2 Luglio 2018

Esame scritto di Geometria (lettera P-Z, Prof. Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$V = Span\{(1, 1, -1, -1),\ (-1, -3, 1, 4),\ (2, 0, -2, 1),\ (5, 1, -5, 1)\}.$$

Si estragga una base di V dall'insieme dei generatori dati, e si esprimano i generatori rimasti come combinazione lineare dei vettori della base. Sia

$$U = Span\{(-1, -3, -3, 2), (1, 1, 1, 0)\}.$$

Si trovino tutti gli eventuali vettori u, v tali che $(2, 1, 1, 0) = u + v$ con $u \in U$ e $v \in V$. Si faccia lo stesso per $(2, 1, -1, 0) = u + v$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$T(1, 1, 0) = (1, 0, 0, -1),\ T(0, 1, 1) = (0, 1, -1, 0),\ T(1, 0, 1) = (-1, -1, 1, 1).$$

Si spieghi perchè T è ben definita. Si determini la matrice di T rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo e una dell'immagine di T. Si dica se T è iniettiva e se essa è suriettiva.

3) Nello spazio euclideo si scrivano un'equazione cartesiana e un'equazione parametrica del piano α passante per i punti $P = (1, 2, 2), Q = (1, 2, 1), R = (2, 1, 2)$. Si calcoli l'area del triangolo PQR. Si calcoli l'angolo tra i segmenti PQ e PR. Si calcolino le coordinate di tutti i punti T tale che il segmento PT è parallelo alla retta $x = 2y = z$ e la distanza di T da α è 1.

4) Calcolare gli autovalori della matrice

$$M = \begin{pmatrix} \pi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & \pi \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice M è diagonalizzabile. Si calcoli una base ortonormale di ciascun autospazio. Si scriva la matrice della proiezione ortogonale su ciascun autospazio, e la decomposizione spettrale di M.