

EQUAZIONI DEL MOTO DI UN QUADRICOTTERO

GIORGIO DI LIBERI

1 INTRODUCTION

In questo documento sono riportate le equazioni del moto implementate per un modello di quadricottero.

2 EQUAZIONI DEL MOTO

Vengono riportate le equazioni della dinamica e della cinematica in forma vettoriale.

$$\begin{cases} m(\dot{\underline{V}}_B + \underline{\omega}_B \wedge \underline{V}_B) = \underline{F}_P + \underline{F}_A + \underline{F}_T \\ \underline{I} \dot{\underline{\omega}}_B + \underline{\omega}_B \wedge \underline{I} \underline{\omega}_B = \underline{G}_T + \underline{G}_A \\ \dot{\underline{Q}} = \frac{1}{2} \underline{\Omega} \underline{Q} \\ \underline{P}_E = \underline{L}_{EB} \underline{V}_B \end{cases} \quad (1)$$

dove m è la massa del velivolo mentre il tensore di Inerzia è una matrice diagonale in quato si assume il quadricottero essere simmetrico rispetto ai piani principali

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Il sistema consiste di 13 equazioni differenziali non lineari nelle 13 incognite costituenti le variabili di stato del sistema che sono le sei componenti di velocità e velocità angolare in assi corpo:

$$\underline{V}_B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \underline{\omega}_B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3)$$

mentre per la cinematica è stato scelto di rappresentare la rotazione del sistema di riferimento solidale al velivolo rispetto al sistema di riferimento inerziale tramite i quaternioni, al fine di alleggerire il calcolo ed eliminare le singolarità legate all'uso degli angoli di Eulero. Per il quaternione i rotazione si usa convenzionalmente una notazione del tipo

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

per il quale q_0 è la parte reale mentre q_1, q_2, q_3 sono le componenti della parte immaginaria contenete le coordinate del versore dell'asse di rotazione della terna mobile mentre μ è l'angolo di rotazione;

* *Ingegneria Aeronautica, Università di Roma "La Sapienza"*

$$\begin{cases} q_0 = \cos \frac{\mu}{2} \\ q_1 = \sin \frac{\mu}{2} \cos \alpha \\ q_2 = \sin \frac{\mu}{2} \cos \beta \\ q_3 = \sin \frac{\mu}{2} \cos \gamma \end{cases} \quad (5)$$

La posizione è invece descritta dalle coordinate del baricentro del quadricottero rispetto alla terna NED inerziale con: $\underline{P}_E = [X_E, Y_E, Z_E]^T$.

La matrice 4x4 elaborata sulla base delle 3 componenti di velocità angolare e utile per calcolare le relazioni differenziali del quaternione ha la forma:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{\underline{\omega}}^T \\ \underline{\underline{\omega}} & \underline{\underline{\dot{\omega}}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Infine si riporta la relazione della matrice di trasformazione da assi corpo ad assi NED (\underline{L}_{EB}) sia nella rappresentazione con angoli di Eulero che nella rappresentazione tramite quaternione:

$$\underline{L}_{EB} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} = \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

3 SCRITTURA DI FORZE E MOMENTI

I vettori di Forza e momento vanno scritti rispetto agli assi corpo, tra le azioni agenti sul velivolo si considerano la forza peso F_P , la spinta generata dalle 4 eliche F_T e la forza aerodinamica F_A ; il momento esterno G_T invece si considera dovuto solamente all'opportuna combinazione delle azioni propulsive.

Il vettore della forza peso in assi corpo è ottenuto come segue:

$$\underline{F}_P = \underline{L}_{BE} \cdot m \underline{g}_E = m \underline{L}_{BE} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = m \cdot g \cdot \begin{bmatrix} 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_0 q_1 - q_2 q_3) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Il vettore delle forze aerodinamiche viene scritto considerando solo la resistenza aerodinamica in quanto il multirobotore non presenta superfici generatrici di forze portanti; per la resistenza si scrive il contributo lungo i tre assi principali considerando per ogni asse la superficie ad esso normale esposta alla corrente e il coefficiente di resistenza legato a tale superficie. In questo modo risulta semplice scrivere la resistenza rispetto alle tre componenti di velocità in assi corpo:

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} D_{X_B} \\ D_{Y_B} \\ D_{Z_B} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \begin{bmatrix} u \cdot |u| S_{nX} C_{Dx} \\ v \cdot |v| S_{nY} C_{Dy} \\ w \cdot |w| S_{nZ} C_{Dz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Infine si scrive il vettore della forza propulsiva ottenuto come somma delle spinte prodotte dalle 4 eliche, si considera che esse siano montate per generare spinta nella

direzione verticale opposta al verso positivo di Z_B (N.B. le T_i non sottolineate sono i moduli delle forze e non i vettori):

$$\underline{F}_T = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Nel computo del momento esterno si considera solo il contributo legato alla combinazione delle forze propulsive delle eliche moltiplicato per la distanza tra queste ultime e il baricentro:

$$\underline{G}_T = \sum_{i=1}^4 \underline{r}_i \wedge \underline{T}_i + \underline{C}_i \quad (12)$$

dove \underline{T}_i è il vettore della forza generata dall' i -esima elica mentre \underline{r}_i è il vettore posizione del baricentro dell' i -esima elica rispetto al baricentro del velivolo. Se si esegue il calcolo assumendo le eliche poste sullo stesso piano del baricentro e la forza da esse generate puramente verticale si ottiene:

$$\underline{G}_T = \begin{bmatrix} \frac{L_y}{2} (T_4 + T_3 - T_2 - T_1) \\ \frac{L_x}{2} (T_4 + T_1 - T_3 - T_2) \\ (C_1 + C_3 - C_2 - C_4) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Infine C_i rappresenta la coppia trasmessa dall' i -esima elica all'albero (e dunque scaricata sul corpo del velivolo), tale coppia è legata alla potenza dissipata e alla resistenza aerodinamica della pala ed ha stesso modulo e direzione ma verso opposto rispetto alla coppia fornita dal motore all'elica, per tale motivo il verso della coppia indicata è opposto al verso di rotazione dell'elica a cui fa riferimento; secondo quanto riportato in G_T si assume che, viste dall'alto verso il basso, le eliche 1 e 3 ruotano in senso antiorario mentre 2 e 4 ruotano in senso orario. In questo modello viene trascurato, nel computo del momento esterno, il contributo giroscopico dato dalle parti rotanti di elica e motore in quanto queste componenti hanno una massa piccola rispetto alla massa dell'intero velivolo.

Il termine \underline{G}_A rappresenta invece i momenti aerodinamici, per essi si considera un modello lineare rispetto alle tre componenti della velocità angolare e le costanti in gioco sono poste pari a $C_{DR} = 0.01 \text{ kg m}^2/\text{s}$ in accordo con quanto riportato dalla letteratura; il vettore dei momenti aerodinamici vale quindi:

$$\underline{G}_A = -C_{DR} [p, q, r]^T \quad (14)$$

4 MODELLO DI QUADROTOR

Il modello utilizzato è un quadrotor la cui schematica è riportata in figura, mentre nella tabella sono riportati i dati costruttivi del drone. Si considerano i quattro motori disposti nei quattro vertici di un quadrato mentre la parte centrale contenente l'elettronica e il corpo centrale del frame è considerata, ai fini del calcolo dell'inerzia, come una sfera uniforme la cui massa e il cui raggio sono riportati in tabella. Per il calcolo dell'inerzia si considerano anche delle masse concentrate nel punto di posizionamento dei motori che rappresentano l'insieme di motore, elica, controllore di velocità e braccio del telaio. La batteria invece viene considerata posizionata sotto il corpo centrale, allineata con l'asse Z_B ad una distanza dal baricentro assunta pari a 0.06 m. Per le azioni propulsive vengono formulati due differenti modelli spiegati nei due paragrafi seguenti.

Parametro	Valore	note	nome nella classe
Lx	0.241 m	distanza tra motori adiacenti	Lx
Ly	0.241 m	il drone ha base quadrata	Ly
massa	1.0 kg	MTOW assunto	mass
massa batteria	0.3 kg	massa della batteria	battery_mass
massa corpo	0.54 kg	massa del corpo centrale	body_mass
massa motore	0.04 kg	massa motore+elica+ESC+braccio	motor_mass
CdX=CdY=CdZ	0.2	coefficiente di resistenza aerodinamica lungo X_B, Y_B, Z_B	Cd[0:3]
SnX=SnY	0.02 m ²	superficie normale assi X_B, Y_B	Sn[0], Sn[1]
SnZ	0.05 m ²	superficie normale asse Z_B	Sn[2]
CDrot	0.01 kg m ² /s	Coefficiente di coppia resistiva aerodinamica	CD_R

Table 1: Dati del modello di quadrotor

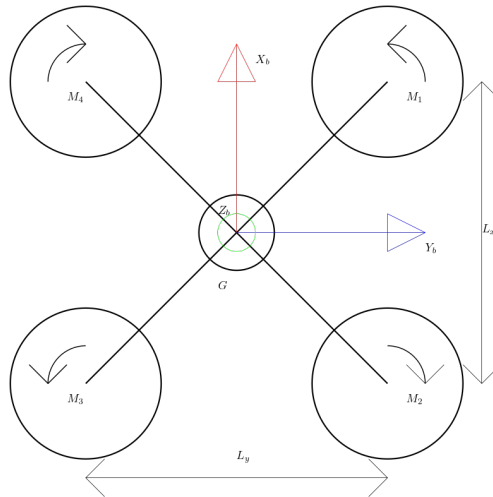


Figure 1: Vista 2D dall'alto (verso negativo di asse Z_B) del quadricottero di cui si è formulato il modello.

4.1 Modelli del motore

Per simulare la spinta e la coppia forniti dalle eliche sono stati formulati due diversi modelli del blocco propulsivo: un primo modello più semplice con una relazione lineare tra spinta e valore della manetta e un secondo modello con relazione lineare tra velocità di rotazione e manetta. Il motore usato è di tipo Brushless azionato da un controllore di velocità elettronico che riceve in input un comando sulla velocità di rotazione desiderata e genera la forma d'onda ai tre contatti di output necessaria a garantire tale velocità; tale motore muove un'elica avente diametro pari ad 8" o 0.2024 m

MODELLO CON SPINTA LINEARE RISPETTO ALLA MANETTA modello implementato in QuadEnv3, la spinta e la coppia dipendono linearmente dalla manetta, le equazioni sono:

$$F = F_{MAX} \cdot \delta T \quad Q = K_T \cdot F \quad (15)$$

dove $F_{MAX} = 9.815 \text{ N}$ è la spinta massima assunta in base al tipo di motore ed elica usata; $K_T = 0.01419 \text{ m}$ invece rappresenta il rapporto tra coppia e spinta calcolato in base alle prestazioni dell'elica montata.

MODELLO CON NUMERO DI GIRI LINEARE RISPETTO ALLA MANETTA modello implementato in tutte le versioni successive al 3, in cui la manetta controlla linearmente la velocità di rotazione dei rotori (il controllo elettronico si assume istantaneo nel regolare la velocità di rotazione), la spinta e la coppia vengono poi ottenute moltiplicando il quadrato del numero di giri al secondo per due coefficienti ottenuti dai dati prestazionali dell'elica e dai dati ambientali; in generale la relazione tra $N[\text{giri/s}]^2$ e spinta e coppia non è lineare ma dipende dalla velocità del flusso che l'elica incontra e dalla densità, in questo modello tali grandezze vengono assunte costanti e in particolare la velocità viene assunta nulla considerando dunque il velivolo operante in un intorno della condizione di hovering. Le equazioni per questo modello sono:

$$F = K_f \cdot N_{prop}^2 \quad Q = K_q \cdot N_{prop}^2 \quad (16)$$

dove $N_{prop} = N_{max} \cdot \delta T$ in cui $N_{max} = KV \cdot V_{n_{batt}}/60 = 1425 \text{ RPM/V} \cdot 11.1 \text{ V}/60 = 11100 \text{ giri/s}$ in cui KV è il coefficiente di giri massimi per Volt di tensione di alimentazione dipendente dal modello di motore usato mentre V_{batt} è la tensione nominale della batteria di alimentazione.

I coefficienti $K_f = 1.425e - 4 \text{ N s}^2$ e $K_q = 2.217e - 6 \text{ N m s}^2$ sono dei parametri prestazionali legati all'elica e alle condizioni ambientali e vengono assunti costanti.

5 INTEGRAZIONE

Le equazioni differenziali elaborate come indicato sopra costituiscono un sistema del tipo $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$, dove le variabili di controllo sono i gradi di ammissione δT_i dei quattro motori, che viene integrato con il metodo a passo fisso h di Runge-Kutta al quarto ordine, per il quale si riporta brevemente l'algoritmo per la j -esima componente del vettore \underline{f} :

$$\dot{x}_j = \frac{dx_j}{dt} = f_j(\underline{x}, \underline{u}) \quad (17)$$

Si discretizza il dominio temporale in N intervalli separati da un passo pari ad $h[s]$ e si indica con $x_{j,n}$ il valore del j -esimo stato al passo n , dunque si ottiene:

$$x_{j,n+1} \cong x_{j,n} + \frac{K_{j,1}}{6} + \frac{K_{j,2}}{3} + \frac{K_{j,3}}{3} + \frac{K_{j,4}}{6} \quad (18)$$

dove:

$$K_{j,1} = h \cdot f_j(\underline{x}_n, \underline{u}_n); \quad (19)$$

$$K_{j,2} = h \cdot f_j\left(\underline{x}_n + \frac{K_1}{2}, \underline{u}_n\right); \quad (20)$$

$$K_{j,3} = h \cdot f_j\left(\underline{x}_n + \frac{K_2}{2}, \underline{u}_n\right); \quad (21)$$

$$K_{j,4} = h \cdot f_j(\underline{x}_n + K_3, \underline{u}_n). \quad (22)$$

Tale metodo richiede 4 valutazioni delle equazioni del moto per ogni passo di integrazione, dunque risulta comodo sfruttare la maggiore stabilità ed efficienza computazionale dei quaternioni rispetto alla relazione trigonometrica da implementare per calcolare la derivata temporale degli angoli di Eulero