Gruppo 14: Giorgio Mantoan
Oleg Ludovico montanelli
Gabriele Pagliarini
Lorenzo Giussani

REPORT LABORATORIO 5 – VALUE AT RISK

In ambito finanziario, valutare e anticipare le perdite è fondamentale per una corretta gestione del portafoglio. La perdita rappresenta la diminuzione di valore di un investimento in un dato intervallo temporale e può derivare da fattori come volatilità, notizie di mercato o eventi imprevedibili.

Formalmente, la perdita può essere rappresentata come la differenza tra il valore iniziale e quello finale di un portafoglio. Se indichiamo con $V(t)$ il valore del portafoglio al tempo t, la perdita osservata in un intervallo $[t, t+h]$ è data da:

$$L = V(t) - V(t+h)$$

Questa misura è alla base di tutte le successive considerazioni sulle misure di rischio. Infatti, per poter decidere come e dove investire, un investitore non guarda solo al rendimento atteso, ma anche alla possibilità che l'investimento subisca delle perdite significative. È in questo contesto che si inseriscono due importanti strumenti per la misurazione del rischio: il Value at Risk (VaR) e l'Expected Shortfall (ES).

Il VaR fornisce una stima della perdita massima attesa, con un certo livello di confidenza $1-p$, in un orizzonte temporale prefissato. Più precisamente:

$$P[L(t+h) > \text{VaR}^p(t+h)] = p$$

Tuttavia, essendo una misura soggetta a soglie di probabilità, non ci fornisce informazioni su quanto potremmo perdere oltre quella soglia. Per questo motivo si ricorre al concetto di Expected Shortfall, che stima la perdita media nei casi peggiori, cioè quando la perdita supera il VaR.

$$\text{ES}^p = \frac{1}{p}\int_0^p \text{VaR}^u du, \qquad 0 \le u \le p$$

Per condurre questa analisi, abbiamo utilizzato dati storici dei prezzi di tre azioni quotate sul mercato: Apple, Amazon e Facebook (vedi file *Gruppo14_lab5.xlsx*). L'arco temporale considerato va dal 6 ottobre 2015 al 6 ottobre 2020. Abbiamo lavorato con rendimenti giornalieri logaritmici, assumendo che tali rendimenti (e quindi le corrispondenti perdite) seguano una distribuzione normale. Si tratta di un'ipotesi forte ma utile per poter ottenere formule chiuse sia per il VaR che per l'ES, facilitando il confronto tra diversi portafogli.

Dunque, se le perdite sono distribuite come $N(\mu, \sigma^2)$ e l'arco temporale considerato è di 1 giorno, queste misure si calcolano come:

$$\text{VaR}^{\text{p}}(t+1) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1-p), \qquad \text{ES}^p(t+1) = \mu + \sigma\frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(1-p)\right)}{p}$$

dove Φ e φ sono, rispettivamente, la funzione di ripartizione e la densità della normale standard.

NOTA

I problemi proposti sono stati affrontati utilizzando due metodologie: in primis attraverso l'utilizzo di Excel (file in allegato) e della funzione obiettivo e, in secondo luogo, attraverso l'implementazione di un codice Matlab. Si noti come quest'ultimo fornisca più soluzioni e risulti essere quindi più completo (i risultati Excel, che sono simili a quelli Matlab come ordine di grandezza, sono indicati tra parentesi in #numeroportafoglio.2).

CALCOLO PORTAFOGLI

Un aspetto fondamentale dell'analisi è stato chiarire il significato dei pesi all'interno dei portafogli. In questo caso, abbiamo scelto di interpretare i pesi come proporzioni della ricchezza investita. In altre parole, i coefficienti che compongono ciascuna allocazione sommano sempre a uno e rappresentano la quota di capitale allocata in ciascun titolo (un valore negativo rappresenta la vendita allo scoperto di uno dei titoli). Questa scelta permette di confrontare tra loro i risultati dei vari portafogli mantenendo costante la ricchezza iniziale investita.

Per costruire i profili di investimento, abbiamo considerato le combinazioni di due titoli (Apple – Amazon e Apple – Facebook) tali da ottenere un determinato valore di VaR pari a 28. Dunque, abbiamo calcolato le perdite giornaliere dei titoli, stimato media e deviazione standard, e poi risolto l'equazione di secondo grado che collega il VaR a questi parametri.

$$\left(\mathrm{VaR}_{\mathrm{target}} - \mu_{\mathrm{ptf}}\right)^2 = \sigma_{\mathrm{ptf}}^2 \cdot \left(\Phi^{-1}(1-p)\right)^2$$

$$\mu_{\mathrm{ptf}} = w\mu_1 + (1-w)\mu_2, \qquad \sigma_{\mathrm{ptf}}^2 = \boldsymbol{w}^T V \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w} = (w, 1-w)^T$$

Le due soluzioni reali corrispondono a due diversi portafogli aventi la stessa condizione di $VaR = 28$, con il rispettivo valore di p, ma hanno comportamenti differenti in termini di rischio effettivo.

Successivamente, per ogni configurazione, abbiamo calcolato anche l'Expected Shortfall, che ci consente di stimare la perdita media nei casi peggiori. Questo valore è fondamentale per comprendere quanto un portafoglio possa effettivamente essere vulnerabile a eventi estremi.

Portafoglio	**p**	**w Apple**	**w Amazon**	**ES_p**
1.1	5%	1.5476	-0.5476	34.8520
1.2		0.4545 (0.4606)	0.5455 (0.5394)	35.4080
2.1	1%	1.3973	-0.3973	31.9727
2.2		0.6261 (0.6303)	0.3739 (0.3697)	32.1976

Portafoglio	**p**	**w Apple**	**w Facebook**	**ES_p**
3.1	5%	6.6732	-5.6732	35.0362
3.2		-4.6075 (-4.6031)	5.6075 (5.6031)	35.2239
4.1	1%	5.0493	-4.0493	32.0500
4.2		-2.9090 (-2.9061)	3.9090 (3.9061)	32.1259

Nota: le combinazioni con pesi negativi indicano posizioni corte (short selling).

PORTAFOGLIO A VARIANZA MINIMA GLOBALE

Il portafoglio a varianza minima globale, calcolato utilizzando la seguente formula: $w^{\mathrm{MVP}} = \frac{V_r^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T V_r^{-1}\mathbf{1}}$ (V_r: matrice di varianza-covarianza dei rendimenti logaritmici giornalieri dei tre titoli), risulta essere:

$$w^{\mathrm{MVP}} = [0.4157, 0.3697, 0.2146]$$

Tenendo conto della normalità delle perdite, possiamo utilizzare le formule esplicate in precedenza sia per il VaR che per l'ES. I parametri che entrano in gioco sono calcolati come:

$$\mu_{\text{MVP}} = w_{\text{MVP}}^T \cdot \mu_L, \qquad \sigma_{\text{MVP}} = w^T V w,$$

dove V e μ_L rappresentano, rispettivamente la matrice di varianza-covarianza e la media delle perdite dei tre titoli.

Di seguito sono riportati i valori ottenuti:

$$\text{VaR}_{0.01}(t+1) = 28.4203, \qquad \text{ES}_{0.01}(t+1) = 32.6799$$

OSSERVAZIONI E CONCLUSIONI

Per quanto riguarda il VaR, un valore elevato corrisponde a una maggior probabilità di incorrere in perdite significative entro l'intervallo di confidenza considerato. A tal proposito, il portafoglio w^{MVP}, avendo un $\text{VaR}_{0.01}$ maggiore di 28 (ovvero superiore a quello dei portafogli del punto 2 e 4, a parità di confidenza) risulta essere il più vulnerabile a eventi avversi di mercato. Sebbene sia ottimizzato per minimizzare la volatilità complessiva, non è necessariamente il più sicuro in termini di perdite estreme.

Come accennato in precedenza, l'ES si riferisce alla gravità della perdita in situazioni estremamente sfavorevoli in cui le perdite superano il VaR; di conseguenza, un valore di ES alto sta ad indicare che le perdite attese sono molto elevate, nel caso di eventi estremi. Al contrario, un valore basso di ES suggerisce una stabilità maggiore del portafoglio, perché denota un rischio di perdite significative inferiore e una maggiore protezione nei confronti di eventi sfavorevoli.

Di conseguenza, confrontando i valori di ES a parità di livello di confidenza, si può affermare che, per $p = 1\%$, il portafoglio più stabile e soggetto al rischio di perdite meno significative risulta essere il 2.1, mentre quello esposto a rischi maggiori è il 2.2. Considerando, invece, $p = 5\%$ il portafoglio più stabile e quello soggetto a rischi maggiori sono, rispettivamente, l'1.1 e l'1.2.

Dunque, l'analisi svolta ha evidenziato come la combinazione tra Value at Risk (VaR) ed Expected Shortfall (ES) rappresenti un approccio efficace e complementare per valutare il rischio di portafoglio nel caso in cui le perdite siano approssimate ad una distribuzione normale.