Gruppo 14 – Giorgio Mantoan
Oleg Ludovico Montarelli
Gabriele Pagliarini
Lorenzo Giussani

REPORT LABORATORIO 4 – OPZIONI

Un titolo derivato è uno strumento finanziario il cui payoff dipende dal valore di un'altra attività finanziaria, detta sottostante. In particolare, un'opzione è un titolo derivato il cui contratto consente ad una delle due parti di acquistare (opzione Call) o vendere (opzione Put), senza alcun obbligo, il titolo sottostante ad un prezzo stabilito in un periodo di tempo prefissato. Questa asimmetria, ovvero il diritto per l'acquirente e obbligo per il venditore, giustifica il compenso iniziale, chiamato premio, del venditore.

Le opzioni si distinguono anche in base alla modalità di esercizio, parleremo di opzione Europea se fa riferimento ad una data prestabilita, mentre nel caso di opzione Americana, l'acquirente può esercitare il suo diritto in qualsiasi momento fino alla scadenza.

Uno degli aspetti centrali nello studio dei derivati, comprese le opzioni, è la loro valutazione. Per determinare il prezzo equo del contratto bisogna evitare che si creino opportunità di arbitraggio, cioè guadagni certi senza rischio. Per fare ciò, si ricorre a modelli matematici che descrivono il comportamento del prezzo del sottostante nel tempo. In tal caso, semplificheremo il problema assumendo che il sottostante sia un titolo azionario che non distribuisce dividendi.

Per descrivere il funzionamento di un'opzione utilizzeremo i seguenti parametri:

- $S(t)$: prezzo del titolo sottostante al tempo t;
- S_0 : prezzo iniziale del sottostante;
- K : (strike price) prezzo di esercizio dell'opzione;
- T : scadenza dell'opzione (maturity);
- $r > 0$: tasso di interesse privo di rischio (costante per ogni t);

OPZIONI EUROPEE

Il payoff rappresenta il guadagno (o la perdita) che si ottiene alla scadenza dell'opzione, in base al valore del sottostante. Nel caso delle opzioni europee:

$$\text{Payoff}_{\text{Call}} = \max\,[0, S(T) - K];$$

cioè il guadagno è positivo solo se il prezzo del sottostante alla scadenza supera il prezzo di esercizio. Una Put, invece, genera guadagno se il prezzo del sottostante è inferiore allo strike:

$$\text{Payoff}_{\text{Put}} = \max\,[0, K - S(T)]$$

Nel caso di un'opzione Call, a seconda del prezzo del sottostante alla scadenza rispetto prezzo di esercizio, essa si dice:

- In the money: se esercitarla produce un guadagno ($S(T) > K$)
- Out of the money: se esercitarla non ha senso perché non porta profitto ($S(T) < K$)
- At the money: se il prezzo del sottostante è uguale allo strike ($S(T) = K$)

Nel caso delle opzioni europee esiste una relazione teorica molto importante tra il prezzo della Call e della Put, chiamata Put-Call parity:

$$C(t) - P(t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

In altre parole, la differenza tra il prezzo di una Call e quello di una Put (con gli stessi parametri) deve essere uguale alla differenza tra il prezzo corrente del sottostante e il valore attualizzato dello strike, scontato al tasso privo di rischio. Se questa uguaglianza non fosse rispettata, si potrebbero costruire strategie di arbitraggio, il che è teoricamente impossibile in un mercato efficiente.

Per risalire al prezzo dell'opzione, è necessario discretizzare l'intervallo $[0, T]$ (ad esempio $N = 15$), calcolare l'albero binomiale dei prezzi del sottostante partendo da S_0 e, infine, dai payoff ottenuti in riferimento al tipo di opzione (P matrice dei payoff) ricavare il valore finale con la seguente formula:

$$P(i,j) = \frac{1}{r_f}\big(p * P(i,j+1) + (1-p) * P(i+1,j+1)\big)$$

- $r_f = e^{rdt}$: fattore di attualizzazione $\left(dt = \frac{T}{N}\right)$;
- $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$ e $d = \frac{1}{u}$ rappresentano i fattori di rialzo e ribasso del prezzo del sottostante;
- $p = \frac{r_f - d}{u-d}$: probabilità neutrale al rischio;

$P(1,1)$ risulterà essere il prezzo dell'opzione.

Considerando $N = 15$ e i seguenti dati $S_0 = K = 100$ (in the money), $\sigma = 0.04$, $r = 0.01$:

$$C_{europea} = 2.1588, \quad P_{europea} = 1.1638$$

$$C_e - P_e = 0.9950 = S_0 - K\, e^{-rT} \qquad \text{(Put-Call parity verificata).}$$

OPZIONI AMERICANE

Il fatto che le opzioni americane possono essere esercitate in qualsiasi momento fino alla data di scadenza offre all'acquirente una maggiore flessibilità e introduce una valutazione leggermente più complessa.
Il valore del payoff di un'opzione americana dato dal massimo tra il valore d'esercizio, ovvero il payoff che si otterrebbe esercitando subito l'opzione, e il valore di continuazione, pari al valore atteso dell'opzione se si sceglie di mantenerla attiva fino a un momento successivo:

$$\text{Valore di continuazione} = \frac{1}{r_f}\big(p * F(S0u) + (1-p) * F(S0d)\big);$$

dove $F(\cdot)$ rappresenta il valore futuro dell'opzione dato un certo scenario del sottostante.

In tal caso, la relazione di Put-Call parity non è più verificata, infatti la maggiore flessibilità di esercizio anticipato rende le opzioni americane, in particolare le Put, potenzialmente più preziose rispetto alla corrispondente europea. Pertanto, vale la seguente disuguaglianza:

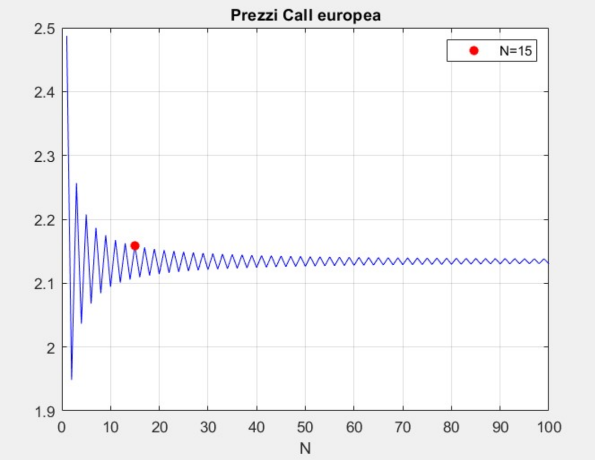
$$C_A(t) - P_A(t) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

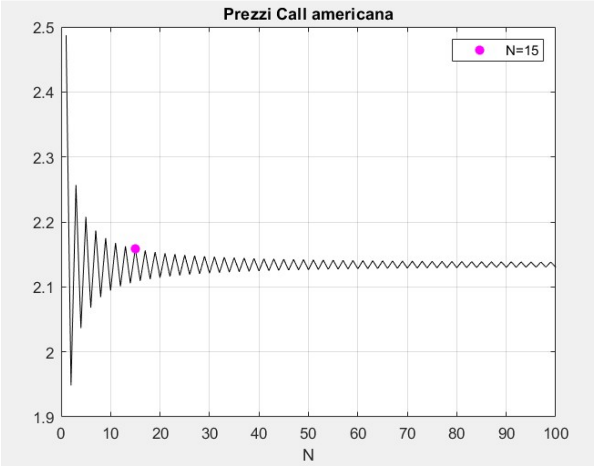
Utilizzando gli stessi dati delle opzioni europee, si ottiene:

$$C_{americana} = 2.1588, \; P_{americana} = 1.2532$$

$$C_a - P_a = 0.9055 \leq S0 - Ke^{-rT} = 0.9950$$

Il numero di step temporali N ha un impatto cruciale sulla precisione del modello binomiale. Infatti, all'aumentare di esso l'approssimazione converge al valore corretto (soprattutto per le europee). Un N troppo basso porta invece a stime imprecise e poco affidabili, specialmente per le americane, dove l'esercizio anticipato è rilevante.





STRATEGIA DI DELTA-HEDGING

Questo tipo di approccio consiste nel costruire un portafoglio privo di rischio composto dallo Stock e dal derivato, ovvero in modo che abbiamo lo stesso valore in $t = 1$ in entrambi gli stati del mondo.

La quantità $\Delta > 0$ rappresenta la quantità di titolo sottostante, in modo che il portafoglio valga in $t = 0$:

$$\Pi(0) = F(S_0) - \Delta S_0$$

Siccome all'istante $t = 1$ il valore del portafoglio deve essere costante nei due stati, impongo l'uguaglianza tra il valore dello Stock aumentato $\Pi^u(1)$ e quello diminuito $\Pi^d(1)$ e ottengo il valore di delta, equivalente al rapporto incrementale di $F(S(1))$:

$$\Delta = \frac{F(S_0 u) - F(S_0 d)}{S_0(u-d)}$$

Acquistando 100 unità della Call europea considerata in precedenza, otteniamo un valore di delta pari a $\Delta = 0.5100$ e un investimento complessivo di 5099.9867 ($S_0 = 100$).

PORTAFOGLIO DI REPLICA

Per l'assenza di opportunità di arbitraggio, il titolo derivato deve avere un valore pari al valore del portafoglio di replica al tempo $t = 0$. Consideriamo x unità di Bond e y unità di Stock.

In $t = 0$ il valore di mercato del portafoglio è pari a: $x + yS_0$, mentre in $t = 1$ il portafoglio deve replicare il payoff del titolo derivato:

$$\begin{cases} xr_f + yS_0 u = F(S_0 u) \\ xr_f + yS_0 d = F(S_0 d) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono le componenti del portafoglio di replica:

$$x = \frac{1}{r_f}\left[\frac{uF(S_0 d) - dF(S_0 u)}{u-d}\right], \qquad y = \frac{1}{S_0}\left[\frac{F(S_0 u) - F(S_0 d)}{u-d}\right]$$

In tal caso, la richiesta era di replicare la Put europea, calcolata in precedenza:

$$x = 50.4924, \qquad y = -0.4900$$

$$\text{Valore portafoglio} = \ 1.4923.$$