ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

y=g(x)

x είναι μία ΤΜ και y είναι επίσης ΤΜ που προκύπτει από την παραπάνω σχέση.

Η μέση τιμή της y είναι,

$$\mathbf{E(y) = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx}$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Η δεύτερη προσέγγιση της E[g(x)] εύκολα προκύπτει (σ η τυπική απόκλιση της x),

$$\boldsymbol{E[g(x)] \approx g(E(x)] + g''[[E[g(x)]]\frac{\sigma^2}{2}}$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Η πρώτη προσέγγιση της μεταβλητότητας της y είναι,

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^{2} \approx \left|\mathbf{g}'(\mathbf{m}_{\mathbf{x}})\right|^{2} \boldsymbol{\sigma}^{2}$$

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = \mathbf{E}[\mathbf{x}]$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Αν αντί ΤΜ έχουμε στοχαστικές ανελίξεις,

$$y(t)=g[x(t)]$$

Ισχύουν ότι είπαμε προηγουμένως με ΤΜ x(t) και y(t).

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Έστω η εξίσωση διαφορών,

$$\mathbf{y(k+1) = b_1 x(k) + b_2 (k-1) + \ldots + b_n (k-n+1) + e}$$

Αυτή μπορεί να γραφεί,

$$\mathbf{y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n + e}$$

ή

$$\mathbf{y = AB + e = \begin{bmatrix} x_1 & . & . & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} + e}$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Αν πάρουμε p μετρήσεις,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{E} \qquad (1)$$

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ . \\ . \\ \mathbf{y_p} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ . \\ . \\ \mathbf{b_n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} \mathbf{e_1} \\ . \\ . \\ \mathbf{e_p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{x_{11}} & . & . & \mathbf{x_{1n}} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \mathbf{x_{p1}} & . & . & \mathbf{x_{pn}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ . \\ . \\ \mathbf{a_p} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p} \geq \mathbf{n}$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Αν για παράδειγμα p=n=3 και E=0 ο B υπολογίζεται επιλύοντας το σύστημα των 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \mathbf{x}_{13} \\ \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \mathbf{x}_{23} \\ \mathbf{x}_{31} & \mathbf{x}_{32} & \mathbf{x}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Αντικαθιστώντας την (1) στην (2*),*

$$\mathbf{J} = (\mathbf{Y} - \mathbf{AB})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y} - \mathbf{AB})$$

Η εκτίμηση του B είναι η τιμή του B,

που ελαχιστοποιεί το J.

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Το J, ως συνάρτηση του B, έχει ένα ελάχιστο το οποίο πτοκύπτει παίρνοντας την 1η και 2η παράγωγο ως προς B. Στο ελάχιστο η 1η παράγωγος είναι μηδενική ενώ η 2η θετική. Η 1η παράγωγος στη θέση του ελάχιστου προκύπτει,

$$-2\mathbf{A}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{Y}_{\mathbf{p}}-\mathbf{A}_{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{B}})=\mathbf{0} \qquad (3)$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Η δεύτερη παράγωγος στο ελάχιστο προκύπτει,

$\mathbf{2A^T A}$ και πρέπει να είναι θετικός (4)

Αν $\mathbf{2A^T A}$ είναι ομαλός είναι θετικά ορισμένος άρα για την εύρεση του ελαχίστου αρκεί να ικανοποιηθεί η εξ. (3). Από την (3) προκύπτει,

$$\mathbf{A^T Y = A^T A \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = (A^T A)^{-1} A^T Y} \quad (5)$$

ΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Αυτή είναι λοιπόν η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων.

Δεν μπορούμε να γράψουμε την (5) ως $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$

Γιατί ο Α δεν είναι τετραγωνικός.

Επίσης δεν μπορούμε να πάρουμε $\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{E} = \mathbf{0}$

γιατί το Ε δεν είναι μηδενικό. Ζητούμε λοιπό την ελαχιστοποίηση του J. Τέλος Y/A δεν ορίζεται.

Επαναληπτική εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων

Σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε όλον τον πίνακα A και τις μετρήσεις Y. Έστω ότι έχουμε k μετρήσεις. Τότε η (1) γράφεται,

$$\mathbf{Y_k} = \mathbf{A_k}\mathbf{B} + \mathbf{E_k} \qquad (6)$$

Όταν παρθεί και η k+1 μέτρηση τότε η (6) γράφεται,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y_k} \\ \mathbf{y_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_k} \\ \mathbf{a_{k+1}} \end{bmatrix} \mathbf{B} + \begin{bmatrix} \mathbf{E_k} \\ \mathbf{e_{k+1}} \end{bmatrix}$$

Επαναληπτική εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων

Αν $\hat{\mathbf{B}}_{k+1}$ είναι η εκτίμηση με k+1 μετρήσεις από την (6) προκύπτει,

$$\hat{\mathbf{B}}_{k+1} = (\mathbf{A}_{k+1}^{T}\mathbf{A}_{k+1})^{-1}\mathbf{A}_{k+1}^{T}\mathbf{Y}_{k+1}$$

$$= \mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A}_{k+1}^{T}\mathbf{Y}_{k+1} \qquad (7)$$

Όπου

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{A}_{k+1}^{T}\mathbf{A}_{k+1})^{-1} \qquad (8)$$

Επαναληπτική εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων

Η οποία μετά από πράξεις μπορεί να γραφεί,

$$\mathbf{P_{k+1}} = \mathbf{P_k} - \mathbf{P_k a_{k+1}^T (a_{k+1} P_k a_{k+1}^T + 1)^{-1} a_{k+1} P_k} \qquad (9)$$

Η (7) μετά από πράξεις γράφεται,

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{k+1}} = \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}} + \mathbf{P_{k+1} a_{k+1}^T (y_{k+1} - a_{k+1} \hat{B}_k)} \qquad (10)$$

Οι (9) και (10) είναι μία επαναληπτική μορφή υπολογισμού των $\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{k+1}}$ και $\mathbf{P_{k+1}}$ όταν έχουμε τα

$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{P_k}$, $\mathbf{a_{k+1}}$ και την μέτρηση $\mathbf{y_{k+1}}$

Επαναληπτική εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων

Για την εκκίνηση της επαναληπτικής διαδικασίας πρέπει να έχουμε τα $\mathbf{B}_1$ και $\mathbf{P}_1$

Αυτά μπορούν να υπολογισθούν από την (7) και (9) ή να χρησιμοποιηθεί η αρχική γνώση που έχουμε. Αν δεν έχουμε καμμία αρχική γνώση μπορούμε να θέσουμε αυθαίρετα,

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{P}_1 = \lambda \mathbf{I}, \lambda > 0$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Ως τώρα θεωρήσαμε ότι το άνυσμα B είναι άγνωστο αλλά σταθερό. Τώρα θα θεωρήσουμε ότι το B είναι μία ανυσματική TM οπότε το πρόβλημα διατυπώνεται στα πλαίσια της θεωρίας πιθανοτήτων.

Συνοπτικά θα παρουσιάσουμε δύο περιπτώσεις. Την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας και την εκτίμηση Markov.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Στην πρώτη περίπτωση δεχόμαστε οτι οι pdf είναι κανονικές και προκύπτει,

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Y} \qquad (11)$$

όπου Q ο πίνακας συμμεταβλητότητας της P(Y/B).

Στη δεύτερη περίπτωση προκύπτει,

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{Y} \qquad (12)$$

όπου W ένας πίνακας στάθμισης.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Παρατηρούμε ότι αν $\mathbf{W} = \mathbf{Q}^{-1}$ η εκτίμηση των δύο παραπάνω προσεγγίσεων συμπίπτει.

Επίσης αν

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{W} = \lambda \mathbf{I}$$

Με λ>0 τότε οι (11) και (12) συμπίπτουν με την (5) δηλ. Με την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Αν η σχέση είναι μη γραμμική,

$$Y=f(B)+E$$

Τότε η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του B είναι η τιμή που ελαχιστοποιεί το κριτήριο,

$$\mathbf{J}=\mathbf{E}^{T}\mathbf{E}=[\mathbf{Y}-\mathbf{f}(\mathbf{B})]^{T}[\mathbf{Y}-\mathbf{f}(\mathbf{B})] \qquad (13)$$

Τώρα όμως ο υπολογισμός της $\hat{\mathbf{B}}$ δεν γίνεται αναλυτικά αλλά με μία διαδικασία έρευνας.

Σε αυτή την περίπτωση υπάγεται και η εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων.

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Έχουμε το γραμμικό διακριτό σύστημα,

$$X(k+1)=\Phi(k+1,k)X(k)+F(k)U(k)+\Gamma(k)W(k) \quad (14)$$

$$Y(k)=C(k)X(k)+E(k)U(k)+e(k) \quad (15)$$

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

- $E[W(k)]=m_w(k)$, $E[e(k)]=m_e(k)$, $E[X(0)]=m_x(0)$
- $Cov[W(k), W(j)]=Q(k)\delta_{jk}$
- $Cov[e(k), e(j)]=R(k)\delta_{jk}$
- $Cov[W(k), e(j)]=P_{ew}(k)\delta_{jk}$ (16)
- $Var[X(0)]=P(0)$
- $Cov[X(0),W(j)]=Cov[X(0), e(j)]=0$

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Η έξοδος του συστήματος είναι μία p-διάστατη στοχαστική ανέλιξη και οι μετρήσεις Y(1), ..., Y(j) τις χρονικές στιγμές 1, ..., j γράφονται,

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{M(j)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{Y(j)} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Η εκτίμηση του X(k) δεδομένων των μετρήσεων $Y_{M(j)}$ συμβολίζεται ως $\hat{X}(k/j)$ και είναι μία n-διάστατη ανυσματική συνάρτηση των μετρήσεων,

$$\hat{X}(k/j) = \varphi(Y_{M(j)}) \tag{18}$$

Αν k=j έχουμε πρόβλημα φίλτρου, αν k>j πρόβλεψης και αν k<j εξομαλύνσεως (smoothing).

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Ορίσουμε το σφάλμα εκτίμησης,

$$\mathbf{\tilde{X}(k/j) = X(k) - \hat{X}(k/j)} \qquad (19)$$

Ορίσουμε τη συνάρτηση σφάλματος,

$$\mathbf{L[\tilde{X}(k/j)]} \qquad (20)$$

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Η οποία πρέπει,

Να είναι αριθμητική συνάρτηση

Να είναι μηδενική για μηδενικό σφάλμα

Να είναι συμμετρική, και

Όσο πιο κοντά στο μηδέν είναι το σφάλμα τόσο πιο μικρή να είναι η L.

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Η L είναι ΤΜ. Μέτρο απόδοσης είναι η μέση τιμή της L,

$$\mathbf{J}[\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}/\mathbf{j})] = \mathbf{E}\{\mathbf{L}[\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}/\mathbf{j})]\} \qquad (21)$$

Πρόταση 1.

Αν η X(k) και Y(i) είναι κανονικές στοχαστικές ανελίξεις τότε η βέλτιστη εκτίμηση για κάθε αποδεκτή συνάρτηση σφάλματος είναι,

$$\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{k}/\mathbf{j}) = \mathbf{E}[\mathbf{X}(\mathbf{k})/\mathbf{Y}_{\mathbf{M}(\mathbf{j})}] \qquad (22)$$

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Επίσης η βέλτιστη εκτίμηση είναι γραμμική συνάρτηση των μετρήσεων και οι στοχαστικές ανυσματικές ανελίξεις της εκτίμησης της κατάστασης και του σφάλματος είναι κανονικές.

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Πρόταση 2

Αν ως μέτρο αποδόσεως πάρουμε εκείνο των ελαχίστων τετραγώνων, δηλ.

$$\mathbf{J}[\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}/\mathbf{j})] = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{k}/\mathbf{j})\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}/\mathbf{j})]$$

τότε η βέλτιστη εκτίμηση δίνεται πάλι από την (22) ανεξάρτητα από το είδος των στοχαστικών ανελίξεων η X(k) και Y(i).

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

Με βάση την πρόταση 1 αν έχουμε κανονικές στοχαστικές ανελίξεις τότε η εκτίμηση του φίλτρου Kalman θα δίνεται από την (22) θα είναι η βέλτιστη και θα είναι γραμμική συνάρτηση των μετρήσεων ανεξάρτητα από το μέτρο αποδόσεως. Αν όμως οι ανελίξεις δεν είναι κανονικές τότε μπορούμε να πάρουμε το μέτρο αποδόσεως ελαχίστων τετραγώνων οπότε (πρόταση 2) πάλι η βέλτιστη εκτίμηση θα δίνεται από την (22) αλλά δεν θα είναι πάντα γραμμική. Για να έχουμε εκτίμηση γραμμική συνάρτηση των μετρήσεων πρέπει να δεχθούμε έναν εκτιμητή που θα είναι γραμμική συνάρτηση των μετρήσεων. Σε αυτή την περίπτωση η εκτίμηση του φίλτρου Kalman δεν θα είναι η βέλτιστη αλλά θα είναι η βέλτιστη από τους γραμμικούς εκτιμητές.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN

Οι εξισώσεις του φίτρου Kalman για το σύστημα των εξ. (14), (15) και (16) είναι:

$$\boldsymbol{\hat{X}(k+1/k+1) =}$$
$$\boldsymbol{= \Phi(k+1,k)\hat{X}(k/k) + F(k)U(k) + \Gamma(\mathbf{k})E[W(k)] +}$$
$$\boldsymbol{G(k+1)[Y(k+1) - E(k)U(k) - m_e(k) -}$$
$$\boldsymbol{C(k+1)[\Phi(k+1,k)\hat{X}(k|k) + F(k)U(k) + \Gamma(\mathbf{k})E[W(k)]]}$$

(23)

P(k+1/k+1)=[1-G(k+1)C(k+1)]P(k+1/k) (24)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN

$G(k+1)=P(k+1/k)C^T(k+1)[C(k+1)P(k+1/k)C^T(k+1)+R(k+1)]^{-1}$

(25)

$P(k+1/k)=[\Phi(k+1,k)-G_p(k)C(k)]P(k/k)[\Phi(k+1,k)-G_p(k)C(k)]^T+\Gamma(\kappa)Q(\kappa)\Gamma^T(k)-G_p(k)R(k)G_p^T(k)$

(26)

$G_p(k)=\Gamma(k)P_{ew}(k)R(k)^{-1}$

(27)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN

Αρχικές συνθήκες,

$$\hat{\mathbf{X}}(0/0) = \mathbf{m_x}(0) = \mathbf{E}[\mathbf{X}(0/0)]$$

$$\mathbf{P}(0/0) \qquad (28)$$

P(k+1/k+1) είναι ο πίνακας συμμεταβλητότητας της ανέλιξης του σφάλματος $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k+1/k+1})$

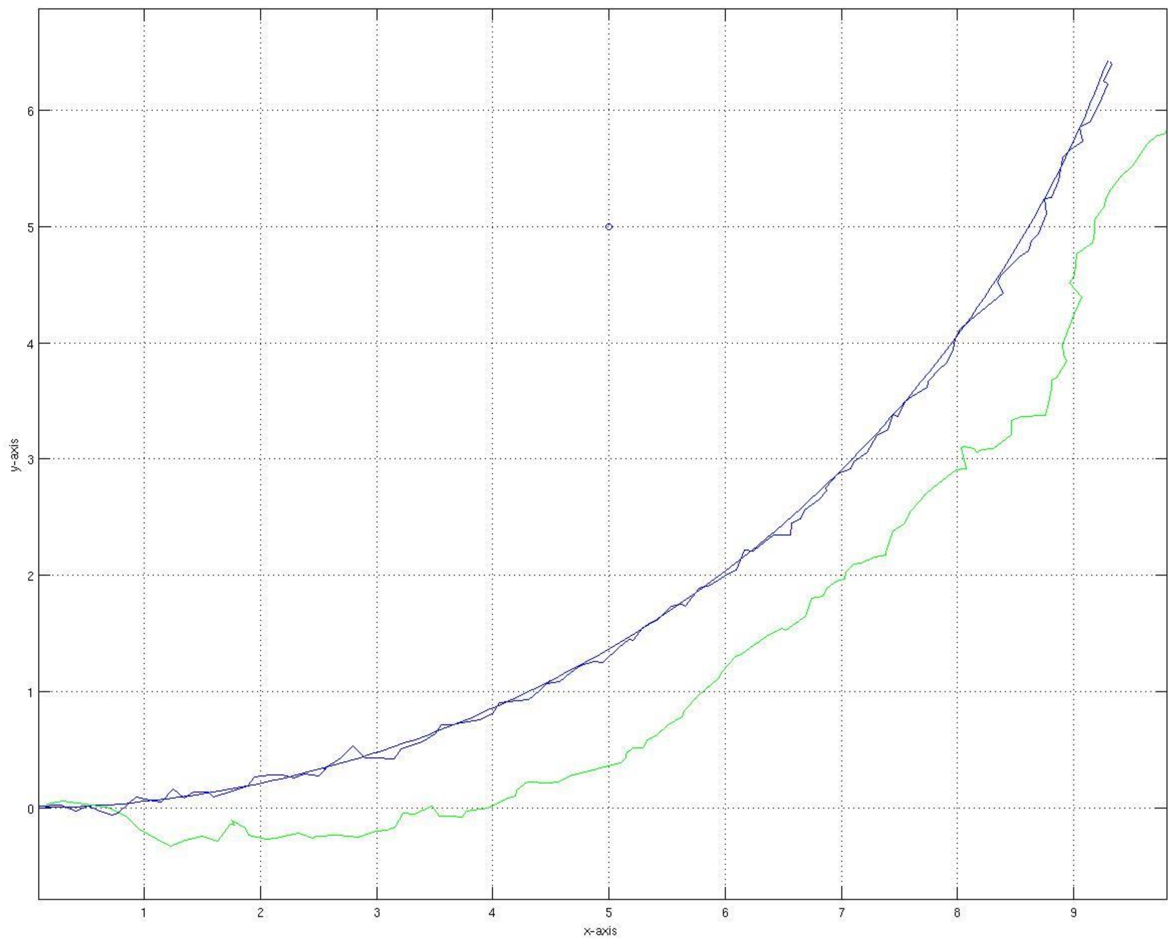
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN

Είναι ένα παράδειγμα SLAM.

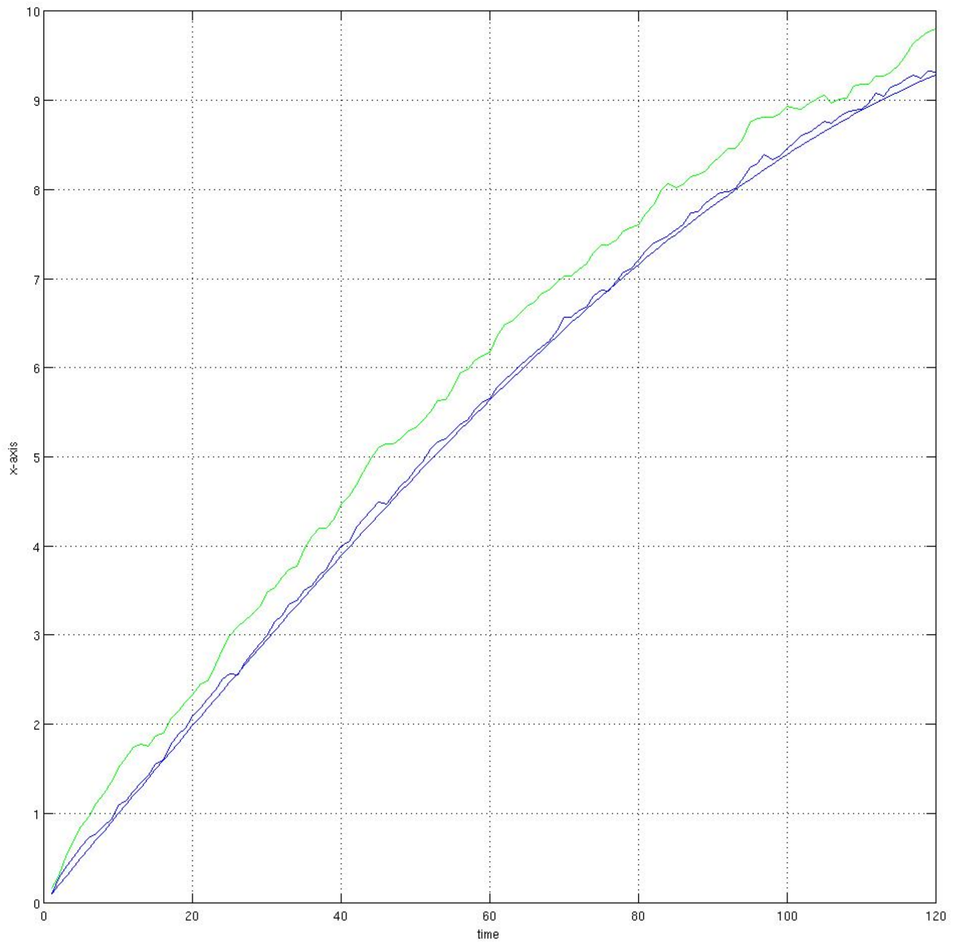
$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} x_{t+1}^{robot} \\ y_{t+1}^{robot} \\ x_{t+1}^{obj} \\ y_{t+1}^{obj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_t^{robot} + u_t \cos(\theta_t) \\ y_t^{robot} + u_t \sin(\theta_t) \\ x_t^{obj} \\ y_t^{obj} \end{bmatrix} = X_t + U_t \qquad U_t = \begin{bmatrix} u_t \cos(\theta_t) \\ u_t \sin(\theta_t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_{t+1} = \begin{bmatrix} \Delta x_{t+1} \\ \Delta y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t+1}^{obj} - x_{t+1}^{robot} \\ y_{t+1}^{obj} - y_{t+1}^{robot} \end{bmatrix} = HX_{t+1} \qquad H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

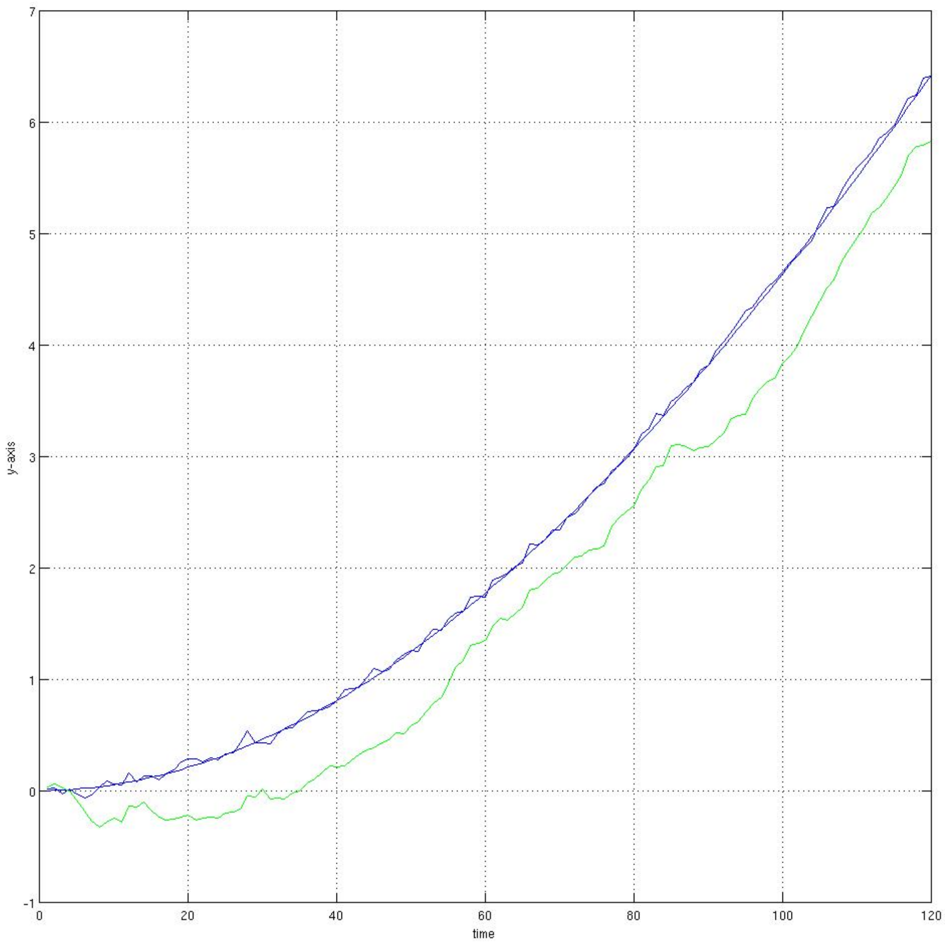
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN y(x)



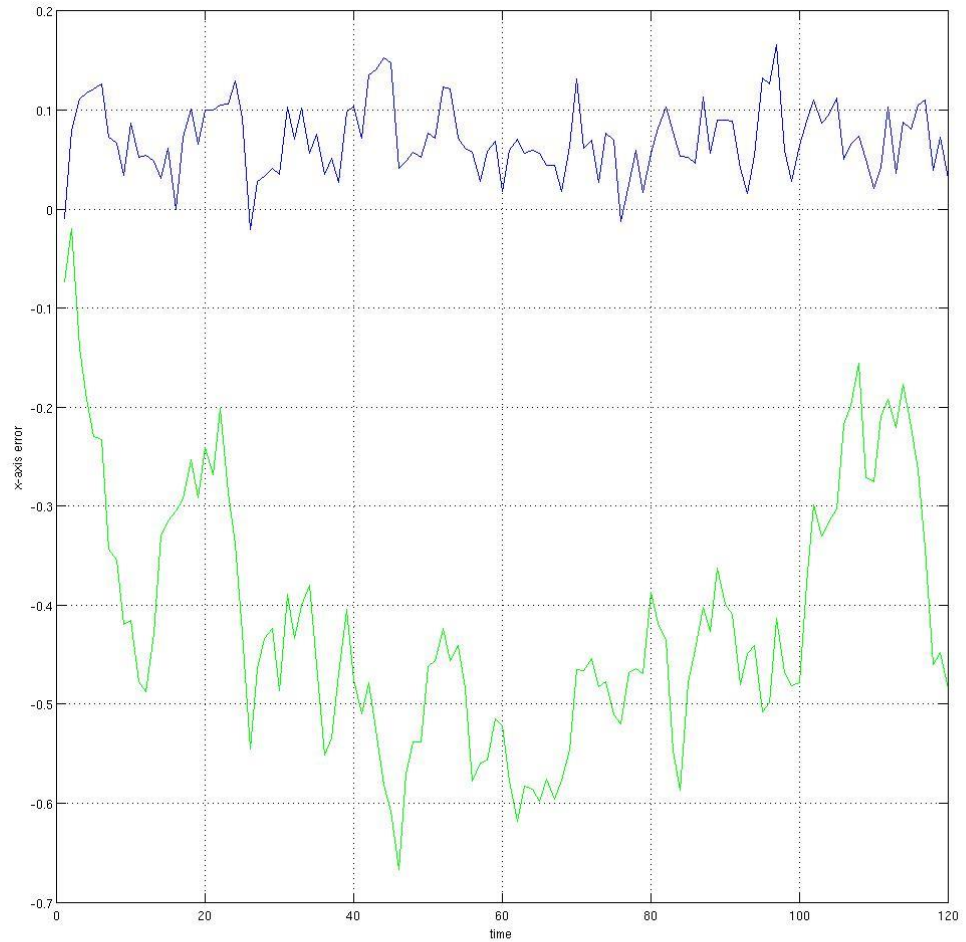
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN x(t)



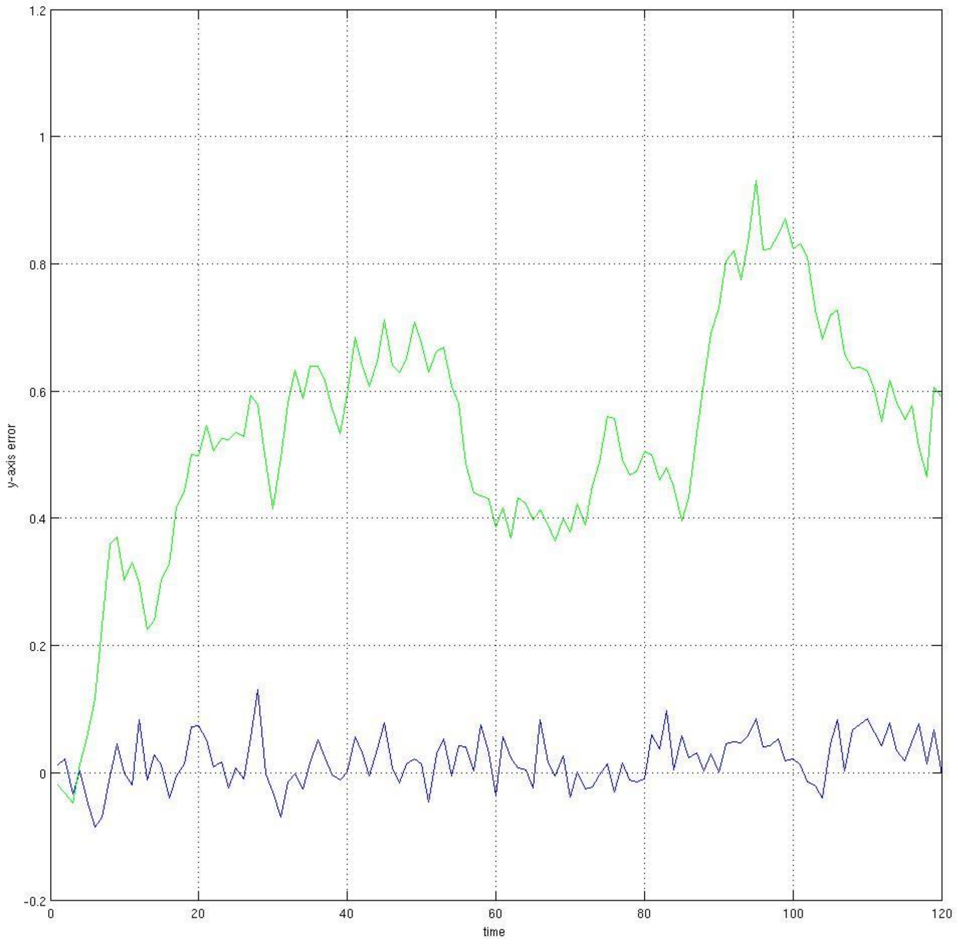
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN y(t)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN x-error(t)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN
y-error(t)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN

Στο παρακάτω βίντεο φαίνεται η κίνηση του ρομπότ ως προς το εμπόδιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΙΛΤΡΟΥ KALMAN