Gruppo 14 – Giorgio Mantoan
Oleg Ludovico Montarelli
Gabriele Pagliarini
Lorenzo Giussani

REPORT LABORATORIO 3 – RENDIMENTI E FRONTIERA DEI PORTAFOGLI

Il mercato finanziario è fortemente caratterizzato dall'aleatorietà degli strumenti che lo compongono, i quali vengono scambiati continuamente in un contesto dinamico e incerto. Un mezzo utile per prendere decisioni d'investimento è la costruzione di un portafoglio a varianza minima, in cui quest'ultima rappresenta la misura del rischio. Introdotto per la prima volta da Harry Markowitz, il portafoglio a varianza minima è la soluzione di un problema di minimizzazione.

Più precisamente, si cerca il portafoglio w^p che risolve il seguente problema: $\min\limits_{w} \frac{1}{2} w^T V w$, dove V è la matrice varianza-covarianza dei titoli, sottoposto ai vincoli di rendimento atteso: $w^T e = \mathrm{E}[\tilde{r}^p]$ (e vettore delle medie dei rendimenti dei titoli e $\mathrm{E}[\tilde{r}^p]$ rendimento atteso richiesto) e di bilancio: $w^T \mathbf{1} = 1$, che assicura che l'intero capitale sia investito.

Al variare del rendimento atteso, le soluzioni che ottimizzano questo problema costituiscono la Frontiera dei Portafogli (FP). Ogni punto sulla frontiera rappresenta un portafoglio che, per un dato rendimento atteso, minimizza il rischio complessivo.

In particolare, dato il rendimento atteso $E[\tilde{r}^p]$, il portafoglio a varianza minima è dato da:

$$w^p = g + h\mathrm{E}[\tilde{r}^p] \qquad (1)$$

dove le due funzioni g e h sono definite come:

$$g = \frac{B(V^{-1}\mathbf{1}) - A(V^{-1}e)}{D}; \qquad h = \frac{C(V^{-1}e) - A(V^{-1}\mathbf{1})}{D}$$

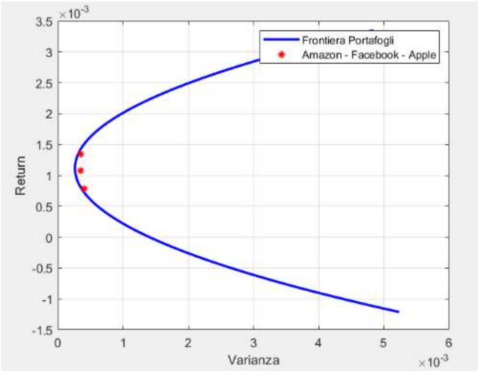
$$A = \mathbf{1}^T V^{-1} e; \quad B = e^T V^{-1} e; \quad C = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}; \quad D = BC - A^2$$

$$\mathbf{1} = (1,..,1)^T; \qquad B > 0, C > 0, D > 0$$

FRONTIERA DEI PORTAFOGLI A E B

Il procedimento utilizzato per costruire la Frontiera dei Portafogli A, costituita dai titoli Amazon.com e Facebook Class A, e la frontiera B, formata dai titoli Facebook Class A e Apple, è analogo.

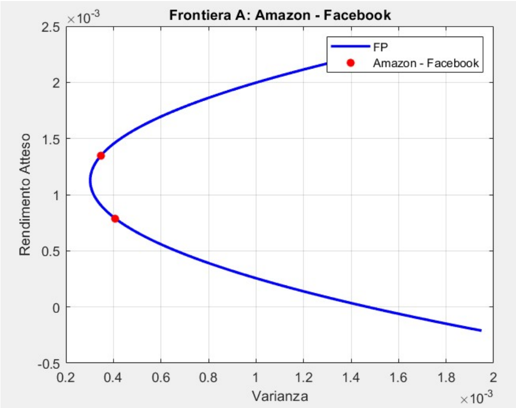
Per prima cosa sono stati calcolati i rendimenti logaritmici giornalieri dei titoli partendo dai campioni dei prezzi giornalieri S(t) forniti con la formula: $R(t+1) = \ln\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right)$.

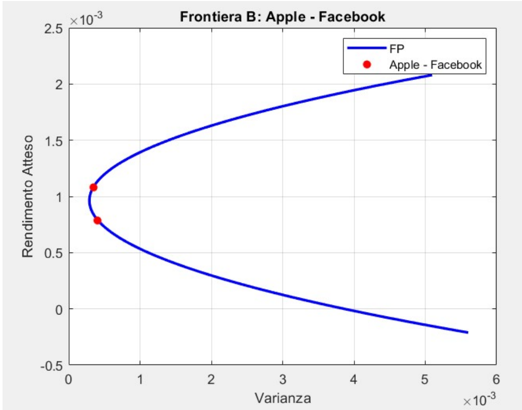


Dopodiché, per procedere con la risoluzione sono necessari, per ogni portafoglio, la media e la matrice varianza-covarianza dei rendimenti dei titoli al fine di ottenere g e h.

Di seguito i risultati e i grafici delle frontiere:

	Frontiera portafogli A	Frontiera portafogli B
g	- 1.4096 2.4096	- 2.7139 3.7139
h	1786.3392 - 1786.3392	3439.1412 - 3439.1412





PORTAFOGLIO A VARIANZA MINIMA GLOBALE

Un portafoglio di particolare rilevanza è quello caratterizzato da deviazione globale minima (w^{MVP}), ovvero il portafoglio che è rappresentato nel punto $\left(\sqrt{\frac{1}{C}}, \frac{A}{C}\right)$ nel piano deviazione standard-rendimento atteso. Esso è quel portafoglio tale per cui il primo termine della varianza è nullo $\left(\mathrm{E}[\tilde{r}^p] = \frac{A}{C}\right)$; sostituendo tale valore in (1) si ottiene:

$$w^{MVP} = \frac{V^{-1}\mathbf{1}}{C}$$

Con l'ausilio di tale formula e, rispettivamente, i dati del portafoglio A, del portafoglio B e del portafoglio dei tre titoli (Amazon, Facebook, Apple) si ottengono i seguenti risultati:

Portafoglio A	$\mathrm{w^{MVP}}$_AMAZON $\mathrm{w^{MVP}}$_FACEBOOK	0.6028 0.3972
Portafoglio B	$\mathrm{w^{MVP}}$_APPLE $\mathrm{w^{MVP}}$_FACEBOOK	0.5987 0.4013
Portafoglio dei tre titoli	$\mathrm{w^{MVP}}$_APPLE $\mathrm{w^{MVP}}$_AMAZON $\mathrm{w^{MVP}}$_FACEBOOK	0.4143 0.3690 0.2167

PORTAFOGLIO OTTIMO CON FUNZIONE DI UTILITÀ QUADRATICA:

Assumendo che le preferenze di un individuo siano esplicitabili tramite la sua utilità attesa con una funzione di utilità $u(x)$ differenziabile, crescente e concava, sono state studiate le sue scelte di investimento su $N+1$ strumenti finanziari in due istanti di tempo: $t = 0$, in cui possiede la quantità di ricchezza x_0, e $t = 1$, il tempo per il quale si vuole massimizzare l'utilità attesa. Gli $N+1$ titoli disponibili sono divisi in N titoli rischiosi ($\tilde{r}_R$), caratterizzati dai singoli rendimenti definiti come variabili aleatorie $\tilde{r}_n$, e uno privo di rischio, costante pari a r_f.

Definito $\widetilde{\mathrm{W}} = w^T\tilde{r}_R + r_f(x0 - w^T\mathbf{1})$ il portafoglio e $\tilde{r} = \frac{\widetilde{\mathrm{W}}}{x_0}$ il suo rendimento, l'utilità attesa è massimizzata per $\max_w E[u(\widetilde{\mathrm{W}})] = E[u(\widetilde{\mathrm{W}}^*)]$, dove il portafoglio $\widetilde{\mathrm{W}}^*$ è definito ottimo. Per $u(x) = x - \frac{1}{b}x^2$ $(b > 0)$, funzione di utilità quadratica, l'utilità attesa massima, a differenza di altre funzioni $u(x)$ è facilmente esplicitabile:

$$w^* = \frac{\frac{1 - x_0 b r_f}{b} V^{-1}(e - r_f \mathbf{1})}{1 + (e - r_f \mathbf{1})^T V^{-1}(e - r_f \mathbf{1})};$$

con e e V, rispettivamente, vettore dei valori attesi e matrice varianza-covarianza dei rendimenti dei titoli rischiosi.

Applicando i concetti appena introdotti per un individuo con funzione di utilità quadratica con $b = 0.001$ e ricchezza iniziale x_0 unitaria, è possibile determinare il portafoglio ottimo per un investimento nei tre titoli forniti con rendimenti giornalieri, rappresentabili come una Normale multivariata, e un titolo con $r_f = 1.01$ annuale, da convertire anch'esso in un rendimento logaritmico.

Innanzitutto, è necessario convertire in annuale il vettore dei valori attesi giornalieri (stimato con le medie campionarie) e la corrispondente matrice varianza-covarianza giornaliera (varianze e covarianze campionarie); questo è possibile moltiplicando entrambi per $n = 252$, i giorni lavorativi in un anno. Il portafoglio ottimo è espresso da:

w*_APPLE	666.6842
w*_AMAZON	1470.5641
w*_FACEBOOK	- 419.8068

Il portafoglio è quindi costituito da due titoli, Apple e Amazon, in cui viene investita una quantità positiva di ricchezza e due titoli, Facebook e il titolo privo di rischio, su cui si tiene una posizione corta.

SCELTA DI INVESTIMENTO CON FUNZIONE DI UTILITÀ ESPONENZIALE

Considerando $N = 1$ titoli rischiosi ($\tilde{r}_R$), con rendimento distribuito come una Normale e per $u(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax}$ $(a > 0)$, funzione di utilità esponenziale, l'utilità attesa massima è:

$$E\left[u\left(\widetilde{W}^*\right)\right] = -\frac{1}{a}e^{-a\ [\widetilde{W}^*]+\frac{a^2}{2}\sigma^2(\widetilde{W}^*)}$$

con $E\left[\widetilde{W}^*\right] = w^* E[\tilde{r}_R] + r_f(x_0 - w^*)$ e $\sigma^2\left(\widetilde{W}^*\right) = \sigma^2(\tilde{r}_R) w^{*2}$

Il portafoglio ottimo, in questo caso, si ottiene come:

$$w^* = \frac{1}{a\sigma^2(\tilde{r}_R)}(E[\tilde{r}_R] - r_f)$$

Partendo dalle ipotesi in cui un individuo con funzione di utilità esponenziale con coefficiente assoluto di avversione al rischio $a = 0.15$ e ricchezza iniziale x_0 unitaria e considerando un investimento in un portafoglio composto dal titolo non rischioso, $r_f = 1.01$, e solo in uno dei tre titoli rischiosi forniti, con rendimento ipotizzato Normale, per il Teorema dell'utilità attesa, il migliore investimento è rappresentato dal titolo rischioso che rende il suo portafoglio ottimo quello con utilità attesa maggiore degli altri.

w*_APPLE	20.2298	E[u(W̃*_APPLE)]	- 4.4720
w*_AMAZON	25.0938	E[u(W̃*_AMAZON)]	- 3.5773
w*_FACEBOOK	12.2740	E[u(W̃*_FACEBOOK)]	- 5.5942

Il migliore investimento risulta essere quello su w*_AMAZON titoli di Amazon e su $(x_0 - w^*\_AMAZON)$ titoli non rischiosi (r_f).