in discrete in the second second in the second s	azio n x Col riso gen	N.8	e la : "so ERC	lim k→∞ u u oddis	(Px ione fare last	x di ucces 'equa	Si di	= b e {x e x =	$P(\mathbf{x}^{(\infty)})$ non s $e^{(k)}\}_{k=0}$ $e^{(k)}$	ddisfa	a l'eque	di A	ne x dal 1 re pur Tive	= Pr	tta dalla s	+ q d d d d d d d d d d d d d d d d d d	ra no	on c'è verga e g(y	sper a x = P:	e x ⁽¹
J me	x(°°)	FIN Eerat	x (Sico () izio	one (4.2)	equation in discrete in the second second in the second s	azio n x Col riso gen	N.8	e la : "so ERC	lim k→∞ u u oddis	(Px ione fare last	x di ucces 'equa	Si di	= b e {x e x =	$P\mathbf{x}^{(\infty)}$ non s $\frac{\mathbf{x}^{(k)}}{k} = P\mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^{(\infty)}}{k}$ e la so	ddisfa	a l'eque	di A	ne x dal 1 re pur Tive	= Pr	tta dalla s	+ q d d d d d d d d d d d d d d d d d d	ra no	on c'è verga e g(y	sper a x = P:	e x ⁽¹

Dim:

Dimostriamo soltanto che se $\rho(P) < 1$ allora il metodo è convergente. Dobbiamo dimostrare

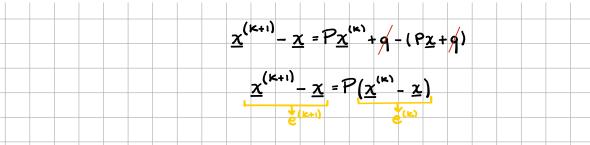
che la successione (4.2) converge alla soluzione \mathbf{x} di $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ indipendentemente dalla scelta del vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$. Poiché il metodo è consistente per ipotesi, vale l'equazione

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x} + \mathbf{q}.\tag{4.3}$$

Inoltre, ovviamente, vale anche l'equazione del metodo, cioè

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q} \text{ per ogni } k = 0, 1, 2, \dots$$
 (4.4)

Sottraendo membro a membro la (4.4) e la (4.3) si ottiene l'equazione dell'errore



$$\mathbf{e}^{(k+1)} = P\mathbf{e}^{(k)} \text{ per ogni } k = 0, 1, 2, \dots$$
 (4.5)

dove $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$ è l'errore al passo k. Sviluppando per ricorrenza la (4.5) si ottiene

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = P\mathbf{e}^{(k)} = P^2\mathbf{e}^{(k-1)} = P^3\mathbf{e}^{(k-2)} = \ldots = P^{k+1}\mathbf{e}^{(0)} \ \text{per ogni} \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

da cui

$$\mathbf{e}^{(k)} = P^k \mathbf{e}^{(0)} \text{ per ogni } k = 0, 1, 2, \dots$$
 (4.6)

Siccome stiamo assumendo che $\rho(P) < 1$, \longrightarrow ci dice che $P^k \to O$. Dalla (4.6) si deduce quindi che $\mathbf{e}^{(k)} \to \mathbf{0}^{17}$ cioè $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$.

Corollario 4.1 (condizione sufficiente di convergenza) Supponiamo che il metodo (4.2) sia consistente con (4.1). Se esiste una norma matriciale indotta \parallel . \parallel tale che $\parallel P \parallel < 1$ allora il metodo è convergente.

Poiché $\rho(P) \leq \|P\|$ per il Teorema 3.9, la condizione $\|P\| < 1$ implica che $\rho(P) < 1$ e dunque il metodo è convergente per il Teorema Precedente

Corollario 4.2 (condizioni necessarie di convergenza). Supponiamo che il metodo * † sia consistente con Ax=b

- Se $|\operatorname{traccia}(P)| \ge n$ allora il metodo non è convergente.
- $Se |\det(P)| \ge 1$ allora il metodo non è convergente.

Quindi le condizioni $|\operatorname{traccia}(P)| < n$ e $|\det(P)| < 1$ sono necessarie per la convergenza del <u>metodo</u> *

Dim:

• Se $|\operatorname{traccia}(P)| \ge n$ allora esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1 . Infatti, se tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di P fossero di modulo < 1 allora avremmo

$$|\operatorname{traccia}(P)| = |\lambda_1 + \ldots + \lambda_n| \le |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| < n.$$

