Gruppo 14 – Giorgio Mantoan
Oleg Ludovico Montarelli
Gabriele Pagliarini
Lorenzo Giussani

REPORT LABORATORIO 2 – BOOTSTRAP

L'andamento dei tassi di interesse relativi a un prestito o a uno strumento finanziario è fondamentale per prevedere il costo del denaro: le quote di interesse rappresentano il compenso richiesto per indurre un individuo a prestare capitale invece di utilizzarlo, costituendo una remunerazione per la rinuncia alla liquidità.

La curva dei tassi di interesse è definita in funzione della Maturity, ovvero la scadenza temporale di un prestito o di un titolo rispetto al presente, e l'andamento risulta inversamente proporzionale rispetto ai prezzi delle obbligazioni.

Quotare un'obbligazione significa trovare il suo Market Price tale da renderne equa la compravendita, imponendo l'uguaglianza:

$$Market\ Price\ =\ (Discounted\ Price\ -\ Rateo)$$

- Il Discounted Price = somma di tutti i valori attuariali dei flussi futuri (cedole e scadenza);
- Il Rateo = quota di interessi maturata dal precedente detentore del titolo, dall'ultima cedola fino alla data di vendita.

Queste operazioni saranno sempre utilizzate per le obbligazioni proposte successivamente.

Nel contesto dei mercati finanziari i dati disponibili sui tassi di interesse riguardano un insieme discreto di scadenze (Maturity) comportando una carenza di informazioni per le scadenze intermedie. Di conseguenza emerge la necessità di ricostruire la curva dei tassi e a tale scopo è stato sfruttato il "Metodo di Bootstrapping". Per le scadenze intermedie, questo metodo utilizza l'interpolazione lineare: noti $i(t,T_1)$ e $i(t,T_2)$, per $x\ \in\ [T_1,T_2]$:

$$i(t,x) = \frac{(T_2 - x)i(t,T_1) + (x - T_1)i(t,T_2)}{T_2 - T_1}$$

Considerando l'acquisto al giorno 01/04/2025 (ovvero $t = 0$) e la curva d'interessi zero coupon nota (e due sue combinazioni lineari), per calcolare i tassi incogniti delle obbligazioni da quotare si è fatto uso di tale formula, dove x è il tempo di un tasso incognito e $[T_1, T_2]$ è l'intervallo più piccolo delle Maturity note che lo contiene.

QUOTAZIONE OBBLIGAZIONI

Obbligazione	**1**	**2**
Scadenza	01/04/2025	01/06/2029
Time to maturity	2,00	4,17
Tasso cedolare	2,00%	2,00%
Valore nominale	100€	100€
Pagamento cedole	Semestrale	Semestrale
Rateo	0	0,6667

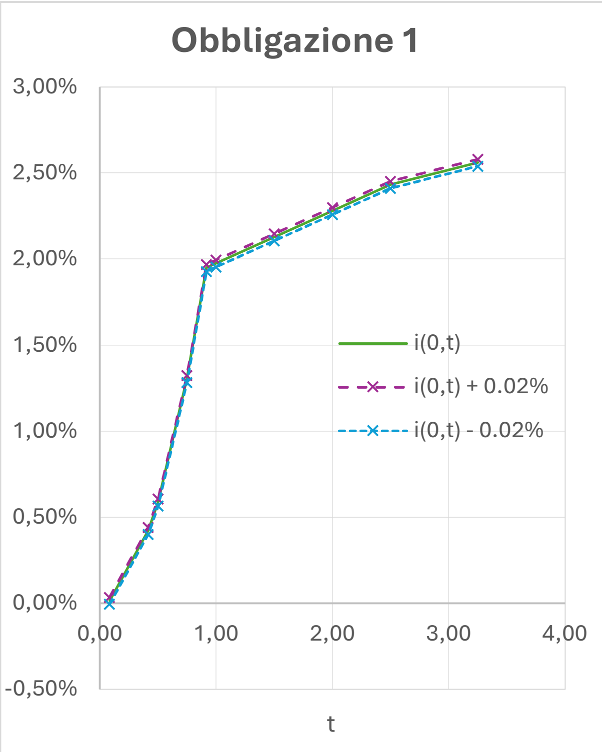
Con il metodo di Bootstrapping e i vincoli di operazione equa si trovano i seguenti risultati:

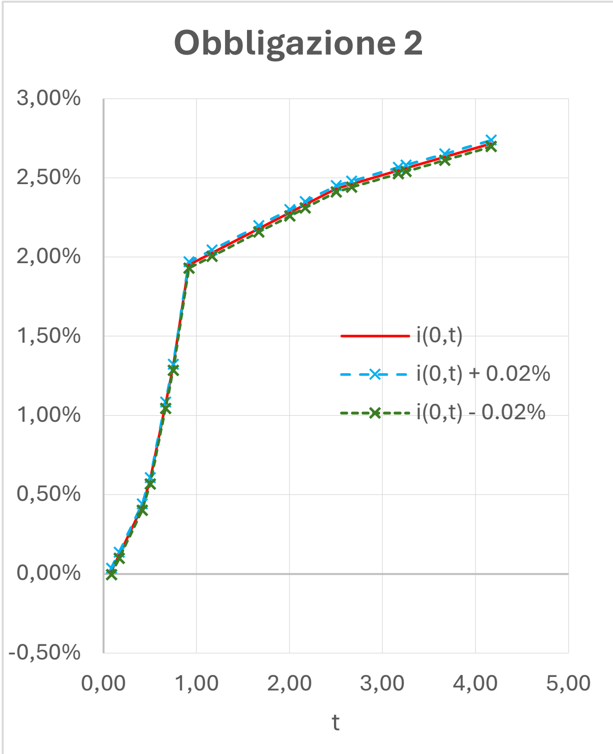
Market price	**Obbligazione 1**	**Obbligazione 2**
i(0,t)	99.4951	97.3122
i(0,t) + 0.02%	99.4567	97.2361
i(0,t) - 0.02%	99.5334	97.3883

Si osservi come il Market Price assuma valori diversi in base alla curva dei tassi di interesse nota: per entrambe le obbligazioni si ha sempre il Market Price maggiore nel caso del tasso d'interesse minore (-0.02%) e il Market Price minore nel caso del tasso d'interesse maggiore (+0.02%). Tale risultato è coerente con la teoria che lega i prezzi in maniera inversamente proporzionale ai tassi d'interesse.

Di seguito il grafico delle tre curve di interesse rappresentanti i valori noti e quelli ottenuti interpolando per ognuna delle due obbligazioni. Data la linearità tra le tre curve si osserva che tutte sono crescenti; ciò sta a significare che vi è una certezza maggiore sul futuro imminente e le previsioni a lungo termine sono più incerte, ovvero che si ha a che fare con l'andamento di un'economia stabile.

Nell'analisi della seconda obbligazione sono stati utilizzati gli ultimi due tassi di interesse noti al fine di fare un'estrapolazione lineare delle scadenze che non rientravano in alcun intervallo.





DURATION e CONVEXITY di un PORTAFOGLIO

Considerando un portafoglio composto da 2 unità della prima obbligazione e 3 unità della seconda obbligazione quotate con la curva dei tassi originale si vuole calcolarne la Duration e la Convexity.

La Duration di un titolo misura il tempo necessario affinché il cash flow totale generato eguagli l'esborso in t; al contempo indica la sua sensibilità del valore di mercato alle variazioni di tasso.

Data la struttura dei tassi a pronti $i(t, T_n)$ per $n = 1, \dots, N$ e un titolo con flusso $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nelle date $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, la Duration del titolo al tempo t è:

$$DU(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N} (T_n - t) x_n \big(1 + i(t, T_n)\big)^{-(T_n - t)}}{p(t,x)}$$

Dove $p(t, x)$ è il prezzo del titolo in t, ovvero la somma dei valori attuariali dei flussi di cassa futuri.

Nel caso di un portafoglio di titoli la Duration è riconducibile a quella dei singoli titoli, considerando K titoli e i flussi di pagamento x^k per $k = 1, \dots, K$; per il portafoglio $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$ la Duration in t è pari a:

$$DU(t, \alpha^T X) = \frac{\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \, p^k\left(t, x^k\right) * DU(t, x^k)}{\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \, p^k(t, x^k)}$$

La Convexity di un titolo, invece, riflette la variazione della Duration in relazione al variare dei tassi di interesse; per questo predice con maggiore precisione le variazioni di prezzo di uno strumento finanziario. Viene, infatti, definita come la derivata seconda del valore di mercato del titolo rispetto al tasso in capitalizzazione composta i rapportata al valore di mercato del titolo, con formulazione:

$$C(t, x) = \frac{\sum_{n=1}^{N} (T_n - t)(T_n - t + 1) x_n (1 + i)^{-T_n + t - 2}}{\sum_{n=1}^{N} x_n (1 + i)^{-T_n + t}}$$

La Convexity di un portafoglio si trova con la stessa media ponderata usata per la Duration.

Tramite tali definizioni, applicate al portafoglio in considerazione (D_1 = 1.9702, D_2 = 4.0153, C_1 = 5.6271, C_2 = 19.3103), si sono ottenuti i seguenti risultati: **Duration** = 3.1863 e **Convexity** = 13.7640.

DURATION MATCHING per IMMUNIZZARE

La teoria dell'immunizzazione si occupa di determinare la composizione del portafoglio dal lato dell'attivo e del passivo affinché non si registri una perdita a seguito di una variazione delle condizioni di tasso.

Dato un flusso dal lato dell'attivo $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e dal lato del passivo $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ nelle date $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, in corrispondenza dei prezzi $p(t, T_n)$ degli zero coupon bond i due flussi $\mathrm{V(t, x)}$ e $\mathrm{V(t, y)}$ sono in equilibrio se $\mathrm{V(t, x) = V(t, y)}$. Inoltre, se al tempo t^+, dopo un intervallo infinitesimo, abbiamo una variazione di ampiezza indeterminata su tutta la curva forward $\mathrm{f(t^+, s) = f(t, s) + Y}$ per ogni $s \geq t$ diremo che la posizione è immunizzata se $\mathrm{V(t^+, x) \geq V(t, y)}$.

Per immunizzare si usa, non sempre ed esclusivamente, la "Duration Matching" imponendo l'uguaglianza tra la Duration del lato dell'attivo e quella del passivo. Così facendo l'effetto negativo sul valore dell'attivo viene compensato in forma approssimata linearmente dalla variazione in negativo del valore del passivo. Nel caso di un'unica uscita nel passivo il concetto di Duration Matching per immunizzare è espresso dal Teorema di Fisher e Weil.

Si vuole immunizzare l'uscita L = 4000€ in T = 3 con le obbligazioni introdotte precedentemente, applicando Fisher e Weil ci si ritrova a risolvere il seguente sistema lineare in w_1 e w_2:

$$\begin{cases} w_1 p_1 + w_2 p_2 = p_L \\ w_1 D_1 p_1 + w_2 D_2 p_2 = D_L p_L \end{cases}$$

- p_i per $i = 1{,}2$ sono i prezzi di mercato dei titoli (p_1 = 99.4951, p_2 = 97.3122), trovati con la curva dei tassi originali;
- D_i sono le rispettive Duration per $i = 1, 2$;
- p_L è l'uscita attualizzata di L, calcolata come: $p_L = L\left(1 + i(0{,}3)\right)^{-DU(0,L)}$
  p_L = 3712.49, D_L = 3 per definizione e i(0,3) = 2.52%, trovato con il metodo di Bootstrapping utilizzando la curva dei tassi originale

I valori delle incognite sono: $\boldsymbol{w_1 = 18.5252}$ e $\boldsymbol{w_2 = 19.2096}$ (non vi è nessuna vendita allo scoperto).