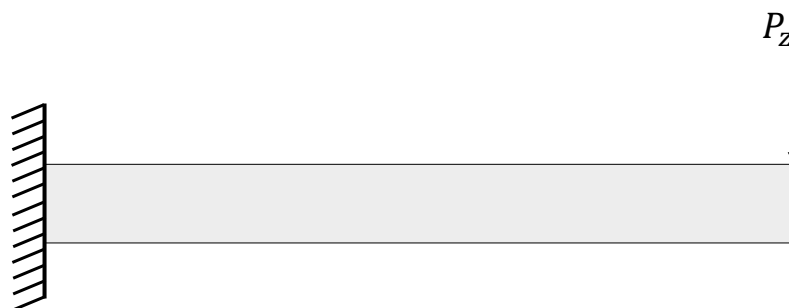


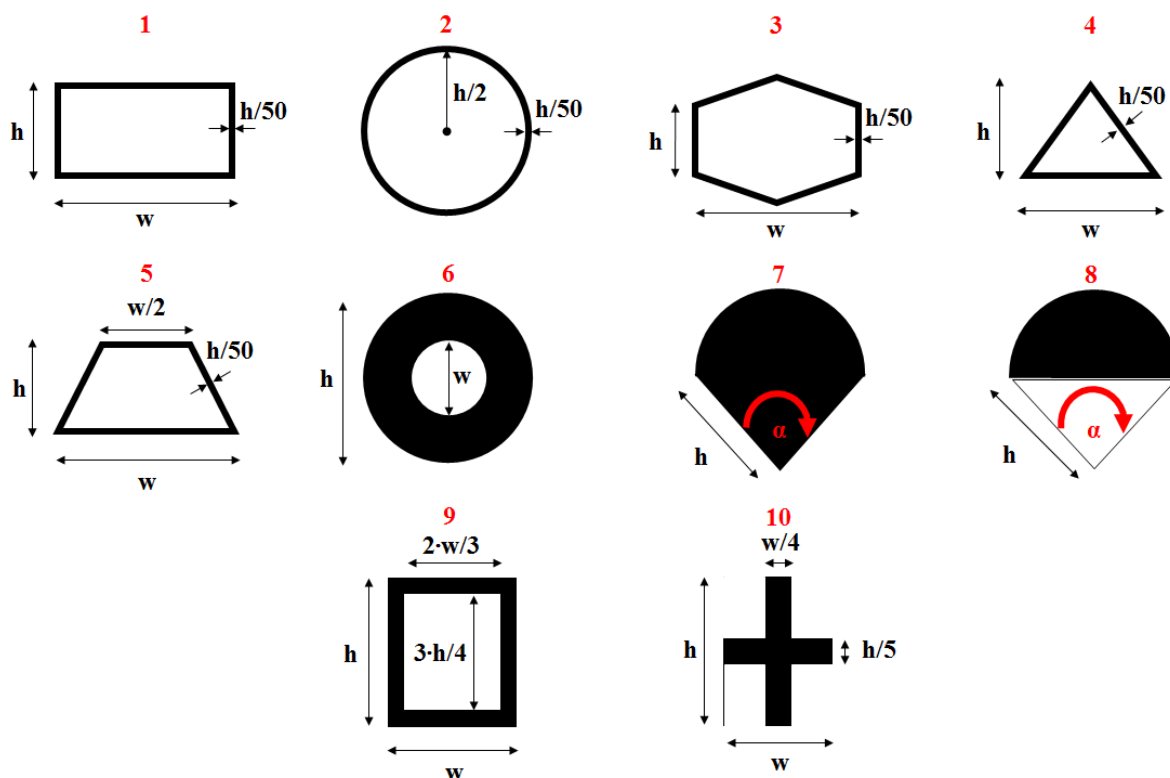
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΙΚΟΜΒΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΟΚΩΝ



Εικόνα 1. Γεωμετρική αναπαράσταση δοκού με συνοριακές συνθήκες και φορτίσεις.

Θεωρείστε την περίπτωση μιας μονόπακτης δοκού, όπως φαίνεται στο σχήμα της Εικόνας 1, με μήκος L , που φορτίζεται στο ελεύθερο άκρο της με δύναμη $P_z = 39 \cdot C$ N με τη φορά του σχήματος. Η δοκός είναι κατασκευασμένη από ομογενές και ισότροπο ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E = 71$ GPa και λόγο Poisson $\nu = 0.33$. Η διατομή της δοκού έχει ένα από τα σχήματα της Εικόνας 2, στα οποία θεωρούμε το h ως ύψος και το w ως πλάτος. Οι τιμές των ποσοτήτων C , L , h και w δίνονται σε μέτρα σε πίνακα που ακολουθεί ανάλογα με το τελευταίο ψηφίο των Αριθμών Μητρώου σας (Α.Μ) ή το τελευταίο ψηφίο του μέσου όρου των Α.Μ. (η στρογγυλοποίηση γίνεται στον κοντινότερο ακέραιο).



Εικόνα 2. Σχήματα διατομών.

Ψηφίο Μέσου Όρου A.M.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Σχήμα Διατομής	7	8	9	4	1	10	8	2	3	6
Τελευταίο Ψηφίο max A.M.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
L [m]	3.3	2.9	2.7	3.4	3.0	2.8	2.5	3.2	2.4	2.6
Τελευταίο Ψηφίο min A.M.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
w [m]	0.012	0.017	0.014	0.016	0.013	0.008	0.011	0.009	0.015	0.010
α [°]	45	20	35	40	25	45	20	35	40	25

Πίνακας 1. Τιμές παραμέτρων σύμφωνα με τους Αριθμούς Μητρώου

Στόχος της εργαστηριακής άσκησης είναι να προγραμματισθούν (χρησιμοποιώντας Matlab) μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση του προβλήματος με συγκεκριμένες προδιαγραφές.

ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ

- Ο κώδικας θα λειτουργεί με δεδομένες ιδιότητες υλικού, δηλαδή οι τιμές των ελαστικών σταθερών E, ν και G θα δίνονται ή/και θα υπολογίζονται στην αρχή του και θα παραμένουν αμετάβλητες.
 - Ο κώδικας θα λαμβάνει από το χρήστη ως εισόδους:
 - το μήκος της δοκού L
 - τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής (όπως δίνονται στην Εικόνα 2)
 - τον αριθμό των πεπερασμένων στοιχείων N_{elm} που διακριτοποιούν τη δοκό
 - τη φορά και το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης P_z
 - επιλογή λύσης με έναν ή περισσότερους τύπους 2-κομβων πεπερασμένων στοιχείων δοκού
 - Ο κώδικας θα επιτρέπει την επιλογή λύσης με όλα ή με ένα από τα κάτωθι τρία διαφορετικά 2-κομβά πεπερασμένα στοιχεία δοκού, τα οποία είναι:
 - Στοιχείο Κλασσικής κάμψης (Euler)
 - Στοιχείο Διάτμησης με Πλήρη Ολοκλήρωση (Shear Full)
 - Στοιχεία Διάτμησης με επιλεκτικά Μειωμένη Ολοκλήρωση στους ορούς της διατμητικής ελαστικής ενέργειας (Shear Reduced)
- Σημείωση: τα μητρώα δυσκαμψίας έχουν δοθεί στις διαλέξεις του μαθήματος, αλλά παρατίθενται και στο παράρτημα.
- Ο κώδικας θα παρέχει ως έξοδο για κάθε τύπο πεπερασμένου στοιχείου δοκού:
 - το λόγο μήκους προς πάχος L/h
 - το βέλος κάμψης w της δοκού
 - τη γωνία περιστροφής της δοκού
 - Σχόλια/παρατηρήσεις και οποιεσδήποτε εκτυπώσεις στο workspace του MATLAB θα γίνονται

χρησιμοποιώντας λατινικούς χαρακτήρες.

ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ

1. Να πραγματοποιηθεί αναλυτικός υπολογισμός της δευτεροβάθμιας ροπής αδράνειας, για την διατομή που προκύπτει βάσει τον ΑΜ σας.
2. Να δημιουργηθεί κατάλληλη συνάρτηση η οποία να υπολογίζει το μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου κάμψης. Συγκεκριμένα, οι παράμετροι E, A, I, \dots κοκ θα πρέπει να λαμβάνονται ως είσοδοι, καθώς και η επιλεγθείσα μέθοδος (Euler, Shear Full, Shear Reduced). Η συνάρτηση θα πρέπει να επιστρέφει το μητρώο δυσκαμψίας του δίκομβου στοιχείου.
3. Να δημιουργηθεί αντίστοιχη συνάρτηση για την κατασκευή του ολικού μητρώου δυσκαμψίας. Η συνάρτηση θα δέχεται απαραίτητες παραμέτρους, όπως πχ ο αριθμός των στοιχείων, καθώς και το μητρώο δυσκαμψίας του πεπερασμένου στοιχείου, όπως υπολογίστηκε στο 2^ο ερώτημα. Η έξοδος της συνάρτησης θα αποτελεί το ολικό μητρώο δυσκαμψίας.
4. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις του ερωτήματος 2 και 3, να κατασκευαστεί κώδικας ο οποίος για δοθείσες παραμέτρους, δύναμη και αριθμό στοιχείων, να επιλύει την εξίσωση ισορροπίας, υπολογίζοντας την βύθιση και την κλίση της δοκού.
5. Βάσει του κώδικα που αναπτύχθηκε στο ερώτημα 4. Προεκτείνετε τον κώδικα εισάγοντας δομές επανάληψης για την δυνατότητα επίλυσης του συστήματος για διάφορες τιμές του λόγου L/h . Στην συνέχεια, εισάγετε επίσης δομή επανάληψης για την εκτέλεση του προγράμματος για πάνω από μια περίπτωση στοιχείου (Euler, Shear Full-Reduced). Τέλος, κατασκευάστε επίσης βρόχο επανάληψης, ο οποίος επιτρέπει την επίλυση για πάνω από έναν αριθμό πεπερασμένων στοιχείων.

Χρησιμοποιώντας τον κώδικα που συνθέσατε σύμφωνα με τις παραπάνω προδιαγραφές και για αριθμό πεπερασμένων στοιχείων N_{elm} 8, 24 και 144 ζητούνται τα εξής:

6. να θεωρήσετε λόγο $L/h > 90$ (ελεύθερη επιλογή του h με L σταθερό) και να παρουσιάσετε τα διαγράμματα μεταβολής της
 - a. βύθισης
 - και της
 - b. κλίσης

Για κάθε αριθμό πεπερασμένων στοιχείων, θα δημιουργούνται δύο γραφήματα, ένα για την βύθιση και ένα για τη κλίση της δοκού. Σε κάθε γράφημα θα αποτυπώνεται η λύση για το εκάστοτε επιλεγέν πεπερασμένο στοιχείο (3 καμπύλες). Επομένως, συνολικά θα πρέπει να κατασκευαστούν έξι γραφήματα.

*Το μήκος της δοκού στον οριζόντιο άξονα θα παρουσιάζεται με ακρίβεια. Δηλαδή εάν το μήκος $L=1.3$ m τότε ο άξονας θα εμφανίζει **υποχρεωτικά** τιμές από 0 έως και 1.3 (η επιλογή των σημείων της κλίμακας είναι ελεύθερη).

7. Για λόγους L/h από 2 έως και 150, να δοθούν σε κοινό διάγραμμα οι γραφικές παραστάσεις $w - L/h$ και $w/w_c - L/h$ και για τους τρεις τύπους πεπερασμένων στοιχείων. Σημειώστε ότι w είναι η βύθιση του κόμβου στον οποίο εφαρμόζεται η δύναμη P_z , ενώ w_c είναι η αντίστοιχη βύθιση που δίνει το στοιχείο κλασσικής κάμψης-Euler. Για το ερώτημα αυτό το μήκος L θεωρείται σταθερό και αλλάζει, με βήμα της επιλογής σας, το πάχος h .
8. Τέλος, ανεξάρτητα από τον κώδικα MATLAB, ζητείται να υπολογιστούν αναλυτικά οι όροι του μητρώου δυσκαμψίας ενός 2-κομβου διατμητικού στοιχείου με 2 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο

(βέλος κάμψης και περιστροφή) που αντιστοιχούν σε i, j (εξηγείται παρακάτω). Ο υπολογισμός να γίνει με χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης Gauss για την περίπτωση διατμητικού στοιχείου πλήρους ή μειωμένης ολοκλήρωσης ανάλογα με τους Α.Μ. σας.

Η σχέση υπολογισμού του μητρώου δυσκαμψίας στη περίπτωση 2-κομβού διατμητικού στοιχείου με 2 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο είναι η ακόλουθη:

$$[K^{i,j}]_{2 \times 2} = \int_0^{L_e} [R^i]^T \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA \end{bmatrix} [R^j] dx$$

Οι συναρτήσεις μορφής των μετατοπίσεων δίνονται από τις εξισώσεις:

$$N^1(x) = 1 - \frac{x}{L_e}, \quad N^2(x) = \frac{x}{L_e}$$

όπου

$$\xi = \frac{2x - L_e}{L_e}$$

και

$$R^i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN^i}{dx} \\ \frac{dN^i}{dx} & N^i \end{bmatrix} \quad R^j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN^j}{dx} \\ \frac{dN^j}{dx} & N^j \end{bmatrix}$$

Τιμές των i και j σύμφωνα με το τελευταίο ψηφίο των Α.Μ

Τελευταίο Ψηφίο M.O. A.M.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Τύπος Ολοκλήρωσης Gauss	Full	Reduced	Full	Reduced	Full	Reduced	Full	Reduced	Full	Reduced
Τελευταίο Ψηφίο min A.M.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Τελευταίο Ψηφίο max A.M.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

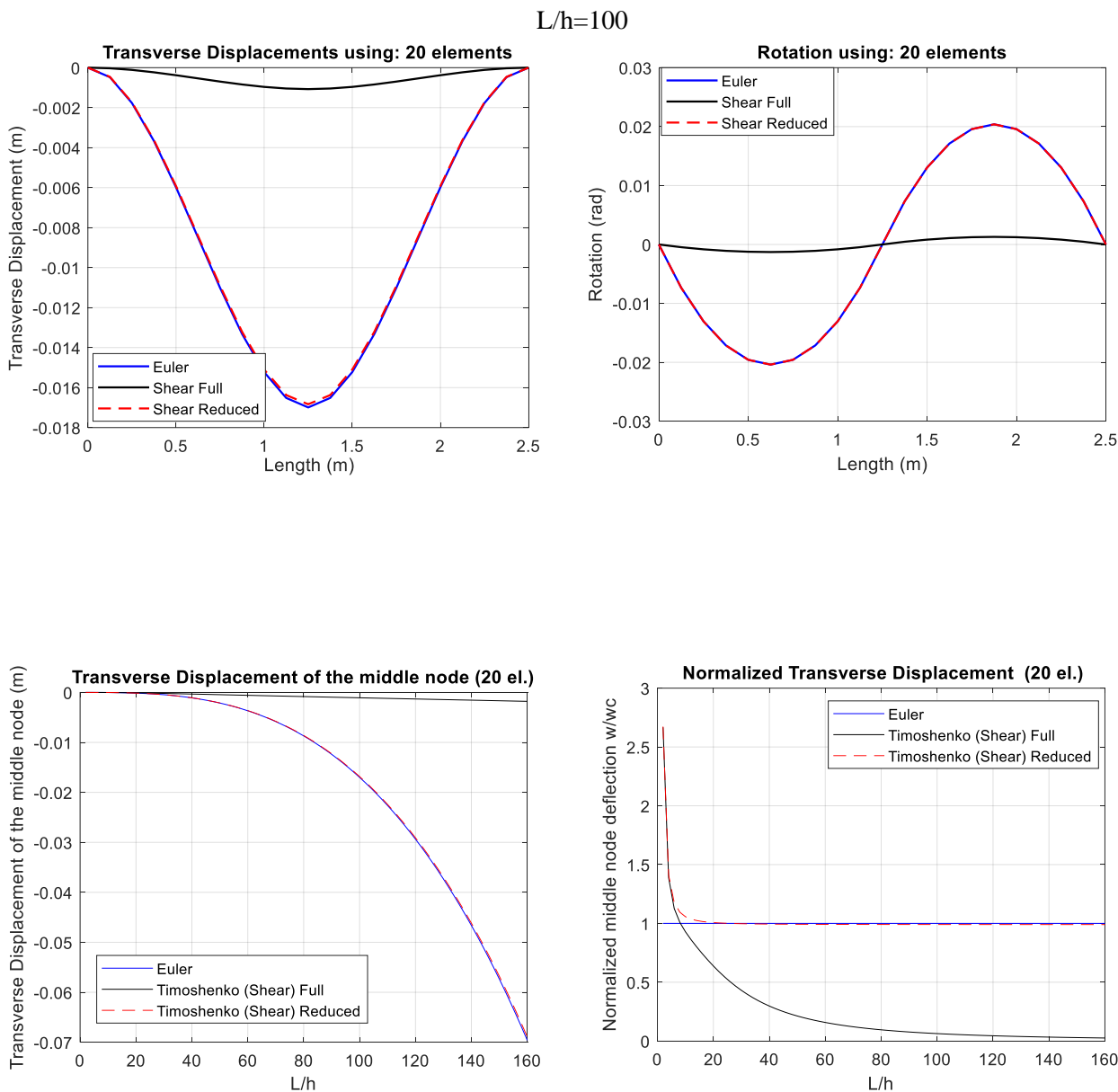
Προσοχή:

Στην εργαστηριακή αναφορά που θα παραδώσετε θα συνοψίσετε σε μία ενότητα όλα τα αποτελέσματα και **κάθε** γραφική παράσταση – διάγραμμα θα έχει **υποχρεωτικά** αρίθμηση και λεζάντα.

Σας υπενθυμίζεται ότι στην παρούσα άσκηση ο σωστός σχολιασμός αποτελεί κατ' ελάχιστο το 50% του τελικού της βαθμού.

Ενδεικτικά διαγράμματα

Στη συνέχεια ακολουθούν κάποια ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ διαγράμματα αμφίπακτης δοκού για την επίλυση της άσκησης. Για την κατασκευή των συγκεκριμένων διαγραμμάτων έχουν χρησιμοποιηθεί **20 πεπερασμένα στοιχεία** για την επίλυση της δοκού και δεδομένα διαφορετικά από αυτά που δίνονται στην εκφώνηση της άσκησης. Η σύγκριση με τα δικά σας διαγράμματα πρέπει να είναι ποιοτική και όχι ποσοτική και μόνο για την περίπτωση όπου έχουν χρησιμοποιηθεί 20 πεπερασμένα στοιχεία για τη μοντελοποίηση της δοκού.



Μητρώα δυσκαμψίας πεπερασμένου στοιχείου

- Κλασική θεωρία κάμψης (Euler Beam)

$$w^i \quad \theta^i \quad w^j \quad \theta^j$$

$$[K^e] = \frac{EI}{L_e} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 4 & -\frac{6}{L_e} & 2 \\ -\frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} & \frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 2 & -\frac{6}{L_e} & 4 \end{bmatrix}$$

- Shear element, full integration

$$[K^e]_{FULL} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{L_e} & -\frac{GA}{2} & -\frac{GA}{L_e} & -\frac{GA}{2} \\ \frac{GAL_e}{3} + \frac{EI}{L_e} & \frac{GA}{2} & \frac{GAL_e}{6} - \frac{EI}{L_e} & \\ \text{S} & \frac{GA}{L_e} & \frac{GA}{2} & \\ & & \frac{GAL_e}{3} + \frac{EI}{L_e} & \end{bmatrix}$$

- Shear element, reduced integration

$$[K^e]_{REDUCED} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{L_e} & -\frac{GA}{2} & -\frac{GA}{L_e} & -\frac{GA}{2} \\ \frac{GAL_e}{4} + \frac{EI}{L_e} & \frac{GA}{2} & \frac{GAL_e}{4} - \frac{EI}{L_e} & \\ \text{S} & \frac{GA}{L_e} & \frac{GA}{2} & \\ & & \frac{GAL_e}{4} + \frac{EI}{L_e} & \end{bmatrix}$$

Διευκρινήσεις:

- Τα παραπάνω μητρώα δυσκαμψίας αναφέρονται σε ένα πεπερασμένο στοιχείο το οποίο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας:
 1. w^i ο οποίος αναφέρεται στην βύθιση του κόμβου i και
 2. θ^i ο οποίος αναφέρεται στην περιστροφή του κόμβου i .
- Το μήκος L_e που εμφανίζεται στα μητρώα, αναφέρεται στο μήκος του πεπερασμένου στοιχείου και όχι στο μήκος όλης της δοκού.
- Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας για την εκάστοτε διατομή γίνεται με βάση τις εξισώσεις που υπάρχουν στο Παράρτημα του βιβλίου σας «Αντοχή των Υλικών II».

Ενδεικτικές Οδηγίες και Εντολές MATLAB

Για τη δημιουργία νέου κώδικα σε μορφή script στην καρτέλα Home επιλέγετε New Script. Το script αποτελεί το χώρο σύνταξης του κώδικα, ο οποίος τρέχει (αφού αποθηκευτεί) πατώντας την εντολή Run ή απλά F5.

Για την εισαγωγή σχολίων χρησιμοποιείτε το σύμβολο % (ή πατάτε Ctrl και R και μετατρέπει την επιλεγμένη γραμμή σε σχόλιο).

Κάθε κώδικας είναι χρήσιμο να αρχίζει με τις εντολές:

```
clear all
```

η οποία καθαρίζει όλες τις μεταβλητές από το χώρο εργασίας του MATLAB

```
close all
```

η οποία κλείνει όλα τα ανοιχτά παράθυρα γραφικών απεικονίσεων

```
clc
```

η οποία καθαρίζει όλες τις εντολές που έχουν γραφεί στο χώρο αλληλεπίδρασης του MATLAB με τον χρήστη

Εντολές για απεικόνιση γραφικών παραστάσεων:

```
figure(1)
```

Δημιουργεί ένα παράθυρο για την εισαγωγή γραφικής απεικόνισης. Το νούμερο ανάμεσα στις παρανθέσεις μπορεί να αντικατασταθεί με κείμενο μέσα σε κατάλληλα σύμβολα π.χ. 'Text' και αποτελεί το όνομα του παραθύρου που ανοίγει.

```
plot(x_space,w_total,'b','LineWidth',2)
```

Δημιουργεί τη γραφική παράσταση του w_total (Y άξονας) συναρτήσει του x_space (X άξονας). Οι μεταβλητές w_total και x_space πρέπει να είναι διανύσματα με ίδια διάσταση.

Το 'b' ορίζει το χρώμα της καμπύλης (b = blue, r = red, y = yellow, g = green, k = black, m = magenta, c = cyan κ.λπ.).

```
title(['Clamped-Free Beam using: ' num2str(Elements_No), 'Elements'], 'FontSize', 14);
```

Δημιουργεί τον τίτλο του γραφήματος. Η εντολή num2str(Elements_No) μετατρέπει τον αριθμό που αντιστοιχεί στη μεταβλητή Elements_No σε κείμενο που εμφανίζεται στον τίτλο του γραφήματος.

```
xlabel('Length','FontSize',14)
```

Δημιουργεί τον τίτλο του άξονα X.

```
ylabel('Tip Deflection [m]','FontSize',14)
```

Δημιουργεί τον τίτλο του άξονα Y.

```
legend('Euler','Location','NorthEast')
```

Δημιουργεί το υπόμνημα και ορίζει τη θέση του.

```
box on
```

Περιορίζει το χώρο του γραφήματος σε μία περιοχή ανάλογα με τις μέγιστες διαστάσεις του γραφήματος, ώστε να εμφανίζεται κλεισμένο σε «κουτί».

Προσοχή:

εάν θέλετε να απεικονίσετε τις τιμές τριών διαφορετικών μεταβλητών ως προς κοινό X, τότε μπορείτε να κάνετε τα εξής:

1. δημιουργείτε ένα καινούργιο figure
2. γράφετε την εντολή hold on, ώστε να το διατηρήσει ανοικτό και επεξεργάσιμο
3. πραγματοποιείτε την πρώτη απεικόνιση π.χ. plot(X, Y1, 'r')
4. πραγματοποιείτε τη δεύτερη απεικόνιση π.χ. plot(X, Y2, 'g')
5. πραγματοποιείτε την τρίτη απεικόνιση π.χ. plot(X, Y3, 'b')
6. γράφετε την εντολή hold off
7. τοποθετείτε τους τίτλους του γραφήματος, των αξόνων κ.λπ.

8. στην εντολή legend βάζετε τους τίτλους των Y1, Y2, Y3 με τη σειρά που εμφανίστηκαν κατά τη χρήση της εντολής plot, ώστε να τοποθετηθούν με τη σωστή αντιστοιχία.

Εάν θέλετε να λύσετε την εξίσωση:

$$\{u\} = \{F\} / [K]$$

γράφετε στο MATLAB:

```
u = K \ F;
```

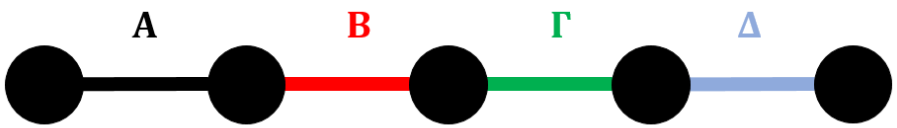
ή ισοδύναμα:

```
u = inv(K) * F;
```

Η εντολή inv πραγματοποιεί την αντιστροφή μητρώου.

Μπορείτε να αναζητήσετε επιπλέον υλικό σχετικά με το MATLAB και τις εντολές του από τη βοήθεια του προγράμματος και σε οποιαδήποτε μηχανή αναζήτησης στο διαδίκτυο.

Βοηθητικό Σχήμα για τη Σύνθεση του Συνολικού Μητρώου Δυσκαμψίας



A	A	A	A	0	0	0	0	0	0
A	A	A	A	0	0	0	0	0	0
A	A	A+B	A+B	B	B	0	0	0	0
A	A	A+B	A+B	B	B	0	0	0	0
0	0	B	B	B+Γ	B+Γ	Γ	Γ	0	0
0	0	B	B	B+Γ	B+Γ	Γ	Γ	0	0
0	0	0	0	Γ	Γ	Γ+Δ	Γ+Δ	Δ	Δ
0	0	0	0	Γ	Γ	Γ+Δ	Γ+Δ	Δ	Δ
0	0	0	0	0	0	Δ	Δ	Δ	Δ
0	0	0	0	0	0	Δ	Δ	Δ	Δ