

Sudoku com simplex

sábado, 20 de março de 2021 14:14

$$X_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{se o número } k \text{ está na posição } i,j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i,j,k \in \{1, \dots, 9\}^3$$

Função objetivo: $f(\vec{x}) = 0$

Restrições

- Variáveis binárias

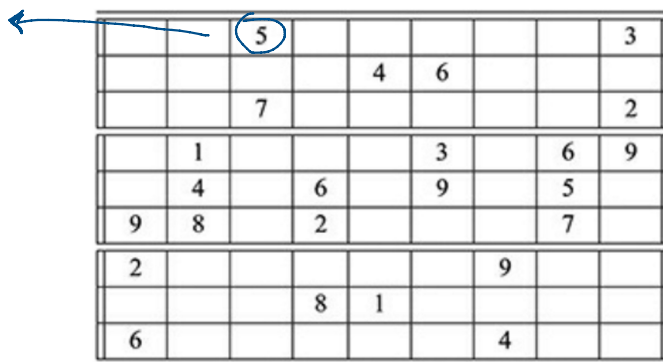
$$X_{i,j,k} \in \mathbb{Z}; \quad X_{i,j,k} \leq 1; \quad X_{i,j,k} \geq 0; \quad \forall i,j,k$$

- Restrições de posições fixas

$$X_{135} \leq 1, \quad X_{135} \geq 1$$

$$X_{13k} \leq 0, \quad X_{13k} \geq 0 \quad \forall k \neq 5$$

(exemplo para o valor 5 na célula 1x3).



		5						3
				4	6			
		7						2
	1				3		6	9
	4		6		9		5	
9	8		2				7	
2						9		
			8	1				
6						4		

- Restrição de um único número em cada célula

$$\sum_{k=1}^9 X_{i,j,k} \leq 1, \quad \sum_{k=1}^9 X_{i,j,k} \geq 1 \quad \forall i,j$$

- Restrição de cada número uma única vez por linha e coluna

$$\sum_{j=1}^9 X_{i,j,k} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^9 X_{i,j,k} \geq 1 \quad \forall i,k$$

$$\sum_{i=1}^9 X_{i,j,k} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^9 X_{i,j,k} \geq 1 \quad \forall j,k$$

- Restrição de cada número uma única vez nos quadrados 3x3

$$\sum_{i=i'}^{i'+2} \sum_{j=j'}^{j'+2} X_{i,j,k} \leq 1, \quad \sum_{i=i'}^{i'+2} \sum_{j=j'}^{j'+2} X_{i,j,k} \geq 1, \quad \forall k, \quad \forall i',j' \in \{1,4,7\}$$

Como encontrar a solução inicial?

Adicionar a variável x_0 e subtrair x_0 de todas as restrições

$$\min \quad X_0$$

sujeito a

$$X_{ijk} \in \mathbb{Z}; \quad X_{ijk} \leq 1; \quad X_{ijk} \geq 0; \quad \forall i, j, k$$

$$X_0 \geq 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_{135} &\leq 1, \quad X_{135} \geq 1 \\ X_{13k} &\leq 0, \quad X_{13k} \geq 0 \quad \forall k \neq 5 \end{aligned} \quad \text{para cada tripla } (i, j, k) \text{ fixa}}$$

$$\sum_{k=1}^9 X_{i,j,k} - X_0 \leq 1 \quad \forall i, j$$

$$-\sum_{k=1}^9 X_{i,j,k} - X_0 \leq -1 \quad \forall i, j$$

$$\sum_{j=1}^9 X_{i,j,k} - X_0 \leq 1 \quad \forall i, k$$

$$\sum_{i=1}^9 X_{i,j,k} - X_0 \leq 1 \quad \forall j, k$$

$$-\sum_{j=1}^9 X_{i,j,k} - X_0 \leq -1 \quad \forall i, k$$

$$-\sum_{i=1}^9 X_{i,j,k} - X_0 \leq -1 \quad \forall j, k$$

$$\sum_{i=i'}^{i'+2} \sum_{j=j'}^{j'+2} X_{i,j,k} - X_0 \leq 1 \quad \forall k, \quad \forall i', j' \in \{1, 4, 7\}$$

$$-\sum_{i=i'}^{i'+2} \sum_{j=j'}^{j'+2} X_{i,j,k} - X_0 \leq -1 \quad \forall k, \quad \forall i', j' \in \{1, 4, 7\}$$