

Sistemi Complessi

Ilaria Battiston

Anno scolastico 2018-2019

Contents

1	Automi Cellulari	3
1.1	Notazione	3
1.2	Distanza	3
1.3	Notazione	3
1.4	Proposizione	3
1.5	Definizione formale	3

1 Automi Cellulari

Un automa cellulare è un sistema dinamico discreto costituito da una rete regolare di automi a stati finiti, che costituiscono le celle. Tramite aggiornamenti e regole locali esse cambiano simultaneamente i loro stati, sulla base dei loro vicini.

Il processo di cambiamento di stato viene eseguito iterativamente nel tempo, quindi gli istanti di tempo assumono valori discreti.

Le precedenti caratteristiche si possono riassumere definendo gli automi cellulari come sistemi discreti, omogenei (uniformi) negli aggiornamenti e locali nelle loro interazioni.

L'utilizzo di AC deriva dal fatto che molti processi in natura sono governati da regole che rispettano questi principi, come la fluidodinamica (collisioni tra particelle).

1.1 Notazione

$$A^{\mathbb{Z}} = \{x | x : \mathbb{Z} \rightarrow A\}$$

$$f : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$$

Richiediamo uno spazio delle configurazioni infinito $A^{\mathbb{Z}}$ e non, ad esempio, A^n altrimenti f sarebbe ciclica (o comunque limitata), e non potrebbero verificarsi proprietà come l'*instabilità*.

1.2 Distanza

Una *distanza*, tra due elementi dell'insieme X , è una qualunque funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ad esempio:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ \frac{1}{2^n}, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Dove:

$$n = \min\{i \in \mathbb{N} | x_i \neq y_i \vee x_{-i} \neq y_{-i}\}$$

i è la larghezza della finestra che allarghiamo simmetricamente alla ricerca del primo valore diverso.

1.3 Notazione

Sia $x \in A^{\mathbb{Z}}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$:

$$x[a, b] = x_a, x_{a+1}, \dots, x_b \in A^{b-a+1}$$

1.4 Proposizione

Vicinanza. $\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{N} :$

$$d(x, y) < \frac{1}{2^n} \iff x[-n, n] = y[-n, n] \quad (2)$$

1.5 Definizione formale

Un automa cellulare unidimensionale è una tripla $\langle A, r, f \rangle$, dove:

- A alfabeto
- $r \in \mathbb{N}$ raggio
- $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ regola locale