Sistemi Complessi

Ilaria Battiston

Anno scolastico 2018-2019

Contents

1 Automi Cellulari **3**
1.1 Distanza 3
1.2 Notazione 4
1.3 Vicinanza 4

2 Proprietà delle funzioni **4**
2.1 Grafo di De Bruijn associato a un automa 4

1 Automi Cellulari

Un automa cellulare è un sistema dinamico discreto costituito da una rete regolare di automi a stati finiti, che costituiscono le celle. Tramite aggiornamenti e regole locali esse cambiano simultaneamente i loro stati, sulla base dei loro vicini.

Formalmente, un automa cellulare unidimensionale è una tripla $< A, r, f >$, dove:

- A corrisponde all'alfabeto;
- $r \in \mathbb{N}$ è il raggio;
- $f : A^{2r+1} \to A$ è la regola locale.

$$A^{\mathbb{Z}} = \{x | x : \mathbb{Z} \to A\} \qquad f : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$$

Si ha uno spazio delle configurazioni infinito $A^{\mathbb{Z}}$ e non, ad esempio, A^n altrimenti f sarebbe ciclica (o comunque limitata), e non potrebbero verificarsi proprietà come l'*instabilità*.

Sono definiti automi perché le celle possono essere rappresentate come nodi collegati in un grafo (ciclico), tramite un array infinito con un simbolo assegnato a ogni posizione. La funzione di transizione f è equivalente a δ nei FSA, dove lo stato Q è A e l'alfabeto Σ è A^{2r} (r dipendenze).

Gli automi cellulari sono universali, perché riescono a simulare una macchina di Turing universale (nastro semi-infinito, stati infiniti) tramite le regole locali di aggiornamento.

Il processo di cambiamento di stato viene eseguito iterativamamente nel tempo, quindi gli istanti di tempo assumono valori discreti.

Le precedenti caratteristiche si possono riassumere definendo gli automi cellulari come sistemi discreti, omogenei (uniformi) negli aggiornamenti e locali nelle loro interazioni.

L'utilizzo di AC deriva dal fatto che molti processi in natura sono modelli matematici di calcolo parallelo governati da regole che rispettano questi principi, come la fluidodinamica (collisioni tra particelle).

1.1 Distanza

Una *distanza*, tra due elementi dell'insieme X, è una qualunque funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tale che

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ad esempio:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ \frac{1}{2^n}, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

Dove:

$$n = min\{i \in \mathbb{N} | x_i \neq y_i \vee x_{-i} \neq y_{-i}\}$$

i è la larghezza della finestra che allarghiamo simmetricamente alla ricerca del primo valore diverso.

1.2 Notazione

Sia $x \in A^2, a, b \in \mathbb{Z}, a \leq b$:

$$x[a,b] = x_a, x_{a+1}, ..x_b \in A^{b-a+1}$$

1.3 Vicinanza

$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{N}$:
$d(x,y) < \frac{1}{2^n} \iff x[-n,n] = y[-n,n]$

2 Proprietà delle funzioni

Gli automi cellulari devono simulare fenomeni con le seguenti proprietà:

- Iniettività, che implica la reversibilità delle azioni insieme alla suriettività e garantisce la distinzione delle orbite (non collassano);
- Suriettività, che garantisce la raggiungibilità (o la vicinanza, con un errore arbitrariamente piccolo) degli stati;
- Funzione stabile o instabile (verso il caos)

Gli automi cellulari iniettivi sono necessariamente anche suriettivi, quindi l'iniettività è sufficiente per assicurare l'invertibilità. La funzione inversa F^{-1} è anch'essa un automa cellulare (Hedlund), perciò rispetta anche la reversibilità (estensione dell'invertibilità).

Si ricorda che una funzione F è suriettiva se e solo se $\forall\ y \in A^Z\ \exists\ x \in A^Z : y = F(X)$, cioè ogni elemento ha almeno un'immagine.

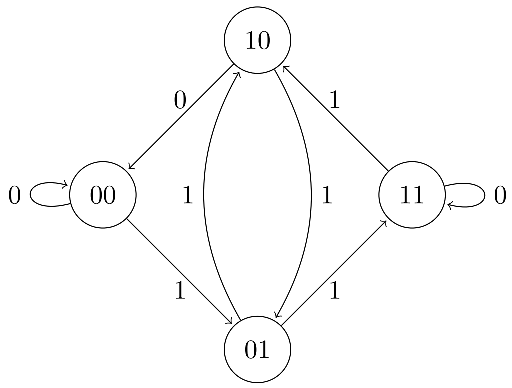
La regola 110 non è suriettiva: il numero delle triplette che finiscono in 0 non è uguale a quelle che finiscono in 1, pertanto è sbilanciata.

2.1 Grafo di De Bruijn associato a un automa

Si ha un automa $A =< A, r, f >$ e un grafo $G =< V, E >$ con $V = A^{2r}$. Siano u, v parole di lunghezza $2r$, $(u,v) \in E$ se $f(uv_{2r})$ è la label di (u,v).

$f(uv_{2r})$ quindi consiste in tutti i simboli di u a cui è attaccato l'ultimo di v.

Esempio: $< \{0,1\}, r = 1, f_{110} >$ con $V = \{0,1\}^2$
Ci sono 4 stati etichettati con 00, 01, 10, 11. Tra 00 e 01 c'è una parte uguale togliendo il primo simbolo di u e l'ultimo di v, quindi $f(001)$ ha un arco etichettato con 1 (ultimo simbolo).
01 e 11 ha $f(011)$ e arco 1, e così via (inserendo anche i cappi).



Questo grafo rappresenta un oggetto finito, e una stringa (configurazione) è un cammino infinito sui vertici.