

Assignment

Valutazione dei Prodotti Finanziari

Alunni:

Abner Arebalo Apaza
Giorgio Cappello
Martin Gjoni
Andrea Enrico Ratti
Riccardo Scalia

Professori:

Prof. Bianchetti
Prof. Terraneo
Prof. Daluiso
Prof. Moreni
Prof. Marazzina

Anno Accademico:

2023-2024

Indice

1	Esercizio 1 - Bianchetti, Terraneo	1
1.1	Punto A	1
1.2	Punto B	2
1.3	Punto C	2
1.4	Punto D	2
2	Esercizio 2 - Moreni, Daluiso	3
2.1	Parte 1	3
2.2	Parte 2	5
3	Esercizio 3 - Marazzina	7
3.1	Convergenza rispetto al sottostante	11
3.2	Convergenza temporale	12
3.3	Convergenza combinata	12
	Bibliografia	13

1 Esercizio 1 - Bianchetti, Terraneo

I primi due punti dell'esercizio richiedono il pricing di bond rispettivamente a tasso fisso e a tasso variabile su base EURIBOR 6M. I dati di riferimento saranno un nominale di 100EUR scelto per agevolare il calcolo percentuale e per allinearsi alle consuetudini di mercato, un tasso cedolare annualizzato R_n , t il tempo di riferimento, T_n la maturity del bond inizializzata a 5 anni e 4 mesi ed infine l'issuer credit z-spread di 200 basis points.

Si noti che il file Excel *Gruppo1* fa utilizzo di macro. Ciò potrebbe creare problemi di sicurezza in quanto la MS Suite blocca i file di provenienza sconosciuta. In caso di problemi di apertura del file rimaniamo a disposizione per trovare una soluzione.

Segue la risoluzione

1.1 Punto A

Il pricing di un *Fixed Rate Bond* o FiRB si effettua applicando la seguente formula ai dati forniti.

$$V(t, T_n) = NR_n A_{x,n}^I(t) + NP_x^I(t, T_n)$$

in cui si noti che $A_{x,n}^I(t)$ è l'Issuer dependent defaultable annuity definita come segue

$$A_{x,n}^I(t) = \sum_{i=i_0(t)}^n P_x^I(t, T_n) \tau_i$$

Essa dipende da due quantità: la prima è $P_x^I(t, T_n)$ che rappresenta l'Issuer's risky ZC Bond, mentre la seconda è τ_i ossia la year fraction per l'intervallo di tempo di riferimento.

Si rende dunque necessario calcolare le year fraction in riferimento alla data di pagamento della cedola in modo da poter estrarre i valori di ogni cedola semestrale tramite l'applicazione dalla seguente formula chiusa valida $\forall i \in [1, \dots, n]$

$$C_i = R_i \tau_i$$

Fatto ciò bisogna interpolare la curva EURIBOR 6M per estrapolarne i valori ai tempi di riferimento e calcolare il discount rate necessario per la computazione del prezzo del Bond. Ciò si effettua tramite un algoritmo Visual Basic che è allegato nel blocco note *Interpolation.txt*.

Definiti tali valori si può procedere al clean pricing del Bond FiRB per i valori di riferimento calcolando il Net Present Value (NPV) come somma dei NPV_i i -esimi per ciascun stacco della cedola, ottenendo un valore pari a 106.7944EUR. Sommando ora al clean price la cedola semestrale ponderata per il tempo otterremo il valore del dirty price Bond FiRB pari a 107.2957EUR. Si noti che il rapporto tra clean price e dirty price è espresso tramite la seguente uguaglianza

$$V_{dirty}(t, T_n) = V_A(t, T_{i_0(t)}, I) + V_{clean}(t, T_n, I)$$

in cui $V_A(t, T_{i_0(t)}, I)$ è l'accrued interest.

1.2 Punto B

Per un Bond di tipo Floating Rate (FRB) la funzione di prezzo cambia per tener conto della mobilità del rate. La formula si modifica dunque come segue

$$V(t, T_n) = NP_x^I(t, T_{i_0(t)}) [L_y(T_{i_0(t)-1}, T_{i_0(t)}) + \Delta_n] \tau_{i_0(t)} + \\ + N \sum_{i=i_0(t)+1}^n P_x^I(t, T_i) [F_{y,i}(t) + \Delta_n] \tau_i + NP_x^I(t, T_n)$$

in cui $L_y(T_{i_0(t)-1}, T_{i_0(t)})$ è il floating rate, che solitamente è fissato a T_{i-1}^F . In alcuni casi (come questo) la formula è anche completata da un coupon spread Δ_n tale che $\forall i \in [1, \dots, n]$

$$C_i = [L_y(T_{i-1}, T_i) + \Delta_n] \tau_i$$

ossia la cedola tiene conto sia del coupon spread che del floating rate; infine il termine $[F_{y,i}(t) + \Delta_n] \tau_i$ può essere approssimato come il valore atteso in \mathbb{Q} della cedola, ossia $E_t^{\mathbb{Q}}[C_i]$.

Segue che il calcolo di Δ_n è fondamentale nella risoluzione numerica dell'esercizio. Si entra infatti in una dinamica di tipo Cap & Floor in cui il Floor è posto a 0 (un bond negativo avrebbe poco senso).

Ciò che emerge è che se le cedole fossero negative (eccezion fatta per l'ultima), allora ad ognuna di esse va aggiunto il prezzo del floorlet corrispondente (calcolato a partire dalla volatilità ottenuta interpolando tra 5 e 6 anni i rispettivi dati tabulati) con riferimento ad una dinamica Bachelier (si faccia riferimento all'esercizio 2 per un maggior rigore riguardo tale dinamica). Tali floorlet sarebbero tali da impedire alla cedola di essere negativa.

In questo caso però i 50 bps sono sufficienti a rendere positive le cedole, ottenendo dunque un FRB clean price di 92.3522EUR e un dirty price di 92.3780EUR.

1.3 Punto C

La terza sezione impiega l'uso di una funzione di *ricerca obiettivo* che pareggi i prezzi dei due bond. Ciò viene eseguito tramite il comando interno di Excel; ciò permette di pareggiare i prezzi dei due bond tramite l'uso di un Δ calcolato passo per passo.

Come visibile nel secondo sheet del file di riferimento, un $\Delta = 325$ bps risolve l'esercizio.

1.4 Punto D

Le sezioni A, B e C vengono ripetute dopo aver interpolato la curva EUR OIS come nel foglio di calcolo dedicato. I risultati vengono riportati nella sezione Punto D e sintetizzati a seguire:

- Per il bond FiRB, il clean price è 107.6042EUR e il dirty price è 108.1056EUR
- Per il bond FRB, il clean price è 93.2345EUR e il dirty price è 93.2607EUR
- Il Δ che pareggia i prezzi è di 319 bps. Ciò è attendibile in quanto la differenza tra rispettivi prezzi è sostanzialmente equiparabile al caso di EURIBOR 6M. Si noti che la differenza dei tassi è dovuta alla diversa categoria a cui esse appartengono.

2 Esercizio 2 - Moreni, Daluiso

2.1 Parte 1

L'esercizio richiede il calcolo delle *default intensities* λ_1, λ_2 tramite bootstrap per gli intervalli di riferimento. Per fare ciò, noto il valore dell'upfront quotato, si deve dunque effettuare una operazione di "reverse engineering" dalla formula che calcola l'upfront a 3 e 5 anni riportate a seguire, prima per i 3 anni

$$UF^{3y} = LGD \sum_{i=1}^{n_{3y}} P(t, t_i) \left[e^{(-\lambda_{3y}(t_{i-1}-t))} - e^{(-\lambda_{3y}(t_i-t))} \right] - s \sum_{i=1}^{n_{3y}} \alpha_i P(t, t_i) \left[e^{(-\lambda_{3y}(t_i-t))} \right]$$

e poi per i 5 anni

$$UF^{5y} = LGD \sum_{i=1}^{n_{3y}} P(t, t_i) \left[e^{(-\lambda_{3y}(t_{i-1}-t))} - e^{(-\lambda_{3y}(t_i-t))} \right] - s \sum_{i=1}^{n_{3y}} \alpha_i P(t, t_i) \left[e^{(-\lambda_{3y}(t_i-t))} \right] +$$

$$+ e^{(-\lambda_{3y}(t_{n_{3y}}-t))} \left(LGD \sum_{i>n_{3y}}^{n_{5y}} P(t, t_i) \left[e^{(-\lambda_{5y}(t_{i-1}-t_{n_{3y}}))} - e^{(-\lambda_{5y}(t_i-t_{n_{3y}}))} \right] - s \sum_{i=1}^{n_{3y}} \alpha_i P(t, t_i) \left[e^{(-\lambda_{5y}(t_i-t_{n_{3y}}))} \right] \right)$$

Segue che UF^{5y} dipende direttamente da UF^{3y} che andrà dunque calcolato con priorità. Ciò si trasferisce alla stima dei λ : sarà necessario stimare λ_1 prima di λ_2 . Si ricorda che α_i è la year fraction e s il par-spread.

Una volta stimati i λ si potrà inoltre calcolare le probabilità di sopravvivenza tramite la seguente equazione

$$Surv_t(T) = Prob_t(\tau > T) = \exp \left[- \int_t^T \lambda(s) ds \right]$$

E' inoltre bene notare che per processi di Poisson non omogenei, il valore di λ è time-dependent per definizione

$$Prob_t(\tau \in [t, t + dt]) \approx \lambda(s) ds$$

Tale teoria, per quanto chiusa, presenta un processo che però è di difficile traduzione a livello pratico. E' infatti piuttosto complicato invertire le formule per ricavare esplicitamente λ in forma chiusa. Nonostante questa difficoltà però è comunque possibile calcolare i valori esatti seguendo il seguente schema operativo e utilizzando un solver numerico che simula un algoritmo di *ricerca obiettivo*.

Di seguito viene sintetizzato quanto eseguito nel foglio Excel *Credito-parte1* allegato, spiegandone brevemente i passaggi. Inizializzati la cedola $C = 1\%$, il risk-free rate $r = 3\%$ e la recovery $R = 40\%$,

- si assegnano valori arbitrari ai λ per impostare il calcolo
- si calcolano gli integrali in dipendenza da λ
- si computano default leg cumulata e premium leg cumulata
- si stimano gli upfront per i valori di λ arbitrari

- calcolati gli upfront "arbitrari", si impone nulla la differenza tra gli upfront expected (dai dati) e quelli arbitrari, andando a modificare i valori di λ tramite il solver numerico

Tale processo porta ai valori $\lambda_1 = 4.9347\%$ e $\lambda_2 = 4.4414\%$. Si osservi che per convenzione l'anno viene considerato composto da 12 mesi di 30 giorni ciascuno, per un totale di 360 giorni. Questo è utile perché semplifica il calcolo degli interessi su base giornaliera e può essere facilmente implementato nei sistemi di calcolo finanziario.

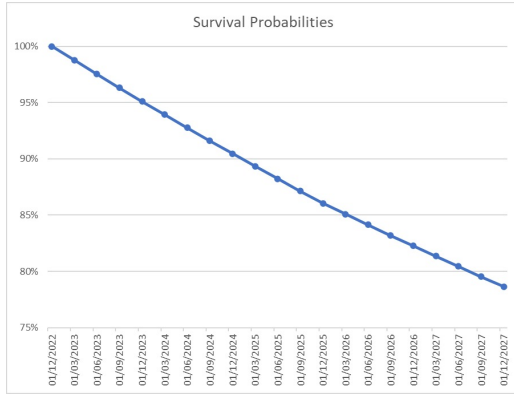
	T	discounted	lambda	Integral lambda	survival probability	year fraction	cumulated premium leg	cumulated default leg	Upfront expected	Upfront mercato	Differenza upfront
t	20/12/2022	1		0	100%		0	0			
	20/03/2023	0.9925281	4.935%	0.012336896	98.77%	0.25	0.002450896	0.007301697			
	20/06/2023	0.9849478	4.935%	0.024947946	97.54%	0.25555556	0.004905966	0.01461683			
	20/09/2023	0.9774254	4.935%	0.037558995	96.31%	0.25555556	0.007311753	0.021785123			
	20/12/2023	0.9700413	4.935%	0.050032968	95.12%	0.25277778	0.009644137	0.028734226			
	20/03/2024	0.9627129	4.935%	0.062506941	93.94%	0.25277778	0.011930206	0.035545336			
	20/06/2024	0.9553604	4.935%	0.07511799	92.76%	0.25555556	0.014195003	0.042293533			
	20/09/2024	0.9480639	4.935%	0.08772904	91.60%	0.25555556	0.016414337	0.048906269			
	20/12/2024	0.9409016	4.935%	0.100203012	90.47%	0.25277778	0.018565957	0.055316802			
	20/03/2025	0.9338713	4.935%	0.112539909	89.36%	0.25	0.020652136	0.061531935			
	20/06/2025	0.926739	4.935%	0.125150958	88.24%	0.25555556	0.022741867	0.067758505			
	20/09/2025	0.9196611	4.935%	0.137762007	87.13%	0.25555556	0.024789649	0.073860085			
	20/12/2025	0.9127134	4.935%	0.15023598	86.05%	0.25277778	0.026774952	0.079775093	0.053000141	0.053	1.41466E-07
	20/03/2026	0.9058937	4.441%	0.161339503	85.10%	0.25	0.028702248	0.084939658			
	20/06/2026	0.898975	4.441%	0.17268977	84.14%	0.25555556	0.030635261	0.090120183			
	20/09/2026	0.8921093	4.441%	0.184040037	83.19%	0.25555556	0.032531861	0.095203121			
	20/12/2026	0.8853697	4.441%	0.195266932	82.26%	0.25277778	0.034372888	0.100136817			
	20/03/2027	0.8787542	4.441%	0.206370454	81.35%	0.25	0.036160124	0.104926064			
	20/06/2027	0.8720429	4.441%	0.217720721	80.44%	0.25555556	0.037952661	0.109730111			
	20/09/2027	0.8653828	4.441%	0.229070989	79.53%	0.25555556	0.039711433	0.114443664			
	20/12/2027	0.8588451	4.441%	0.240297883	78.64%	0.25277778	0.041418669	0.11901882	0.07760015	0.0776	1.50432E-07

La tabella appena sopra sintetizza i passaggi appena elencati e dà origine a due interessanti osservazioni. In primo luogo, si osservi che per discretizzare l'integrale per λ si è utilizzata una somma cumulata che approssima l'integrale $int(\lambda, t_i)$ a partire dall'integrale al periodo t_{i-1} come segue

$$int(\lambda, t_i) = int(\lambda, t_{i-1}) + \lambda \frac{(t_i - t_{i-1})}{360}$$

La seconda osservazione è più delicata e argomento di discussione: per quanto espresso dalla teoria è lecito supporre che il valore di λ_2 sia maggiore di λ_1 , ma in questo caso non avviene. Il team crede che ciò sia dovuto alla differenza di upfront imposto troppo piccola: ripetendo l'esercizio con UF^{3y} invariato e $UF^{5y} = 0.1$ si ottiene $\lambda_2 = 7.113\%$, valore senza dubbio più verosimile.

Calcolati tali valori siamo anche in grado di calcolare le probabilità di sopravvivenza da 0 a 5 anni qui a lato riportate. Come atteso, essa decade nel corso del tempo.



Date	P
20/12/2022	100%
20/03/2023	98.77%
20/06/2023	97.54%
20/09/2023	96.31%
20/12/2023	95.12%
20/03/2024	93.94%
20/06/2024	92.76%
20/09/2024	91.60%
20/12/2024	90.46%
20/03/2025	89.36%
20/06/2025	88.24%
20/09/2025	87.13%
20/12/2025	86.05%
20/03/2026	85.10%
20/06/2026	84.14%
20/09/2026	83.19%
20/12/2026	82.26%
20/03/2027	81.35%
20/06/2027	80.43%
20/09/2027	79.53%
20/12/2027	78.64%

Tabella 1: Survival Probability

2.2 Parte 2

Concluso dunque il calcolo dei λ , si può procedere al calcolo del *Credit Value Adjustment* per il caso e i dati presentati.

E' necessario stabilire un apparato teorico preciso prima di implementare questo calcolo a calcolatore. Si parta dal sottostante che si evolve secondo una dinamica Bachelier

$$dX(t) = \sigma^X dW(t)$$

con σ^X costante nel tempo e W moto Browniano standard in probabilità \mathbb{Q} .

Ricordiamo inoltre che il CVA è calcolabile in forma chiusa tramite la seguente

$$CVA = -lgd * \int_0^T V^{POS}(s) \mathbb{Q}(\tau_C \in ds) = -lgd * \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(0, \tau_C) V_{\tau_C}^+ \mathbb{1}_{\tau_C \leq T}]$$

in cui lgd è il valore della *loss-given-default*, ossia la percentuale di esposizione che si prevede di perdere in caso di default del debitore. Inoltre definiamo V^{POS} come il prezzo equo positivo del derivato in assenza di default come

$$V^{POS} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(0, s) V_s^+]$$

in cui $D(0, s) V_s^+$ è il *discounted value*.

Segue immediatamente che per un calcolo accurato del CVA è fondamentale prezzare l'opzione secondo Bachelier in maniera corretta, pena un errore intrinseco che negherebbe la bontà di qualsiasi modello numerico implementato. Fortunatamente esiste una formula chiusa che permette di prezzare l'opzione. Di seguito la dimostrazione per X sottostante, T maturity, K strike, e r risk-free rate

$$V_s^+ = \mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[D(s, T)(X_T - K)] = \mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-s)}(X_T - K)]$$

e segue che

$$V^{POS} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rs}[e^{-r(T-s)}(X_s - K)^+]] = e^{-r(T-s)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rs}(X_s - K)^+]$$

osservando ora che integrando la dinamica di Bachelier si ha un prezzo del sottostante al tempo s pari a

$$X_s = X_0 + \sigma^X \sqrt{s}Z$$

con $Z \sim N(0, 1)$, allora il prezzo per una call option in dinamica Bachelier

$$V^{POS} = e^{-rs} \left[(X_0 - K) \Phi \left(\frac{X_0 - K}{\sigma^X \sqrt{s}} \right) + \sigma^X \sqrt{s} \phi \left(\frac{X_0 - K}{\sigma^X \sqrt{s}} \right) \right]$$

con Φ *cumulative distribution function* e ϕ *probability distribution function* della normale $N(0, 1)$. Per un maggior rigore, sia $d_1 = \frac{X_0 - K}{\sigma^X \sqrt{T}}$, allora per $Z > d_1$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rs}(X_0 + \sigma^X \sqrt{s}Z - K)^+] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rs}(X_0 + \sigma^X \sqrt{s}Z - K) \mathbb{1}_{Z > d_1}] = \\ &= \int_{d_1}^{\infty} e^{-rs}(X_0 + \sigma^X \sqrt{s}z - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= e^{-rs}(X_0 - K) \int_{d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + e^{-rs} \sigma^X \sqrt{s} \int_{d_1}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

riconducibile facilmente alla formula chiusa sopra. Questo prezzo andrà poi integrato nel calcolo del CVA.

Avendo dunque presentato la struttura teorica sottostante, si analizzi il codice *credito-parte2*. Dopo aver inizializzato i dati come da ipotesi, vengono definite due funzioni che impostano il prezzo secondo Bachelier e l'integranda per il calcolo del CVA. Per i dati forniti, il *Credit Value Adjustment* è pari a -0.5459.

Definito dunque quello che è il valore esatto della CVA mediante formula chiusa, ha senso ora inserire uno studio più accurato sulla possibilità di default del debitore e sui tempi di default. Per fare ciò si introduce una simulazione Monte Carlo su quest'ultimi. Considerando il *cumulated hazard rate* al tempo t per maturity T

$$\Lambda_t(T) = \int_t^T \lambda(u) du$$

allora si definisce il tempo di default τ come $\tau \sim \Lambda_t^{-1}(\xi)$ con ξ variabile aleatoria esponenziale standardizzata; più precisamente

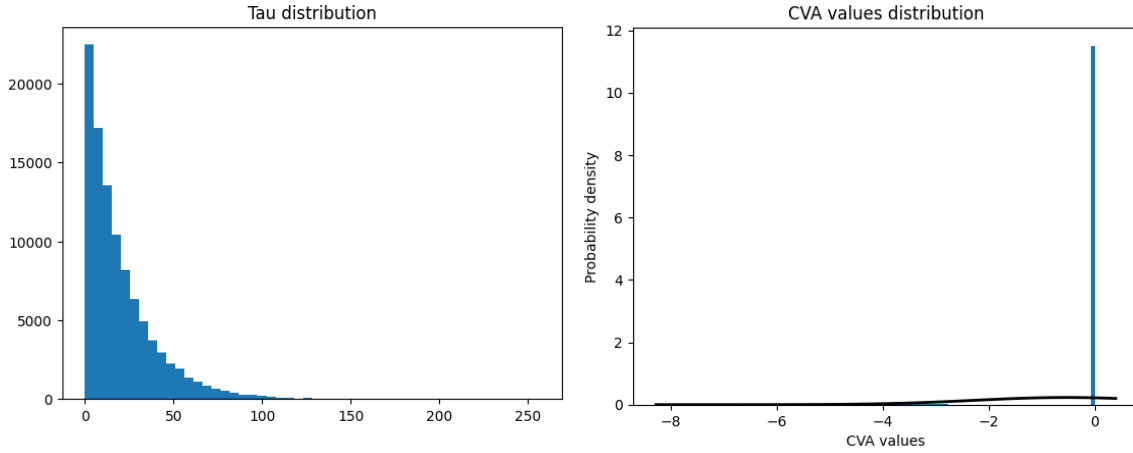
$$\tau = \inf\{u : \Lambda_t(u) \geq \xi\}$$

Ciò si traduce in un processo numerico che simula i realizzazioni di ξ detti ξ_i per calcolare i tempi di default. Si noti ora che per λ costante (come nel nostro caso) e $t = 0$ si ha $\Lambda_0(u) = \lambda u$ e $\tau = \frac{\xi}{\lambda}$.

Inoltre siamo anche in grado di ricostruire una distribuzione esponenziale standardizzata a partire da una distribuzione normale standard U_i semplicemente ponendo $\xi_i = -\ln(1 - U_i)$.

Ciò dà origine alla seconda parte del codice, che dopo aver simulato i tempi di default simula i valori della CVA e ne fa un intervallo di confidenza al 98%. E' bene notare che per i tempi di default maggiori di T il CVA viene inizializzato a 0, mentre nel caso contrario esso viene calcolato come effettuato nella prima parte dell'esercizio. Le motivazioni di ciò sono da ritrovarsi nella definizione di CVA e in particolare nella funzione caratteristica $\mathbb{1}_{\tau_1 \leq T}$ che annulla il CVA nel caso in cui non venga rispettata.

L'intervallo di confidenza sarà $(-0.5583, -0.5325)$, contenendo dunque il valore esatto calcolato in precedenza. Di seguito i grafici di distribuzione dei tempi di fallimento e delle simulazioni di CVA.



3 Esercizio 3 - Marazzina

Prima di giungere ai risultati numerici è necessario presentare dei risultati teorici che giustifichino quanto fatto nel codice e che siano da supporto nella lettura dello stesso.

Si introduce dunque il modello CEV (*Constant elasticity of variance*) che è descritto tramite una equazione differenziale stocastica della seguente forma

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)^\beta dW(t)$$

che formalizza il movimento del sottostante S . E' bene notare che per $S \geq 1$, la componente stocastica è amplificata per $\beta > 1$ e smorzata per $\beta < 1$ (tenendo presente che $\beta > 0$ e che il caso particolare $\beta = 1$ riporta al modello di Black & Scholes). Analogamente per $S < 1$ si invertono le disuguaglianze di sopra. Senza perdere le generalità, si consideri $S \geq 1$.

Costruendo dunque la PDE e il problema di Cauchy associato al portafoglio privo di rischio per una opzione digitale $V(t, S(t))$ (che segue da quanto visto per una Call Europea) $\forall t \in [0, T], \forall s \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + rS(t) \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^{2\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \\ V(T, S(T)) = \mathbb{1}_{S_T > K} \end{cases}$$

con

$$\mathbb{1}_{S_T > K} = \begin{cases} 1 & S_T > K \\ 0 & S_T \leq K \end{cases}$$

è possibile sviluppare una strategia numerica di risoluzione di tale equazione per ottenere il prezzo equo $V(0)$ della option. È bene notare che il procedimento che verrà presentato e conseguentemente implementato è basato sul metodo alle differenze finite di Crank-Nicolson.

Il punto di partenza corrisponde al troncamento del dominio; le scelte effettuate in questa fase andranno a influenzare i risultati numerici in seguito. Per ovviare a ciò si è deciso di impostare i limiti in maniera estremamente conservativa, ipotizzando che il prezzo del sottostante non diventi negativo e non superi quattro volte il valore dello stesso a tempo 0 ($S_{min} = 0.2S_0$; $S_{max} = 4S_0$). Un maggior rigore ci porta ad affermare con certezza che

$$\begin{cases} V(t, S_{min}) = 0 \\ V(t, S_{max}) = e^{-rT} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_T > K}] = e^{-rT} \mathbb{P}(S_{max} > K) = e^{-rT} * 1 \end{cases}$$

In definitiva, le scelte di troncamento di minimo e di massimo sono accettabili se e solo se non è nulla la probabilità che a maturity l'opzione risulti *in the money*.

Imponendo questi troncamenti andiamo dunque a definire $S_i = S_{min} + i\Delta S$ con $\Delta S = \frac{S_{max} - S_{min}}{N}$ dove N è il numero di intervalli per il sottostante, $S_{max} = \omega S_0$, $\omega > 1$ e $S_{min} = \alpha S_0$, $\alpha < 1$. Ora per la discretizzazione temporale dell'intervallo $[0, T]$ sia $t_j = j\Delta t$, $\Delta t = \frac{T}{M}$ con M numero di intervalli temporali.

Allora utilizzando il metodo delle differenze finite di Crank-Nicolson si discretizzano le derivate temporali e rispetto al sottostante tramite il θ -metodo, come segue

$$\begin{aligned} 0 = & \theta \left(\frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} + rS_i \frac{V_{j,i+1} - V_{j,i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} S_i^{2\beta} \frac{V_{j,i+1} - 2V_{j,i} + V_{j,i-1}}{\Delta S^2} - rV_{j,i} \right) + \\ & + (1 - \theta) \left(\frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} + rS_i \frac{V_{j-1,i+1} - V_{j-1,i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} S_i^{2\beta} \frac{V_{j-1,i+1} - 2V_{j-1,i} + V_{j-1,i-1}}{\Delta S^2} - rV_{j-1,i} \right) \end{aligned}$$

e a seguire si osserva che

$$0 = \theta \left(\frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} \right) = \frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t}$$

e che posto

$$\begin{aligned} J &= rS_i \frac{V_{j,i+1} - V_{j,i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} S_i^{2\beta} \frac{V_{j,i+1} - 2V_{j,i} + V_{j,i-1}}{\Delta S^2} - rV_{j,i} \\ \tilde{J} &= rS_i \frac{V_{j-1,i+1} - V_{j-1,i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} S_i^{2\beta} \frac{V_{j-1,i+1} - 2V_{j-1,i} + V_{j-1,i-1}}{\Delta S^2} - rV_{j-1,i} \end{aligned}$$

allora si conclude

$$\frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} + \theta(J) + (1 - \theta)(\tilde{J}) = 0$$

o in altri termini

$$(1 - \theta)(\tilde{J}) = - \left(\frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} + \theta(J) \right)$$

Questa forma sarà quella poi utilizzata per la stesura numerica del metodo; in particolare si decomponga il problema nel seguente modo.

Si definiscano i coefficienti A, B e C (*nel codice non è stato possibile definirli allo stesso modo; si ritrovano nella matrice L*), e D, E ed F (*che nel codice si riuniscono nella matrice R*) tali che

$$(1 - \theta) \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{j-1,i-1} \\ V_{j-1,i} \\ V_{j-1,i+1} \end{bmatrix} = -\theta \begin{bmatrix} D & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{j,i-1} \\ V_{j,i} \\ V_{j,i+1} \end{bmatrix}$$

con le rispettive definizioni per i coefficienti riportate qui sotto per il termine i -esimo (in cui riportiamo θ nelle definizioni per avere coerenza con quanto visto a lezione; sarebbe, ovviamente, ridondante considerare due volte i coefficienti)

$$A_i = (1 - \theta) \left(-r \frac{S_i}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right)$$

$$B_i = -\frac{1}{\Delta t} + (1 - \theta) \left(-r - \sigma^2 \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right)$$

$$C_i = (1 - \theta) \left(r \frac{S_i}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right)$$

$$D_i = -\theta \left(-r \frac{S_i}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right)$$

$$E_i = -\frac{1}{\Delta t} + (-\theta) \left(-r + \sigma^2 \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right)$$

$$F_i = -\theta \left(r \frac{S_i}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right)$$

E' bene notare che le matrici L e R hanno la seguente definizione, in cui i coefficienti si estendono lungo le tre diagonali principali. Inoltre entrambe le matrici presentano la prima e ultima riga come mostrato per motivi di condizioni al bordo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & E_1 & F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & E_2 & F_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D_{N-1} & E_{N-1} & F_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definendo ora il termine noto b_0 del problema di Cauchy

$$b_0 = \begin{bmatrix} b(1) \\ 0 \\ \dots \\ b(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{-rT} \end{bmatrix}$$

allora il prezzo equo per l'opzione digitale al variare del valore del sottostante è dato risolvendo iterativamente il seguente sistema lineare

$$L \begin{bmatrix} V_{j-1,0} \\ \dots \\ V_{j-1,N} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} V_{j,0} \\ \dots \\ V_{j,N} \end{bmatrix} + b_0$$

secondo il metodo di Eulero implicito e in cui l'incognita è il vettore al tempo t_{j-1} .

Infine si osservi il prezzo equo per una opzione digitale secondo il modello di Black & Scholes; la necessità di questo passaggio è giustificata dal fatto che per $\beta = 1$ i due modelli coincidono, fornendo un check sul codice prodotto e sulla soluzione esatta.

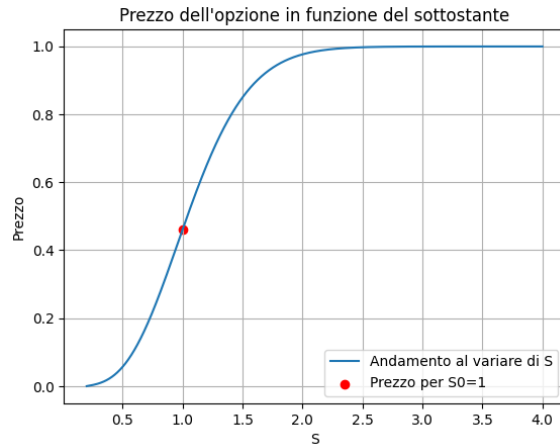
Segue che per una opzione digitale a scadenza T con sottostante S

$$\begin{aligned} D(0) &= e^{-rT} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_T > K}] = e^{-rT} \mathbb{P}(S_T > K) = \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}\left[S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z} > K\right] = \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right] = \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}\left[Z > -\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] = \\ &= e^{-rT} (1 - \mathbb{E}[Z \leq -d_2]) = e^{-rT} (1 - N(-d_2)) = \\ &= e^{-rT} N(d_2) \end{aligned}$$

con $Z \sim N(0, 1)$.

Lo studio teorico si traduce nel codice allegato.

Dopo aver inizializzato tutto il necessario, ossia $r = 0.1\%$, $\sigma = 0.4$ e $\beta = 0.5$, si studia l'andamento del prezzo dell'opzione al variare del prezzo del sottostante al tempo 0 come mostrato dal grafico a lato, evidenziando come per prezzi crescenti del sottostante il prezzo dell'opzione cresce fino a tendere a 1 come atteso. E' inoltre evidenziato il valore di riferimento del problema, ossia $S_0 = 1$. In questo punto l'opzione avrà prezzo equo $V(0, S_0) = 0.460531$ per griglia a 1500 intervalli temporali e 1000 intervalli di prezzo. Si noti che il controllo di coerenza con Black & Scholes restituisce un prezzo esatto di $V(0, S_0) = 0.421296$ e un prezzo CEV con $\beta = 1$ di $V(0, S_0) = 0.421393$. Ciò valida la bontà del codice prodotto poiché,



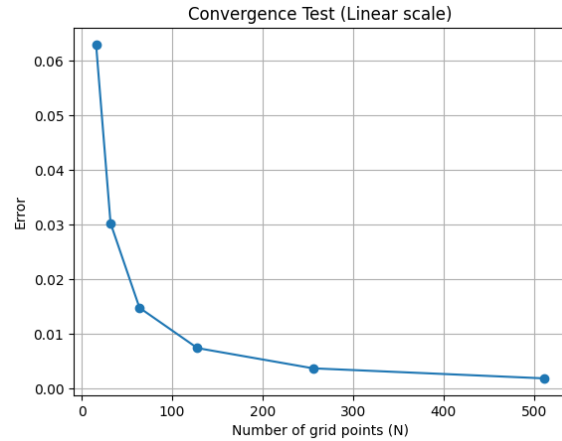
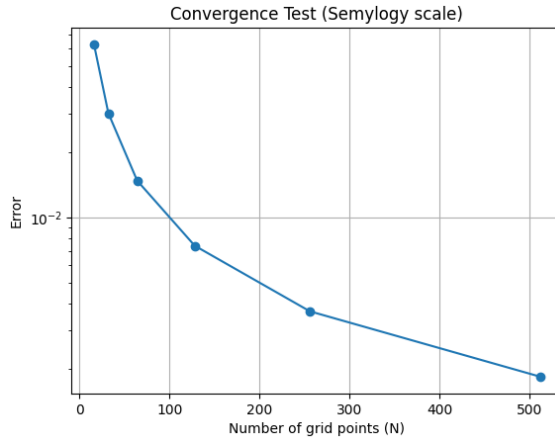
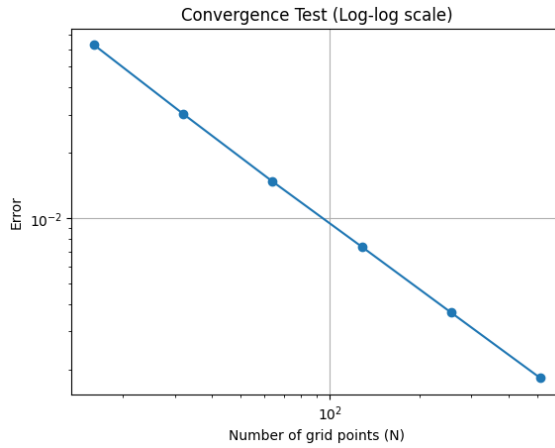
come atteso, i due metodi convergono allo stesso risultato a patto di infittire la griglia per CEV. Generalmente dunque è possibile affermare che il codice è stabile e che i risultati ottenuti coerenti con la teoria presentata.

3.1 Convergenza rispetto al sottostante

Nel codice *errore N* si studia la convergenza all'infittirsi della griglia rispetto al sottostante, andando a raddoppiare il numero di intervalli N e mantenendo costanti quelli temporali (M). Dopo aver ripetuto il codice di calcolo del prezzo si effettua un test di convergenza in assenza di soluzione esatta, seguendo lo studio proposto da Senning in *Verifying Numerical Convergence Rates*^[1]. In particolare, si utilizzano $\| \cdot \|_{\inf}$ per il calcolo dell'errore assoluto e la seguente approssimazione dell'ordine di convergenza q (la scelta di \log_2 segue dal fatto che si stanno raddoppiando gli intervalli di discretizzazione ad ogni test)

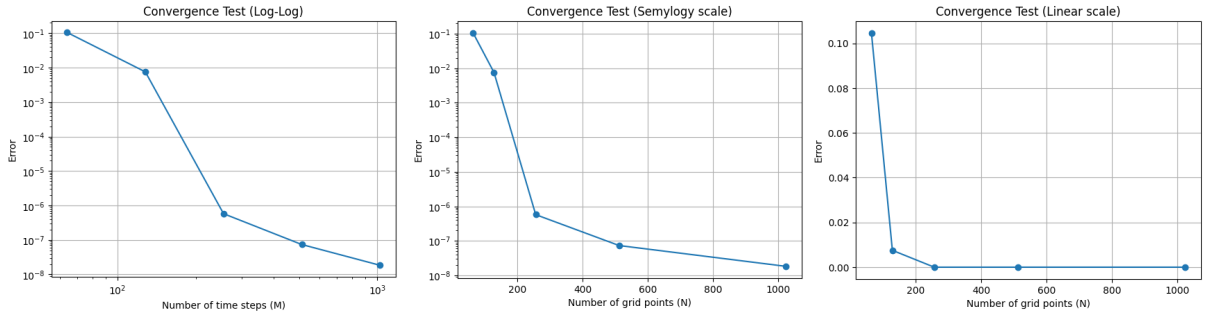
$$q \sim \log_2 \left(\left| \frac{err_i}{err_{i-1}} \right| \right)$$

in cui $err_i = prezzo_i - prezzo_{i/2}$ con $i \in [32, 64, 128, 256, 512, 1024]$ numero di punti della griglia. E' facile osservare come la convergenza sia lineare per la scala $\log - \log$ e soprattutto che tale ordine sia consistente indipendentemente dal numero di iterate. Ciò restituisce un risultato rilevante per l'implementazione pratica del codice in contesti lavorativi: aumentare le iterate rispetto al sottostante comporta una maggiore bontà dei risultati ma solamente in maniera lineare, ergo si rende necessaria una valutazione accurata per non aumentare eccessivamente il costo computazionale dell'algoritmo e dunque la sua velocità. Di seguito vengono riportate le convergenze in scala $\log - \log$, $\text{semi} - \log$, $\text{lineare} - \text{lineare}$.



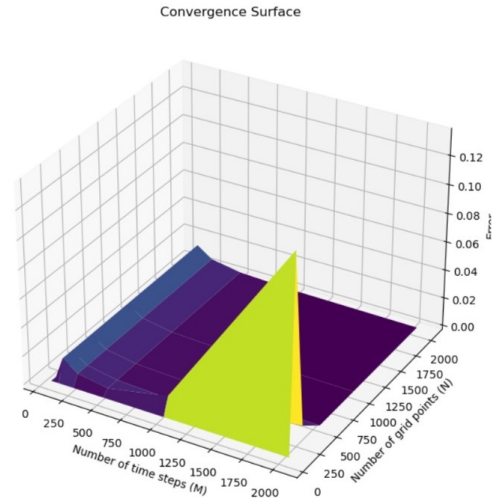
3.2 Convergenza temporale

Il codice *errore M* enfatizza invece l'andamento dell'errore all'infittirsi della griglia temporale, operando esattamente come sopra. La velocità di convergenza migliora leggermente passando a secondo ordine. Ha dunque senso preferire una griglia più fitta per quanto riguarda gli intervalli temporali. Analogamente a sopra si riportano le convergenze in scala *log – log*, *semi – logy*, *lineare – lineare*.



3.3 Convergenza combinata

Uno studio di convergenza combinata infine evidenzia un comportamento peculiare ma potenzialmente critico per il calcolo del prezzo dell'opzione digitale. In particolare, come da figura a lato, si osserva che il test di convergenza di Senning diverge per $N = 512$ fissato e M crescente. Entrando nel merito della questione, Carter e Giles evidenziano in *Convergence analysis of Crank–Nicolson*^[2] come per $|S_0 - K| < \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$ la derivata parziale rispetto al sottostante è discontinua e dunque il metodo oscilla per valori del sottostante vicini allo strike K . Una ulteriore analisi (ad esempio si consulti *Numerical Methods for Conservation Laws*^[3] di Hesthaven) evidenzia in realtà come questa discontinuità sia tipica dei metodi alle differenze finite e non specifica di Crank–Nicolson. Dunque ha senso effettuare la stima di prezzo per griglie di diversa densità sia temporale sia per quanto riguarda il sottostante.



Bibliografia

- Senning, Jonathan R. (2012-ultima versione 2024). Verifying Numerical Convergence Rates. KTH CompSci and Communications. [1]
- Runborg, Olof (2012). Numerical Solutions of Differential Equations. KTH CompSci and Communications. Spring. [1]
- Carter, Rebecca & Giles, Michael B. (2006) Convergence analysis of Crank–Nicolson and Rannacher time-marching. Oxford. Journal of Computational Finance. [2]
- Hesthaven, Jan (2018). Numerical Methods for Conservation Laws. Philadelphia, USA. SIAM Publishing. [3]