



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή ΗΜΜΥ
Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι
Άσκηση 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 9 Μαΐου 2023
Η εργασία μπορεί να παραδοθεί από ομάδες \leq δύο ατόμων
Διδάσκων: Αθανάσιος Π. Λιάβας
Μονάδες 100/1000

Ομάδα Χρηστών 52

	Φοιτητής 1	Φοιτητής 2
Επώνυμο	Τσικριτζάκης	Κουτσοβασίλης
Όνομα	Γεώργιος-Μάριος	Βασίλειος
A.M.	2020030055	2020030137

Ώρες Ενασχόλησης : 17 ώρες

A.

Στο πρώτο μέρος της άσκησης, το οποίο είναι, κυρίως, πειραματικό, θα μελετήσουμε το φασματικό περιεχόμενο PAM κυματομορφών βασικής ζώνης.

A.1

Να δημιουργήσετε παλμό SRRC $\phi(t)$ με τιμές $T = 10^{-2}$ sec, $over = 10$, $T_s = \frac{T}{over}$, $A = 4$, και $a = 0.5$.

(10) Μέσω των συναρτήσεων `fftshift` και `fft`, να υπολογίσετε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της $\phi(t)$, $|\Phi(F)|$, σε N_f ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-F_s/2, F_s/2]$.

Να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ στον κατάλληλο άξονα συχνοτήτων με χρήση της εντολής `semilogy`.

Δημιουργούμε τον ζητούμενο παλμό χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `srrc_pulse` και έπειτα με τη χρήση των συναρτήσεων `fft` και `fftshift` σχεδιάζουμε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier στο τετράγωνο, δηλαδή την φασματική πυκνότητα ενέργειας του παλμού.

```
%A1
T = 10^-2;
over = 10;
Ts = T/over;
A = 4;
a = 0.5;

% make the phi function
[phi,t] = srrc_pulse(T, over, A, a);

Nf = 2048; % number of samples for the fourier signal

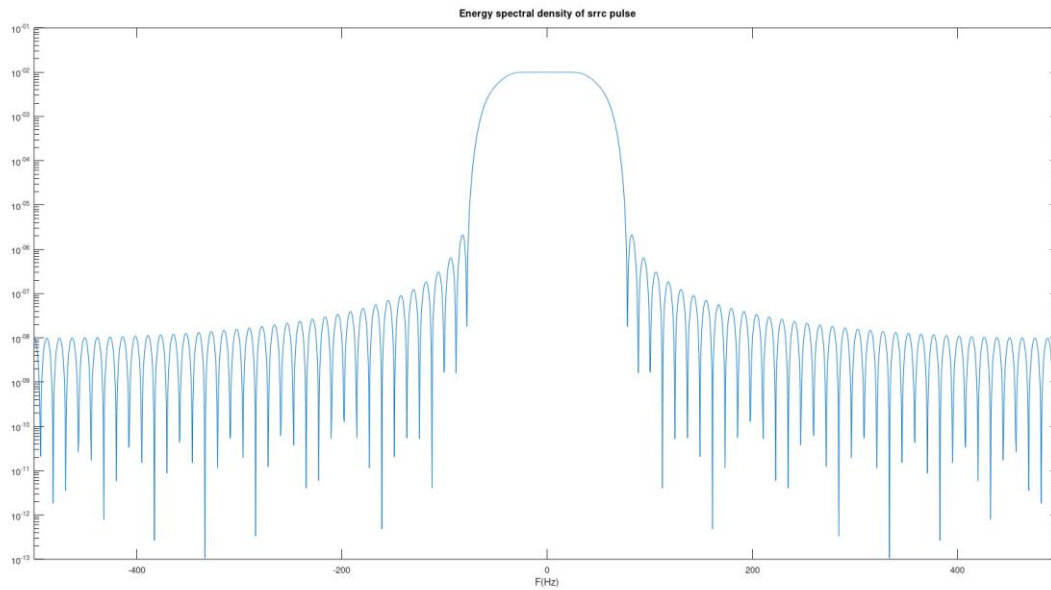
% making the F axis
Fs = 1/Ts;

% Nf samples of fourier axis
F_axis = [-Fs/2 : Fs/Nf : Fs/2 - Fs/Nf ];

% Fourier transform of phi centralized at 0
XF = fftshift(fft(phi,Nf))*Ts;

% Plot the energy spectral density of XF using logarithmic y axis
figure(1)
semilogy(F_axis, abs(XF).^2);
xlim([-500, 500])
xlabel('F(Hz)')
title('Energy spectral density of srrc pulse');
```

Με την χρήση του παραπάνω κώδικα παίρνουμε την φασματική πυκνότητα ενέργειας:



A.2

Να δημιουργήσετε ακολουθία $N = 100$ ανεξάρτητων και ισοπίθανων bits $\{b_0, \dots, b_{N-1}\}$.

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση :

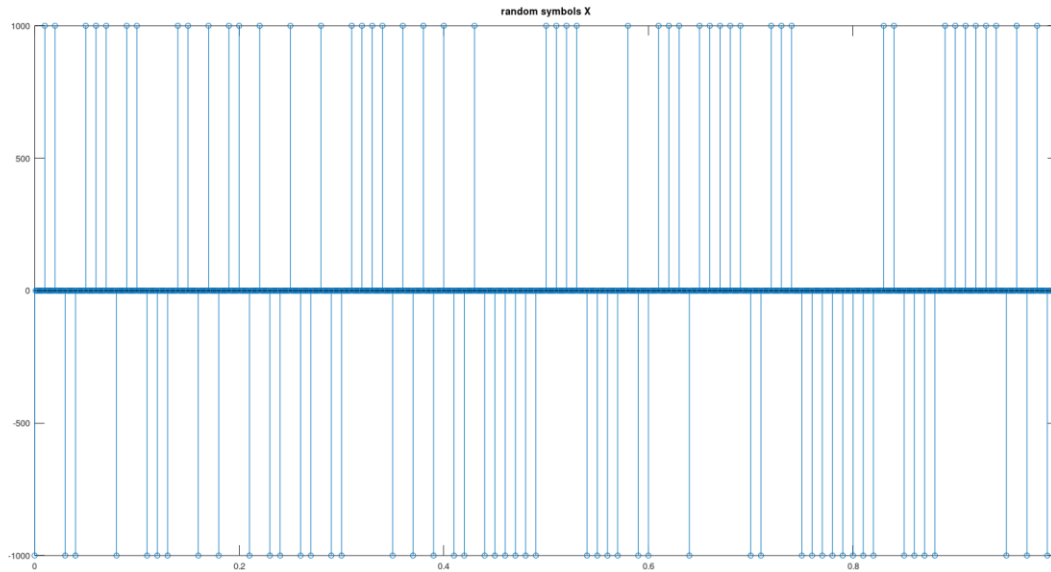
0 -> +1

1 -> -1

να απεικονίσετε τα bits σε σύμβολα X_n , για $n = 0, \dots, N - 1$.

Να κατασκευάσετε την κυματομορφή:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \varphi(t - nT)$$



Τα παραπάνω σύμβολα παρήχθησαν με τον παρακάτω κώδικα , χρησιμοποιώντας την συνάρτηση bitsTo2PAM που κατασκευάστηκε στην προηγούμενη άσκηση.

```
%A2
```

```
N=100;
```

```
b = (sign (randn(N,1)) + 1) / 2 ; % bits εισόδου.
```

```
X = bitsTo2PAM(b); % τα συμβόλα εισόδου.
```

```
X_delta=(1/Ts) * upsample(X, over);
```

```
t_X=0:Ts:N*T-Ts;
```

```
figure(14);
```

```
stem(t_X,X_delta);
```

```
title('random symbols X');
```

```
%X(t)
```

Έπειτα κάνοντας συνέλιξη το σήμα X_{delta} με τον παλμό `srcc` ϕ πήραμε το επιθυμητό σήμα εξόδου $X(t)$ που φαίνεται παρακάτω :

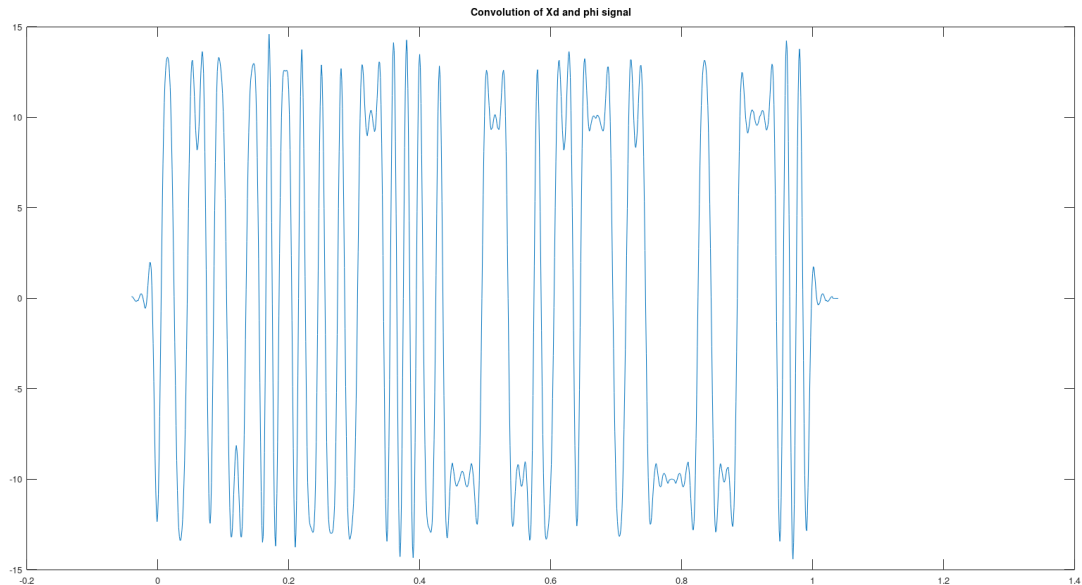
```
Xt=conv(X_delta,phi)*Ts;
```

```
t_conv=min(t)+min(t_X) : Ts : max(t)+max(t_X);
```

```
figure(15);
```

```
plot(t_conv,Xt);
```

```
title('Convolution of Xd and phi signal');
```



A.3

(10) Με χρήση των συναρτήσεων `fft` και `fftshift` να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα μίας

υλοποίησης της $X(t)$: $P_X(F) = \frac{|F[X(t)]|^2}{T_{total}}$

όπου T_{total} είναι ο συνολικός χρόνος διάρκειας της $X(t)$ σε sec. Να σχεδιάσετε το $P_X(F)$ με χρήση `plot` και `semilogy`.

Αρχικά βρίσκουμε τον συνολικό χρόνο διάρκειας του σήματος $X(t)$ και έπειτα με την χρήση `fft` και `fftshift` υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό fourier της συγκεκριμένης υλοποίησης συμβόλων και έπειτα σχεδιάζουμε το περιοδόγραμμα της υλοποίησης αυτής.

%A3

```
Ttotal = t_conv(end) - t_conv(1);
```

```
XFt = fftshift(fft(Xt,Nf)) * Ts;
```

```
numerator = abs(XFt.^2);
```

```
PxF = numerator / Ttotal;
```

```
figure(2);
```

```
plot(F_axis , PxF);
```

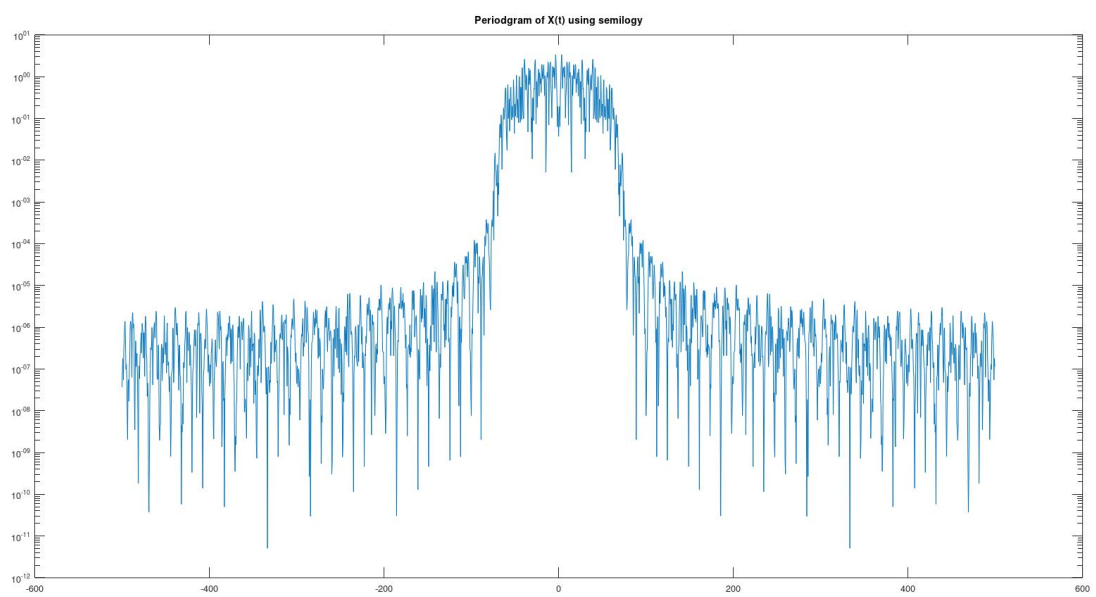
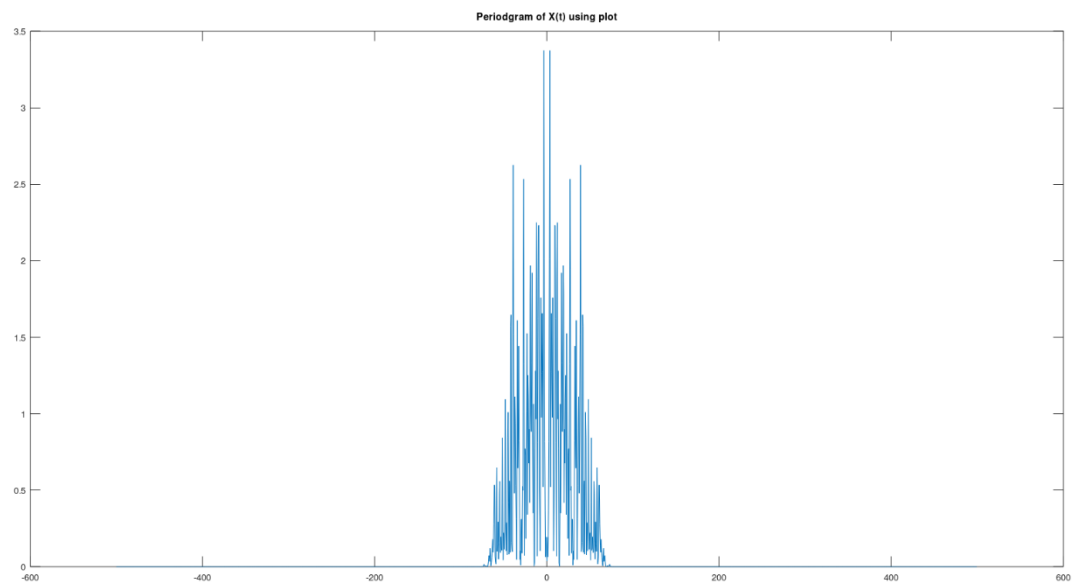
```
title('Periodgram of X(t) using plot');
```

```
figure(3);
```

```
semilogy(F_axis , PxF);
```

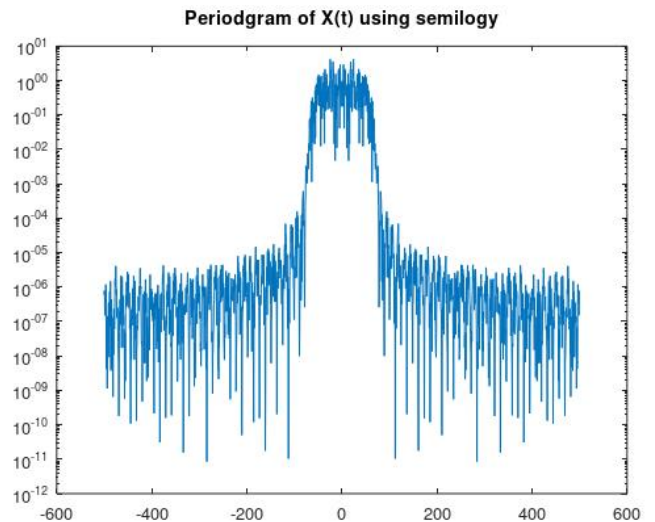
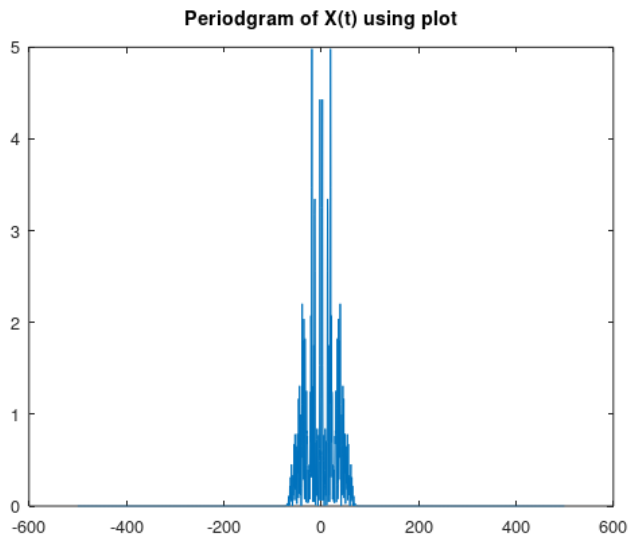
```
title('Periodgram of X(t) using semilogy');
```

Ο παραπάνω κώδικας δίνει τις εξής απεικονίσεις:



Να επαναλάβετε για διάφορες υλοποιήσεις της ακολουθίας bits $\{b_0, \dots, b_{N-1}\}$, ώστε να αποκτήσετε μία καλή εικόνα σχετικά με το πώς μοιάζει το περιοδόγραμμα υλοποιήσεων της $X(t)$.

Εκτελώντας ξανά τον ίδιο κώδικα, παίρνουμε νέα υλοποίηση:



(10) Να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες τιμές πάνω σε K (ενδεικτικά, $K = 500$) υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων. Να σχεδιάσετε σε κοινό semilogy την εκτίμηση και τη θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος.

Χρησιμοποιώντας ένα loop υπολογίζουμε 500 διαφορετικές υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας X και έπειτα βρίσκουμε τον αριθμητικό μέσο των περιοδογραμμάτων:

```
K=500;
for i = 1 : K
    b = (sign(randn(N,1)) + 1) / 2 ; % bits eisodou.

    X = bitsTo2PAM(b); % ta sumbola eisodou.

    X_delta=(1/Ts) * upsample(X, over);

    t_X=0:Ts:N*T-Ts;

    %X(t)

    Xt=conv(X_delta,phi)*Ts;
    t_conv=min(t)+min(t_X) : Ts : max(t)+max(t_X);

    Ttotal = t_conv(end) - t_conv(1);

    XFt = fftshift(fft(Xt,Nf)) * Ts;
    numerator = abs(XFt.^2);
    PxFs(i,:) = numerator / Ttotal;
```

End

```

%%Find the experimental SxF(psd) (arithmetic mean)

SxFexp = 1/500 * sum(PxFs); %%Sum all the columns of PxFs

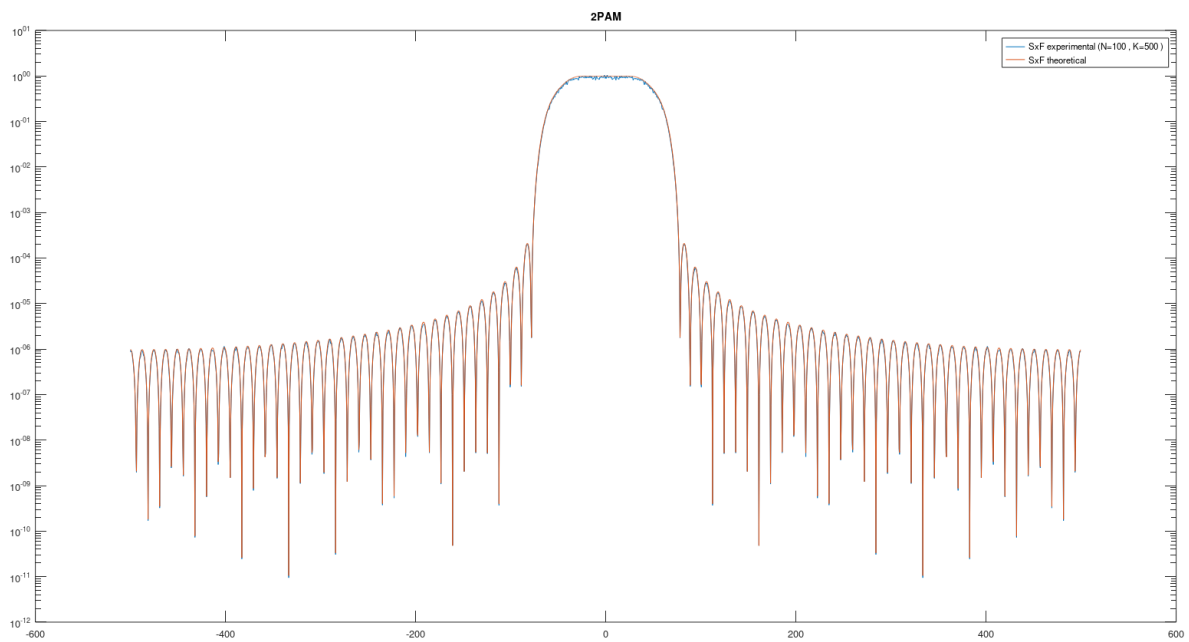
%%Find the theoretical SxF = sigma^2/(t) * |F(Phi(f))|^2

SxFth = ( var(X)^2 ) / T * abs(XF).^2 ;

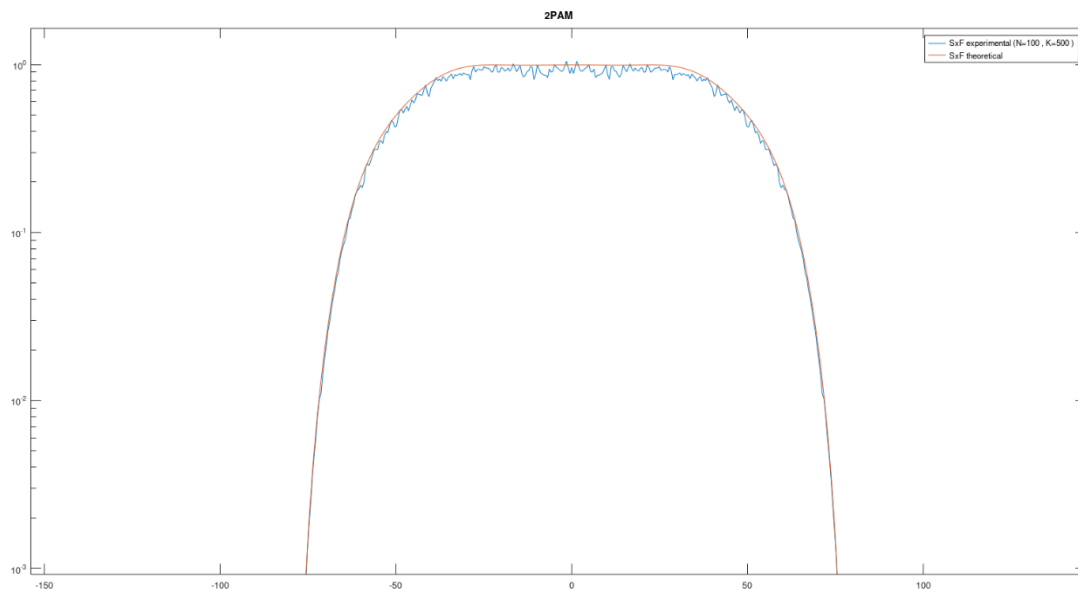
figure(5);

semilogy(F_axis , SxFexp ,F_axis , SxFth);
title('2PAM');
legend('SxF experimental (N=100 , K=500 )','SxF theoretical');

```



Κάνοντας zoom in βλέπουμε τις ατέλειες του πειραματικού μοντέλου(ripples στον κύριο λοβό):



(10) Όσο αυξάνετε το K και το N, θα πρέπει η προσέγγιση να γίνεται καλύτερη. Συμβαίνει αυτό στα πειράματά σας; Αν ναι, μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Έπειτα αυξάνοντας το K σε 1000 και το N σε 200 κάναμε την ίδια διαδικασία για εύρεση της πειραματικής φασματικής πυκνότητας ισχύος και βρίσκουμε:

%%Do the same procedure , while increasing K,N

K=1000;

N= 200;

for i = 1 : K

 b = (sign (randn(N,1)) + 1) / 2 ; % bits eisodou.

 X = bitsTo2PAM(b); % ta symbola eisodou.

 X_delta=(1/Ts) * upsample(X, over);

 t_X=0:Ts:N*T-Ts;

 %X(t)

 Xt=conv(X_delta,phi)*Ts;

 t_conv=min(t)+min(t_X) : Ts : max(t)+max(t_X);

 Ttotal = t_conv(end) - t_conv(1);

 XFt = fftshift(fft(Xt,Nf)) * Ts;

 numerator = abs(XFt.^2);

 PxFs2(i,:) = numerator / Ttotal;

```
end
```

```
%Find the experimental SxF(psd) (arithmetic mean)
```

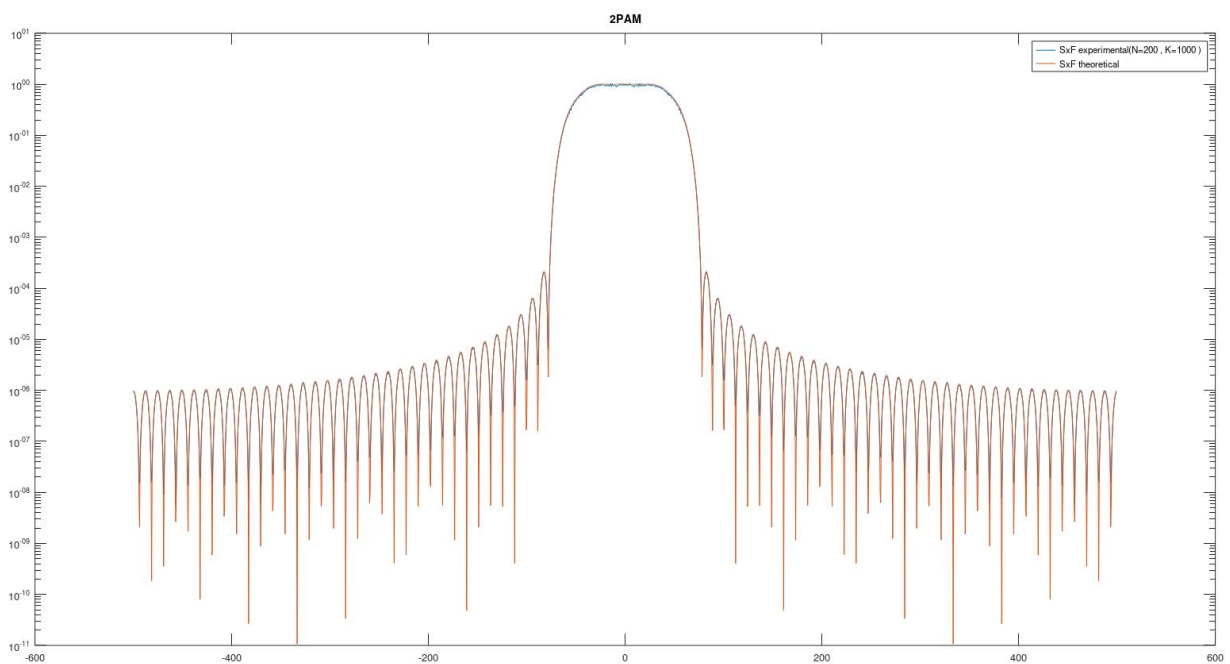
```
SxFexp2 = 1/1000 * sum(PxFs2); %%Sum all the columns of PxFs
```

```
figure(6);
```

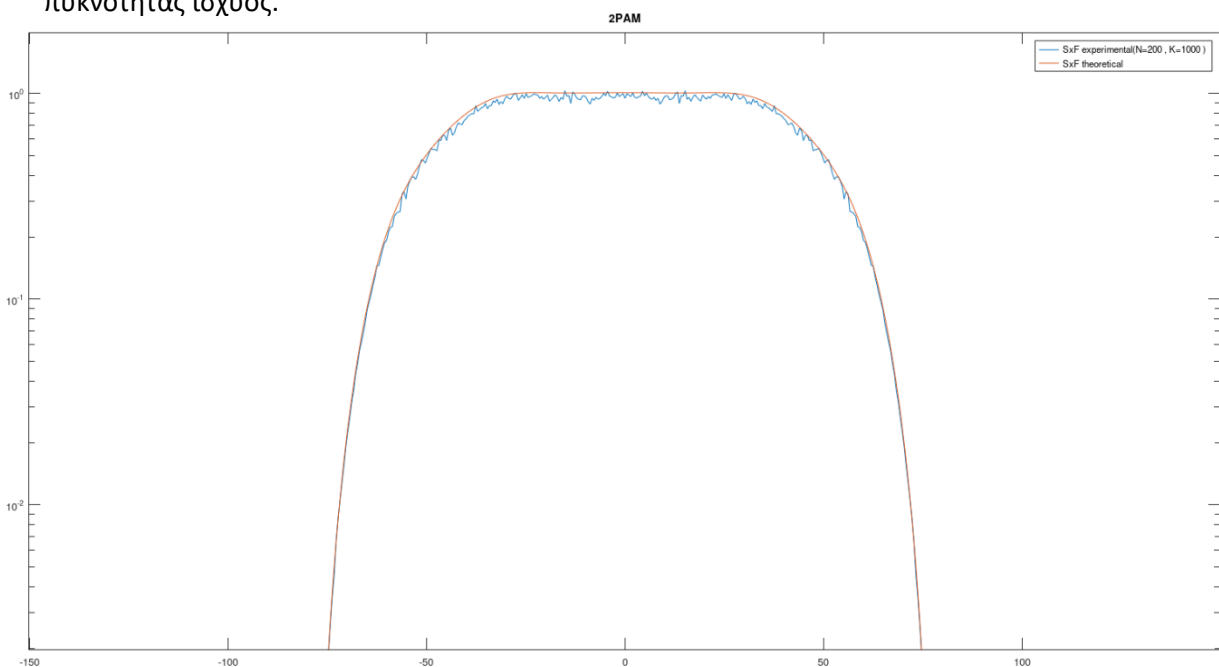
```
semilogy(F_axis , SxFexp2 ,F_axis , SxFth);
```

```
title('2PAM');
```

```
legend('SxF experimental(N=200 , K=1000 )','SxF theoretical');
```



Κάνοντας zoom in μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν λιγότερα ripples με μικρότερο πλάτος , και άρα αποτελεί μια καλύτερη προσέγγιση της θεωρητικής φασματικής πυκνότητας ισχύος.



Σχόλια:

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αυξάνοντας το K παίρνουμε περισσότερες υλοποιήσεις και συνεπώς μια καλύτερη προσέγγιση του αριθμητικού μέσου των περιοδογραμμάτων. Ιδανικά για $K \rightarrow \infty$ θα είχαμε ακριβής προσέγγιση του θεωρητικού αποτελέσματος. Επιπλέον αυξάνοντας το πλήθος bits N τείνουμε πιο κοντά στο ιδανικό ποσό bits που είναι άπειρο, άρα υπάρχει καλύτερη προσέγγιση.

A.4

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση :

00 -> +3

01 -> +1

11 -> -1

10 -> -3

να κατασκευάσετε την ακολουθία 4-PAM X_n , για $n = 0, \dots, N/2 - 1$.

Να κατασκευάσετε την κυματομορφή:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \phi(t - nT)$$

χρησιμοποιώντας την ίδια περίοδο T με το ερώτημα A.2.

Αρχικά υλοποιήσαμε την συνάρτηση bitsTo4PAM ώστε να γίνεται η απεικόνιση των bits ανα 2 στο επιθυμητό σύμβολο.

```
function X = bitsTo4PAM (bits)
    %% 00 ->  3
    %% 01 ->  1
    %% 11 -> -1
    %% 10 -> -3
    X = zeros(length(bits)/2 , 1);
    index = 1;
    for i=1 : 2 : length(bits)
        if( bits(i) == 0 && bits(i+1) == 0 )
            X(index) = 3;

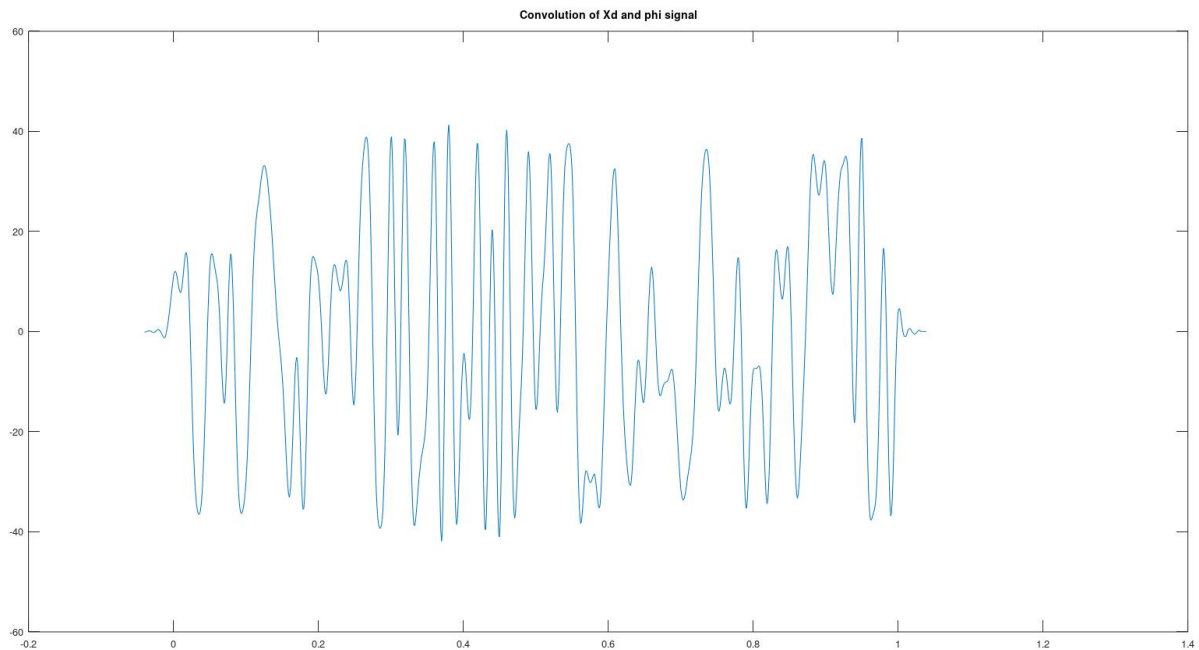
            elseif( bits(i) == 0 && bits(i+1) == 1 )
                X(index) = 1;

            elseif( bits(i) == 1 && bits(i+1) == 1 )
                X(index) = -1;
            else
                X(index) = -3;
            endif
            index = index + 1;
        endfor
    end
```

Χρησιμοποιώντας ένα loop , διατρέχουμε τα bits της ακολουθίας ανα 2 , και τα αντιστοιχίζουμε σε ένα καινούριο διάνυσμα, στο σωστό σύμβολο.

Κάνοντας την ίδια διαδικασία με το ερώτημα A.2 , με μόνη διαφορά την χρήση της συνάρτησης bitsTo4PAM , σχεδιάσαμε το σήμα:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \varphi(t - nT)$$



Η παραπάνω απεικόνιση βρέθηκε με τον εξής κώδικα:

```
K=1000;
N= 200;

b1 = (sign (randn(N,1)) + 1) / 2 ; % bits eisodou.

X1 = bitsTo4PAM(b); % ta sumbola eisodou.

X_delta1=(1/Ts) * upsample(X1, over);

t_X=0:Ts:(N/2)*T-Ts;

%X(t)

Xt1=conv(X_delta1,phi)*Ts;
t_conv1=min(t)+min(t_X) : Ts : max(t)+max(t_X);
figure(16);
plot(t_conv1,Xt1);
title('Convolution of Xd and phi signal');
```

(10) Να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα και να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος μέσω αριθμητικών μέσων τιμών υλοποιήσεων περιοδογραμμάτων της $X(t)$. Να σχεδιάσετε την πειραματική και την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος στο ίδιο semilogy. Τι παρατηρείτε;

Κάνοντας την ίδια διαδικασία με το ερώτημα Α.3 υπολογίσαμε την θεωρητική και την πειραματική φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(t)$. Και η θεωρητική υλοποίηση αλλάζει, επειδή τα σύμβολα X έχουν πλέον διαφορετική διασπορά σ_X^2 .

```
for i = 1 : K
    b = (sign (randn(N,1)) + 1) / 2 ; % bits eisodou.

    X = bitsTo4PAM(b); % ta symbola eisodou.

    X_delta=(1/Ts) * upsample(X, over);

    t_X=0:Ts:N*T-Ts;

    %X(t)

    Xt=conv(X_delta,phi)*Ts;
    t_conv=min(t)+min(t_X) : Ts : max(t)+max(t_X);

    Ttotal = t_conv(end) - t_conv(1);

    XFt = fftshift(fft(Xt,Nf)) * Ts;
    numerator = abs(XFt.^2);
    PxFs4pam(i,:) = numerator / Ttotal;

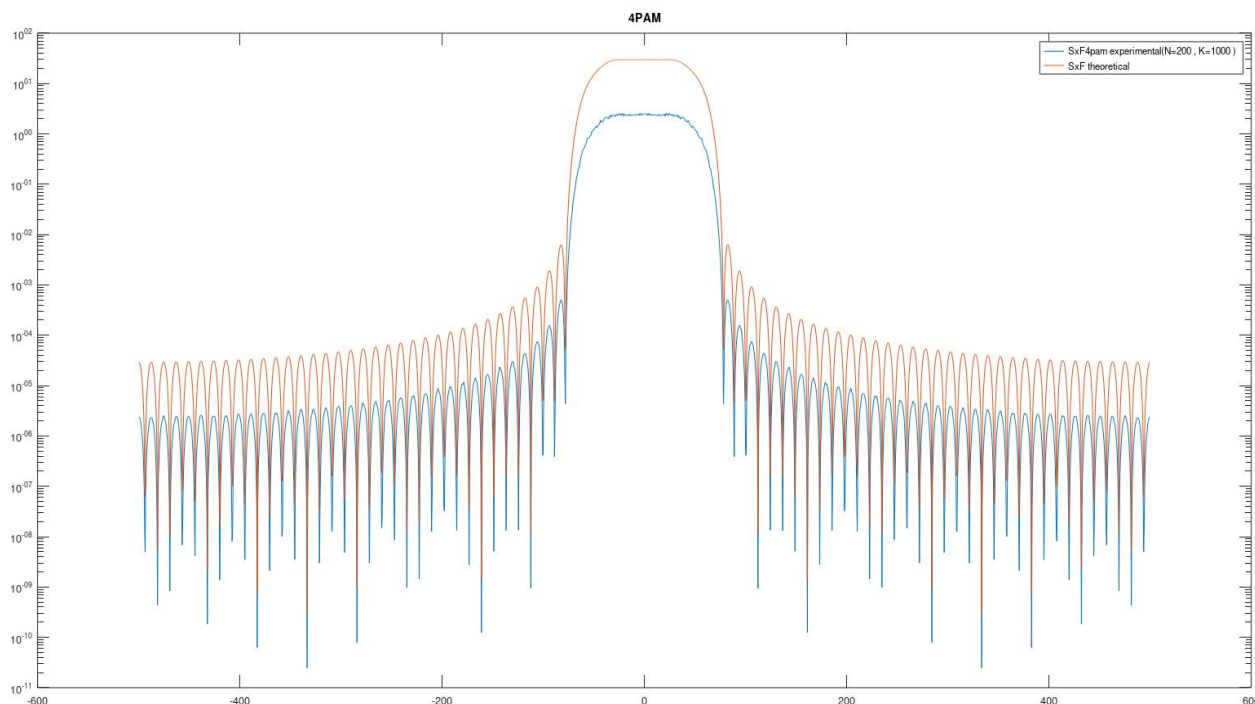
end

SxFexp4pam = 1/1000 * sum(PxFs4pam); %%Sum all the columns of PxFs

%%Theoretical SxF
SxFth1 = ( var(X1)^2 ) / T * abs(XF).^2 ;

figure(7);
semilogy(F_axis , SxFexp4pam ,F_axis , SxFth1);
title('4PAM');
legend('SxF4pam experimental(N=200 , K=1000 )','SxF theoretical');
```

Και παίρνουμε τις απεικονίσεις:



Σχόλια:

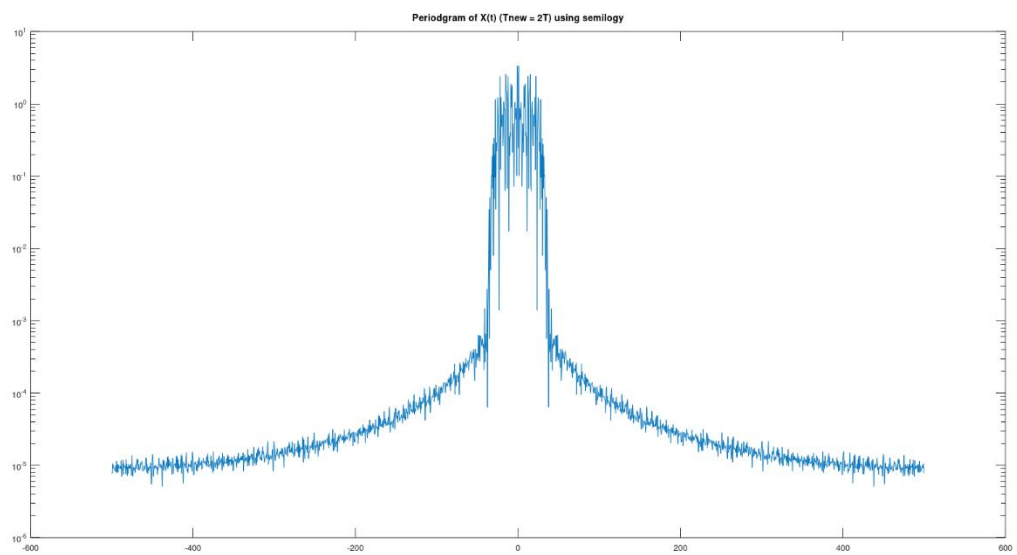
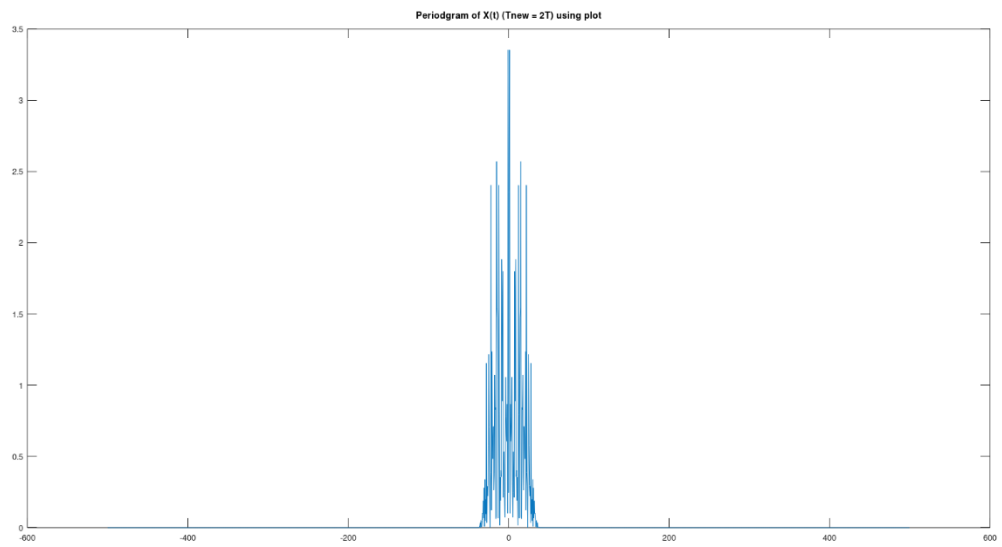
Παρατηρούμε πώς η φασματική πυκνότητα ισχύος έχει αυξημένο πλάτος κύριου λοβού σε σχέση με την πυκνότητα ισχύος 2PAM κάτι το οποίο είναι φυσιολογικό αφού μεγαλώνει η διασπορά του X και άρα φαίνεται από το $S_X(F) = \frac{\sigma_X^2}{T} |\Phi(F)|^2$ ότι αυτή θα αυξηθεί σε πλάτος. Ωστόσο το εύρος φάσματος παραμένει σταθερό αφού έχουμε το ίδιο φίλτρο srrc και το $\Phi(F)$ μένει ίδιο.

A.5

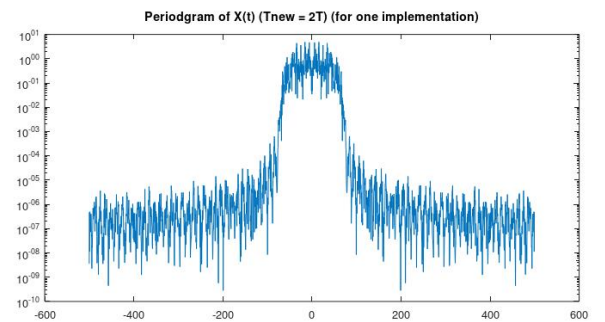
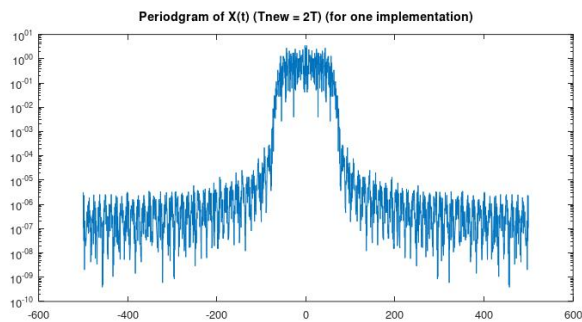
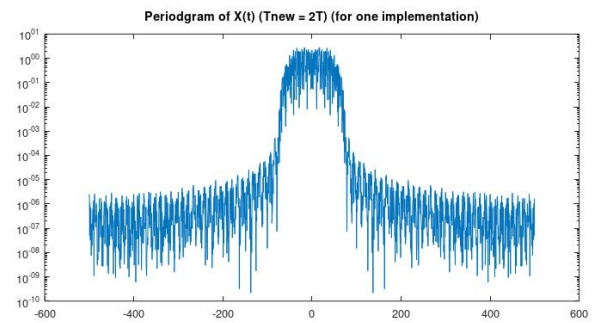
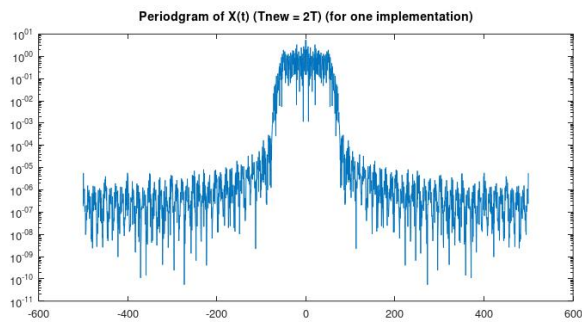
(10) Να επαναλάβετε το βήμα A.3, θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ (να διατηρήσετε την περίοδο δειγματοληψίας T_s ίση με αυτή των προηγούμενων βημάτων, άρα, θα πρέπει να διπλασιάσετε την παράμετρο over).

Κάνοντας την ίδια διαδικασία με το ερώτημα A3, φτιάχνοντας νέο παλμο srrc έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

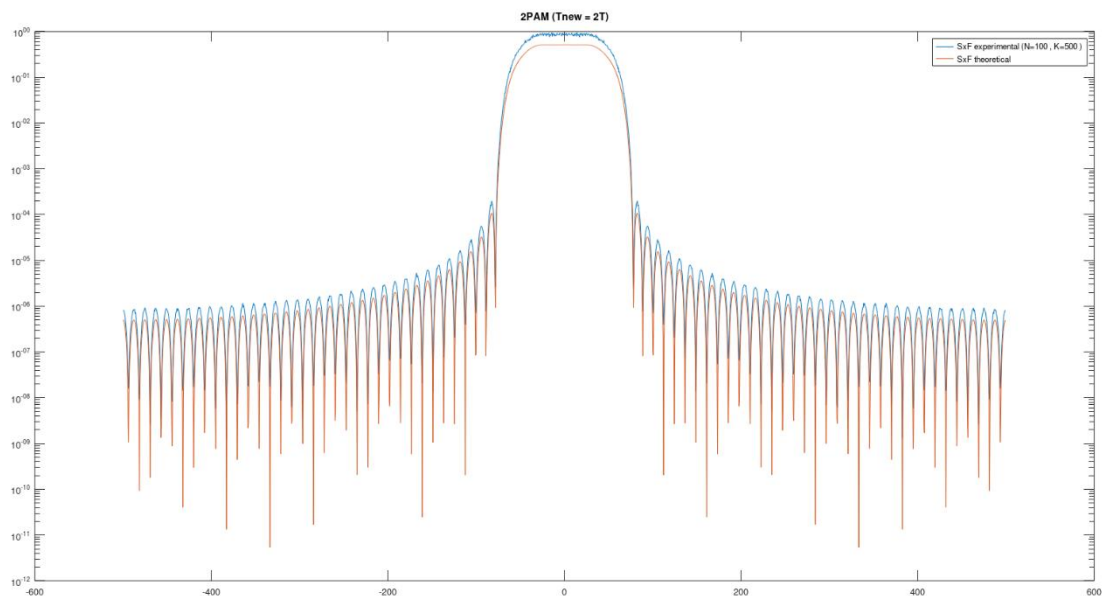
Το περιοδόγραμμα του σήματος $X(t)$ με plot και semilogy :



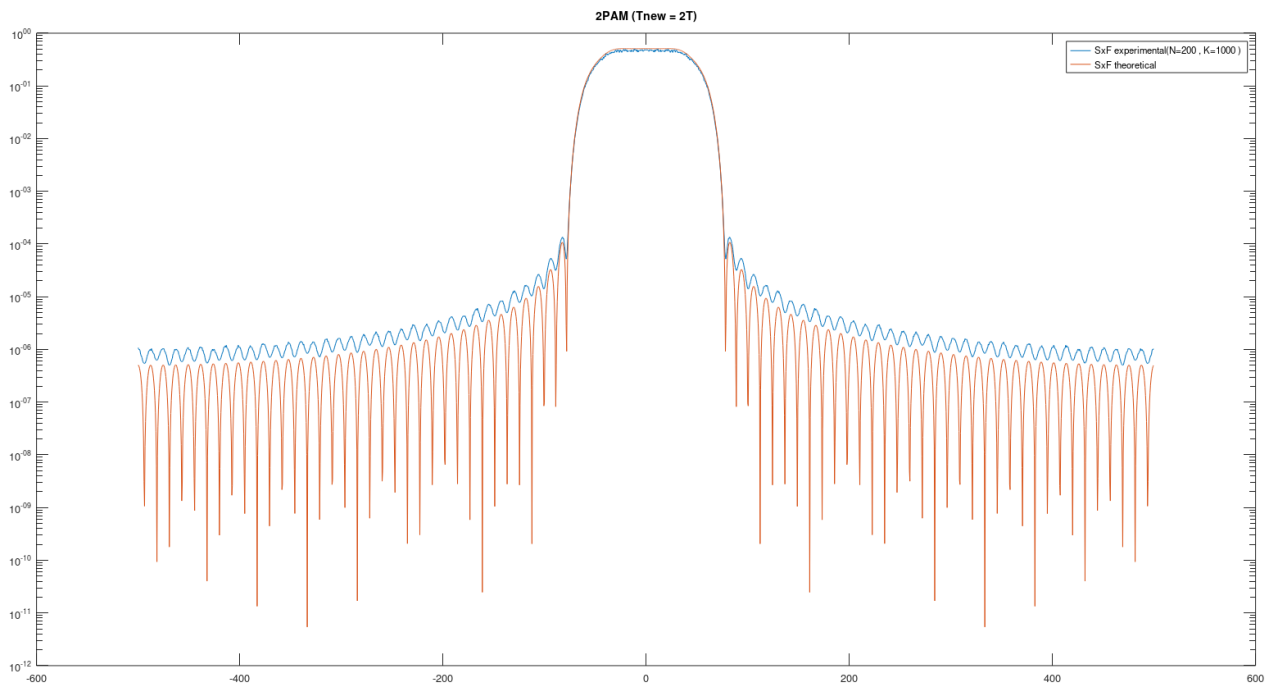
Μερικές υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων:



Πειραματική Και θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος:



Και ξανά το ίδιο για αυξημένα N,K:



(5) Τι παρατηρείτε σχετικά με το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με αυτό των κυματομορφών του βήματος A.3; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Βάζοντας παράμετρο $T' = 2T$ στον παλμό `srsrc` το εύρος φάσματος του $\frac{1+\alpha'}{2T'} = 50\text{Hz}$ αποτελεί τα $2/3$ του αρχικού εύρους φάσματος (75Hz). Αυτό φαίνεται και από τις κυματομορφές, καθώς ο κύριος λοβός έγινε στενότερος και τελειώνει σχεδόν στα 45Hz σε αντίθεση με τον αρχικό κύριο λοβό που τελείωνε στα 80Hz. Επίσης το πλάτος του κύριου λοβού σχεδόν υποδιπλασιάστηκε, κάτι το οποίο περιμέναμε αφού διπλασιάστηκε η περίοδος T και

$$S_X(F) = \frac{\sigma_X^2}{T'} |\Phi(F)|^2$$

A.6

(2.5) Αν θέλατε να στείλετε δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα επιλέγατε 2-PAM ή 4-PAM, και γιατί;

Στην κωδικοποίηση 4PAM κωδικοποιούνται 2bit σε 1 σύμβολο και άρα συνολικά το ίδιο πλήθος bits μεταφέρεται στο δέκτη στον μισό χρόνο από ότι με κωδικοποίηση 2PAM που 1 bit αντιστοιχεί σε 1 σύμβολο.

(2.5) Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θα επιλέγατε περίοδο συμβόλου T ή $T' = 2T$, και γιατί;

Για ακριβό εύρος φάσματος θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί περίοδος συμβόλου $T' = 2T$, ώστε το σήμα που φεύγει απ'τον πομπό να έχει τα $2/3$ εύρος φάσματος που θα είχε αν το στέλναμε με περίοδο συμβόλου T .

B.

Στο δεύτερο μέρος της άσκησης, το οποίο είναι, κυρίως, θεωρητικό, θα μελετήσουμε απλές στοχαστικές διαδικασίες.

Έστω $Y(t) = X \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$, $X \sim N(0,1)$ και $\Phi \sim U[0,2\pi)$ και X, Φ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

1. (5) Να σχεδιάσετε σε κοινό plot 5 υλοποιήσεις της.

Αρχικά υπολογίσαμε 5 τιμές των τυχαίων μεταβλητών X, Φ ώστε να κατασκευάσουμε 5 υλοποιήσεις της Y . Έπειτα τις σχεδιάσαμε σε κοινό plot.

```
%%%%B
```

```
%B1
```

```
%Y(t) = X cos(2*pi*f0*t + theta), X~N(0,1) , theta ~ U [0,2*pi)
f0 = 100 ;
t = [0: 0.00001 : 0.05];
```

```
%plot 5 implementations
```

```
figure();
```

```
for i=1 : 5
```

```
    x = normrnd( 0 , 1 );
    xs(i) = x;
```

```
    theta = unifrnd(0,2*pi);
    thetas(i) = theta;
```

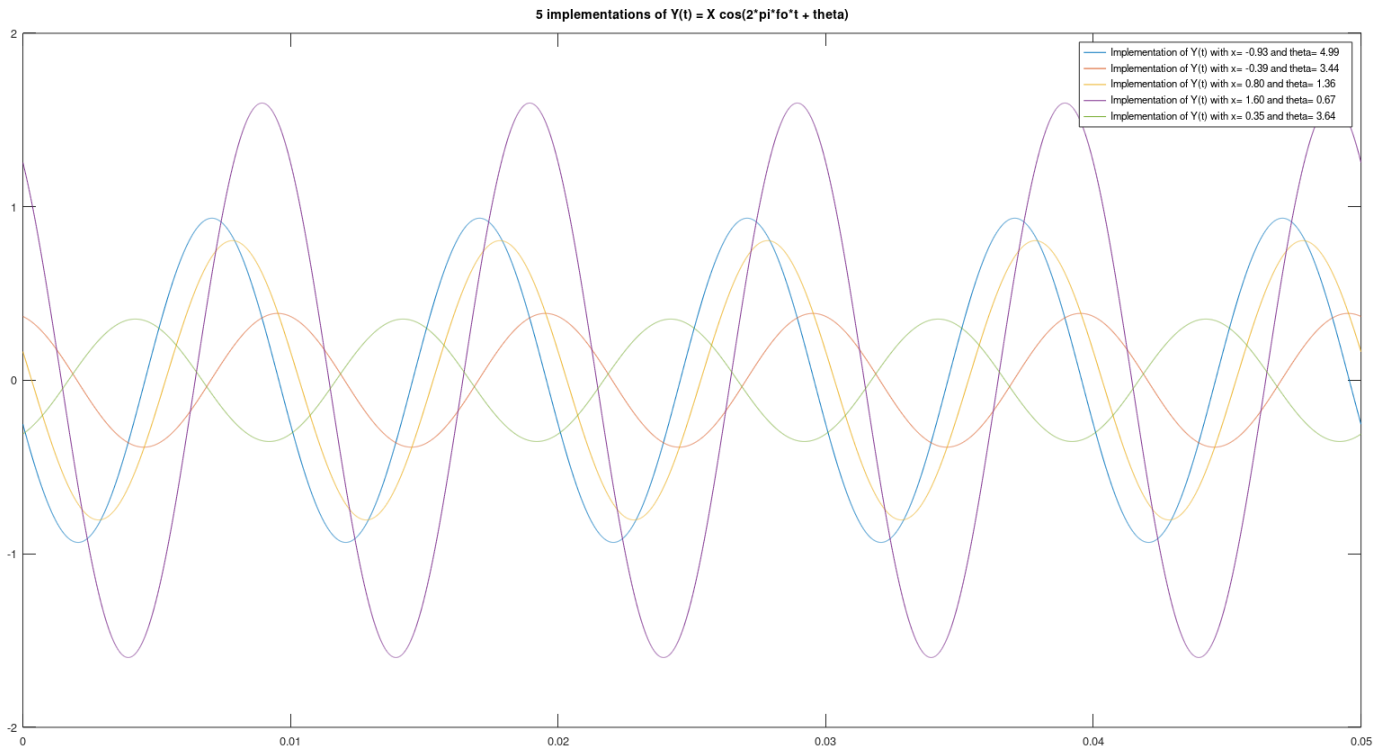
```
    y = x * cos(2*pi*f0*t + theta);
    plot(t,y);
    title('5 implementations of Y(t) = X cos(2*pi*f0*t + theta)');
    hold on;
```

```
end
```

```
str1 = sprintf('Implementation of Y(t) with x= %.2f and theta= %.2f', xs(1)
, thetas(1)) ;
str2 = sprintf('Implementation of Y(t) with x= %.2f and theta= %.2f', xs(2)
, thetas(2)) ;
str3 = sprintf('Implementation of Y(t) with x= %.2f and theta= %.2f', xs(3)
, thetas(3)) ;
str4 = sprintf('Implementation of Y(t) with x= %.2f and theta= %.2f', xs(4)
, thetas(4)) ;
```

```
str5 = sprintf('Implementation of Y(t) with x= %.2f and theta= %.2f', xs(5), thetas(5));
legend(str1,str2,str3,str4,str5);
hold off;
```

Και έχουμε:



Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\cos(a+b)=$

2.(10) Να υπολογίσετε τις ποσότητες $E[Y(t)]$ και $R_{YY}(t + \tau, t) = E[(Y(t + \tau)Y(t))]$. Τι διαπιστώνετε;

- $E[Y(t)] = E[X \cos(2\pi f_0 t + \Phi)] \xrightarrow{\Phi, X \text{ ανεξάρτητες}} E[Y(t)] = E[X] * E[\cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = 0 * E[\cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = 0.$
- $E[Y(t + \tau)Y(t)] = E[X(t + \tau) \cos(2\pi f_0(t + \tau) + \Phi) X(t) \cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = E[X(t + \tau)X(t)] * E[\cos(2\pi f_0(t + \tau) + \Phi) \cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = R_{XX}(t + \tau, t) * E\left[\frac{1}{2} \cos(2\pi f_0(t + \tau - t)) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0(t + \tau + t) + 2\Phi)\right] = R_{XX}(t + \tau, t) * \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0(\tau))$

2. (5) Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, $S_Y(F)$.

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{T_0} \int R_{YY}(t + \tau, t) dt = \frac{1}{2T_0} \int R_{XX}(t + \tau, t) * \cos(2\pi f_0(\tau)) dt$$

$$= \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos(2\pi f_0(\tau))$$

$$S_Y(F) = F\{R_Y(\tau)\} = F\left\{\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos(2\pi f_0(\tau))\right\} = \frac{1}{4}S_X(F+f_0) + \frac{1}{4}S_X(F-f_0)$$