VELOCITÀ DI CONVERGENZA

Consideriamo il metodo (4.2) per risolvere il sistema $Ax=b$ e supponiamo che esso sia convergente (cioè $\mathbf{x} = P\mathbf{x} + \mathbf{q}$ e $\rho(P) < 1$).

N.B. (Ricorda):

Fissiamo una qualsiasi norma vettoriale $\|\cdot\|$. Per quasi tutti i vettori $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, l'errore $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$ commesso dal metodo ✳ ↑ soddisfa

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \approx Ck^m\rho(P)^k$$

per ogni k abbastanza grande (in realtà nella pratica anche per k abbastanza piccolo), dove $0 \leq m \leq n-1$ è un intero che dipende solo da P e C è una costante indipendente da k.

$m=0$ quando P è diagonalizzabile

CONCLUSIONE ⟶ la convergenza delle successioni $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots$ generate da un metodo della forma (4.2) risulta tanto più veloce quanto più $\rho(P)$ è piccolo. Sulla base di questo fatto, diamo la seguente definizione.

Definizione ⟶ Dati due metodi α e β della forma (4.2) per risolvere (4.1), entrambi convergenti, diremo che α *converge più velocemente di* β *se* $\rho(P_\alpha) < \rho(P_\beta)$, dove P_α e P_β indicano rispettivamente la matrice d'iterazione di α e quella di β.

CRITERIO DI ARRESTO DEL RESIDUO

Consideriamo il metodo ✳ ↑ per risolvere il sistema $Ax=b$ La successione di vettori $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots$ generata dal metodo, anche quando risulta convergente alla soluzione $\mathbf{x}$ del sistema (4.1), deve essere comunque arrestata prima o poi

Il criterio di arresto più utilizzato è quello del residuo: si sceglie una norma vettoriale $\|\cdot\|$ (tipicamente $\|\cdot\|_1$ oppure $\|\cdot\|_2$ oppure $\|\cdot\|_\infty$)

e si arresta la successione al primo vettore $\mathbf{x}^{(K)}$ *che soddisfa la condizione*

$$\boxed{\frac{\|\mathbf{r}^{(K)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \varepsilon,}$$

dove $\mathbf{r}^{(K)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(K)}$ è il residuo del sistema (4.1) relativo a $\mathbf{x}^{(K)}$ e $\varepsilon > 0$ è una soglia di precisione prefissata.

⟶ La condizione impone che l'errore relativo $\|A\mathbf{x}^{(K)} - \mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\|$ commesso approssimando $\mathbf{b}$ con $A\mathbf{x}^{(K)}$ sia $\leq \varepsilon$. In tal modo, avremo che l'errore relativo sulla soluzione soddisfa

$$\begin{aligned}
\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(K)}\|}{\|\mathbf{x}\|} &= \frac{\|x^{(K)} - A^{-1}b\|}{\|A^{-1}\mathbf{b}\|} = \frac{\|A^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(K)})\|}{\|A^{-1}\mathbf{b}\|} = \frac{\|A^{-1}\mathbf{r}^{(K)}\|}{\|A^{-1}\mathbf{b}\|} \\
&\leq \frac{\|A^{-1}\|\,\|\mathbf{r}^{(K)}\|}{\|A^{-1}\mathbf{b}\|} \overset{*}{=} \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|\mathbf{r}^{(K)}\|}{\|A\|\,\|A^{-1}\mathbf{b}\|} \\
&\leq \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|\mathbf{r}^{(K)}\|}{\|\underbrace{AA^{-1}}_{I}\mathbf{b}\|} = \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|\mathbf{r}^{(K)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \\
&\leq \mu(A)\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

$*$ $\|v\| = \|-v\|$ $\forall v \in \mathbb{C}^n$

PER LA PROPRIETÀ DI OMOGENITÀ DELLA NORMA dove $\mu(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ si chiama numero di condizionamento della matrice A in norma $\| \cdot \|$.