MATRICI DEFINITE POSITIVE

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice definita positiva se $\underbrace{\mathrm{Re}(\mathbf{x}^* A\mathbf{x}) > 0}_{\text{PARTE REALE È POSITIVA}}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

<u>OSS:</u> $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ e $\forall x \in \mathbb{C}^m$

$$\mathrm{Re}(\mathbf{x}^* A\mathbf{x}) = \boxed{\frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}}{2}} = \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x} + (\mathbf{x}^* A\mathbf{x})^*}{2} = \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x} + \mathbf{x}^* A^*\mathbf{x}}{2} = \mathbf{x}^*\Big(\frac{A+A^*}{2}\Big)\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\mathrm{Re}(A)\mathbf{x},$$

PARTE REALE $= \dfrac{\text{n.complesso} + \text{coniugato n.complesso}}{2} = \dfrac{a + i\cancel{b} + a - i\cancel{b}}{2} = a$ (2a)

dove

$$\mathrm{Re}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A+A^*}{2}, \qquad \mathrm{Im}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A-A^*}{2\mathrm{i}}, \qquad A = \mathrm{Re}(A) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(A).$$

Sia la parte reale $\mathrm{Re}(A)$ che la parte immaginaria $\mathrm{Im}(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sono matrici hermitiane.

↳ DA DIMOSTRARE

<u>CONSEGUENZA DELL'OSSERVAZIONE PRECEDENTE:</u>

$\forall A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ e $\forall x \in \mathbb{C}^m$ $\underline{x}^* \mathrm{Re}(A)\, \underline{x} \in \mathbb{R}$ essendo $\underline{x}^* \mathrm{Re}(A)\, \underline{x} = \mathrm{Re}(\underline{x}^* A\, \underline{x})$

PREPOSIZIONE → A è definita positiva $\iff$ $\mathrm{Re}(A)$ è definita positiva.

<u>DIM:</u>

$$\begin{aligned} A \text{ è definita positiva} &\iff \mathrm{Re}(\mathbf{x}^* A\mathbf{x}) > 0 \text{ per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \mathbf{x}^*\mathrm{Re}(A)\mathbf{x} > 0 \text{ per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \mathrm{Re}(\mathbf{x}^*\mathrm{Re}(A)\mathbf{x}) > 0 \text{ per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \mathrm{Re}(A) \text{ è definita positiva.} \end{aligned}$$

PREPOSIZIONE → Ogni matrice definita positiva $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è invertibile perché i suoi autovalori hanno parte reale positiva (e quindi sono diversi da 0).

<u>DIM:</u> Sia $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ definita positiva. Mi basta dimostrare che gli autovalori di A hanno parte reale positiva perchè questo mi dice che nessuno di essi è 0 e dunque A risulta automaticamente invertibile

se λ è un autovalore di A e indichiamo con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ un corrispondente autovettore, allora

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \implies \mathbf{x}^* A\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{x} = \lambda\sum_{i=1}^n \overline{x_i}x_i = \lambda\sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

$$\implies \lambda = \frac{\mathbf{x}^* A\mathbf{x}}{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \implies \mathrm{Re}(\lambda) = \frac{\mathrm{Re}(\mathbf{x}^* A\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} > 0.$$

[FINE DIMOSTRAZIONE]

Teorema 3.1. *Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice hermitiana e siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ le sue sottomatrici principali di testa:*

$$\boxed{A_1 = [a_{11}], \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad A_n = A.}$$

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- *A è definita positiva;*
- *$\mathbf{x}^* A\mathbf{x} > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$;*
- *gli autovalori di A sono reali e positivi;*
- $\boxed{\det(A_k) > 0 \text{ per ogni } k = 1, \dots, n.}$

POLINOMI DI MATRICI

Se $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_m\lambda^m$ è un polinomio e $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice, definiamo la matrice

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_m A^m.$$

ESEMPIO: se $p(\lambda) = 1 - 2\lambda^2 + \lambda^3$ allora $p(A) = I - 2A^2 + A^3$.

TEOREMA

Se $p(\lambda)$ è un polinomio e $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, allora gli autovalori della matrice $p(A)$ sono $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$.

DIM: Dimostriamo il teorema soltanto in tre casi.

- $\boxed{\textit{Caso 1.}}$ Il polinomio $p(\lambda) = a_0$ è costante.

$$p(A) = a_0 I = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

i suoi autovalori sono $a_0, \dots, a_0$ (ripetuto n volte). Dunque gli autovalori di $p(A)$ sono $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$ e la tesi del teorema vale.

- $\boxed{\textit{Caso 2.}}$ Il polinomio $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$ ha grado 1. In tal caso, il polinomio caratteristico di $p(A)$ e quello di A sono legati dalla seguente relazione: per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$C_{p(A)}(\lambda) = \det(\lambda I - p(A)) = \det(\lambda I - (a_0 I + a_1 A)) = \det((\lambda - a_0)I - a_1 A) = \underbrace{\det\Big(a_1\Big(\frac{\lambda - a_0}{a_1} I - A\Big)\Big)}_{\det(\alpha B) = \alpha^n \det(B)}$$

$$= a_1^n \det\Big(\frac{\lambda - a_0}{a_1} I - A\Big) = a_1^n C_A\Big(\frac{\lambda - a_0}{a_1}\Big).$$

Dunque gli autovalori di $p(A)$ sono

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \ C_{p(A)}(\lambda) = 0\} = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ C_A\Big(\frac{\lambda - a_0}{a_1}\Big) = 0\Big\} = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \frac{\lambda - a_0}{a_1} = \lambda_1, \dots, \lambda_n\Big\}$$

$$= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda = a_0 + a_1\lambda_1, \dots, a_0 + a_1\lambda_n\Big\} = \{a_0 + a_1\lambda_1, \dots, a_0 + a_1\lambda_n\}$$

$$= \{p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)\}.$$

$\boxed{\textit{Caso 3.}}$ La matrice A è diagonalizzabile. In tal caso, esistono una matrice invertibile X e una matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (avente sulla diagonale gli autovalori di A) tali che

$$A = XDX^{-1},$$
$$A^2 = XDX^{-1}XDX^{-1} = XD^2X^{-1},$$
$$A^3 = XDX^{-1}XDX^{-1}XDX^{-1} = XD^3X^{-1},$$
$$A^k = XD^kX^{-1} \quad \forall\, k \geq 0$$

fissa~~to~~mo un Generico polinomio $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_m\lambda^m$, si ha

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_m A^m$$
$$= a_0 X I X^{-1} + a_1 X D X^{-1} + a_2 X D^2 X^{-1} + \ldots + a_m X D^m X^{-1}$$
$$= X\underbrace{(a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_m D^m)}_{P(D)}X^{-1}$$
$$= X \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & & \\ & p(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\lambda_n) \end{bmatrix} X^{-1}$$

ci dicono che $p(A)$ è diagonalizzabile con autovalori $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$ (e con autovettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ uguali a quelli di A, dati dalle colonne di X).