

D3 Report sulla Manipolazione Non-Prensile Multicontenitore

Progetto MATRIX – MANipolazione e Trasporto Robotizzato di liquidi per applicazioni
Industriali ad alte prestazioni

LAR-IRMA



Authors:

Simone Soprani
Roberto Di Leva

28 luglio 2025

Introduzione

Il presente documento descrive l'approccio alla pianificazione e al controllo del moto per la manipolazione non-prensile di contenitori molteplici, con particolare enfasi sulle tecniche di ottimizzazione sviluppate e sulle sperimentazioni condotte per validarne l'efficacia in scenari reali. Questo documento comprende i deliverable D3.2 e D3.3.

Modellazione dello Sloshing del Liquido

Per riprodurre la dinamica dello sloshing del liquido, si impiega un modello meccanico equivalente semplificato, specificamente il modello massa-molla-smorzatore, descritto nel WP1. Questo modello è composto da una massa rigida m_0 che si muove rigidamente con il contenitore e da una serie di masse mobili m_n , ciascuna delle quali rappresenta la massa equivalente di un modo di sloshing [1].

I parametri del modello per un contenitore cilindrico di raggio R , riempito con un liquido di altezza h e massa m_F , possono essere determinati imponendo le seguenti condizioni di equivalenza [2]:

1. La massa complessiva deve essere la stessa:

$$m_F = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n$$

2. L'altezza del centro di gravità G deve rimanere la stessa per piccole oscillazioni del liquido:

$$m_0 h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n = 0$$

3. La frequenza naturale associata alla n-esima modalità deve coincidere con quella ottenibile dal modello continuo:

$$\omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n} = g \frac{\xi_{1n}}{R} \tanh\left(\xi_{1n} \frac{h}{R}\right)$$

4. La forza di sloshing che agisce sulla parete del contenitore deve essere la stessa calcolata dal modello continuo:

$$m_n = m_F \frac{2R}{\xi_{1n} h (\xi_{1n}^2 - 1)} \tanh\left(\xi_{1n} \frac{h}{R}\right)$$

Dove ξ_{1n} è la radice della derivata della funzione di Bessel del primo tipo rispetto alla coordinata radiale r , per la prima modalità circonferenziale e la n-esima modalità radiale,

e g è l'accelerazione di gravità. Il rapporto di smorzamento ζ_n può essere determinato tramite formule empiriche [3].

Le posizioni delle masse m_n sono descritte dalle coordinate generalizzate (x_n, y_n) e avvengono su piani differenti, ciascuno dei quali rimane parallelo al piano xy ad un'altezza costante h_n .

Più specificatamente, il modello utilizzato è in grado di rappresentare il comportamento di un liquido all'interno di un contenitore cilindrico sottoposto a un moto 4D, dove, oltre alla pura traslazione, il contenitore è soggetto a una rotazione attorno all'asse principale del cilindro. È importante notare che, ai fini dell'ottimizzazione, il modello considerato non include alcun contributo da parte della molla non lineare (il termine α è posto a zero). Dettagli più specifici su questo modello e le equazioni di moto impiegate sono presentati nel WP1.

La formulazione della n -esima altezza di sloshing $\bar{\eta}_n$ in funzione delle coordinate generalizzate si esprime come:

$$\bar{\eta}_n = \frac{\xi_{1n}^2 h m_n}{R m_F} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \frac{2R\omega_n^2}{g(\xi_{1n}^2 - 1)} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \quad (1)$$

Considerando che il primo modo di sloshing è quello fondamentale e contribuisce in larga parte al comportamento effettivo del liquido, per le analisi successive verrà preso in considerazione unicamente questo modo.

Pianificazione della Traiettoria Ottimale e Ottimizzazione Vincolata

L'obiettivo di questo deliverable è la pianificazione della traiettoria tempo-ottimale per un robot industriale che trasporta molteplici contenitori riempiti di liquido senza che questi siano vincolati alla flangia del robot, con l'esplicita imposizione di limiti stringenti sull'altezza di sloshing per ciascun contenitore. Il problema del "cameriere", che si focalizza primariamente sulla stabilità degli oggetti rigidi e fa sì che non si abbia distaccamento o scivolamento di questi oggetti dal vassoio su cui sono appoggiati viene quindi accoppiato a vincoli stringenti sull'altezza di sloshing per ogni contenitore, l'attenzione viene quindi rivolta anche alla gestione della dinamica interna dei liquidi.

Il percorso geometrico che il vassoio del robot deve seguire è pre-assegnato. Questo percorso viene parametrizzato in funzione di una coordinata scalare s

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad s \in [0, 1] \quad (2)$$

e viene definito usando B-spline di grado d e con $m + 1$ punti controllo. La dinamica del sistema, che include il movimento del robot e lo sloshing dei liquidi, viene quindi espressa in termini di s e delle sue derivate temporali. La traiettoria può quindi essere definita in funzione del parametro $s(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}'(s) \dot{s} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}''(s) \dot{s}^2 + \mathbf{r}'(s) \ddot{s} \end{aligned} \quad (3)$$

Pertanto, lo stato del sistema includerà s , la velocità \dot{s} , e l'accelerazione \ddot{s} . Lo stato del sistema è quindi definito da un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3+4N_c}$ con N_c rappresentante il numero dei contenitori:

$$\mathbf{x} = [s \ \dot{s} \ \ddot{s} \ \mathbf{x}_1 \ \mathbf{y}_1 \ \dot{\mathbf{x}}_1 \ \dot{\mathbf{y}}_1]^T \quad (4)$$

$[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{y}_1 \ \dot{\mathbf{x}}_1 \ \dot{\mathbf{y}}_1]$ rappresentano i vettori delle coordinate generalizzate e rispettive derivate per ogni massa di sloshing. L'input di controllo per l'ottimizzazione è definito come il jerk di s , ovvero \ddot{s} , al fine di garantire la continuità dell'accelerazione lungo la traiettoria.

$$u = \ddot{s} \quad (5)$$

La rotazione del vassoio attorno all'asse z (θ) è tipicamente definita in modo lineare in funzione di s , ovvero:

$$\theta(s) = \theta_0 + s(\theta_{t_e} - \theta_0)$$

Tuttavia, l'algoritmo di ottimizzazione proposto è generale e può essere applicato anche a formulazioni più complesse di θ in funzione di s .

Il funzionale di costo dell'ottimizzazione è progettato per minimizzare il tempo totale di percorrenza del percorso geometrico, garantendo al contempo una traiettoria fluida:

$$J = \int_0^{t_e} (1 - ku^2) dt$$

dove k è un fattore di peso che bilancia l'importanza della minimizzazione del tempo rispetto alla regolarità della traiettoria. I vincoli principali da considerare per ogni contenitore e per il sistema robotico sono:

1. **Limiti sull'altezza di sloshing:** Per ogni contenitore j , l'altezza di sloshing $\bar{\eta}_j$ deve rimanere al di sotto di un valore limite predefinito $\bar{\eta}_{lim}$:

$$\bar{\eta}_j(t) \leq \bar{\eta}_{lim} \quad \forall j, t$$

2. **Vincoli cinematici del robot:** Questi includono i limiti di posizione e velocità dei giunti del robot, le cui formulazioni all'interno del problema sono definite in funzione del parametro di ottimizzazione s e delle sue derivate necessarie.
3. **Vincoli non-prensili:** Per la manipolazione non-prensile, è fondamentale assicurare che gli oggetti non scivolino o si ribaltino dalla superficie di trasporto (vassoio). Questo si traduce in vincoli basati sul cono di attrito e sui momenti di ribaltamento per ciascun oggetto (v. Fig. 1). Per più contenitori, questi vincoli devono essere applicati individualmente a ciascun contenitore j :

$$\begin{aligned} f_{z,j} &\leq 0 \quad (\text{Non-distacco}) \\ ||f_{T,j}|| - \mu_0 |f_{z,j}| &\leq 0 \quad (\text{Non-scivolamento}) \\ ||f_{T,j}|| - \frac{R_j}{h_{G,j}} |f_{z,j}| &\leq 0 \quad (\text{Non-ribaltamento}) \\ M_{z,j} - \frac{2}{3} \mu_0 |f_{z,j}| R_j &\leq 0 \quad (\text{Non-slittamento torsionale}) \end{aligned}$$

Dove $f_{T,j}$ e $f_{z,j}$ sono le forze tangenziali e normali agenti su ogni contenitore, μ_0 è il coefficiente di attrito statico, $M_{z,j}$ è la componente verticale del momento risultante totale che agisce sul contenitore che rappresenta il momento che tende a far ruotare o torcere il contenitore attorno al suo asse verticale. Infine $h_{G,j}$ e R_j sono rispettivamente l'altezza del centro di massa del contenitore j rispetto al punto di ribaltamento e il raggio del contenitore j .

Nello specifico ogni vincolo può essere spiegato più dettagliatamente:

- **Non-distacco** ($f_{z,j} \leq 0$): Questo vincolo garantisce che il contenitore rimanga sempre in contatto con la superficie del vassoio. Fisicamente, la forza normale $f_{z,j}$ rappresenta la reazione del vassoio sul contenitore; essa deve essere sempre compressiva (ovvero diretta verso il basso se l'asse z è orientato verso l'alto). Una violazione di questo vincolo (cioè $f_{z,j} > 0$) indicherebbe un distacco del contenitore dal vassoio, condizione non ammissibile nella manipolazione non-prensile.
- **Non-scivolamento** ($||f_{T,j}|| - \mu_0|f_{z,j}| \leq 0$): Questo vincolo è l'espressione del classico cono di attrito e previene lo scivolamento orizzontale del contenitore rispetto al vassoio. Esso stabilisce che la magnitudine della forza tangenziale $||f_{T,j}||$ che agisce sul contenitore non debba superare la massima forza di attrito statico disponibile, la quale è proporzionale alla forza normale $f_{z,j}$ tramite il coefficiente di attrito statico μ_0 . Se la forza tangenziale richiesta per l'accelerazione del contenitore eccedesse questo limite, si verificherebbe lo scivolamento.
- **Non-ribaltamento** ($||f_{T,j}|| - \frac{R_j}{h_{G,j}}|f_{z,j}| \leq 0$): Questo vincolo deriva dall'equilibrio dei momenti attorno al bordo di contatto del contenitore con il vassoio. Il ribaltamento si verifica quando il momento ribaltante, generato dalla forza tangenziale $f_{T,j}$ (che riflette le forze inerziali orizzontali) che agisce all'altezza del centro di massa $h_{G,j}$, supera il momento ripristinatore. Quest'ultimo è fornito dalla forza normale $f_{z,j}$ (equivalente alla forza peso apparente) che agisce al raggio R_j dal bordo di ribaltamento. Affinché il contenitore rimanga stabile, il momento ribaltante ($||f_{T,j}|| \cdot h_{G,j}$) deve essere inferiore o uguale al momento ripristinatore ($|f_{z,j}| \cdot R_j$). Ciò si traduce nella condizione $h_{G,j}||f_{T,j}|| \leq R_j|f_{z,j}|$, che è il vincolo espresso nella forma mostrata.
- **Non-slittamento torsionale** ($M_{z,j} - \frac{2}{3}\mu_0|f_{z,j}|R_j \leq 0$): Questo vincolo previene la rotazione o lo "slittamento" del contenitore attorno al proprio asse verticale relativo al vassoio. $M_{z,j}$ rappresenta il momento torsionale agente sul contenitore. Il termine $\frac{2}{3}\mu_0|f_{z,j}|R_j$ definisce la massima resistenza frizionale torsionale staticamente sopportabile, una derivazione che tiene conto della distribuzione delle forze di attrito sulla base di contatto (valida per basi circolari). Se il momento torsionale generato dalle accelerazioni angolari del vassoio o da forze tangenziali non uniformi supera questo limite, il contenitore inizierà a ruotare rispetto al vassoio.

Per ottenere le forze e i momenti agenti su ogni singolo contenitore, è fondamentale disporre delle accelerazioni a cui ciascun contenitore è soggetto. Queste accelerazioni sono ricavate utilizzando le formule della cinematica del corpo rigido, partendo dalle accelerazioni note del vassoio. Di conseguenza, le accelerazioni di ogni contenitore sono espresse in funzione della coordinata del percorso s e delle sue derivate temporali, ovvero \dot{s} (velocità) e \ddot{s} (accelerazione).

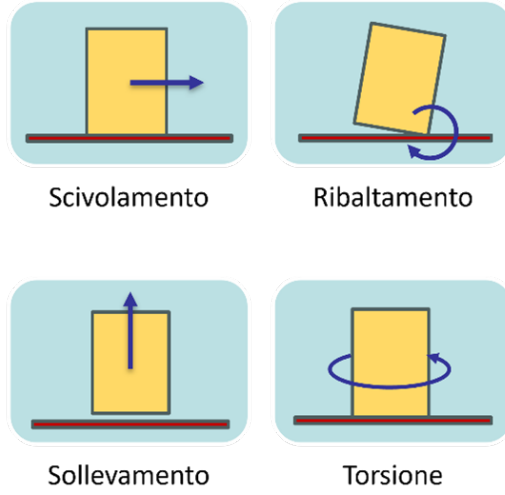


Figura 1: Vincoli Problema del Cameriere.

Il problema di ottimizzazione può quindi essere formulato come:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}, u} \quad & \int_0^{t_e} (1 - ku^2) dt \\
 \text{s.t.} \quad & \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\
 & \mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{0}_{4N_c}]^T \\
 & \mathbf{x}(t_e) = [1 \ 0 \ 0 \ \mathbf{0}_{4N_c}]^T \\
 & \mathbf{q}_{min} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{max} \\
 & |\dot{\mathbf{q}}| \leq \dot{\mathbf{q}}_{lim} \\
 & f_{z,j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_c \\
 & ||f_{T,j}|| - \mu_0 |f_{z,j}| \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_c \\
 & ||f_{T,j}|| - \frac{R_j}{h_{G,j}} |f_{z,j}| \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_c \\
 & M_{z,j} - \frac{2}{3} \mu_0 |f_{z,j}| R_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_c \\
 & \bar{\eta}_j(t) \leq \bar{\eta}_{lim}, \quad j = 1, \dots, N_c; \ t \in [0, t_e] \\
 & \bar{\eta}_j(t) \leq 0.2 \bar{\eta}_{lim}, \quad j = 1, \dots, N_c; \ t \geq t_e \\
 & |u| \leq u_{lim}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Dove la funzione \mathbf{f} include la catena di integrazione di s ed u , oltre che alla dinamica di ogni contenitore. Quest'ultima in particolare è rappresentata dalle equazioni di moto descritte nel WP1. Le velocità di giunto $\dot{\mathbf{q}}$, in particolare, sono ottenute tramite la cinematica differenziale del robot, ovvero:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Esperimenti

Le sperimentazioni sono state condotte per validare gli algoritmi sviluppati e le tecniche di ottimizzazione adottate per la pianificazione del moto.

Setup Sperimentale

Il robot industriale utilizzato per le sperimentazioni è un Comau SmartSix, un manipolatore seriale a 6 gradi di libertà (v. Fig. 2). Per la risoluzione del problema di ottimizzazione non lineare (NLP) è stato impiegato il risolutore IPOPT (Interior Point OPTimizer), integrato tramite l'interfaccia CasADi.

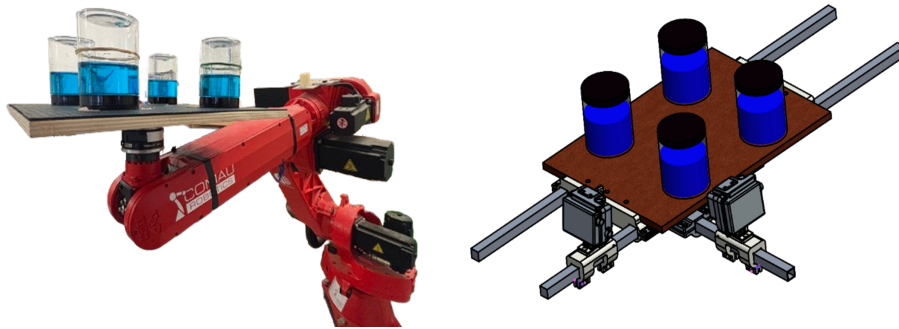


Figura 2: Setup Esperimento.

I valori dei pesi k nel funzionale di costo sono stati selezionati per bilanciare l'obiettivo di minimizzazione del tempo con la necessità di mantenere un jerk contenuto per la fluidità del movimento. In particolare, il valore prescelto per k è $1e^{-2}$.

Le misure dei contenitori utilizzati negli esperimenti sono state le seguenti:

- Raggio del contenitore cilindrico: 35 mm
- Altezza del liquido: 49 mm
- Massa del liquido: 0.197 kg
- Coefficiente di attrito tra contenitore e vassoio: 0.4197
- Numero contenitori: 4

I contenitori considerati sono stati posti ad una distanza di 115 mm rispetto al centro del vassoio sulle diagonali del vassoio rettangolare di dimensioni:

- Lunghezza: 33.5 mm
- Larghezza: 25 mm

Il percorso predefinito è un arco di circonferenza (v. Fig. 5) e i restanti parametri sono:

- $\bar{\eta}_{lim}$: 15 mm
- $\theta_z(t_e)$: π rad

I tempi di calcolo per l'ottimizzazione dipendono dalla complessità del problema (numero di intervalli, numero di contenitori, strettezza dei vincoli) e dall'hardware utilizzato. Tipicamente, i tempi di calcolo si attestano intorno ai 185 secondi.

Risultati e Validazione

I risultati delle simulazioni hanno dimostrato l'efficacia dell'approccio proposto nel generare traiettorie tempo-ottimali che rispettano i limiti di sloshing e i vincoli non-prensili. Nello specifico per la configurazione precedentemente prescritta, come si può vedere in Fig. 3, l'altezza di sloshing per ogni contenitore resta al di sotto del limite imposto.

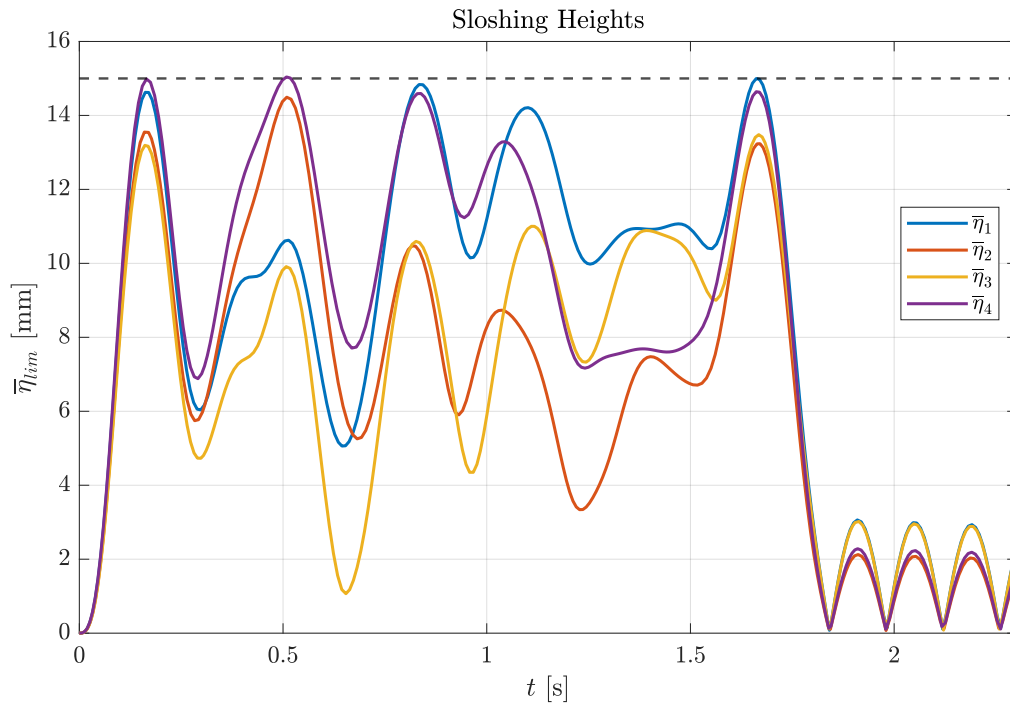


Figura 3: Risultati Altezze di Sloshing.

Nella Fig. 4 sono riportati i quattro grafici relativi al problema del cameriere, dai quali si osserva che i limiti imposti dalle condizioni di vincolo sono rispettati per ogni contenitore. La Fig. 5 presenta invece un riassunto complessivo dei risultati dell'ottimizzazione, includendo il tempo totale di esecuzione e le accelerazioni massime raggiunte dal robot durante il moto.

Per validare i risultati la traiettoria ottimizzata è stata implementata sul robot Comau SmartSix. La validazione sperimentale è stata realizzata tramite un setup di visione più ampiamente descritto nel WP1. Questo sistema di visione ha permesso di monitorare e misurare l'altezza effettiva dello sloshing del liquido durante il movimento del robot.

Un confronto dettagliato tra le previsioni del modello (simulazione) e le misurazioni sperimentali dell'altezza di sloshing ha confermato l'accuratezza del modello e l'efficacia dell'algoritmo di ottimizzazione. Fig. 6 mostra un esempio di tale comparazione. Il grafico evidenzia come l'altezza massima dello sloshing rispetti i vincoli imposti durante l'intera esecuzione del moto ottimizzato, sia nelle simulazioni numeriche che nelle acquisizioni sperimentali. Le lievi discrepanze osservabili nei dati reali sono attribuibili a errori di visione artificiale, e non a reali violazioni del vincolo. Tali risultati confermano l'efficacia e la robustezza della strategia di ottimizzazione proposta.

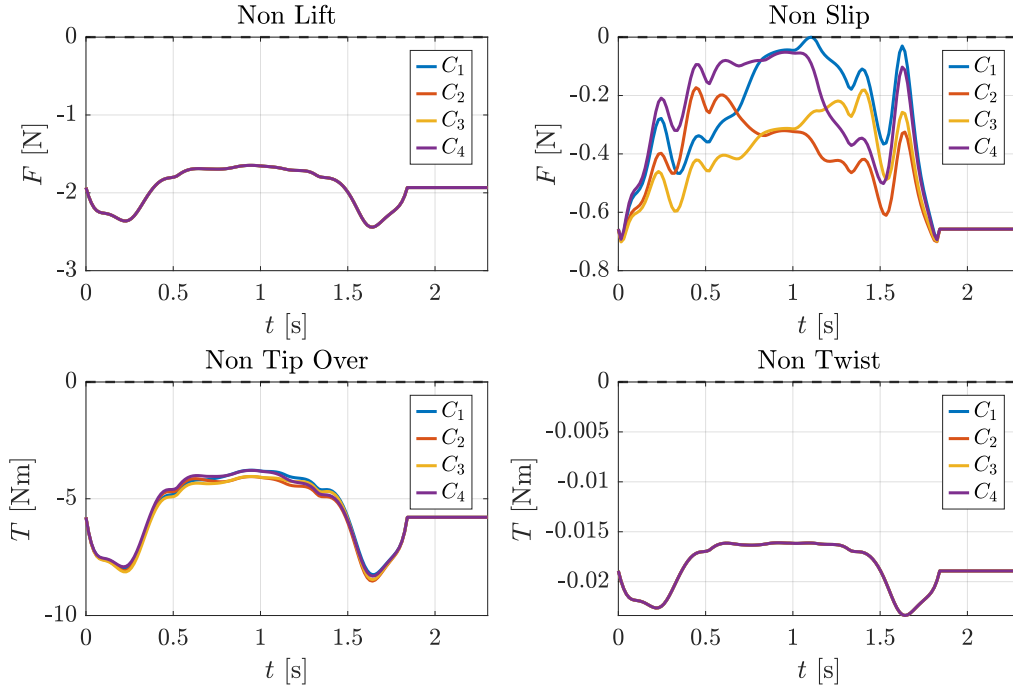


Figura 4: Risultati Vincoli del Cameriere.

Ottimizzazione Multi-Contenitore per Corpi Rigidi

Nel caso particolare in cui i contenitori non siano ripieni di liquido ma siano corpi rigidi, si possono sfruttare i gradi di libertà del robot per ottenere traiettorie ancora più performanti, poiché l'orientamento del contenitore stesso può variare nello spazio in modo da soddisfare i vincoli di non-prensilità. L'orientamento di un corpo rigido nello spazio 3D può essere rappresentato in modo univoco da tre angoli indipendenti. Questi angoli definiscono una sequenza di tre rotazioni attorno a specifici assi che trasformano un sistema di riferimento da un orientamento iniziale a un orientamento finale. Nel caso specifico, l'orientamento è determinato da:

- Rotazione attorno all'asse verticale del vassoio θ_z . Questa rotazione è prescritta a priori in funzione della coordinata s del percorso e non è quindi non è una variabile di ottimizzazione libera.
- Due angoli di Eulero aggiuntivi θ_x e θ_y , che rappresentano le rotazioni rimanenti necessarie a definire completamente l'orientamento del contenitore.

Il fatto che θ_z sia prescritta a priori e sia un input del problema, mentre θ_x e θ_y sono variabili di ottimizzazione, suggerisce una gerarchia nella gestione dell'orientamento. Questo significa che il percorso in imbardata è predefinito per il vassoio, e il robot può inclinare (pitch e roll) il vassoio per manipolare al meglio i contenitori rigidi, tenendo conto dei vincoli. La sequenza di rotazione prescelta è:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\theta_z(s))\mathbf{R}_y(\theta_y)\mathbf{R}_x(\theta_x) \quad (8)$$

dove \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y e \mathbf{R}_z sono matrici di rotazione elementari. A differenza del caso con sloshing le accelerazioni, sia angolari che lineari, dei contenitori sono strettamente dipendenti da

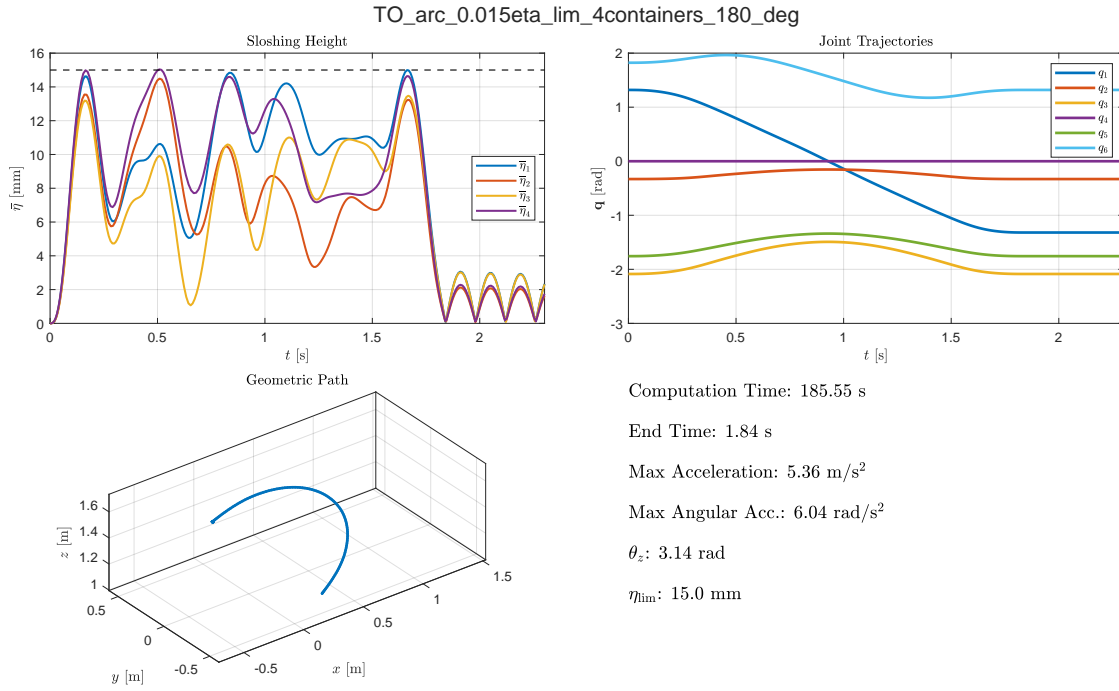


Figura 5: Risultati Ottimizzazione.

tutti gli angoli di Eulero e dalle loro derivate temporali, la loro formulazione ne tiene quindi conto e queste sono definite in funzione non solo di s e delle sue derivate ma anche dei due angoli di Eulero e rispettive derivate nella forma di velocità e accelerazioni angolari.

In particolare lo stato del problema di ottimizzazione può essere espanso per considerare due angoli di Eulero, che insieme alla rotazione prescritta attorno all'asse verticale del vassoio determinano in maniera univoca l'orientamento del contenitore nello spazio.

Lo stato del sistema è quindi definito da un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^9$:

$$\mathbf{x} = [s \ \dot{s} \ \ddot{s} \ \theta_x \ \dot{\theta}_x \ \ddot{\theta}_x \ \theta_y \ \dot{\theta}_y \ \ddot{\theta}_y]^T \quad (9)$$

Gli input di controllo del sistema sono quindi ora rappresentati dai jerk associati a s e alle due variabili angolari, ossia θ_y e θ_x . L'input di controllo diventa:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ \mathbf{u}_\theta \end{bmatrix} = [\ddot{\ddot{s}} \ \ddot{\ddot{\theta}}_x \ \ddot{\ddot{\theta}}_y] \quad (10)$$

Il funzionale di costo dell'ottimizzazione è ora:

$$J = \int_0^{t_e} \left(1 - k_r u_r^2 - k_\theta \mathbf{u}_\theta^T \mathbf{u}_\theta \right) dt$$

Non considerando più la dinamica dello sloshing il problema di controllo ottimo si sem-

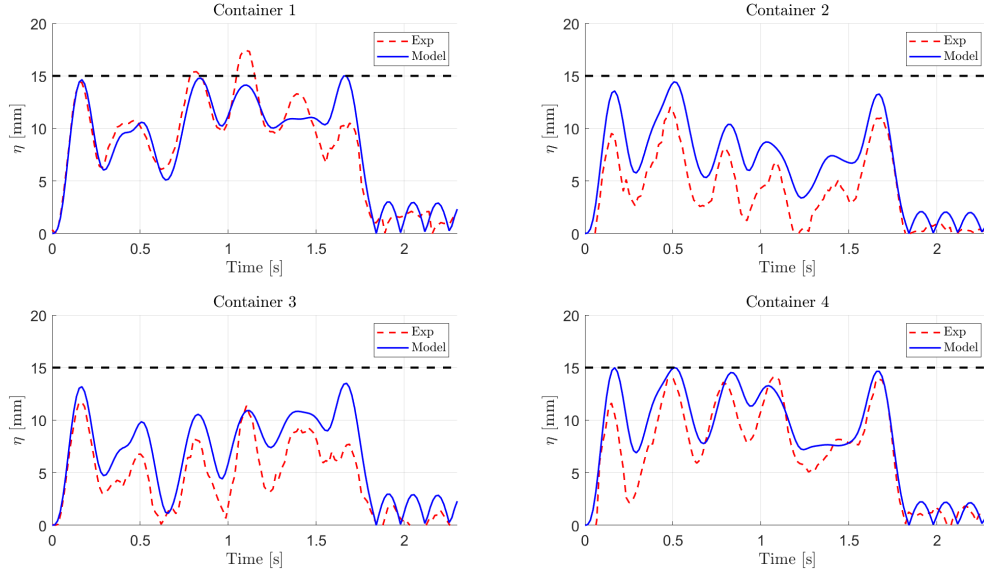


Figura 6: Confronto tra altezza di sloshing simulata e misurata sperimentalmente.

plifica in:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} \quad \int_0^{t_e} (1 - k_r u_r^2 - k_\theta \mathbf{u}_\theta^T \mathbf{u}_\theta) dt \\
 & \text{s.t.} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\
 & \quad \mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \theta_x(0) \ \theta_y(0) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 & \quad \mathbf{x}(t_e) = [1 \ 0 \ 0 \ \theta_x(t_e) \ \theta_y(t_e) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 & \quad \mathbf{q}_{min} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{max} \\
 & \quad |\dot{\mathbf{q}}| \leq \dot{\mathbf{q}}_{lim} \\
 & \quad f_{z,j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_c \\
 & \quad ||f_{T,j}|| - \mu_0 |f_{z,j}| \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_c \\
 & \quad ||f_{T,j}|| - \frac{R_j}{h_{G,j}} |f_{z,j}| \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_c \\
 & \quad M_{z,j} - \frac{2}{3} \mu_0 |f_{z,j}| R_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_c \\
 & \quad |\mathbf{u}| \leq \mathbf{u}_{lim}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

La funzione \mathbf{f} include la catena di integrazione di s , θ_x , θ_y ed \mathbf{u} e le velocità di giunto $\dot{\mathbf{q}}$ sono ottenute tramite la cinematica differenziale del robot come in Eq. (7).

Setup Sperimentale

Il setup sperimentale e i software utilizzati rimangono quelli definiti in precedenza e mostrati in Fig. 2. I valori dei pesi k_r e k_θ nel funzionale di costo sono stati definiti entrambi ad un valore di $1e^{-5}$.

Le misure dei contenitori utilizzati negli esperimenti sono state le seguenti:

- Raggio del contenitore cilindrico: 35 mm
- Altezza del contenitore: 99.1 mm

- Massa del contenitore: 0.347 kg
- Coefficiente di attrito tra contenitore e vassoio: 0.4197
- Numero contenitori: 4

I contenitori considerati sono stati posti ad una distanza di 115 mm rispetto al centro del vassoio sulle diagonali del vassoio rettangolare di dimensioni:

- Lunghezza: 33.5 mm
- Larghezza: 25 mm

Il percorso predefinito è un arco di circonferenza (v. Fig. 5) con una variazione angolare di $\theta_z = \pi$ rad.

I tempi di calcolo per l'ottimizzazione dipendono dalla complessità del problema (numero di intervalli, numero di contenitori, strettezza dei vincoli) e dall'hardware utilizzato. Tipicamente, i tempi di calcolo si attestano intorno ai 34 secondi.

Risultati

Come illustrato in Fig. 7, le traiettorie ottimizzate dimostrano il pieno rispetto dei vincoli imposti dal problema del cameriere. La Fig. 8 evidenzia inoltre l'integrale sfruttamento delle capacità prestazionali del robot, manifestato dalla saturazione delle velocità del primo giunto. I risultati complessivi e più significativi dell'ottimizzazione sono infine riepilogati in Fig. 9, in particolare i risultati ottenuti per la traiettoria angolare sono presentati nella prima figura. L'efficacia di questo approccio è stata ulteriormente convalidata tramite un'analisi qualitativa condotta sul setup sperimentale.

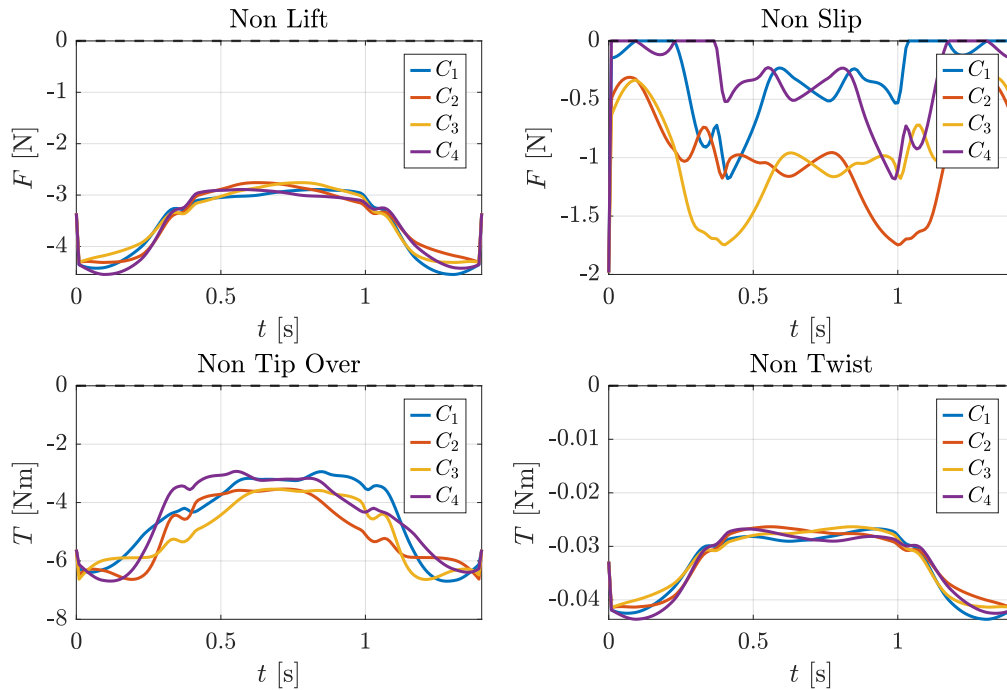


Figura 7: Vincoli del Cameriere per Problema di Ottimizzazione di Corpi Rigidi.

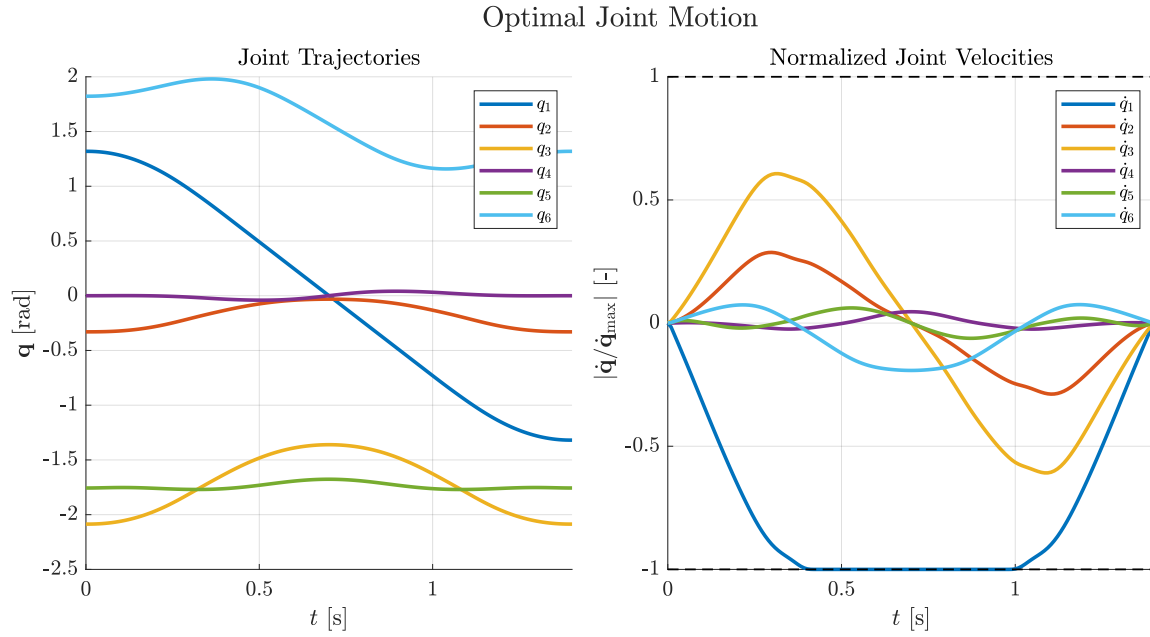


Figura 8: Limiti su Giunti e Velocità di Giunto.

Limitazioni Attuali e Prospettive Future

Mentre l'ottimizzazione per corpi rigidi sfrutta appieno i gradi di libertà disponibili del robot per prestazioni migliorate, l'ottimizzazione anti-sloshing attualmente opera sotto un'assunzione semplificata riguardo l'orientamento del vassoio. Il pieno potenziale del "tilting compensativo", ovvero l'ottimizzazione dinamica degli angoli di pitch (θ_x) e roll (θ_y) del vassoio per contrastare attivamente il movimento del liquido, non è stato ancora completamente sfruttato nel contesto antisloshing. Ciò è dovuto principalmente all'attuale assenza di un modello equivalente del liquido generalizzato a 6 gradi di libertà (6D), capace di prevedere accuratamente il complesso comportamento di sloshing sotto orientamenti arbitrari dell'end-effector del robot. L'attuale modello MSD a 4D, sebbene efficace per specifici schemi di movimento planari, non cattura completamente le dinamiche di sloshing multi-assiali che il tilting compensativo mirerebbe a mitigare. Una significativa direzione futura prevede l'ampliamento dell'attuale modello equivalente del liquido verso una rappresentazione 6D più completa. Una volta che tale modello sarà disponibile e integrato, sarà possibile:

- Ampliare lo stato del sistema nel problema di ottimizzazione includendo le coordinate dinamiche (es. posizioni e velocità delle masse equivalenti) dei modelli del liquido estesi per ogni contenitore.
- Aggiungere specifici vincoli legati alla massima altezza di sloshing ($\bar{\eta}_{lim}$) per ogni contenitore, consentendo all'ottimizzazione di gestire direttamente lo sloshing.

L'implementazione di questi miglioramenti promette di sbloccare traiettorie antisloshing ancora più performanti, sfruttando appieno i gradi di libertà disponibili del robot per la stabilizzazione dinamica del liquido. Tuttavia, è fondamentale riconoscere che tale espansione richiederà attente considerazioni riguardo i tempi di calcolo e le potenziali semplificazioni dei modelli del sistema per garantire la fattibilità e la risolvibilità dei risultanti problemi di controllo ottimo.

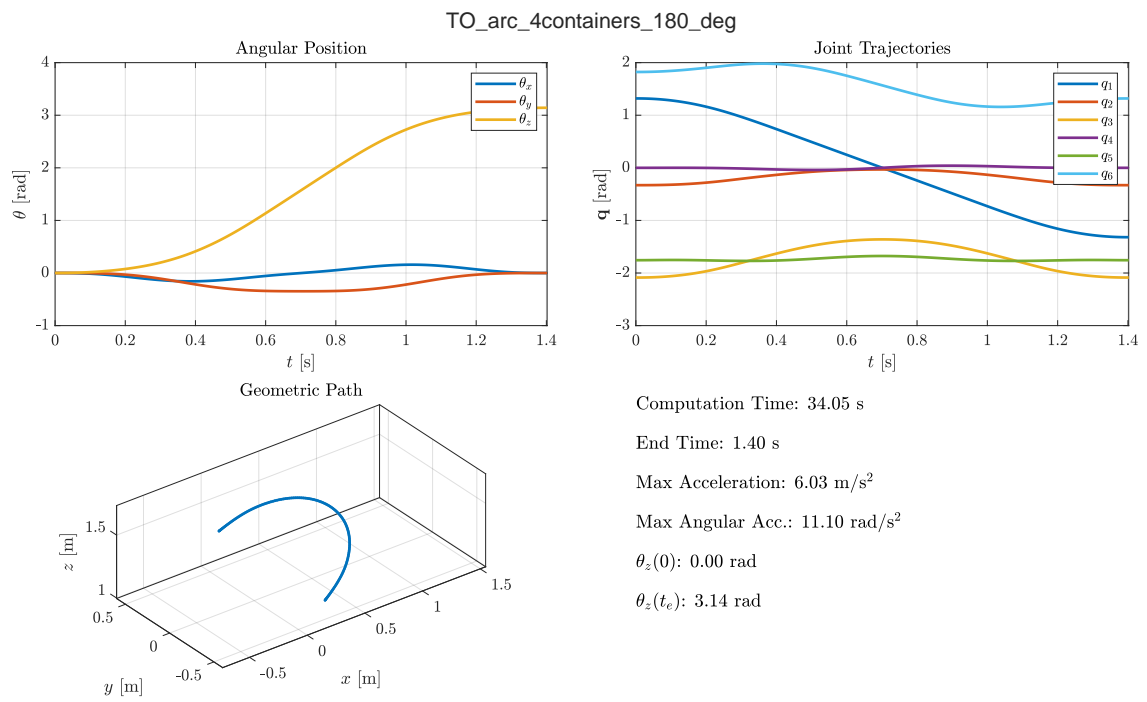


Figura 9: Risultati Principali del Problema di Ottimizzazione per Corpi Rigidi.

Bibliografia

- [1] R. Di Leva, M. Carricato, H. Gatringer, and A. Müller, “Sloshing dynamics estimation for liquid-filled containers performing 3-dimensional motions: modeling and experimental validation,” *Multibody System Dynamics*, vol. 56, no. 2, pp. 153–171, 2022.
- [2] R. A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. New York, NY: Cambridge University Press, 2005.
- [3] H. Bauer, “Nonlinear Mechanical Model for the Description of Propellant Sloshing,” *AIAA Journal*, vol. 4, pp. 1662–1668, 1966.