

Progetto Deblur

Irene Burri, Beatrice Zamagna, Giorgio Di Gregorio
Esame di Calcolo Numerico

1. Introduzione

Un'azienda vuole commercializzare un dispositivo di acquisizione immagini, del quale si sa che acquisisce con rumore Gaussiano additivo e sfocatura Gaussiana.

Il modello è quindi:

$$b = Ax_{true} + \eta$$

dove $A \in \mathbb{R}^{mn}$ è la matrice di sfocamento, $\eta \sim N(0, \sigma^2)$ è il rumore additivo con varianza σ^2 incognita, $b \in \mathbb{R}^{mn}$ è la vettorizzazione dell'immagine corrotta (acquisita) $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x_{true} \in \mathbb{R}^{mn}$ è la vettorizzazione dell'immagine originale $X_{true} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Il progetto è orientato all'implementazione di diversi metodi numerici che possano ricostruire l'immagine originale X partendo dalla sua versione corrotta b .

Il primo test sul funzionamento dei vari metodi implementati sarà effettuato usando come immagine X "data.camera()", importata dalle librerie di Python.

Inizializziamo un filtro di sfocatura gaussiano tramite una matrice A , avente diametro = 7 e varianza = 0.5, che applichiamo all'immagine X per ottenere la versione sfocata X_blur . Generiamo poi un rumore gaussiano η avente varianza = 0.1, che sommiamo a X_blur per ottenere l'immagine corrotta b .

Otteniamo il seguente confronto:



2. Metodi Numerici

È possibile risolvere il problema della ricostruzione dell'immagine X a partire da b tramite il seguente problema di ottimizzazione:

$$x^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (1)$$

2.1 Approccio Naive

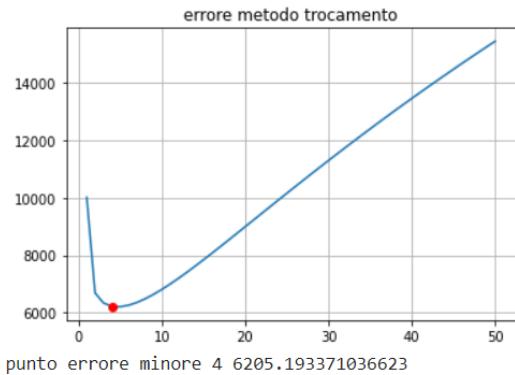
Il problema (1) può essere risolto attraverso l'algoritmo di discesa del gradiente, in cui il passo è scelto con l'algoritmo di backtracking. Ricordiamo che,

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2, \quad \nabla f(x) = A^T(Ax - b)$$

Al termine dell'esecuzione, ricostruiamo l'immagine x_{naive} .

2.2 Approccio con semiconvergenza

Modifichiamo l'algoritmo precedente in modo da ottenere l'errore tra l'immagine ricostruita al passo k e l'immagine originale, per ogni k. Dopo aver ottenuto il grafico, individuiamo il valore di k per cui si ha semiconvergenza (troviamo dunque il punto di minimo del grafico), e per tale valore ricostruiamo l'immagine X_{trunc} .



Qui a sinistra è riportato il grafico degli errori del metodo basato su semiconvergenza (il puntino rosso evidenzia il punto di minimo).

Qui in basso è invece riportato il confronto tra l'immagine originale e quelle ricostruite con due metodi appena descritti.



3. Metodo regolarizzato

Per risolvere la semiconvergenza è possibile utilizzare un metodo regolarizzato

$$x^* = \arg \min \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2 \quad (2)$$

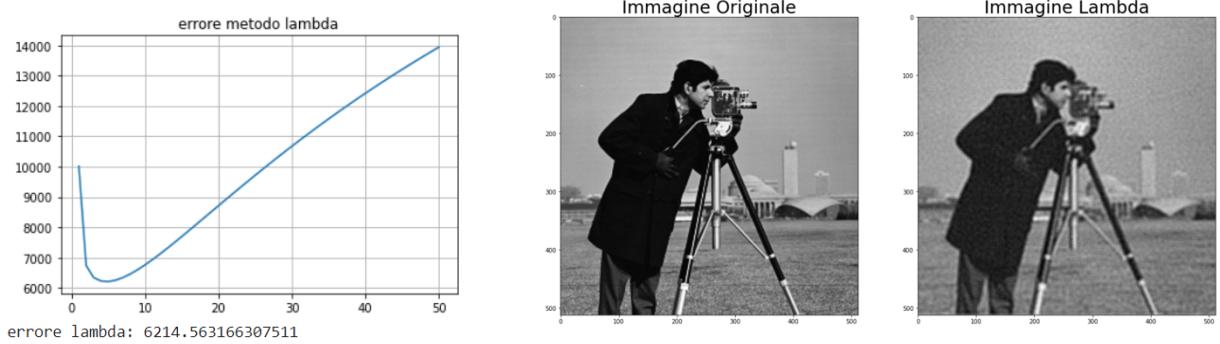
dove $\lambda > 0$ è il parametro di regolarizzazione.

Utilizziamo due approcci differenti: un metodo euristico e uno basato sul principio di discrepanza.

Il *metodo euristico* prevede di individuare il λ ottimo tramite una serie di stime successive, cercando quello che minimizza l'errore calcolato rispetto all'immagine originale.

Dopo aver eseguito 10 prove per individuare il lambda ottimale, partendo da 0.025 abbiamo concluso che con lambda minore o uguale 0.005, l'errore si stabilizza.

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2, \quad \nabla f(x) = A^T(Ax - b) + \lambda x$$



Il *metodo basato su discrepanza* è incentrato sull'individuazione del λ massimo che rispetti la seguente disequazione

$$\|Ax - b\|_2^2 \leq \|\eta\|_2^2$$

dove η è il rumore.



Il valore λ determinato con il metodo euristico è migliore di quello calcolato con il principio di discrepanza perché con esso è possibile confrontare l'immagine ricostruita con quella originale. In un problema reale non si ha accesso all'immagine originale e si usa di conseguenza il metodo di discrepanza che restituisce comunque una buona approssimazione di λ .

3.1 Variazione del regolarizzatore - norma 1

Fino ad ora abbiamo regolarizzato il problema utilizzando la norma a due. Ripetiamo le stesse procedure utilizzando la norma 1. Il problema può essere così formalizzato:

$$x^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$

Dove la funzione obiettivo ha gradiente:

$$A^T(Ax - b) + \lambda \operatorname{sign}(x)$$



3.2 Variazione del regolarizzatore - norma mista

Infine, regolarizziamo il problema con norma mista, ovvero:

$$x^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2 + \mu \|x\|_1 \quad (4)$$

la cui funzione gradiente è:

$$A^T(Ax - b) + \lambda x + \mu \operatorname{sign}(x)$$



4. Analisi dei risultati

Per ognuna delle soluzioni precedenti, si vuole calcolare:

- Errore relativo rispetto alla soluzione esatta x_{true} ;
- PSNR (Peak Signal To Noise Ratio).

Errori relativi:

Errore relativo immagine corrotta: 0.20823883221648254

Errore relativo metodo naive: 0.09073337962625203

Errore relativo metodo euristico: 0.09087038634634909

Errore relativo metodo discrepanza: 0.09489152739504338

Errore relativo metodo norma 1: 0.09072487000671296

Errore relativo metodo misto: 0.09505383307442014

PSNR:

PSNR immagine corrotta: 80.40043961155048

PSNR immagine naive: 80.59805056048705

PSNR immagine regolarizzata euristico: 80.54499344871233

PSNR immagine regolarizzata con discrepanza: 80.30299719515446

PSNR immagine regolarizzata con norma 1: 80.59716597612095

PSNR immagine regolarizzata con norma mista: 80.29983909900588

4.1 Test su immagine `data.camera()`, variando alcuni parametri

Vogliamo osservare come cambiano i risultati una volta modificati alcuni dei parametri iniziali. Tra questi vogliamo alterare:

- La varianza del rumore: aumentandone il valore, ci aspettiamo una maggiore quantità di rumore e quindi un peggioramento della qualità generale dei risultati;
- Il raggio della sfocatura gaussiana: ci aspettiamo che i risultati con raggio di sfocatura più basso siano più simili all'originale;
- La varianza della sfocatura gaussiana.

4.1.1 Modifica della varianza del rumore

Poniamo $\sigma=0.5$. Otteniamo i seguenti errori relativi:

Errore relativo immagine corrotta: 0.2082813408249021

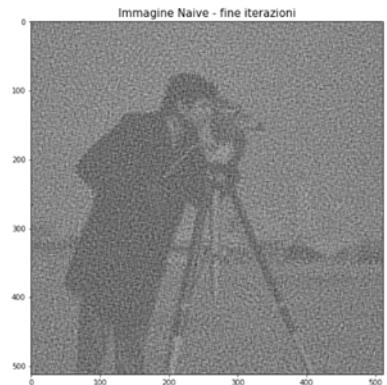
Errore relativo metodo naïve: 0.09057497910917586

Errore relativo metodo euristico: 0.09071168512234626

Errore relativo metodo discrepanza: 0.09473688036298702

Errore relativo metodo norma 1: 0.09056688940233136

Errore relativo metodo misto: 0.09490089229502476



4.1.2 Modifica del raggio della sfocatura gaussiana

Ponendo d=3, otteniamo i seguenti errori relativi:

Errore relativo immagine corrotta: 0.2082813408249021

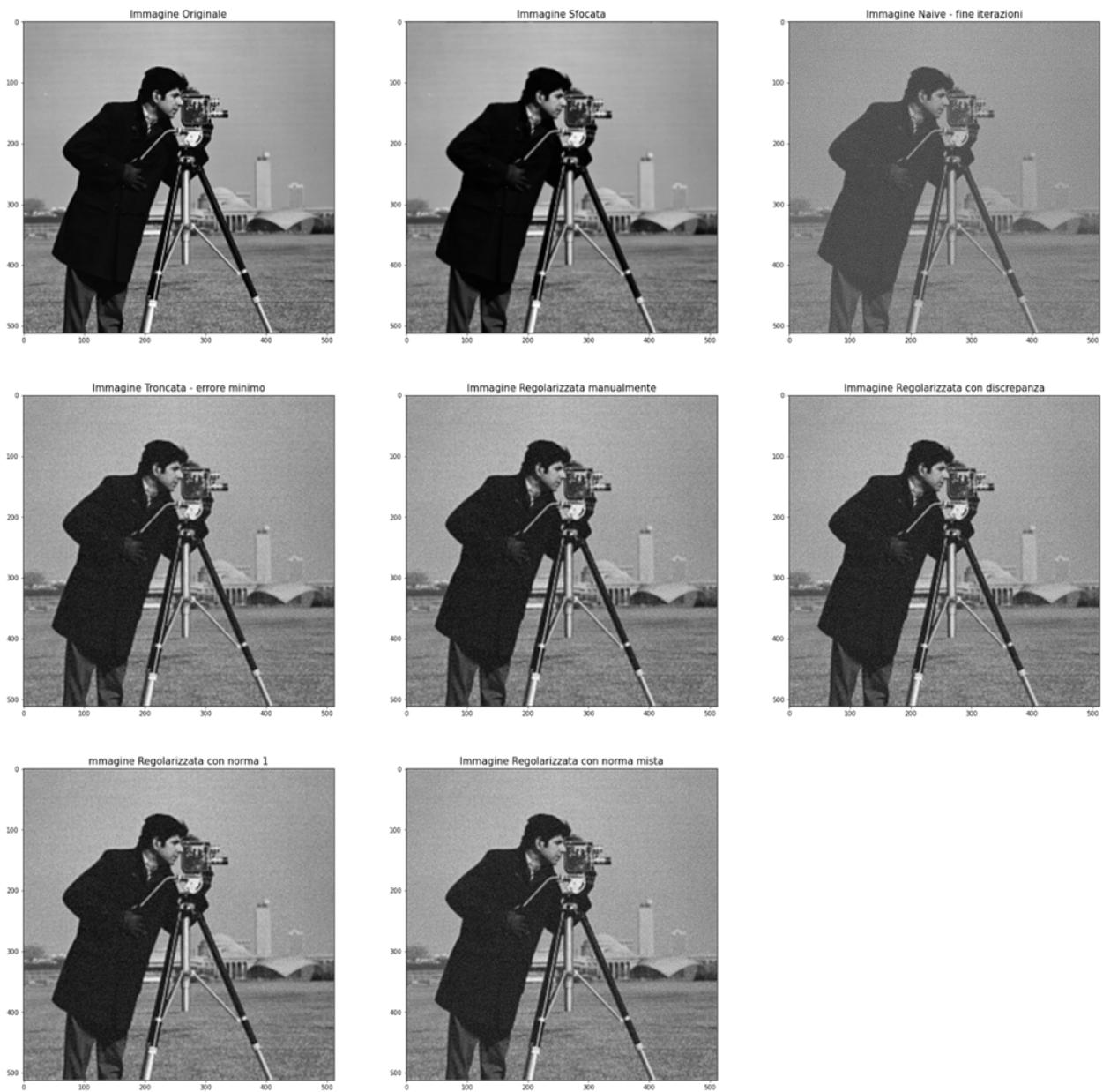
Errore relativo metodo naive: 0.09057497910917586

Errore relativo metodo euristico: 0.09071168512234626

Errore relativo metodo discrepanza: 0.09473688036298702

Errore relativo metodo norma 1: 0.09056688940233136

Errore relativo metodo misto: 0.09490089229502476



Se invece poniamo $d=9$, otteniamo i seguenti errori relativi:

Errore relativo immagine corrotta: 0.2082813408249021

Errore relativo metodo naive: 0.09057497910917586

Errore relativo metodo euristico: 0.09071168512234626

Errore relativo metodo discrepanza: 0.09473688036298702

Errore relativo metodo norma 1: 0.09056688940233136

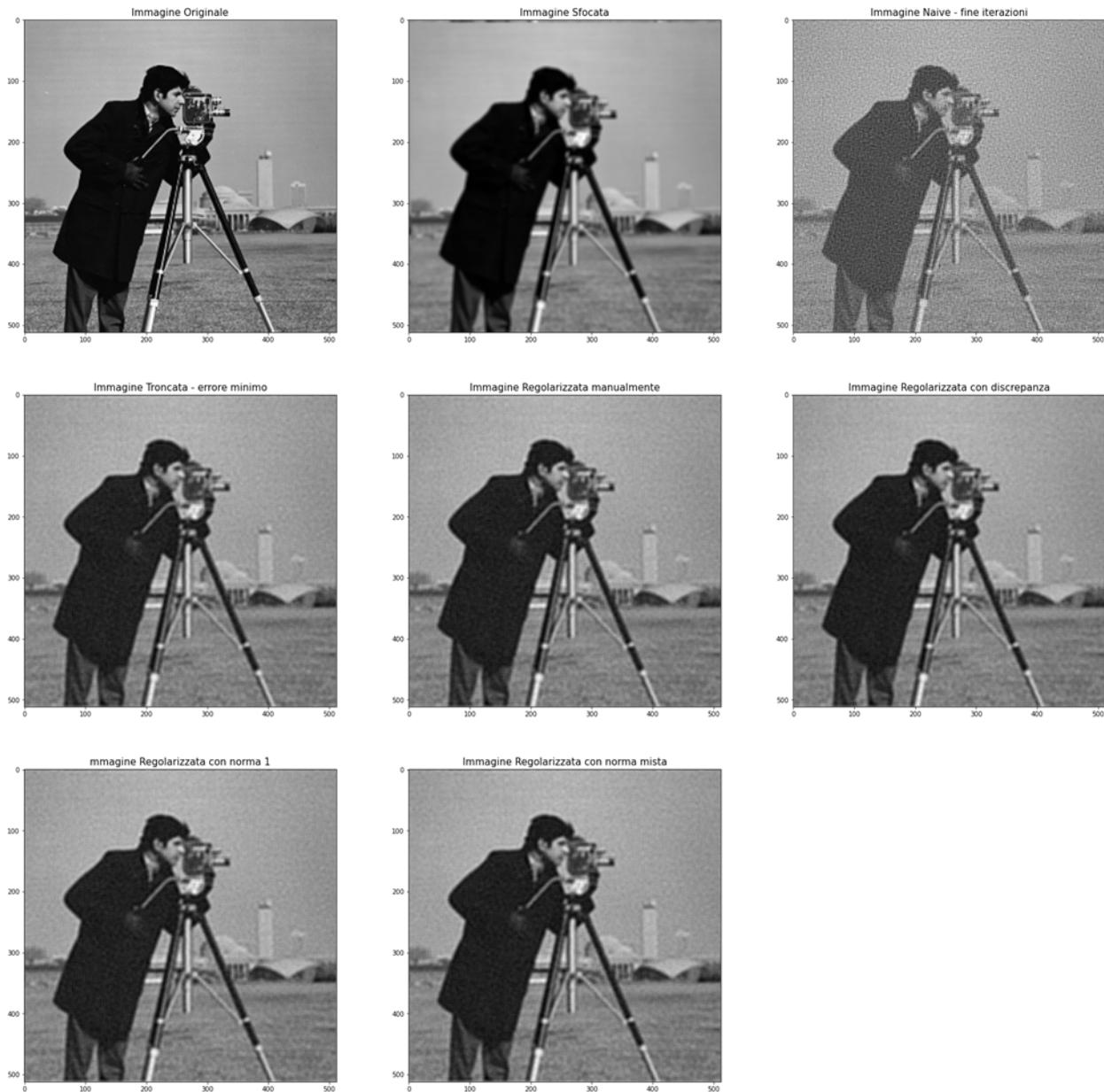
Errore relativo metodo misto: 0.09490089229502476



4.1.3 Modifica della varianza della sfocatura gaussiana

Lasciamo $d=7$, ma poniamo $\sigma=0.1$. Otteniamo:

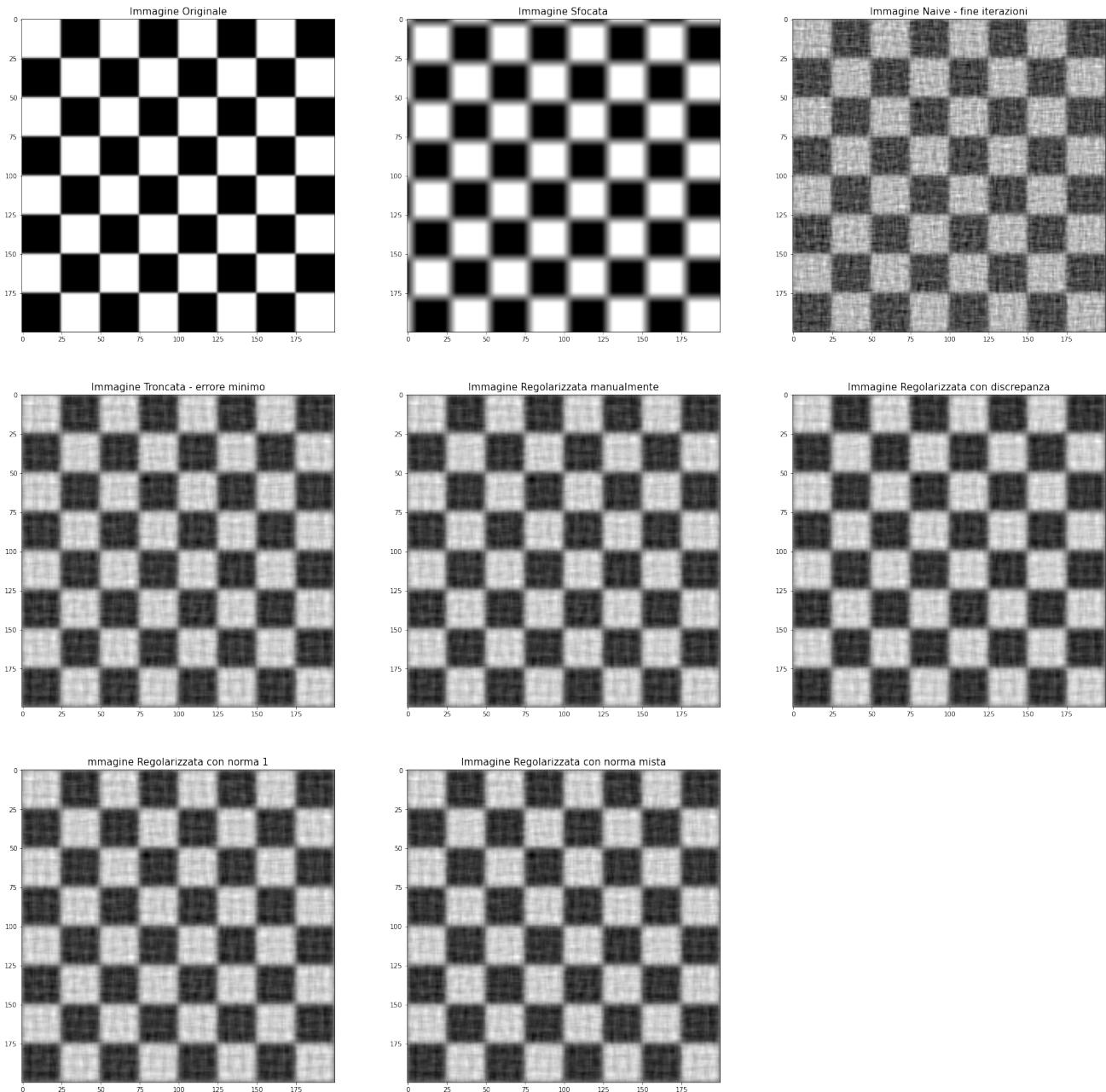
Errore relativo immagine corrotta: 0.2082813408249021
Errore relativo metodo naive: 0.09057497910917586
Errore relativo metodo euristico: 0.09071168512234626
Errore relativo metodo discrepanza: 0.09473688036298702
Errore relativo metodo norma 1: 0.09056688940233136
Errore relativo metodo misto: 0.09490089229502476



4.2 Test su immagini campione

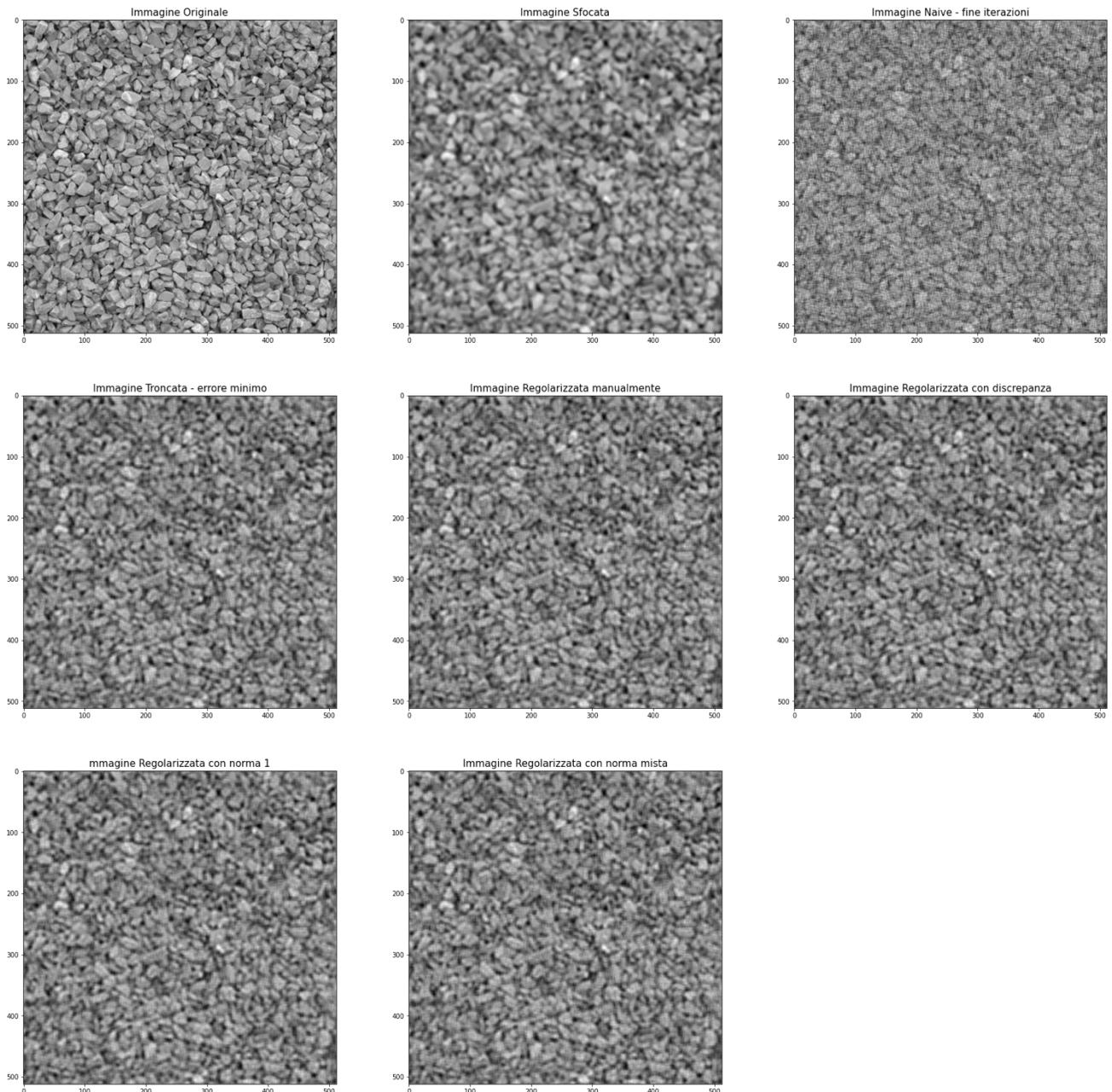
Applichiamo i metodi precedenti a immagini diverse da `data.camera()`. In particolare, scegliamo:

1. Un'immagine "geometrica", con contrasti elevati e contorni ben definiti;
2. Un'immagine "fotografica", con molti dettagli e diversi toni di grigio;
3. Un'immagine contenente del testo.



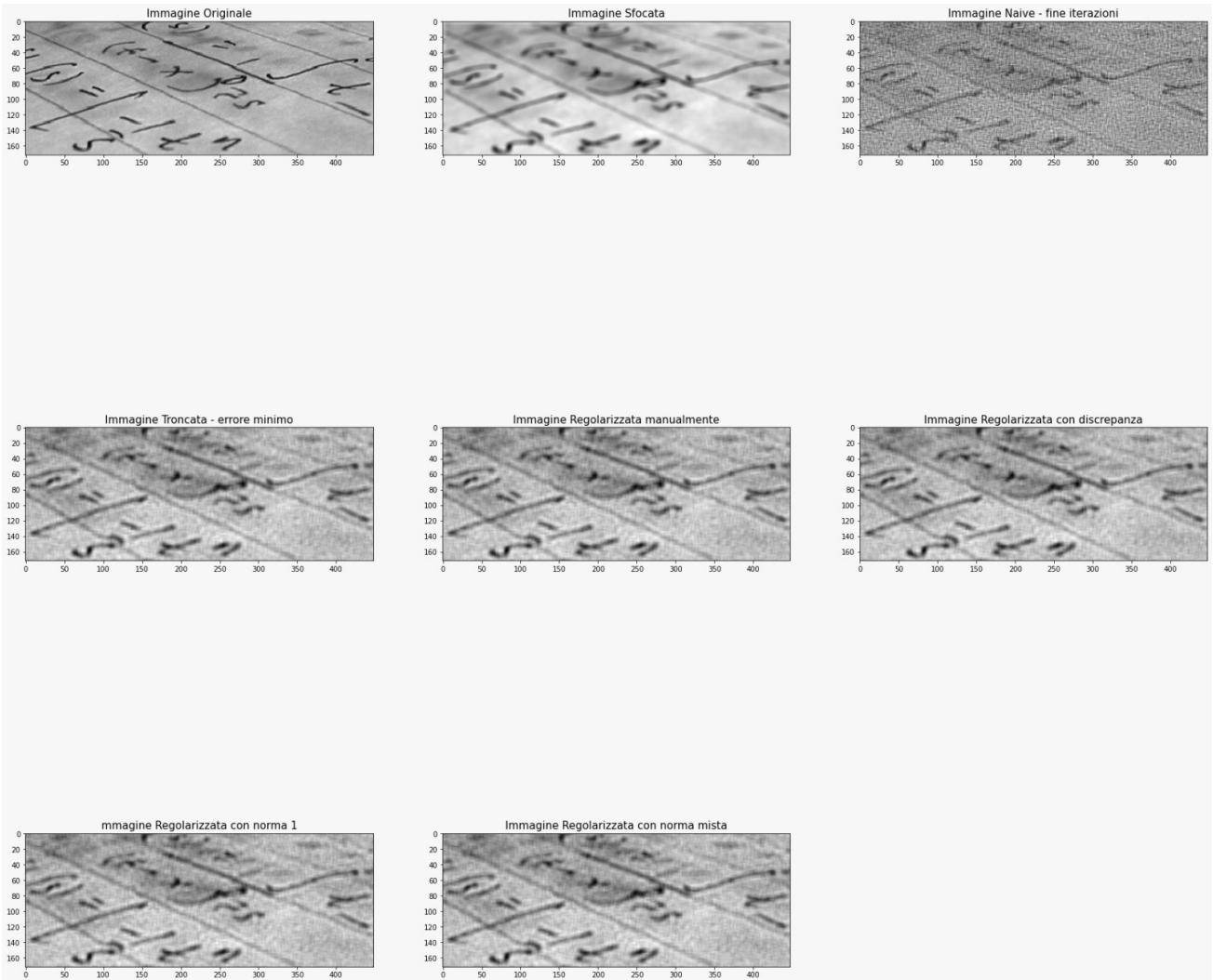
Errori relativi:

Errore relativo immagine corrotta: 0.4882715543721917
 Errore relativo metodo naive: 0.17437876378248754
 Errore relativo metodo euristico: 0.17468143454622134
 Errore relativo metodo discrepanza: 0.1792917056033156
 Errore relativo metodo norma 1: 0.17402642511978667
 Errore relativo metodo misto: 0.17811712100700472



Errori relativi:

Errore relativo immagine corrotta: 0.2212457313000301
 Errore relativo metodo naive: 0.1595526092573323
 Errore relativo metodo euristico: 0.15959768972959304
 Errore relativo metodo discrepanza: 0.1627169008018264
 Errore relativo metodo norma 1: 0.15955251143487287
 Errore relativo metodo misto: 0.16282013350399344



Errori relativi:

Errore relativo immagine corrotta: 0.17671859784062574
 Errore relativo metodo naive: 0.09863062730024173
 Errore relativo metodo euristico: 0.09872764772915767
 Errore relativo metodo discrepanza: 0.10299966417325208
 Errore relativo metodo norma 1: 0.09863056146639275
 Errore relativo metodo misto: 0.10321315368190628