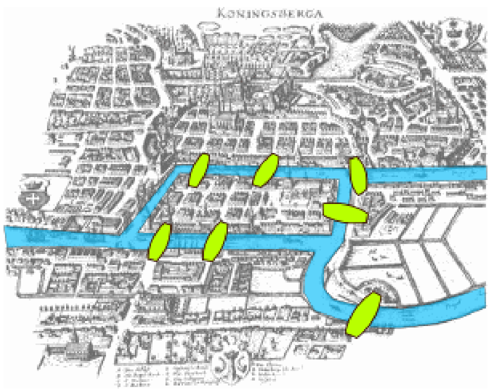
Euler goes on a walk*

sujet proposé par Adrienne Lancelot - lancelot@irif.fr

PI4 2022-2023

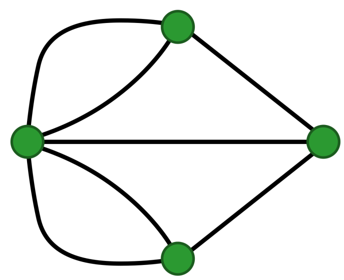
1 Les chemins eulériens



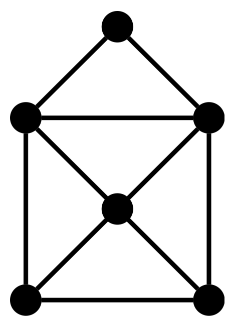
Les sept ponts de Koenisberg. Comment se promener dans la ville de Koenisberg en ne passant par chacun des sept ponts qu'une seule et unique fois ? La solution est *simple* : ce n'est pas possible. Pour le démontrer, il est important d'avoir une bonne formalisation mathématique des graphes. Le problème n'est pas récent : une première ébauche date de 1735 par Euler, posant les bases de la topologie et de la théorie des graphes. Mais il faudra attendre 1873 pour une preuve plus formalisée et un algorithme de Carl Hierholzer.

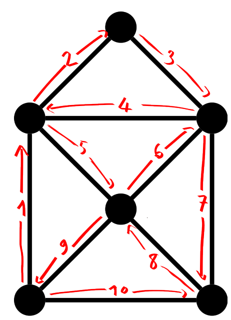
Formalisation en théorie des graphes. Le problème des sept ponts peut être reformulé à l'aide de la théorie des graphes : dans le graphe suivant, trouver une solution au problème des sept ponts revient à trouver un chemin dans le graphe qui passe par chaque arête une seule et unique fois.

*Euler part en promenade



Si cela n'est pas possible sur ce graphe en particulier, on peut trouver des chemins eulériens (et même des cycles eulériens) pour certains graphes – appelés *eulériens*. En particulier, il existe un chemin eulérien sur le graphe ci-dessous. Par contre, il n'y existe pas de cycle eulérien[1].





Résultats mathématiques. Un critère mathématique relativement simple existe pour résoudre le problème : les graphes eulériens – ce sont des graphes avec certaines conditions sur les degrés des sommets (le nombre d'arêtes adjacentes à un sommet). Il sera facile de trouver de la littérature en ligne sur le sujet.

(Difficile) Chemins Hamiltoniens. Un autre problème qui semble très proche serait de chercher un chemin dans le graphe qui ne passe qu'une seule fois par chaque sommet c'est-à-dire trouver un chemin hamiltonien. Il n'y a pas de solution aussi naturelle que pour les chemins eulériens et le problème est même NP-complet !

2 Le projet

L'objectif de ce sujet de projet est de réaliser une interface utilisateur qui permet de proposer des chemins dans un graphe et le programme vérifie la validité du chemin. D'un autre côté, on réalisera un algorithme qui trouve une (ou toutes) les solutions possibles, de manière efficace.

[1] un chemin eulérien dont le début et la fin sont le même sommet

Programmer la théorie des graphes. Pour implémenter des algorithmes sur les graphes, il y a plusieurs points intéressants qui pourront/seront étudiés durant le projet :

- Choix de représentation des graphes dans une structure de donnée (liste ou matrice d'adjacence),
- Génération de graphes aléatoire,
- Affichage d'un graphe,
- ...

Attendus. Il y a deux attendus minimaux pour réussir ce projet.

1. *Développer une interface utilisateur* pour proposer des chemins, qui sont vérifiés eulériens ou non par le programme.
2. *Implémenter un algorithme qui trouve un chemin eulérien* sur les graphes eulériens.

Il est attendu ensuite d'étendre le projet selon les goûts et les idées du groupe (en penchant plus vers le côté interface jeu ou vers le côté algorithmique).

Graphismes. L'interface graphique pourra être relativement sommaire si l'intérêt et l'effort du groupe est important pour l'aspect algorithmique du problème. A priori, si le groupe souhaite faire une interface graphique poussée, cela se fera à l'aide de la librairie Swing.

Extensions possibles. Voici une liste non exhaustive des possibilités d'extension du projet. Il sera nécessaire d'étendre

- *Améliorer l'expérience joueur* en proposant plusieurs niveaux différents ou plusieurs styles de jeux.
- *Implémenter plusieurs algorithmes de résolution différents* et comparer la complexité (étude théorique et pratique).
- *Considérer des graphes orientés* à la place de non orientés.
- ...
- **(Difficile)** Faire une recherche de chemins hamiltoniens.