Trattamento e Codifica di Dati Multimediali

Ilaria Battiston

Anno scolastico 2018-2019

Contents

1 Multimedia

Multimedia: utilizzo di diversi mezzi che concorrono insieme, solitamente in maniera interattiva, per trasferire informazione. I media hanno caratteristiche e standard differenti per essere catturati, immagazzinati, manipolati e trasmessi.

I segnali devono essere trattati tenendo conto del **sistema percettivo**. La tecnologia multimediale cerca di simulare il sistema percettivo umano, minimizzando il quantitativo di dati da processare per ottenere un'informazione.

Il trattamento dei media si basa sull'analisi multimodale: essa permette di trarre conclusioni su contenuti di diversi tipi e di individuare stimoli legati a segnali. Per questi scopi devono essere introdotte misure oggettive e soggettive.

Un altro aspetto del multimodale è l'analisi da segnali che provengono da diverse fonti, come i dati fisiologici (ottenuti tramite sensori).

2 Segnali

I segnali possono essere classificati in base a **dominio** e **codominio**.

Dominio:

- $D = R$, segnale a tempo (spazio) continuo $x(t)$, $t \in R$ (possono assumere tutti i possibili valori reali);
- $D = K$, segnale a tempo discreto, $x(t)$, $t \in K$ con K numerabile, $K \in \{\dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots\}$. Il numero di valori t può essere comunque infinito.

Codominio:

- $C = R$, segnale continuo nelle ampiezze;
- $C = K$, segnale discreto nelle ampiezze con K numerabile e tipicamente finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

La variabile dipendente è definita sul dominio, quella indipendente sul codominio. I segnali possono essere reali o complessi (parte reale e immaginaria oppure modulo e fase, strettamente in relazione tra loro).

Le ampiezze tipicamente sono un insieme finito di valori, quindi al crescere di t (variabile indipendente, infiniti valori) il **range** di $s(t)$ (variabile dipendente) sarà limitato, anche se composto da infiniti valori. Il **passo** (distanza tra un campione e il successivo) dev'essere costante.

La quantizzazione è uno step intermedio della trasformazione tra segnale analogico e digitale, cioè la divisione del tempo (spazio) in passi e l'approssimazione nel dominio. La definizione del passo deve preservare la qualità del segnale, e va stabilita una finestra temporale da considerare.

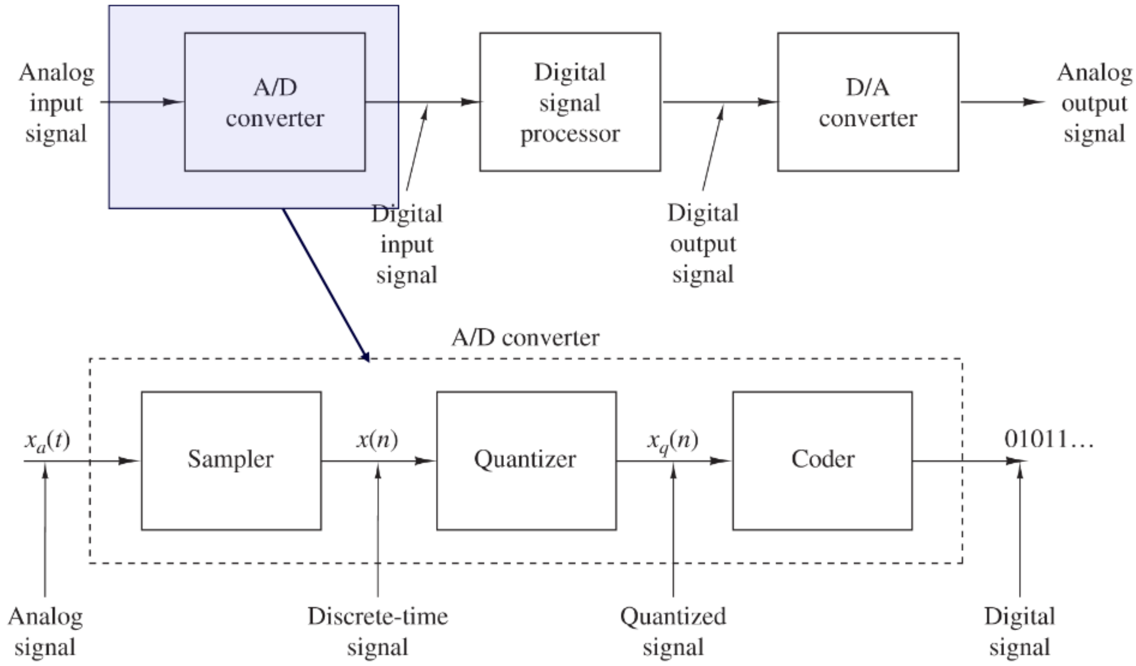
Le fasi della rappresentazione da analogica a digitale sono **campionamento**, **quantizzazione** e **codifica**.

Bisogna tenere conto di alcuni aspetti delicati, come i limiti di memoria, banda e tempi di processing: questi sono fattori importanti per determinare passo e finestra temporale. I valori cambiano anche a seconda del campo di analisi, per ottenere un'adeguata quantità di informazioni.

3 Multimedia processing

Per un efficace trattamento dei segnali multimediali è necessario minimizzare il quantitativo di dati processati, individuando solo quelli strettamente indispensabili. Oltre alla conversione e la compressione ci sono fasi come la memorizzazione e la trasmissione.

L'output è generalmente diverso dall'input: il segnale analogico x_a passa attraverso un campionatore, da cui esce come x_n (non più analogico). L'output $x_q(n)$ contiene un insieme discreto di valori (sottoinsieme del dominio) che poi verrà trasformato in segnale quantizzato $x_q(n)$ e poi in bit.



Il valore di $x(n)$ è il valore della funzione analogica preso nT volte, dove T è il passo di campionamento. La frequenza è impossibile da ottenere senza la dimensione del passo, ed è legata a quanto velocemente varia il segnale.

L'obiettivo è capire se esiste una soglia in grado di stabilire se le informazioni vengono perse in base alla dimensione del passo. Avere un'alta **frequenza di campionamento** significa avere una buona qualità ma un volume elevato dei dati, mentre una bassa frequenza produce fenomeni di aliasing (approssimazione a costante).

Un segnale qualsiasi è rappresentabile come integrali di infiniti termini (seni e coseni) con peso e ampiezza diversi. Tra essi bisogna preservare quello con frequenza massima, per evitare sovrapposizioni e cambiamenti. La scomposizione del segnale è effettuata tramite **analisi di Fourier**.

Il **campionamento** con frequenza massima consente inoltre di riconvertire il segnale digitale in analogico senza perdita di informazione, perché permette la conservazione delle frequenze.
La **quantizzazione**, invece, è un'operazione che comporta sempre perdite, quindi non è reversibile.

Se il numero di frequenze tende a infinito, com'è possibile individuare la massima? In questo caso si introduce il **filtering**: l'eliminazione dei valori esclusi da una certa soglia (superiore o inferiore). Un altro motivo del **filtro anti-aliasing** è l'eliminazione delle frequenze troppo basse.

Un esempio di elaborazione numerica è il filtraggio, l'eliminazione delle frequenze fuori dal range accettabile (filtro passa-basso o alto). I sistemi sono combinazioni di più operatori lineari, quindi nonostante complessi sono scomponibili a causa delle loro proprietà.

4 Segnali

Un segnale rappresenta il comportamento di grandezze fisiche in funzione di una o più variabili indipendenti. Sono monodimensionali se rappresentati da una sola variabile, per esempio il suono (continuo). I dati EEG sono multidimensionali in variazione al tempo, agli elettrodi e ai soggetti.

Le immagini in bianco e nero sono segnali bidimensionali (coordinate spaziali) e monocanale (il grigio), mentre quelle a colori hanno 3 segnali dimensionali RGB. Il campionamento corrisponde al numero di pixel, e la quantizzazione è la profondità del colore (quanti bit per la codifica). Aumentando il numero di livelli, aumenta la capacità di rappresentare l'informazione.

Se la variabile indipendente continua viene discretizzata è stato effettuato un campionamento, in cui è necessario conoscere la distanza tra i campioni (digitali).

Il valore assunto dal segnale si definisce **ampiezza** (dipendente, codominio) mentre l'asse delle ascisse è il **dominio** (tempo o spazio). Si possono introdurre grandezze statistiche come media e varianza, indicate in modo diverso a seconda del tipo di segnale.

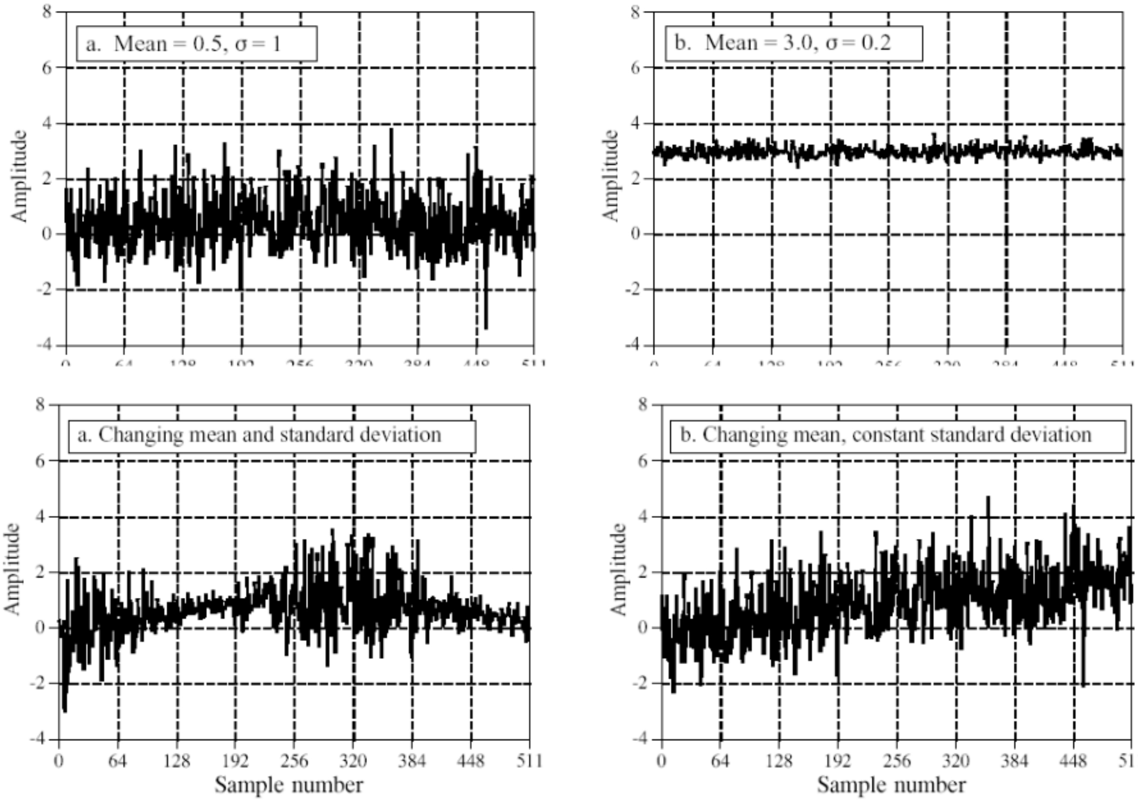
- Continuo:
  - $\mu = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt$;
  - $\mu = \frac{1}{T_1 - T_0} \int_{T_0}^{T_1} x(t)dt$;
- Discreto:
  - $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$.

Il segnale digitale ha solamente una casistica di μ perché non tende mai a infinito, e il livello dell'ampiezza è diverso. Se un segnale varia, ha una componente continua DC (direct current, contributo a frequenza 0 e valore medio), e componenti AC a corrente alternata che variano in base a come il segnale fluttua intorno al valore medio.

Una forma d'onda ripetuta ha escursioni costanti, descritte da una grandezza chiamata ampiezza picco-picco A_{pp}. Il periodo è arbitrario.

Deviazione standard e varianza forniscono informazioni aggiuntive su quanto lontano (e con quale potenza) il segnale fluttua dal valore medio. Alla varianza è fortemente legata la potenza del rumore: un'alta varianza implica un forte rumore.
$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu)^2$

Se media e varianza di un segnale non cambiano nel tempo, esso è stazionario. Al contrario, se il segnale varia la media sarà diversa a seconda della finestra, e la media globale non dà informazioni.



La **periodicità** indica la ripetizione del segnale nel tempo, definito appunto in periodi. Non esistono segnali puramente periodici, ma si usano approssimazioni delle forme d'onda che assume il segnale. L'inversa del periodo è chiamata **frequenza fondamentale**: $f_0 = 1/T$.

4.1 Segnale sinusoidale

Un segnale sinusoidale è un seno o un coseno, monodimensionale in funzione del tempo o dello spazio.

$$A(T) = A_{med} + B \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

$$A_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt \qquad A_{pp} = A_{max} - A_{min} \qquad B = A_{pp}/2$$

Parametri importanti in questi casi sono **frequenza** e **fase**.

La frequenza si misura in Hertz, e rappresenta la rapidità con cui varia l'ampiezza in un intervallo temporale T. La pulsazione (intera variazione di ampiezza) è proporzionale alla frequenza, si ha che $\omega = 2\pi f$.

La fase segna l'alternarsi di positività o negatività del segnale, in particolare è significativa la fase iniziale φ_0.

$$P(t) = |x(t)|^2 \qquad \text{potenza istantanea}$$
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dt \qquad \text{energia: area di potenza istantanea}$$

Tanto più l'ampiezza si scosta dallo 0, più la potenza aumenta:

- Se $E_x < \infty$ il segnale ha energia finita;
- Quando $E_x = \infty$ si definisce la potenza media: $P_x = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt$.

Potenza media di un segnale periodico T: $P_x = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt$

Entrambi i valori hanno una componente continua (valore medio) calcolato come il limite dell'integrale o l'integrale (segnale periodico) di $x(t)$.

4.2 Decibel

Il **decibel** (dB) è un'unità di misura logaritmica (quindi non lineare), in cui lo scopo del logaritmo è visualizzare meglio grandi scale di valori e avvicinarsi alla percezione umana. La misura è quindi relativa e adimensionale.

$$deciBel = dB \longrightarrow 10\log_{10}\frac{P_1}{P_2} = 20\log_{10}\frac{A_1}{A_2}$$
$$Bel \longrightarrow \log_{10}\frac{P_1}{P_2} \qquad P = \text{potenza} \qquad A = \text{ampiezza} \qquad P \propto A^2$$

Le componenti della formula sono due pressioni, di cui il numeratore è la potenza del suono e il denominatore è la soglia minima di udibilità. La potenza è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, quindi trasformando in scala logaritmica essa diventa un fattore moltiplicativo. $6dB$ rappresentano un raddoppio dell'ampiezza.

4.3 Trasformazioni di segnali

Operazioni molto comuni sono la traslazione, il cambio di scala e l'inversione temporale.
Se il segnale è reale, è possibile ritardarlo ma non anticiparlo.

- Ritardo: fissato un tempo t_0, la traslazione trasforma il segnale $x(t)$ nel segnale $x(t - t_0)$;
- Anticipo: fissato un tempo t_0, la traslazione trasforma il segnale $x(t)$ nel segnale $x(t + t_0)$;
- Cambio di scala: dato un numero reale $a > 0$, trasformazione del segnale $f(t)$ in $f(at)$:
  - Se $a > 1$ si ottiene una compressione lineare;
  - Se $a < 1$ si ottiene un allungamento lineare;
- Inversione: trasforma il segnale $f(t)$ nel segnale $f(-t)$.

Un segnale si dice pari se $f(t) = f(-t)$, dispari se $f(t) = -f(-t)$: il coseno è una funzione pari, il seno è dispari.

4.4 Segnali continui

Gradino: usato per selezionare la parte positiva dei segnali che tendono a $\pm\infty$.
Si definisce un **gradino unitario** $u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Gradino traslato in t_0: definito quando la finestra di osservazione è finita, centrata rispetto a 0. Se il segnale è fuori dall'intervallo assume valore 0:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq t_0 \\ 0 & \text{se } t < t_0 \end{cases}$$

Impulso rettangolare unitario $rect(t)$:

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{se } |t| > 1/2 \end{cases}$$

Quest'ultima è una funzione che forma un rettangolo di area unitaria. Generalizzando, si ha un rettangolo di altezza A, base T e traslato in t_0 sostituendo nella formula unitaria t con $\frac{t-t_0}{T}$ e confrontandolo con $1/2$.

$$|t - t_0| \leq T/2 \begin{cases} \text{per } (t - t_0) > 0 & (t - t_0) \leq T/2 & t \leq t_0 + T/2 \\ \text{per } (t - t_0) < 0 & (t - t_0) \geq -T/2 & t \geq t_0 - T/2 \end{cases}$$

La moltiplicazione di un segnale per un rettangolo lo approssima con segmenti verticali o orizzontali a seconda dell'asse considerato. Media e varianza non sono le stesse rispetto alla funzione originale.

Funzione **delta di Dirac** $\delta(t)$: distribuzione con rettangolo di base infinitesima e altezza infinita che abbia l'area unitaria, con la larghezza che tende a 0 e di conseguenza l'altezza che tende a infinito.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Limite dell'impulso rettangolare di base Δ per $\Delta \to 0$, dove Δ è uno scalare sull'asse x:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \qquad \delta(t - x) = 0 \qquad \text{se } t \neq x$$

Viene introdotta per rappresentare fenomeni fisici di durata infinitesima (impulsi).

Il corrispondente di δ discreto nel dominio è la **delta di Kronecker** o impulso unitario, rappresentato con una freccia verticale di altezza (o peso) unitario. Questa funzione ha significative applicazioni nel trattamento dei segnali.

Si ha un impulso $A\delta(n - n_0)$ di ampiezza A e che occorre al tempo $n = n_0$.
Con $n - 2$, δ è in ritardo di 2 (se fosse + sarebbe anticipo).

Esistono anche l'analogo discreto della delta di Dirac e del gradino unitario:

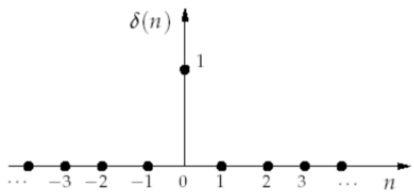
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \qquad u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

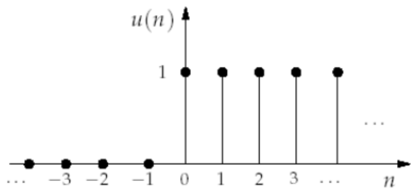
$x(n) \cdot \delta(n) = x(0)$

$f(n) \cdot \delta(n - n_0) = f(n_0)$

$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

Il gradino continuo, nel discreto diventa una successione di δ: $u(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta(n-i)$





5 Sequenze

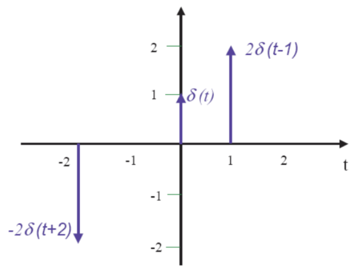
Le sequenze $x(n)$ sono formate da segnali a tempo discreto. Se essi sono quantizzati in ampiezza, si parla di segnale digitale.

Sequenza **causale**: $x(n) : n > 0$ (con numeri positivi).
Sequenza **anticausale**: $x(n) : n < 0$ (con numeri negativi).

Sequenza **pari**: $x(n) = x(-n)$ (coseno).
Sequenza **dispari**: $x(n) = -x(-n) \rightarrow x(0) = 0$ (seno).

Sequenza **periodica**: $x(n) = x(n+T)$
Sequenza **limitata**: $|x(n)| \leftarrow x_0 < \infty \quad \forall\, n$

Non è possibile tornare indietro nel tempo, quindi le sequenze considerate sono generalmente causali.



Nella figura, $\delta(n)$ rappresenta l'impulso unitario. Moltiplicando δ per un coefficiente k l'impulso avrà diversa lunghezza, o diversa direzione se k è negativo.
Un ritardo $t - t_0$ sposta l'impulso verso destra, un anticipo $t + t_0$ viceversa.

Se gli impulsi hanno un fattore moltiplicativo n, si definisce una funzione **rampa**: il segnale seguirà la diagonale.

6 Analisi di Fourier

L'analisi di Fourier decompone il segnale in costituenti sinusoidali di differenti frequenze. Il segnale non è più nel dominio tempo-spazio, ma delle **frequenze**: i dati sono gli stessi, cambia solo la rappresentazione.

Ogni funzione periodica e a quadrato sommabile può essere espressa come somma infinita e pesata di funzioni seno e coseno (combinazioni di funzioni armoniche).

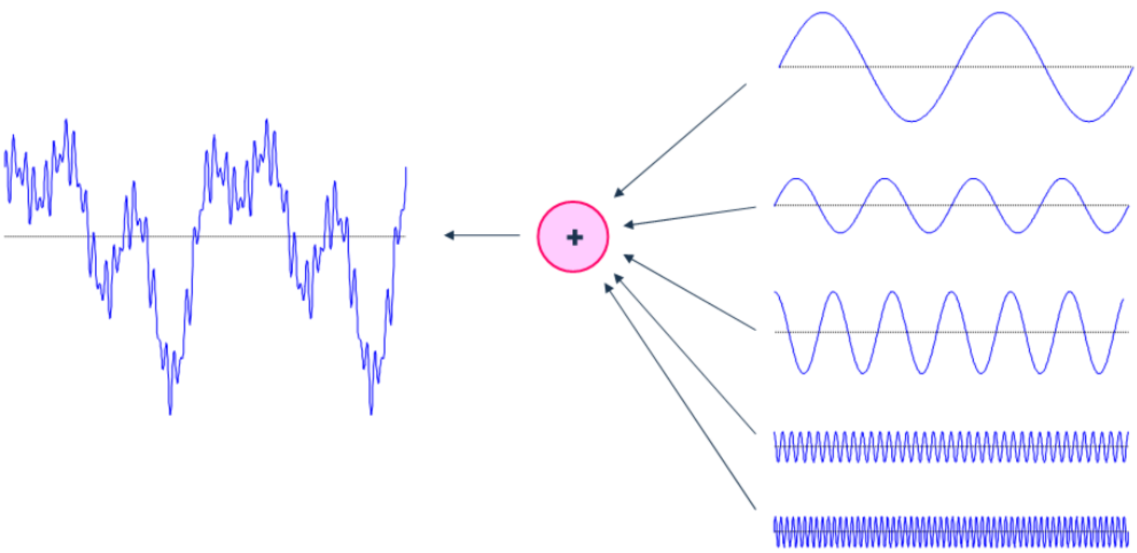
Si ricorda che una sequenza **periodica** è $x(n) = x(n+T)$. Una funzione **armonica** è una funzione periodica del tipo:

$$y = A\sin(\varpi x + \varphi) \qquad y = A\cos(\varpi x + \varphi)$$

Dove A è l'ampiezza, ϖ è la pulsazione, φ è la fase.
Si ha che $\varpi = 2\pi/T$ dove $1/T$ è la frequenza, e π è 180°.

Sviluppando i seni e i coseni si ha, con $a = A\sin(\varphi)$ e $b = A\cos(\varphi)$:
$y = A\sin(\varpi x + \varphi) = a\cos(\varpi x) + b\sin(\varpi x)$
$y = A\cos(\varpi x + \varphi) = b\cos(\varpi x) + a\sin(\varpi x)$

Le armoniche vengono combinate una per volta, avvicinandosi man mano alla funzione originaria.



6.1 Serie di Fourier

La serie di Fourier è una formula utile per approssimare la scomposizione. Rappresenta una funzione periodica mediante *combinazione lineare di funzioni sinusoidali.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kx\right)$$

$N \to$ periodo $\qquad (1/N) \to$ frequenza fondamentale $f_0 \qquad (1/N)k \to$ frequenze multiple kf_0

a_k e b_k sono numeri reali, k è un numero intero che funge da fattore moltiplicativo e N è l'ampiezza della parte di funzione che si ripete periodicamente (l'inverso è la frequenza fondamentale). x è la variabile indipendente.

Le frequenze (infinite), quindi, sono una parte fondamentale della formula. Con tempo $T = 1/f$ il dominio del tempo è t, e il dominio della frequenza è Hz. In altre parole, il segnale passa dal dominio spazio-tempo alle frequenze, con coppie frequenza-peso associate alla sinusoidale (ampia A).

Estendendo la formula con il concetto di pulsazione, si ha che una pulsazione è $\varpi_k = 2\pi f_k$, e di conseguenza:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 x) + b_k \sin(2\pi k f_0 x)$$

$$a_k = \frac{2}{N} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} f(x) \cos(2\pi k f_0 x) dx \qquad b_k = \frac{2}{N} \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} f(x) \sin(2\pi k f_0 x) dx$$

La variabile x e la funzione associata sono continue (periodiche), ma la variabile di frequenza è discreta (k intera), quindi dall'integrale si passa alla sommatoria.

Si ricorda che N è il periodo. Data la funzione $f(x)$ periodica, i coefficienti della serie sono **univocamente** determinati. I coefficienti sono i fattori moltiplicativi di seno e coseno, in relazione al tempo t.

Questo significa che esiste biunivocità, la trasformazione può essere effettuata da entrambi i versi senza perdere informazione.

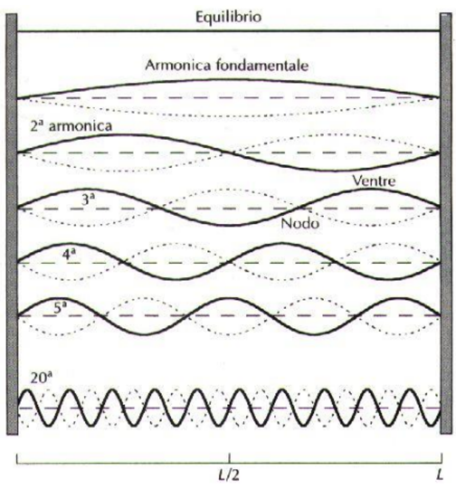
6.2 Fourier e i suoni

I suoni elementari hanno andamento sinusoidale, periodico e con estensione indefinita; la maggior parte dei suoni in natura sono però caratterizzati da forme d'onda diverse.

Un segnale si definisce **complesso** quando è formato da più funzioni sinusoidali combinate, invece che una sola.

Si può dimostrare che, fatte alcune ipotesi di regolarità sull'andamento della forma d'onda, un generico suono complesso può essere descritto come una *combinazione di suoni elementari* (armoniche).

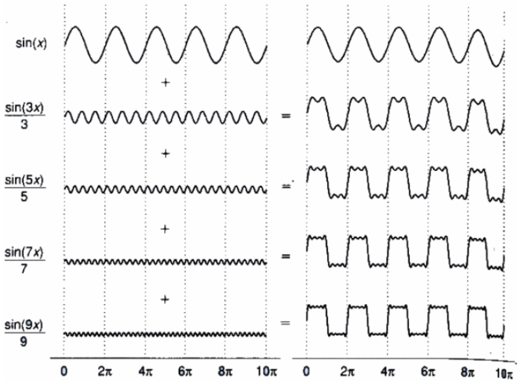
Le armoniche sono funzioni che, combinate fra loro, permettono di determinare il timbro degli strumenti musicali. Insieme costituiscono forme d'onda.



6.3 Onda quadra

L'onda quadra è un caso particolare in cui tutte le armoniche pari sono nulle, e l'onda quadra è data dalla forma delle componenti $F_0, 3F_0, 5F_0, \ldots$ cioè 200 Hz, 600 Hz, 1 Kz eccetera. Si ricorda che l'ampiezza di conseguenza è $1/3, 1/5, \ldots$ cioè la parte **dispari** della sommatoria.

Ognuna di queste componenti ha un'ampiezza diversa rispetto a quella dell'armonica fondamentale. La funzione è asimmetrica, e i termini pari sono appunto i coseni: ci sono solo seni non nulli.



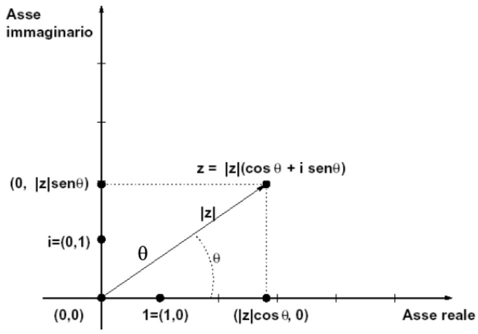
Esempio: un'onda quadra con periodo 5 ms può essere ottenuta sommando onde sinusoidali di opportuna frequenza, ampiezza e fase. Il contributo più rilevante è dato dalla prima sinusoide, si frequenza pari a quella dell'onda quadra (200 Hz, frequenza fondamentale F_0).

Per costruire l'onda quadra sono necessarie anche altre componenti elementari di frequenza maggiore, cioè tutte le armoniche multiple della frequenza F_0.

6.4 Numeri complessi e serie di Fourier

I numeri complessi sono rappresentabili su un piano cartesiano come l'intersezione tra numeri reali sull'asse x e numeri complessi sull'asse y. Ogni numero complesso ha quindi una parte **reale** a e una **immaginaria** b.

$$z = ai + b \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \pi$$



Forma polare:
$a = \pi \cos(\theta)$
$b = \pi \sin(\theta)$
$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Le coordinate polari corrispondono a quelle cartesiane (proiezione).

Applicando i numeri complessi alla serie di Fourier e quindi cambiando dominio, si possono usare gli esponenziali complessi e la formula di Eulero.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

Sia seno che coseno sono somme di due esponenziali complessi, con segno + e − rispettivamente. Il picco della frequenza è intero per il coseno, immaginario per il seno.

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \qquad \sin\theta = -\frac{j}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

La parte del seno è immaginaria, il coseno è reale. Le formule sono le stesse, ma applicate al sovrainsieme dei complessi $\mathbb{C}$ (j e i sono indicatori convenzionali della parte immaginaria).

Mettendo a sistema seno e coseno ottenuti in questo modo, si può estendere la serie di Fourier rappresentando le somme di contributi nello spazio degli esponenziali complessi.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi f_k x) + b_k \sin(2\pi f_k x)$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_k e^{j(2\pi f_k x)}$$

Si ricorda che $\theta = 2\pi f_k$. Quando θ cambia segno, l'angolo si sposta. Essendo il coseno pari, questo non cambia; il seno è dispari quindi è l'opposto.

Per passare dalle variabili discrete alle continue, si usa il coefficiente R_k che raccoglie le due sommatorie (fino a infinito da entrambi i versi) e si applica l'integrale.

$$R_k = \int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} f(x) e^{-j(2\pi f_k x)} dx$$

Il coefficiente $\frac{A_n}{2}$ (altezza del segnale sull'asse y) è dato appunto dalla divisione del coefficiente R in 2 parti, seno e coseno: l'ampiezza sarà la metà, e ogni ampiezza viene sommata insieme alle funzioni. C'è corrispondenza biunivoca fra dominio temporale e dominio delle frequenze. I seni hanno solo la parte complessa.

6.5 Trasformata di Fourier di funzioni continue

Per passare dalle funzioni periodiche a quelle reali, la sommatoria diventa un integrale. La trasformata di Fourier serve per rapppresentare le funzioni continue come sinusoidi.

Ogni funzione continua $f(x)$ anche se non periodica (purché abbia area finita) può essere espressa come *integrale di sinusoidi complesse opportunamente pesate*. L'antitrasformata ha dominio spaziale (temporale, diretto) mentre la trasformata ha dominio delle frequenze.

$$\text{Antitrasformata di Fourier: } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} dx$$

$$\text{Trasformata di Fourier: } F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$F(u)$ sostituisce il coefficiente discreto R_k, u è la frequenza. La trasformata di Fourier non si può applicare a tutte le funzioni, ma solo a quelle con quadrato sommabile e **continue**.

Dalla trasformata di Fourier, la funzione originiaria può essere ricostruita **senza perdita di informazione** attraverso il processo inverso: è possibile spostarsi dal dominio spaziale a quello delle frequenze e poi tornare indietro senza aver perso informazione.

Esiste un valore della trasformata (non più δ) per ogni funzione continua. Invertendo la funzione, quindi, se è a supporto finito non ci sarà 2δ.

Piuttosto che parte reale e immaginaria, si considerano modulo e fase, ricavabili direttamente. Il modulo indica la **potenza** del segnale, e la fase assicura la **biunivocità** della corrispondenza.

$$F(u) = F[f(x)] = \Re(u) + j\Im(u) = |F(u)| \, e^{j\phi(u)}$$

$$\text{Spettro: } |F(u)| = [\Re(u)^2 + \Im(u)^2]^{1/2}$$

$$\text{Fase: } \phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{\Im(u)}{\Re(u)}\right]$$

$$\text{Potenza (densità) spettrale: } |F(u)|^2 = \Re(u)^2 + \Im(u)^2$$

La trasformata di Fourier è un operatore scomponibile, quindi per passare da una dimensione a n semplicemente si applica n volte la formula. In altre parole, si scompone rispetto a una direzione la funzione.

6.6 Trasformata di Fourier di funzioni discrete

Il primo step è il campionamento: in questo caso si utilizza la sommatoria, ma la funzione continua è rappresentata da un numero discreto di campioni. La funzione è definita per campioni i, e la variabile indipendente x assume valore complesso $i\Delta x$.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx \Longrightarrow F(u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)e^{-j2\pi ui\Delta x}$$

Limitando la funzione spazialmente, il passo Δx per convenzione diventa $1/N$, e la sommatoria arriva fino a $N-1$ invece che infinito. $f(i)$ è la funzione campionata (a partire da $f(x)$ continua): la trasformata è **periodica**. Si ha $f(i) = f(x_0 + i\Delta x)$.

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(i)e^{-j2\pi u\frac{1}{N}i}$$

Per campionare le funzioni $f(x)$ e $F(u)$ si applicano le trasformate di Fourier discrete (DFT). Il segnale campionato è periodico, quindi la funzione inversa è comunque periodica con distanza $1/\Delta x$. Se il passo tende a 0, la funzione tende a infinito (senza repliche) e viceversa.

In altre parole, da una funzione campionata $\Delta x = 1/N$ si passa a una funzione continua e periodica di periodo N.

Il fattore $1/N$ davanti alla trasformata o all'antitrasformata è un fattore di normalizzazione per il dualismo fra spazio diretto e spazio trasformato. Di conseguenza, $\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$.

Un ragionamento analogo si applica per passare da una dimensione a due: la sommatoria è doppia e si divide per entrambi i fattori di normalizzazione. Entrambe le variabili rispettano la periodicità, cioè $F(u,v) = F(u+M, v+N)$ con $\Delta u = 1/M\Delta x$, $\Delta v = 1/N\Delta y$.

6.7 Elaborazione di immagini

Il segnale di un'immagine viene scomposto, come visto precedentemente, in modulo e fase. Il modulo raccoglie le frequenza di un'immagine, mentre la fase contiene l'informazione posizionale di ogni in un'immagine (le frequenze sono le stesse a prescindere dall'organizzazione spaziale).

L'ampiezza $\angle$ contiene informazioni relative alle posizione o meno delle strutture nell'immagine.

$$F(u,v) = |F(u,v)|\, e^{j\phi(u,v)}$$

I pixel possono assumere valore da 0 a 255, mappati in una *trasformata di Fourieri discreta.* Data la periodicità e la simmetria dello spettro rispetto all'origine, è possibile scegliere il periodo dello spettro centrato sull'origine $(0,0)$.

In questo modo, il picco rappresenta la **componente continua** (valore medio della funzione), e le frequenze crescono allontanandosi dal picco. Per convenzione lo spettro (in alto a sinistra) si trasla in modo da essere al centro, e le alte frequenze sono verso gli angoli esterni.

Il processo è reversibile: l'immagine, di solito sotto forma di segnale, se viene ricostruita dalla trasformata è identica all'originale.

Un operatore puntuale ha una corrispondenza biunivoca non indipendente dall'ambiente, cioè ogni pixel dell'immagine originale viene mappato nel modulo nello stesso modo a prescindere dai pixel intorno.

Al contrario, la trasformata di Fourier funziona applicando **sommatorie** (per il segnale), quindi ogni valore dipende da tutti i precedenti. Ciò si definisce **operatore locale**: ogni frequenza ha una sua influenza, e sebbene ci possano essere corrispondenza tra linee e forme, ogni pixel nel dominio è ricavato in base a tutti i pixel nel codominio (e viceversa).

L'*istogramma di un'immagine a livelli di grigio* è una funzione discreta $h(r_k) = n_k$ dove r_k è il livello di grigio k-simo, e n_k è il numero di pixel nell'immagine con intensità r_k (per ogni livello).

Il numero di campioni stabilisce l'informazione che si può rappresentare: se è sufficientemente alto, la distribuzione dei toni di grigio sarà regolare. Questo non permette di trarre conclusioni sullo spazio, ma semplicemente su quanti campioni hanno un certo valore (e di conseguenza la bontà del quantizzatore).

Se ci sono picchi nella distribuzione, esso è dovuto alla ripetizioni di pattern nell'immagine (come lo sfondo). Il numero di campioni nella trasformata è uguale a quello nell'immagine, e con frequenza di campionamento bassa la Δf sarà piccolo e si verificherà l'aliasing.

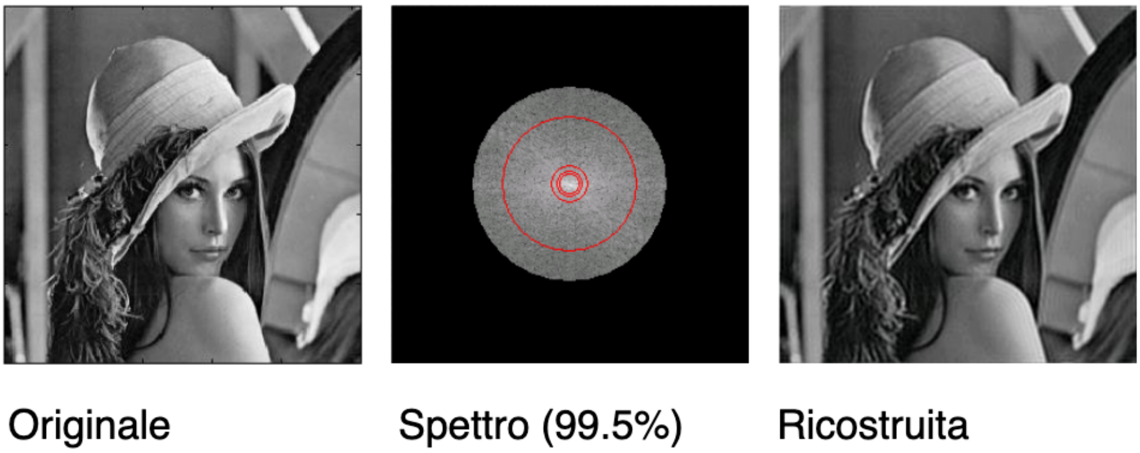
Per rimuovere i rumori si acquisiscono porzioni di segnali più lunghe, eventualmente analizzando le loro medie in modo da preservare le componenti più importanti.

Lo **spettro** è il risultato della trasformata, di cui una parte è reale e una immaginaria. Lavorando sul modulo, è possibile individuare circonferenze che indicano dove si concentra la potenza del segnale: manipolando lo spettro il risultato dell'inversione sarà differente.

Alcune metodologie di filtraggio comportano l'applicazione di maschere, finestre (monodimensionali, rappresentate come un rettangolo nel piano) a sezione circolare. Modificare lo spettro, quindi, implica ricostruire una diversa immagine che sarà più o meno accurata rispetto all'originale.

Spesso si possono eliminare le ridondanze senza perdere informazioni. Su questi principi si basano gli algoritmi di compressione (es. JPEG), riducendo la complessità a discapito della qualità.

Si ha che il 99.5% dello spettro è contenuto in una circonferenza di dimensione limitata.



Eliminando parte dello spettro e delle frequenze, il filtro diventa parte integrante del segnale che viene antitrasformato: ciò introduce fenomeni di ringing, quindi è necessario osservare anche il comportamento dell'antitrasformata del filtro.

Per ottenere diversi effetti si selezionano diverse parti dello spettro da tenere, per esempio solo l'interno o l'esterno, o una banda di un certo intervallo (mosaico, smoothing).

6.8 Proprietà della trasformata

Un'importante proprietà è la linearità, che vale per ogni dominio: la trasformata di Fourier applicata a una funzione che è combinazione lineare (somma pesata) di funzioni, il risultato è uguale alla trasformata di Fourier di ogni funzione presa singolarmente.

$$F(f)x) + g(x) = F(f(x)) + F(g(x)) = F(u) + G(u)$$

La linearità permette di ridurre (scomporre) la complessità della trasformata come sovrapposizione di sistemi più semplici e monodimensionali, senza introdurre dispersione del segnale.

Vale anche la traslazione nello spazio (tempo) e nelle frequenze, ma solo per la trasformata discreta: una traslazione equivale a una modulazione nelle frequenze con un esponente complesso. In altre parole, la trasformata del modulo è identica, ma la fase cambia di x_0 (sfasamento).

$$F(f(x + x_0)) = e^{j2\pi u x_0} \qquad F^{-1}(F(u \pm \varpi)) = f(x)e^{\pm j2\pi\varpi x}$$

A oggetti più grandi nel dominio diretto, corrisponderanno oggetti simili ma compressi nel dominio trasformato e viceversa, a causa dell'aumento delle frequenze.

$$\text{Scala: } F(f(ax)) = \frac{1}{|a|}F\Big(\frac{u}{a}\Big) \implies f(\alpha x, \beta y) = \frac{1}{|\alpha\beta|}F\Big(\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}\Big)$$

$$\text{Inversione: } F(f(-x)) = F(-u)$$

La trasformata di una funzione reale gode di simmetria Hermitiana: la parte reale e il modulo sono simmetrici rispetto all'origine (lo 0), mentre la parte immaginaria e la fase sono antisimmetriche rispetto all'origine.

Campionando il segnale di partenza, la trasformata diventa periodica e il periodo permette di ricostruire il segnale, a sua volta periodica.

$$\text{Periodicità (discreta): } F(u) = F(u + M) \implies F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi}{M}ux} \quad u = 0, \dots, M-1$$

Altre proprietà sono già state enunciate, come l'esistenza dell'inversa della trasformata discreta e la reversibilità.

$$\text{Separabilità: } F(u, v) = \frac{1}{NM}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x, y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{N}\right)}$$

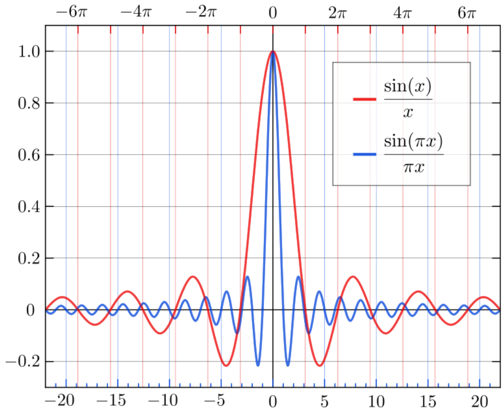
$$\text{Valore medio di una trasformata discreta: } F(0) = \frac{1}{M}\sum x = 0^{M-1} f(x) = \overline{f}(x)$$

$F(u_0)$ è il peso con cui l'onda complessa $e^{j2\pi u_0 x}$ di frequenza u_0 concorre a formare il segnale $f(x)$. Se $f(x)$ è un'onda complessa di frequenza u_k, $F(u)$ sarà 0 per ogni frequenza diversa da u_k.

6.9 *sinc*

sinc è un filtro passa-basso, utile per preservare la parte centrale di segnali con basse frequenze.

Nel dominio del coseno trasformato non ci saranno solo le δ se il segnale non è periodico e infinito, ma ci sarà anche l'effetto del *sinc* (finestra), dove $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, con un fattore π a per normalizzarla [immagine: Georg-Johann].

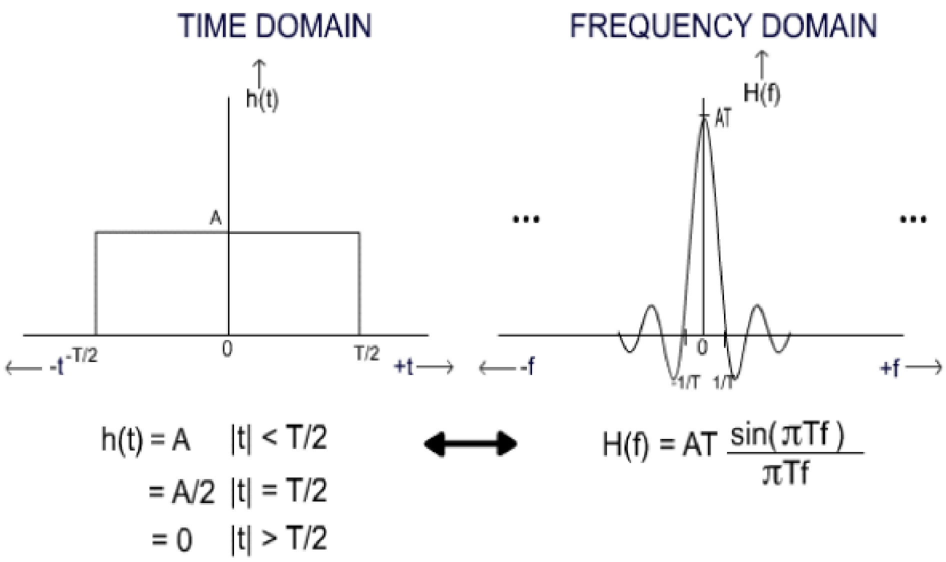


Questa funzione rappresenta il limite con x che tende a 0 della funzione seno, cioè 1. Nel processamento dei segnali è la trasformata di Fourier della funzione rettangolare (finestra) non scalata, ricostruendo il segnale continuo a partire dai campioni.

Per il seno, c'è una δ positiva e una negativa, e se trasformando entrambe diventano positive non c'è più la possibilità di distinguerlo dal coseno. In realtà le due funzioni sono la stessa traslata (proprietà di traslazione). Bisogna però ricordare che la δ positiva della parte immaginaria in realtà corrisponde alla parte negativa.

L'altezza di δ nel punto 0 è uguale all'altezza del segnale, che varia sempre meno fino a diventare costante. La trasformata di una costante, quindi, è rappresentabile come un coseno le cui δ si sovrappongono nel centro (limite della funzione, con frequenza che tende a 0).

La finestra di osservazione nel tempo ha frequenza δ, con due picchi di seno e coseno, e il contributo di *sinc* cresce con l'aumento dell'ampiezza della finestra (ringing). Al contrario, *sinc* si avvicina sempre di più a δ con il restringimento.



7 Campionamento

Il campionamento è un processo che legge valori distanziati l'uno dall'altro con un passo Δt approssimato al tempo infinitesimo, ma in realtà discreto. La scelta dell'ampiezza del passo deve evitare sia lo spreco di risorse che la perdita di informazioni.

Il segnale, in pratica, passa dall'analogico al digitale e dal continuo al discreto, e viene rappresentato come una serie di impulsi.

A una funzione campionata (con passo Δx) corrisponde nel dominio trasformato uno spettro periodico. Il periodo è inversamente proporzionale al passo di campionamento (ricostruzione della funzione continua dalla trasformata).

Così come a una funzione continua nel dominio dello spazio ne corrisponde una nel dominio delle frequenze espressa come somma pesata di armoniche (analisi e sintesi), a una funzione campionata con passo Δx corrisponde nel dominio trasformato uno spettro periodico, con periodo in funzione del passo di campionamento.

$$F(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)e^{-j2\pi uk\Delta x}$$

La frequenza di campionamento minima, quindi, garantisce un periodo sufficientemente grande per contenere l'intero spettro. Esso è simmetrico, quindi $-f_{max} = f_{max}$ come visto nel dominio della trasformata di Fourier.

Se il passo di campionamento è troppo alto ($\Delta x' = 1/M > \Delta x = 1/N$), le repliche dello spettro si sovrappongono (periodo M troppo breve) e non è possibile risalire alla funzione originale.
Questo succede perché le alte frequenze che non vengono considerate (a causa dell'alta variabilità del segnale, che non può essere interpretata in un periodo) ma si sovrappongono alle più basse, causando una errata rappresentazione.

Al contrario, una bassa frequenza di campionamento produce fenomeni di aliasing: la funzione viene approssimata male, come costante o una differente sinusoide.

Il teorema di Shannon afferma che, data la frequenza massima del segnale f_{MAX}, la frequenza massima di campionamento deve essere:

$$F_s = {}^1\!/\!_\Delta > 2f_{MAX}$$

Il periodo minimo di ripetizione dello spettro perché non vi sia sovrapposizione $N = 2f_{MAX}$. La f_{MAX} viene definita frequenza di Nyquist, e rappresenta la frequenza massima del segnale.

Lo spazio pertanto sarà $2f_{MAX}$, il che è il minimo valore per evitare le sovrapposizioni delle repliche. Nella formula viene utilizzata la disuguaglianza stretta per assicurare che non ci siano due frequenze nello stesso punto.

Per eliminare le frequenze alte e di conseguenza ridurre il passo di campionamento si ricorre al filtraggio (filtro anti-aliasing), che comunque non assicura il recupero della funzione originale ma evita le sovrapposizioni.

L'aliasing è appunto il fenomeno per cui il segnale originale non è ricostruibile dato che il campionamento è avvenuto con frequenza inferiore a quella di Nyquist, e il segnale risultante ha frequenza inferiore all'originale. Questo può gravemente compromettere la qualità di immagini e video: nella pratica i segnali non sono limitati in frequenze, ma nel tempo, quindi le repliche di uno spettro vanno separate attentamente tramite filtri passa-basso.

Quando il segnale è campionato, la variabile tempo/spazio non è più esplicita e la frequenza f_N rappresenta il numero di cicli per campione.

7.1 Frequenze

Il range tra minimo e massimo di una frequenza di oscillazione è 1, tutto ciò che è al di fuori dell'intervallo in realtà si trova comunque normalizzato all'interno. Aumentando ω, infatti, dopo un giro (periodo 2π) si torna ad avere la stessa funzione.

Frequenza minima di oscillazione di una sinusoide a tempo discreto: $f_N = 0 \implies \omega = 0$
Frequenza massima di oscillazione di una sinusoide a tempo discreto: $f_N = \pm 1/2 \implies \omega = \pm\pi$
Frequenza di oscillazione di una sinusoide generica: $f = \frac{1}{\text{n. campioni}} \implies \omega = 2\pi \cdot f_N$

I segnali sinusoidali a tempo discreto con pulsazioni separate da multipli di 2π sono identici:
$\omega + k2\pi = \omega$ con $k \in \mathbb{Z}$
$x(n) = \cos(\omega n + \theta)$
$\cos((\omega + 2k\pi)n + \theta) = \cos(\omega n + \theta)$
$\cos(\omega n + kn2\pi + \theta) = \cos(\omega n + \theta)$

Per convenzione si utilizza la frequenza di Nyquist, $f_n = [-1/2, 1/2]$, oppure intervalli di pulsazione $[-\pi, \pi]$ o $[0, 1] \to [0, 2\pi]$.

Il segnale sinusoidale è periodico solo se la sua frequenza normalizzata f è un numero razionale (rapporto tra due interi): $f = k/N$. I numeri razionali quindi impongono la periodicità.

8 Convoluzione

La convoluzione è un operatore matematico che descrive l'interazione tra il segnale e il filtro, e ne osserva il comportamento durante il movimento nello spazio. Si definisce nel dominio continuo fra due funzioni $g(x)$ e $f(x)$ tale che:

1. L'asse di rappresentazione di uno dei due assi è invertita, $g(t) \to g(-t)$;
2. Il segnale invertito viene fatto traslare tra ∞ e $-\infty$;
3. Per ogni traslazione si calcola il prodotto tra il segnale traslato e l'altro non traslato;
4. Si calcola l'area del prodotto, cioè la somma degli infiniti prodotti composti da una funzione che scorre e una statica.

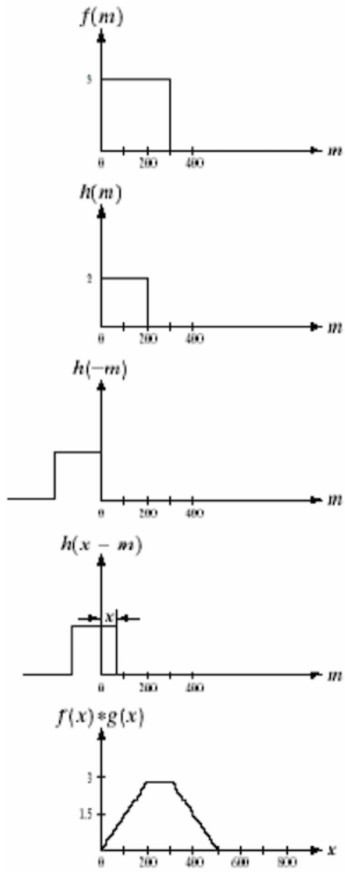
La convoluzione è l'operatore $*$ con cui sono descritti i filtraggi lineari nel dominio spaziale, cioè l'applicazione di una funzione f a una funzione h chiamata filtro (filter kernel, descrive il sistema) per ogni valore di x. Gode della proprietà commutativa.

$$g * f = \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x-s)f(s)ds$$

Nel caso di funzioni discrete, essa è definita come una somma di prodotti tra gli elementi di f e i coefficienti di h, con funzioni che sono in realtà sequenze:

$$g(x) = \sum_m f(m)h(x-m)$$

Se i segnali non si sovrappongono, la somma dei loro prodotti è 0. Quando iniziano a sovrapporsi progressivamente, se sono positivi, i valori crescono fino a raggiungere un massimo, per poi diminuire.



La lunghezza finale della funzione ottenuta dipende dai due segnali che la compongono: assumendo che non ci siano valori nulli, con A punti di $f(m)$ e B di $h(-m)$ si ha $g(x)$ con $A+B-1$ punti.

Applicando la definizione di trasformata di Fourier, si può dimostrare il fondamentale teorema della convoluzione. La trasformata della convoluzione di due funzioni è il prodotto delle trasformate delle due funzioni:

$$G(u) = \mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f(x) * h(x)] = F(u)H(u)$$

La somma di prodotti è più complessa computazionalmente rispetto alla trasformata, e il teorema della convoluzione permette di utilizzare quest'ultima. Ciò funziona grazie alla proprietà di traslazione.

Per la corrispondenza tra dominio spaziale e dominio delle frequenze, si hanno le seguenti relazioni:

$$g(x) = f(x) * h(x) \Longleftrightarrow G(u) = F(u)H(u)$$

$$g(x) = f(x)h(x) \Longleftrightarrow G(u) = F(u) * H(u)$$

Un prodotto nello spazio-tempo, quindi, corrisponde a una convoluzione di trasformate. Per capire il comportamento del segnale è sufficiente osservarlo nel dominio trasformato.

La convoluzione è un operatore lineare, verificabile attraverso la relativa proprietà:

$$f(x) * [\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)] = \alpha[f(x) * g_1(x)] + \beta[f(x) * g_2(x)]$$

9 Quantizzazione

La quantizzazione è un processo di discretizzazione dell'ampiezza: i segnali a tempo discreto sono convertiti a valori discret (digitali), cioé appartenenti a un insieme limitato di possibili scelte.

Risoluzione: un campione reale che necessita ipoteticamente di un numero infinito di bit per essere rappresentato, è espresso su un numero finito. Il processo è irreversibile, a causa della perdita di informazione.

La caratteristica di un quantizzatore è pertanto la curva non lineare, ma a gradini. Per tutti i valori di input che appartengono a uno degli intervalli su cui sono definiti i gradini, l'output assume il valore del gradino corrispondente.

La funzione più semplice in cui l'input è uguale all'output è la diagonale: la funzione ottenuta sarà quindi simmetrica, con una curva caratteristica non uniforme (larghezza dei gradini). Il quantizzatore è uniforme se tutti i livelli sono distribuiti ugualmente rispetto all'asse delle ascisse. La dinamica $[-V, V]$ viene quindi divisa in sottointervalli della stessa ampiezza $\Delta = 2V/L$ dove L è il passo.

Così come il passo di campionamento, esiste anche il passo di quantizzazione, cioè la distanza tra il valore minimo e massimo. L'altro parametro è la risoluzione, cioè il numero di livelli proporzionale al numero di bit (con n bit, 2^n livelli).

Il processo consiste nell'associare a ciascun campione $x(m)$ il numero binario $x_q(m)$ corrispondente al livello quantizzato dell'intervallo in cui case $x(m)$.

Tra tutti i livelli è necessario definire un criterio di scelta, essendo l'operazione irreversibile. Il quantizzatore è in grado di coprire solo un range L di valori.

Se L è maggiore del passo di quantizzazione Δ, il valore massimo $L\Delta$ sarà un intervallo troppo grande rispetto alla variazione del segnale e non verrà usato completamente (spreco).
Al contrario, se le variazioni del segnale sono molto ampie, il range sarà grande e andrà adattato a un numero ristretto di livelli.

Un quantizzatore è caratterizzato da una dinamica di ingresso, cioé un massimo range di valori ammissibili. Se il segnale supera gli estremi, esso viene modificato attraverso la saturazione o la saturazione con azzeramento.

L'intervallo di copertura, definito dalla risoluzione e dal passo, è quindi $D_q = \Delta L = \Delta 2^n$. Si utilizza un range dinamico per avere un numero flessibile di livelli rappresentabili, convertibile in decibel: l'obiettivo è il riempimento di tutti i livelli.

Il range dinamico è il rapporto tra il numero minimo e massimo di valori rappresentabili (espressi dal numero di bit):

$$20 \log_{10} L$$

Se la risoluzione è 16 bit, il range dinamico è $20 \log_{10} 2^{16} \approx 96dB$.

Le strategie di quantizzazione sono il troncamento (Δ)e l'approssimazione ($\frac{\Delta}{2}$): entrambe causano un errore, e di conseguenza lo sfasamento dei gradini rispetto alla diagonale.

Si definisce errore (rumore) di quantizzazione la differenza tra il valore quantizzato e il valore reale del campione:

$$\varepsilon_q(n) = x_q(n) - x(n)$$

L'incidenza dell'errore nel segnale è misurata come SRN (Signal-Noise Ratio, potenza), e tipicamente si misura in dB. Il valore finale, naturalmente, non è influenzato solamente dalla quantizzazione ma anche da fattori esterni, quindi è difficile avere stime oggettive della dinamica del quantizzatore.

La qualità del segnale quantizzato si esprime come rapporto della potenza P_S media del segnale a tempo discreto $x(n)$ e la potenza media dell'errore di quantizzazione P_N.

$$SNR_Q = 10 \log_{10} \frac{P_S}{P_N}$$

Le valutazioni sono eseguite in valore assoluto, per eliminare la possibilità di annullamento dei termini. La potenza del rumore è legata al modulo della sequenza.

$$P_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_q(n)|^2 \qquad P_S = \frac{1}{N}|x(n)|^2$$

Se il rumore è semplice e il segnale ha ampiezza nella dinamica del quantizzatore, varia nell'intervallo $\pm\Delta/2$, ed è equiprobabile e casuale con valor medio nulla (distribuzione uniforme). La potenza del rumore equivale alla varianza di ε, variabile casuale.

La situazione ideale ha un rapporto segnale-rumore ottimale (uguaglianza), cioè esso si adatta perfettamente ai livelli e la dinamica del quantizzatore è uguale a quella del segnale. Il range di valori è pari a $2A$, per un segnale sinusoidale.

$$P_N = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{A^2/3}{2^{2b}} \qquad P_S = \frac{A^2}{2}$$

$$x_a(t) = A\cos(\omega_0 t) \text{ segnale sinusoidale analogico}$$

$$P_S = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \text{ segnale sinusoidale campionato}$$

La distanza dei livelli, di conseguenza, sarà $2A/2^b$, essendo la potenza del rumore strettamente legata all'ampiezza del segnale (aumenta in proporzione al numero di bit).

Conoscendo il modo di calcolare P_S e P_N, insieme alla dinamica del quantizzatore $D_q = 2^b\Delta$, si ottiene:

$$SNR_q = 20\log\frac{\sqrt{P_S}}{D_q} + 10,8 + 6,02b$$

Il range del segnale sinusoidale è $D = 2A$, e con b bit di quantizzatore in $"^b$ livelli è possibile ricavare una nuova rappresentazione sostituendo nella formula generale:

$$SNR_Q = 1,76 + 6,02b$$

Per un insieme di segnali più ampio che si distribuisce sull'intero range dinamico del quantizzatore, si somma 1,25 invece che 1.76. Un incremento di un bit porta a un incremento di circa 6 dB, cioè l'intensità del segnale raddoppia rispetto all'intensità del rumore.

Dato che la quantizzazione provoca una perdita irreversibile di informazione, tenendo conto dell'errore, è importante stabilire in quali condizioni la distorsione introdotta è minima. Anche se il campionamento è ideale, la conversione D/A può invertire solo quest'ultimo senza considerare il rumore, quindi $x_r(t) \neq x(t)$.

Maggiore è la risoluzione (bit), più il segnale si avvicina all'originale, e l'ottimo del quantizzatore è il numero minimo dei livelli per avere una distorsione accettabile.

L'operazione che permette di ricostruire il segnale analogico $x(t)$ a partire dalla sequenza $x(NT_c)$ è detta ricostruzione. Essa è fedele se:

- Non c'è quantizzazione;
- Il campionamento è avvenuto nel rispetto del teorema di Shannon.

Nei convertitori digitale/analogico i punti del segnale vengono interpolati per generare il segnale analogico ricostruito. L'accuratezza della ricostruzione dipende dalla qualità del processo di conversione.

10 Sistemi lineari

Un sistema fisico è un apparato che riceve in input un segnale e ne produce un altro in output. Questa interazione è descritta da una funzione (operatore), le cui caratteristiche determinano il segnale in uscita. Il processo contiene una relazione di ingresso-uscita, o causa-effetto.

$$y(t) = S[x(t)]$$

Il campionamento con periodo o frequenza è un esempio di sistema, applicando un campionatore che legge istanti continui e li trasforma in discreti in base al passo Δt.

Un altro esempio è il quantizzatore, che associa al segnale $f(t)$ il segnale $Q(t)$ dove Q indica l'elemento in $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ più vicino al numero reale x (valori finiti).

I sistemi possono avere più ingressi e uscite, come la somma $g(t) = f(t) + h(t)$. Mettendo insieme più sistemi semplici, ne vengono generati di più complessi in diversi combinazioni di componenti elementari:

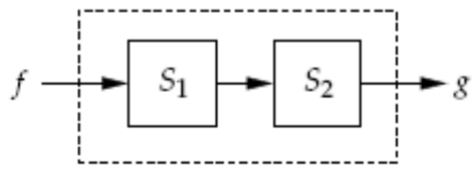
- Composizione sequenziale (a cascata), che combina più sistemi di cui l'output di uno è l'input di un altro (come processo di digitalizzazione);
- Composizione parallela, in cui lo stesso input viene immesso in più sistemi diversi;
- Retroazione (il risultato dipende dai valori precedenti), in cui l'output di un sistema viene modificato da un'altra funzione e torna come input della precedente.

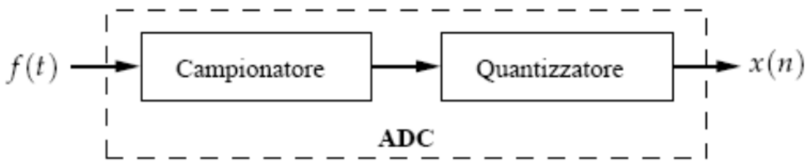
Un sistema a tempo discreto è un dispositivo che trasforma una sequenza $x(n)$ in ingresso in una sequenza di uscita $y(n)$, attraverso un operatore $L[\cdot]$ (relazione di I/O). L'operatore è descrivibile tramite una sequenza, che definisce le proprietà del sistema.

10.1 Composizioni

10.1.1 Cascata

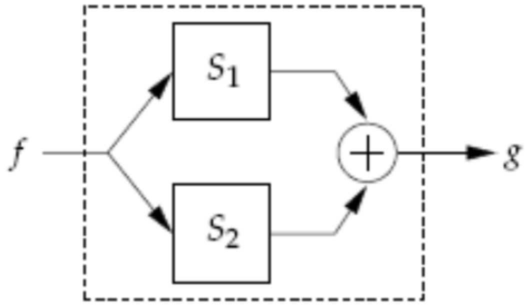
Dati due sistemi $S1 : F1 \to F2$ e $S2 : F2 \to F3$, la loro composizione sequenziale è il sistema $S3 : F1 \to F3$ ottenuta ponendo in ingresso a S2 la risposta di $s1$.





10.1.2 Parallela

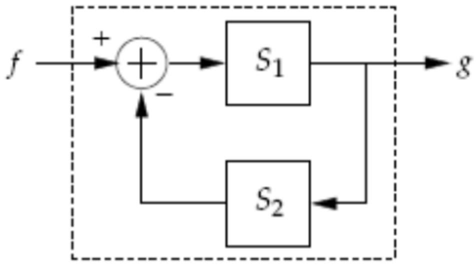
Dati due sistemi $S1 : F1 \rightarrow F2$ e $S2 : F2 \rightarrow F3$, la loro composizione parallela è il sistema che ha come risposta la somma delle risposte di $S1$ e $S2$.



Perché si possa definire la composizione parallela, deve succedere che la somma di due segnali in $F2$ sia ancora un segnale in $F2$.

10.1.3 Retroazione

Dati due sistemi $S1 : F1 \rightarrow F2$ e $S2 : F2 \rightarrow F3$, il sistema ottenuto per retroazione è il sistema $S3$ che ha ingresso f e uscita g ottenuta ponendo in ingresso a $S1$ la differenza tra f e la risposta di $S2$ a g.



10.2 Tempo-invarianza

Un sistema complesso lineare può sempre essere scomposto in componenti semplici, e questo principio può essere applicato anche sugli input (più sistemi) con lo stesso operatore sui segnali. La relazione I/O soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti.

Dato il segnale in ingresso $x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)$, la risposta a una combinazione lineare di ingressi è la combinazione lineare delle risposte del sistema ai singoli ingressi.

$$L[x(n)] = L[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 L[x_1(n)] + \alpha_2 L[x_2(n)]$$

Un'altra proprietà dei sistemi è la tempo-invarianza: sono stazionari e rispondono nello stesso modo in istanti differenti, quindi l'output è lo stesso anche con ritardo.

La relazione I/O produce un segnale di uscita $y(n)$ che dipende solo dalla forma del segnale di ingresso $x(n)$:

$$L[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$$

Se l'ingresso al sistema è ritardato o anticipato di una quantità n_0, allora anche la risposta viene ritardata o anticipata di n_0.

Sistemi causali: presupponendo il campione attuale e i successivi, la risposta corrente $x(n)$ non dipende dai valori futuri $x(n+n_0)$ con costante intera $n_0 > 0$ (solo parte positiva).

Sistemi anticausali: considerando il campione corrente e i precedenti, la risposta corrente $y(n)$ non dipende dai valori passati $x(n-n_0)$ con costante intera $n_0 > 0$ (solo parte positiva). Non sono fisicamente realizzabili.

I sistemi bilateri hanno sia parte causale che anticausale.

I sistemi possono avere memoria, la cui grandezza è il numero di campioni che vengono immagazzinati per calcolare i risultati successivi. La risposta corrente in questo caso dipende dai valori dell'ingresso negli istanti di tempo precedenti a quello corrente n (altrimenti sono statici).

Un sistema a tempo discreto si dice passivo quando l'energia E_y dell'output $y(n)$ è minore o uguale all'energia E_x dell'input $x(n)$. Questo si rappresenta con il modulo quadro, osservando la conservazione.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

Se la relazione precedente vale con il segno di uguaglianza, allora il sistema è detto senza perdite, in quanto conserva l'energia del segnale di ingresso.

10.3 Sistemi LTI

I sistemi lineari tempo invariante (LTI) sono definiti da operazioni I/O che soddisfano contemporaneamente la linearità e la stazionarietà. Se i coefficienti sono costanti, il segnale è stazionario perché non cambia in funzione al peso.

L'analisi dei LTI può essere condotta in tre diversi modi:

1. Relazione I/O (qualsiasi sistema);
2. Equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti (LTI causale);
3. Risposta all'impulso nel dominio del tempo e delle frequenze (sistema LP).

In particolare per il caso di equazione alle differenze, l'output è espresso come combinazione lineare di tutti i valori (coefficienti reali, costanti positive o negative) della sequenza di input $x(n)$, che è combinazione lineare della stessa sequenza di output, a partire dal primo campione ritardato.

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) - \alpha_2 y(n-2) - \cdots - \alpha_M y(n-M) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) + \cdots + \beta_N x(n-N)$$

L'uscita $y(n)$ dipende sia dai valori che l'ingresso $x(n)$ assume in un arco temporale fino a N istanti precedenti all'istante di tempo discreto n, sia dai valori assunti dal segnale di uscita $y(n)$ fino a M istanti di tempo precedenti a quello corrente n.

Queste operazioni possono essere raccolte come sommatoria con coefficienti costanti indipendenti dal tempo:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k x(n-k) - \sum_{j=1}^{M} \alpha_j y(n-j)$$

La y non parte da zero perchè altrimenti $y(n)$ dovrebbe dipendere da se stessa. Se l'equazione è ricorsiva (almeno un coefficiente α_j diverso da zero), la memoria è infinita.

Un'altra modalità per descrivere un sistema lineare a tempo invariante è la risposta all'impulso: la relazione I/O è semplice perché si indica la reazione alla δ, dove il peso è il valore della sequenza in quel campione. Essendo lineare a tempo invariante, i segnali sono indipendenti dal tempo e esprimibili come combinazioni lineari.

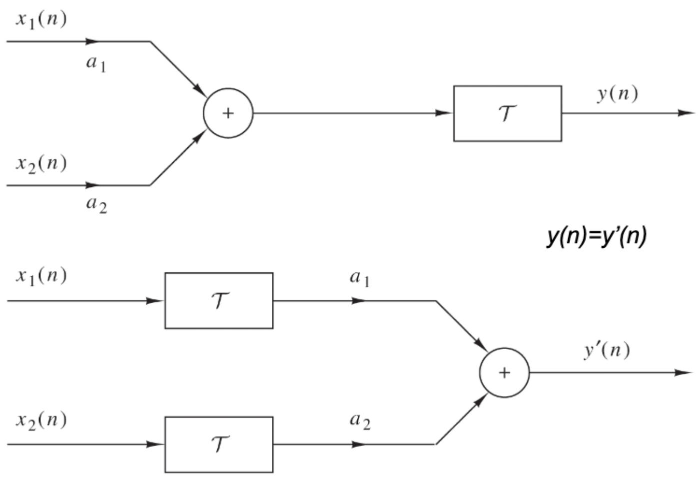
L'analisi della risposta del sistema all'impulso permette di valutare la risposta a regime, al fine di semplificarne l'analisi tempo-frequenza rappresentando la sequenza come somma di δ traslate e pesate.

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

Per la proprietà di sovrapposizione degli effetti (linearità) e di stazionarietà, si ha:

$$y(n) = L\Big[\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i)\Big] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)L[\delta(n-i)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i) = x * h$$

h è il kernel, la sequenza che descrive il comportamento del filtro (risposta del sistema all'impulso). La formula si può ritrovare come convoluzione lineare discreta della sequenza con il filtro.

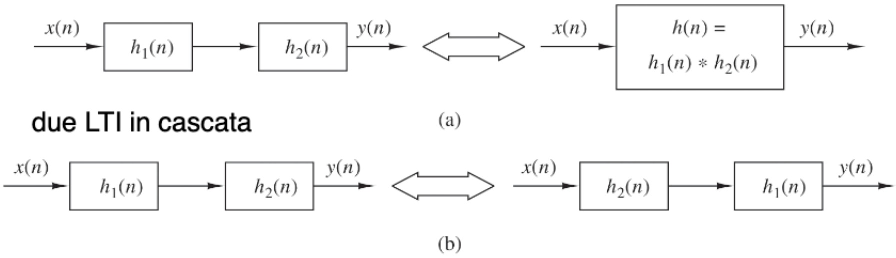


Se i segnali sono causali e limitati, il numero di valori sarà finito. La risposta all'impulso $h(n)$ è nulla per istanti di tempi $n < 0$, e l'uscita dipende dal valore corrente del segnale d'ingresso $x(n)$ e dei campioni già presenti nel sistema.

Se la risposta all'impulso $h(n)$ ha supporto temporale finito N_h, l'uscita del sistema LTI è:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{N_h-1} h(i)x(n-i)$$

L'operatore di convoluzione è commutativo e associativo, quindi applicabile ai sistemi lineari a tempo invariante a cascata ottenendo lo stesso risultato.



Per la proprietà distributiva, due LTI $h_1(n)$ e $h_2(n)$ connessi in parallelo possono essere sostituiti da un singolo sistema $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$.

L'interazione del segnale nel sistema è il prodotto delle trasformate di Fourier, semplificando la convoluzione. H è la risposta dell'impulso, che interagisce con X per generare Y.

Per il teorema della convoluzione,

$$y(n) = x(n) * h(n) \leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) \quad \text{dove} \quad H(f) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}fn}$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

La funzione continua $H(e^{j\omega})$ (trasformata discreta di $h(n)$) viene detta risposta in frequenza del sistema LTI, e può essere definita come:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \Re(H(e^{j\omega})) + j(H(e^{j\omega})) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\phi(H(e^{j\omega}))}$$

10.4 Filtri

Dato un generico sistema con una funzione $H(e^{j\omega})$, un filtro taglia alcune componenti in frequenza del segnale di ingresso lasciandone passare altre, secondo quanto specificato attraverso la risposta.

Le frequenze nell'intervallo vengono moltiplicate per 1, le altre per 0. Ci sono diverse tipologie di filtri ideali: passa-basso, passa-alto, passa-banda o attenua-banda, che corrispondono alla funzione *sinc* che è anticausale, pertanto non rappresentabile.

$$\text{Filtro ideale passa-basso } \left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_t \\ 0, & \omega_t < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\text{Filtro ideale passa-alto } \left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 0, & |\omega| \le \omega_t \\ 1, & \omega_t < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\text{Filtro ideale passa-banda } \left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 0, & |\omega| \le \omega_1 \\ 1, & \omega_1 < |\omega| \le \omega_2 \\ 0, & \omega_2 < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\text{Filtro ideale attenua-banda } \left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 1, & \omega_1 < |\omega| \leq \omega_2 \\ 0, & \omega_2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

I sistemi LTI a tempo discreto devono soddisfare alcune condizioni specifiche, al fine di poter essere impiegati in alcune applicazioni. Una di queste condizioni è la stabilità, di cui la più usata nella pratica è detta BIBO (Bounded-Input Bounded-Output).

Un sistema rispetta la stabilità BIBO se, per ogni ingresso $h(n)$ con energia limitata, anche l'output ha ampiezza limitata (non va a infinito, è sommabile in modulo). *sinc* tende a infinito, quindi non è stabile.

$$h_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

Un sistema LTI è fisicamente realizzabile se possiede una risposta all'impulso $h(n)$ reale e causale, dove la causalità implica $h(n) = 0 \forall\ n < 0$.

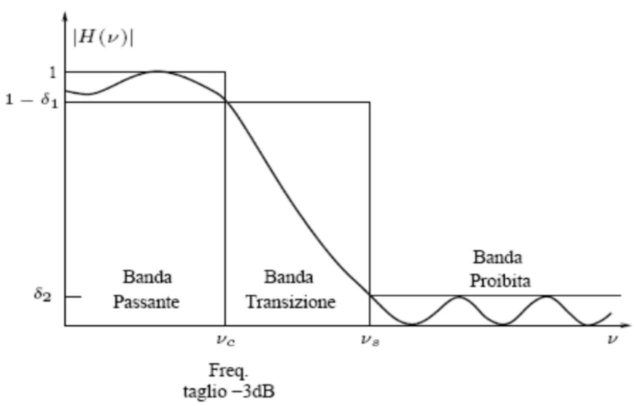
La funzione di trasferimento H nel dominio delle frequenze di un filtro ideale passa-basso possiede le seguenti caratteristiche:

- $|H|$ costante nella banda passante e nullo nella banda proibita;
- La banda passante e la banda proibita sono confinanti, separate dalla frequenza di taglio.

Un filtro reale, in confronto a uno ideale, non ha zone ben precise di banda passante e probita: la transizione non è immediata (esiste una zona di transizione) e le frequenze non hanno peso uguale bensì fluttuazioni con ampiezza variabile.

Si rilevano oscillazioni non trascurabili ampie δ_1. L'attenuazione si calcola come $20 \log_{10} \delta_2 dB$, con δ_2 ampiezza della massima oscillazione in banda proibita.

La banda passante e la banda proibita sono separate appunto dalla banda di transizione, che inizia dalla frequenza di taglio v_c e termina alla frequenza di stop v_s (dimensione $v_s - v_c$). Questi parametri vengono dati come specifiche dei filtri.



La frequenza di taglio è la frequenza per la quale la potenza è il 50% rispetto al massimo, quindi c'è un'attenuazione della metà. Serve per identificare la fine della banda passante. Se $|H(v)|^2 \approx 1$, v_c è la frequenza per cui:

$$|H(v_c)|^2 = \frac{1}{2}$$

v_c è anche detta frequenza di taglio a 3 dB poichè $10 \log_{10}(1/2) \approx -3dB$.

11 Equazioni alle differenze

I LTI causali a tempo discreto possono essere rappresantati in modi differenti, tra cui la combinazione lineare con coefficienti costanti nel tempo (invariante).

Il comportamento di un sistema LTI a tempo discreto e causale può essere descritto anche da equazioni alle differenze, come visto precedentemente:

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) - \alpha_2 y(n-2) - \cdots - \alpha_M y(n-M) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) + \cdots + \beta_N x(n-N)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{j=1}^{M} a_j y(n-j)$$

Si ricorda che i coefficienti sono costanti e indipendenti dal tempo, per assicurare la stazionarietà. Un'equazione è detta ricorsiva se almeno un coefficiente a_i è diverso da zero.

Quando il sistema ha una parte ricorsiva, dipende di fatto da più istanti precedenti dell'input, e non solo dai N istanti evidenti dalla sommatoria. M è l'ordine dell'equazione alle differenze (ordine del sistema).

Il ritardo su y indica di che ordine è il sistema: il primo ordine, per esempio, ha ricorsione con un campione in ritardo.

L'output di un sistema ricorsivo dev'essere calcolato in sequenza, al contrario di un sistema non ricorsivo in cui i campioni possono essere valutati con qualsiasi disposizione.

Esempi di sistemi:

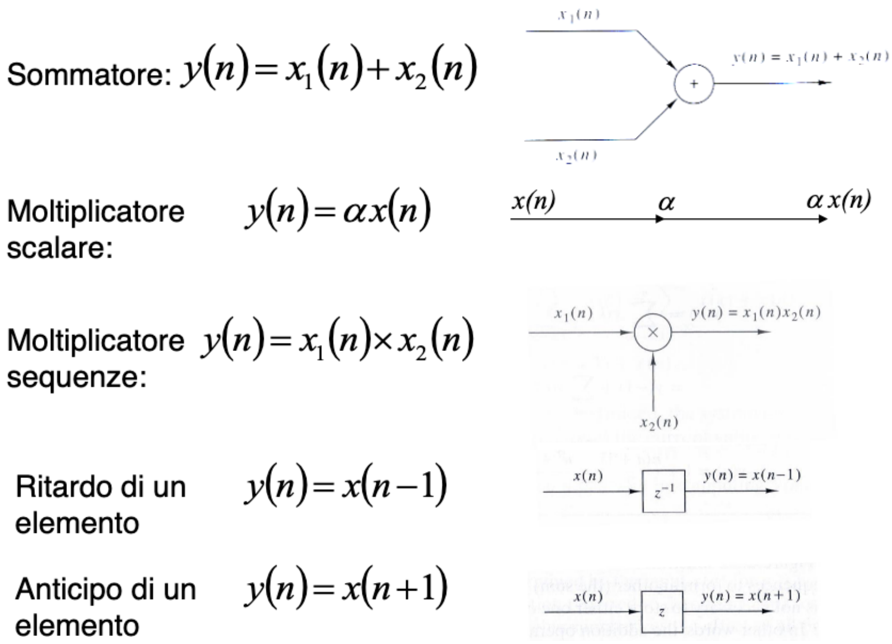
- Identità $y(n) = x(n)$, non ricorsivo e causale;
- Ritardo (anticipo) unitario $y(n) = x(n \pm 1)$, non ricorsivo e (non) causale;
- Media mobile $y(n) = \frac{1}{3}[x(n-1) + x(n) + x(n+1)]$, non ricorsiva e non causale;
- Accumulatore $y(n) = \sum_{-\infty}^{n} x(k)$, causale ricorsivo con memoria infinita.

In quest'ultimo caso, l'output a un istante n dipende dal valore dell'input per tutti gli istanti precedenti, cioè dall'output ricavato con essi: bisogna conoscere anche le condizioni iniziali $y(n-1)$.

Se il sistema accumulatore $y(n) = y(n-1) + x(n)$ non ha subito alcuna eccitazione prima dell'istante n, $y(n-1) = 0$ e il sistema è scarico (per $n = -\infty$).

11.1 Diagrammi a blocchi

Ogni operazione di cui è composto un sistema viene rappresentata in un diagramma a blocco, che contiene eventualmente anche una parte ricorsiva (freccia all'indietro). Si ricordano la linearità e la commutatività.



11.1.1 Media cumulativa

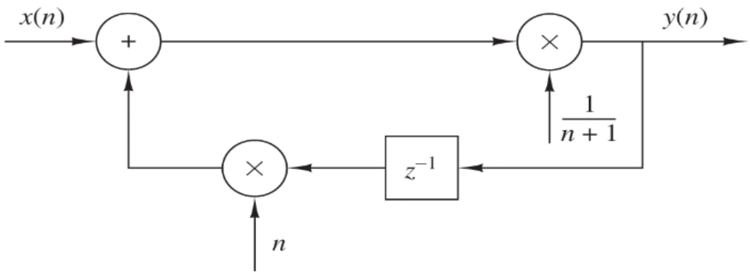
La media cumulativa è un sistema ricorsivo non stazionario, con normalizzazione effettuata in base a un parametro non costante.

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k)$$

Il calcolo di $y(n)$ richiede la conoscenza di tutti i valori di $x(n)$ precedenti, ma può essere semplicemente calcolato da $y(n-1)$, cioè il precedente output e l'input corrente: il valore di $y(n_0)$ si calcola a partire da una sequenz di input applicata per $n \geq n_0$ e dalla condizione iniziale $y(n_0 - 1)$.

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n)$$

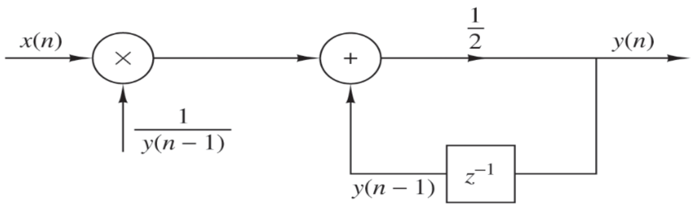


11.1.2 Radice quadrata

Questo sistema calcola la radice quadrata in modo ricorsivo, a partire da una condizione iniziale $y(-1)$ che approssima il valore cercato. Al crescere di n, la stima del valore migliora.

$$y(n) = 0.5\frac{x(n)}{y(n-1)} + 0.5y(n-1)$$

La radice quadrata non è un sistema lineare: non esistono sommatorie, ma il termine y compare al denominatore quindi non è rappresentabile come combinazione lineare.



12 Risposta all'impulso

La risposta all'impulso viene descritta attraverso un prodotto di convoluzione, come sequenza finita o infinita. I primi casi non hanno la ricorsione, sono campioni combinati con pesi: i valori di h sono i coefficienti di x.

In base alla risposta all'impulso, i sistemi possono essere divisi in due gruppi: FIR (Finite Impulse Response) e IIR (Infinite Impulse Response).

12.1 FIR

$$h(n) = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq n \leq M-1 \\ = 0 & n < 0 \wedge n \geq M \end{cases}$$

La risposta di un sistema FIR a un generico segnale è allora:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(n-i) = \sum_{i=0}^{M-1} h(i)x(n-i)$$

Per un sistema FIR, l'output a qualsiasi istante n è semplicemente la somma di una combinazione lineare pesata degli M valori più recenti della sequenza di input.

Il sistema agisce come una finestra che vede solo M valori recenti, quindi ha memoria M.
I sistemi FIR possono essere sempre realizzati in modo non ricorsivo, essendo in funzione di M campioni pesati per la risposta all'impulso $h(n)$. Questo deriva dal fatto che una LTI non ricorsiva dipende solo da un numero finito di istanti nel passato.

12.2 IIR

$$h(n) = \begin{cases} \neq 0 & n \geq n_0 \\ = 0 & n < n_0 \end{cases}$$

La risposta di un sistema IIR causale a un generico segnale è allora:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(n-i)$$

L'output a qualsiasi istante n dipende da tutti i valori della sequenza di input: il sistema ha memoria infinita e non è realizzabile, perché richiederebbe infinite locazioni di memoria.

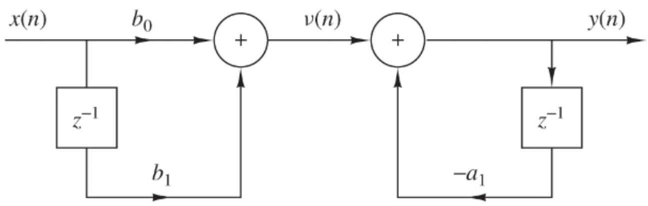
Se la sommatoria va a infinito, non c'è una diretta corrispondenza con il dominio delle frequenze, quindi non si individua $y(n)$ guardando la risposta ma si utilizzano le equazioni alle differenze e il dominio trasformato.

12.2.1 Prima forma diretta

Realizza un'equazione lineare alle differenze del primo ordine a coefficienti costanti, utilizzando due unità di ritardo (memoria) distinte come se fossero due sistemi a cascata. Il primo sistema non è ricorsivo, mentre il secondo lo è.

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1)$$

Per la proprietà commutativa, scambiando l'ordine dei sistemi il risultato non cambia, ma è necessario introdurre una variabile ausiliaria.



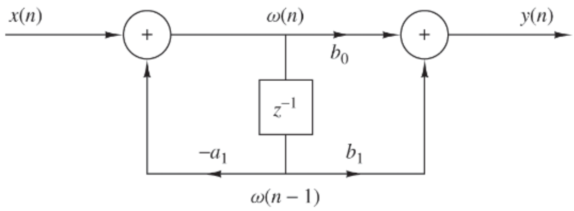
12.2.2 Seconda forma diretta

$$\omega(n) = -\alpha_1\omega(n-1) + x(n) \qquad y(n) = \beta_0\omega(n) + \beta_1\omega(n-1)$$

Le due unità di ritardo hanno entrambe in input $\omega(n)$ e in output $\omega(n-1)$, e possono quindi essere rappresentati con un'unica unità di ritardo. Ciò è efficiente nelle applicazioni pratiche in termini di memoria. Il passaggio dalla prima forma diretta alla seconda si può estendere al caso di una generica equazione alle differenze di ordine N:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k x(n-k) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y(n-j)$$

Ciò richiede $N + M$ unità di ritardo e $M + N + 1$ moltiplicazioni. La seconda forma diretta è data dalla cascata di un sistema ricorsivo seguita da uno non ricorsivo, con $max(N, M)$ ritardi.



13 Trasformata zeta

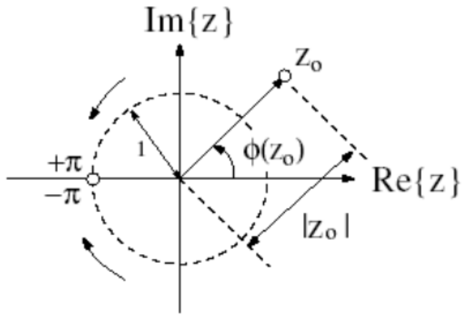
La trasformata zeta aiuta l'analisi di stabilità e causalità delle frequenze dei sistemi lineari a tempo invariante con i relativi filtri, essendo più ampia rispetto alla trasformata di Fourier.

La trasformata discreta non è sufficiente in alcune situazioni perché non sempre esiste, descrive solo comportamenti di sistemi LTI scarichi e presume condizioni iniziali nulle.

La trasformata zeta è la parte discreta (digitale) della trasformata di Laplace, ed è rappresentata da una sommatoria con l'estensione delle frequenze nel mondo complesso, esprimibile in coordinate polari con un termine ρ qualsiasi che determina la distanza dall'origine. L'operatore è lineare.

Data una frequenza bilatera $x(n)$ con $-\infty < n < \infty$ si definisce trasformata zeta:

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



Esiste una corrispondenza biunivoca tra $x(z)$ e $x(n)$ e i loro domini solo se viene definita la regione di convergenza uniforme ROC, cioè i valori della variabile complessa z tale che $x(z)$ è finita.

Nella regione di convergenza, $X(z)$ è una funzione analitica, cioè continua e indefinitamente derivabile con derivate continue in z.

La z è una pulsazione complessa con dominio $\mathcal{C}$, rappresentabile in termini di modulo e fase come $z = \rho e^{j2\pi f} = \rho e^{j\omega}$. Si può ridurre a trasformata di Fourier discreta togliendo il coefficiente complesso e applicando la formula a una nuova sequenza.

Deve valere la condizione di sommabilità in modulo, quindi la convergenza varia con la distanza e il piano si può dividere in circonferenze concentriche con comportamento diverso.

La regione ROC dipende solo dal modulo ρ delle pulsazioni complesse z, e non dalla loro fase: questo comporta le circonferenze come luoghi dei punti z a modulo costante.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left| x(n)\rho^{-n} \right| < \infty \implies \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)| \, \rho^{-n} < \infty$$

In particolare, è importante trovare i valori di ρ che indicano la convergenza, e si ha che i valori sulla circonferenza di raggio unitario $\rho = 1$ sono i valori della trasformata di Fourier di frequenza 0. Quando c'è un ritardo, la regione sarà individuata con $[z \neq 0]$.

13.1 Trasformate e ROC

La trasformata zeta definisce una relazione biunivoca tra la sequenza $x(n)$ e una funzione della variabile complessa z. La biunivocità è garantita solo se si specifica la ROC di $X(z)$ e l'espressione analitica della trasformata.

Esistono relazioni specifiche tra la tipologia di una generica sequenza $x(n)$ e la ROC della relativa trasformata z:

- Le sequenze $x(n)$ bilatere hanno supporto su istanti di tempo discreto negativi e positivi;
- Le sequenze causali possiedono coefficienti identicamente nulli per istanti di tempo negativi;
- Le sequenze anticausali possiedono coefficienti identicamente nulli per istanti di tempo positivi.

13.1.1 Impulso δ

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$$

Se l'impulso $x(n) = \delta(n)$ è una costante nel dominio trasformato, applicando la funzione zeta si ha un risultato simile: tutti i valori assumono 0 tranne quello per cui $n = 0$, quindi l'esponenziale diventa 1 così come tutta la trasformata.

La regione di convergenza è costante e limitata a 1, e rappresenta tutto il piano complesso per cui la serie geometrica converge.

$$x(n) = 2\delta(n+1) + \delta(n) + 4\delta(n-2) = 2\sum_{-\infty}^{\infty} 2\delta(n+1)z^{-n} + \sum_{-\infty}^{\infty} 2\delta(n)z^{-n} + 4\sum_{-\infty}^{\infty} 2\delta(n-2)z^{-n}$$

$$\implies 2z + 1 + 4z^{-2}$$

Il risultato è ottenuto scomponendo le sommatorie e trovando i valori per cui il numero all'interno delle parentesi si annulla. Bisogna sempre tenere conto del segno negativo dell'esponente.

13.1.2 Gradino

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

In una sequenza a gradino, la ROC corrisponde all'esterno della circonferenza di raggio unitario, cioè $\left[\left|z^{-1}\right| < 1 \geq |z| > 1\right]$. La stessa formula vale per il gradino anticausale, e la corrispondenza biunivoca si ritrova perché la ROC cambia in $|z| < 1$.

13.2 ROC per sequenze finite

Le sequenze $x(n)$ con supporto finito sono i segnali a tempo discreto che possiedono un numero finito di coefficienti non nulli. Queste ammettono sempre una trasformata $X(z)$ esprimibile in forma chiusa come un polinomio composto da un numero finito di variabili del tipo z^k, z^{-k} con k intero.

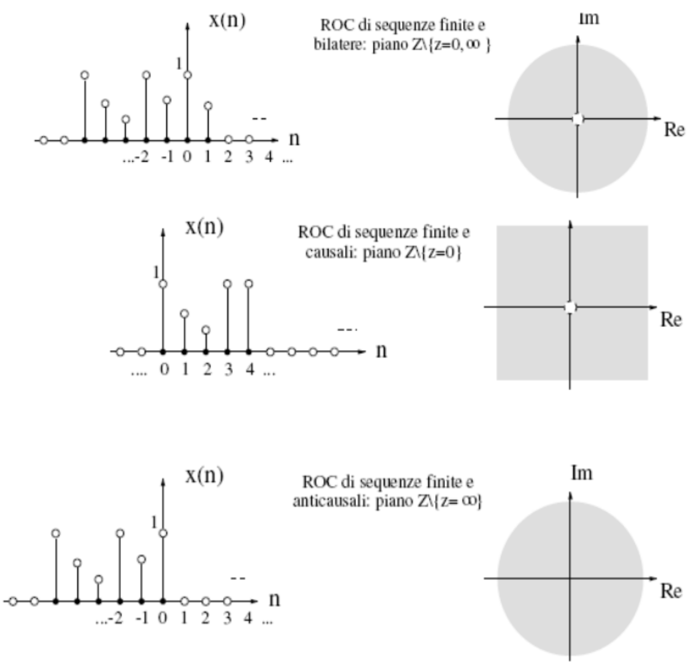
$$X(z) = \sum_{n=-M}^{L} x(n)z^{-n}$$

La trasformata converge per qualunque z nel piano complesso, eccetto il punto $z = 0$ se esistono termini del tipo z^{-k} con $k > 0$, e il punto $z = \infty$ se esistono termini del tipo z^{+k} con $k > 0$.

Essendoci polinomi, sia il numeratore che il denominatore potrebbero annullarsi: nel primo caso si chiamano zeri, altrimenti poli. Per individuare i valori si può raccogliere i fattori arrivando all'ordine 1 nel denominatore.

ROC per segnali di durata finita:

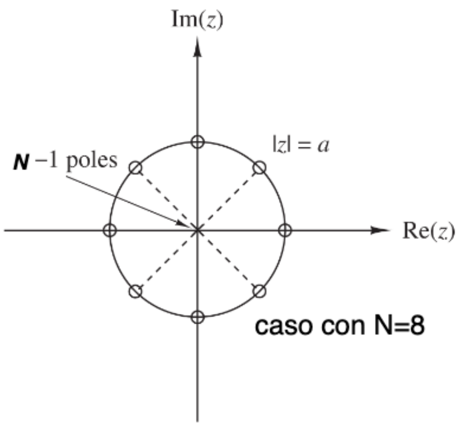
- ROC per segnali bilateri di durata finita: intero piano complesso $\mathbb{C}$ tranne $[z = 0 \wedge z = \infty]$;
- ROC per sequenze finite e causali: intero piano complesso $\mathbb{C}$ tranne $[z = 0]$;
- ROC per sequenze finite e anticausali: intero piano complesso $\mathbb{C}$ tranne $[z = \infty]$.



In questo caso i campioni infiniti vengono rappresentati come rapporto finito di polinomi infiniti.

13.3 Poli e zeri

I poli sono le radici del numeratore e gli zeri sono le radici del numeratore (possono trovarsi anche nelle pulsazioni complesse). Il loro numero è uguale.



Il numero di poli e quello degli zeri corrisponono all'ordine del polinomio che li origina (quindi inizialmente possono essere diversi, ma vengono poi bilanciati con poli/zeri aggiuntivi).

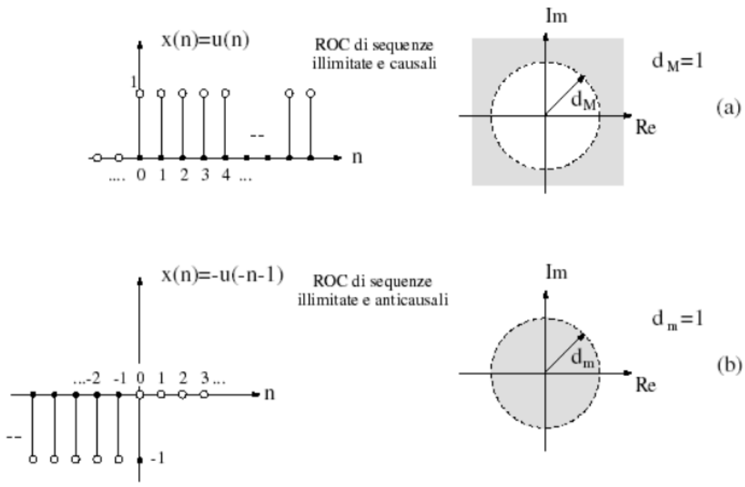
$$X(z) = \frac{1 - \alpha^N z^{-N}}{1 - \alpha z^{-1}} = z^{-N+1} \frac{z^N - \alpha^N}{z - \alpha}$$

C'è una parte in comune $z = \alpha$ che annulla sia denominatore che numeratore, quindi gli zeri corrispondenti si semplificano e la sequenza resta finita. Ci sono $N - 1$ poli (e zeri) per $z = 0$.

Le radici si posizionano in modo uniforme a intervalli distanti uguali, nelle pulsazioni complesse, su una circonferenza di raggio α (polinomio di ordine N, $z^N - \alpha^N$).

13.4 ROC per sequenze infinite

Le sequenze $x(n)$ illimitate sono i segnali a tempo discreto che possiedono un supporto temportale illimitato, ma convergono solo in u



Regione di convergenza per sequenze causali:
$|z| > d_M$, dove d_M è il modulo del polo più distante dall'origine.

Esempio: sequenza gradino con ROC $|z| > 1$.

Regione di convergenza per sequenze anticausali:
$|z| < d_M$, dove d_M è il modulo del polo più vicino all'origine.

Esempio: sequenza gradino con ROC $|z| < 1$.

Per definizione, la regione di convergenza non può contenere poli. Le sequenze causali, quindi, hanno poli all'esterno della circonferenza, mentre le sequenze anticausali all'interno.

13.5 Trasformata zeta razionale

Nei casi pratici di interesse, la funzione $X(z)$ è una funzione razionale di due polinomi: $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. $N(z)$ e $D(z)$ sono due polinomi nella variabile p_n e p_d. Scrivendo i due polinomi in forma estesa, si ottiene:

$$X(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_{p_n}}{z^{-p_n}} \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_{p_d} z^{-p_d}$$

Esprimendo in termini di potenze positive di z e fattorizzando i due polinomi in base alle rispettive radici elementari, si ottiene:

$$X(z) = \frac{\beta_0}{\alpha_0}\big(z^{p_d - p_n}\big)\frac{\prod_{p_n}^{i=1}(z - c_i)}{\prod_{p_d}^{i=1}(z - d_i)}$$

I coefficienti $c_i \forall\ i = 1, \ldots, p_n$ sono gli zeri non nulli di $X(z)$, mentre i coefficienti $d_i \forall\ i = 1, \ldots, p_n$ sono i poli non nulli di $X(z)$.

Ci sono $p_n - p_d$ poli in $z = 0$ nel caso in cui $p_n > p_d$.
Ci sono $p_d - p_n$ poli in $z = 0$ nel caso in cui $p_d > p_n$.

14 Analisi dei sistemi

I sistemi LTI a tempo discreto possono essere descritti da equazioni lineari alle differenze a coefficienti costanti:

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) - \alpha_2 y(n-2) - \cdots - \alpha_M y(n-M) + \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) + \cdots + \beta_N x(n-N)$$

Applicando la trasformata di Fourier discreta a ogni termine si ottiene:

$$Y\big(e^{j\omega}\big) = -\alpha_1 Y\big(e^{j\omega}\big)e^{-j\omega} - \cdots - \alpha_M Y\big(e^{j\omega}\big)e^{-j\omega M} +$$

$$+\beta_0 X\big(e^{j\omega}\big) + \beta_1 X\big(e^{j\omega}\big)e^{-j\omega} + \cdots + \beta_N X\big(e^{j\omega}\big)e^{-j\omega N}$$

Si ricorda che $F\big(f(x - x_o)\big) = e^{-j2\pi u x_0}F(u)$. Raccogliendo tutti i termini $Y\big(e^{j\omega}\big)$ e $X\big(e^{j\omega}\big)$, si ha:

$$Y\big(e^{j\omega}\big)\big(1 + \alpha_1 e^{-j\omega} + \cdots + \alpha_M e^{-j\omega M}\big) = X\big(e^{j\omega}\big)\big(\beta_0 + \beta_1 e^{-j\omega} + \cdots + \beta_N e^{-j\omega N}\big)$$

Per il teorema della convoluzione, $y(n) = x(n) * h(n) \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$.

La risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ di un sistema LTI espresso tramite le equazioni alla differenze, può essere calcolata come segue:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\big(\beta_0 + \beta_1 e^{-j\omega} + \cdots + \beta_N e^{-j\omega N}\big)}{\big(1 + \alpha_1 e^{-j\omega} + \cdots + \alpha_M e^{-j\omega M}\big)}$$

Questo per la relazione che lega trasformata di Fourier e zeta:
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(x(n)\rho^{-n}\big)e^{-j\omega n}$.

La regone di convergenza della funzione $Y(z)$ coincide, nel caso generale, quando non avvengono cancellazioni tra poli e zeri in $X(z)$ e $H(z)$, con l'intersezione tra le regioni delle due funzioni.

Essendo la funzione di trasferimento $H(e^{j\omega})$ razionale, allora anche $H(z)$ lo è, quindi si può esprimere con una funzione razionale del tipo:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_N z^{-N}\right)}{\left(1 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_M z^{-M}\right)}$$

Essa corrisponde all'equazione alle differenze, e al caso generale di un sistema LTI.

Un sistema LTI causale e non ricorsivo di tipo FIR ha una funzione di trasferimento del tipo: $H(z) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_N z^{-N}$.

Un sistema LTI causale e puramente ricorsivo di tipo IIR ha una funzione di trasferimento del tipo: $H(z) = \frac{1}{(1+\alpha_1 z^{-1}+\cdots+\alpha_M z^{-M})}$.

15 Sistemi LTI e trasformata zeta

La funzione di trasferimento $H(z)$ può essere espressa in termini delle radici dei polinomi al numeratore e al numeratore fattorizzando i due polinomi $N(z)$ e $D(z)$:

La frequenza è legata alla posizione angolare, quindi essendo i poli in zero la loro influenza si riflette su tutte le frequenze o nessuna: il contributo è nullo.

Studiando i poli si analizza la regione in cui la funzione viene amplificata e cresce in valore, gli zeri dove diminuisce. Insieme quindi danno l'andamento delle frequenze.

I coefficienti nell'equazione alle differenze corrispondono ai coefficienti nella trasformata, considerando il cambiamento di segno. Al numeratore c'è la parte non ricorsiva, e al denominatore quella ricorsiva. Se non c'è il denominatore, la sequenza è FIR.

Il sistema è stabile se la trasformata di Fourier è interna alla regione di convergenza.

I sistemi FIR hanno risposta d'impulso limitata, e si può immediatamente passare alla rappresentazione tramite equazione alle differenze dato che i coefficienti sono gli stessi. I sistemi non sono ricorsivi.

15.1 Stabilità BIBO

La stabilità BIBO di un sistema LTI impone che la risposta all'impulso $h(n)$ sia sommabile in modulo. Se il sistema è causale, la condizione si traduce nel dominio z imponendo che la funzione di trasferimento $H(z)$ abbia poli contenuti nella circonferenza di raggio unitario del piano z.

Le caratteristiche della sequenza dipendono dalla posizione dei poli: la convergenza, e conseguentemente la stabilità, sono determinate dall'appartenenza al cerchio unitario.

I poli all'esterno del cerchio $|z| = 1$ ... Poli multipli sul cerchio unitario conducono a una crescita di tipo polinomiale.

Riassumendo:

- Se il sistema è causale, condizione necessaria e sufficiente per la stabilità BIBO è che $H(z)$ abbia tutti i poli contenuti nella circonferenza di raggio unitario;

- ...

Quando il polinomio è espresso tramite potenze negative, se c'è una costante essa corrisponde all'assenza di ritardo, quindi sia al numeratore che al denominatore si somma 1 per indicare l'istante corrente.

Tutte le volte che la soluzione non è a coefficienti reali, è presente il complesso coniugato. I monomi vengono espressi in termini di potenze negative di z.

15.2 Filtri

Avendo a disposizione la trasformata con i poli e gli zeri, conoscendo le proprietà di continuità della funzione analitica è possibile conoscere l'andamento delle frequenze.

Se un polo reale è molto vicino al cerchio di raggio unitario, si ha che il denominatore si annulla con valori prossimi a $\rho = 1$, ma a $z = 1$ c'è un picco e la risposta cresce in funzione alla posizione del polo. In altre parole, ogni polo ha un'influenza sulle frequenze a seconda della loro vicinanza.

Introducendo un fattore di normalizzazione $1 - \alpha$, è possibile confrontare i filtri con valore di picco (guadagno) unitario.

Per enfatizzare le basse frequenze, è sufficiente inserire degli zeri per farle crescere di valore. Creando monomi con radici e aggiungendole al numeratore e al denominatore, si creano filtri in grado di alzare o abbassare le frequenze manipolando le posizioni di poli e zeri.

Nella realtà bisogna considerare che è impossibile azzerare completamente una parte di frequenza, ma ci saranno delle oscillazioni più o meno ampie.

Tanto più i poli sono vicini all'asse reale, più influenzano le frequenze basse (filtro passa-basso).

Se la frequenza è causale, il numero di zeri non deve superare il numero di poli. Ricostruendo la frequenza a partire dal filtro, si ha $H(z) = k\frac{z}{denz-\alpha} = \frac{k}{1-\alpha z^{-1}}$ con k costante. Se il guadagno è unitario, $|H(z)_{f=0 \wedge z=1} = 1|$ da cui $k = 1 - \alpha$ (filtro con sempre la stessa altezza).

15.3 Sistema inverso

Un sistema inverso ha lo scopo di compensare i poli e gli zeri, ed è un sistema che inverte il comportamento di un altro sistema LTI tale che la risposta rimanga inalterata.

Il numeratore di uno dev'essere uguale al denominatore dell'altro e viceversa, e la funzione di trasferimento è pari a una costante unitaria nel piano z (identità).

15.4 Sistemi passa-tutto

Questi filtri non modificano le frequenze del segnale, ma effettuano altre operazioni (ritardo, anticipo), e dev'esserci una precisa relazione tra i poli e gli zeri. La risposta all'impulso è sempre costante.

I coefficienti del polinomio al numeratore sono in ordine inverso rispetto a quelli del denominatore, e ciò viene garantito imponendo il modulo quadro unitario. Raccogliendo z, il numeratore resta invariato e il denominatore viene invertito.

Un polo, quindi, è il reciproco di uno zero (e viceversa). Se uno è all'interno della circonferenza, l'altro è fuori.