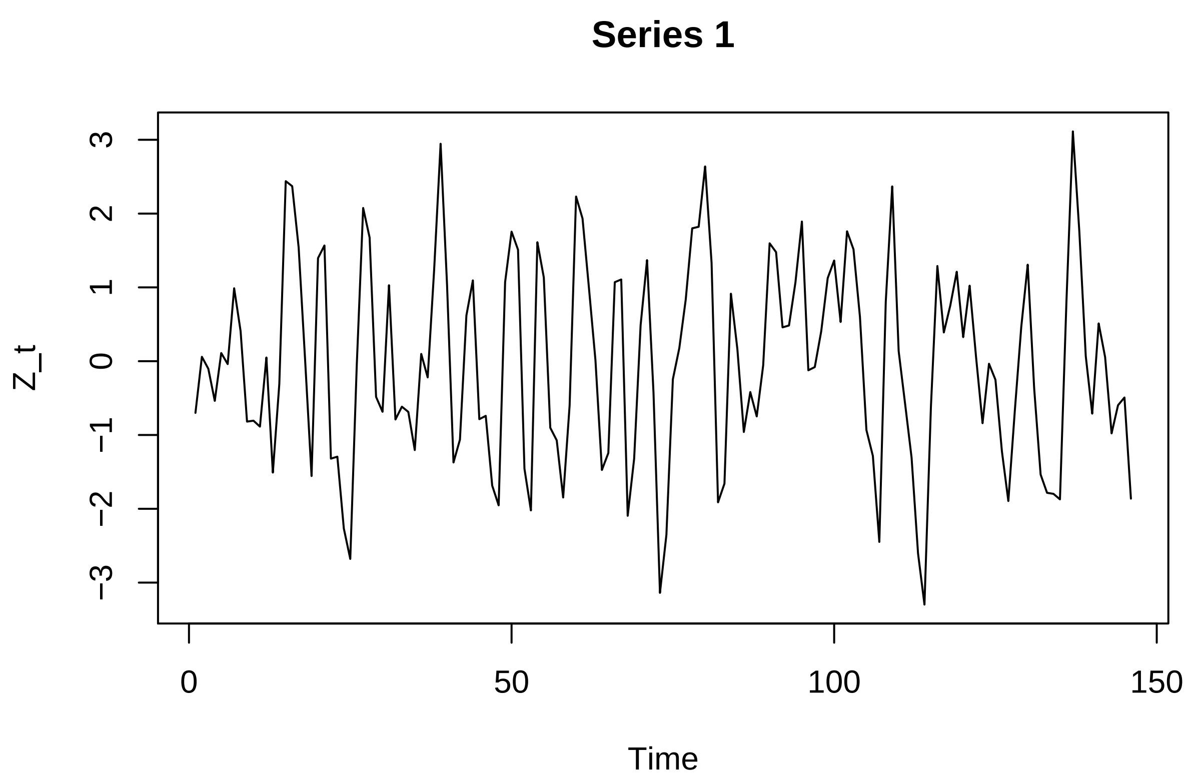
Modelos Arma

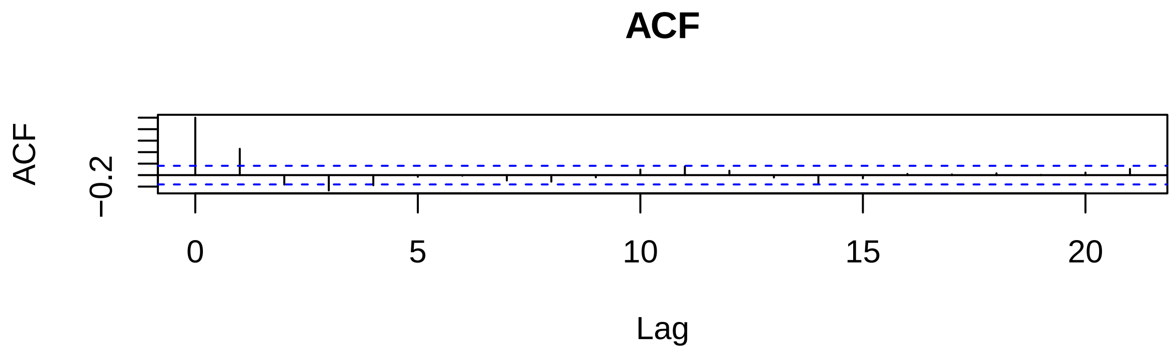
Giovani Valdrighi, Vitória Guardieiro

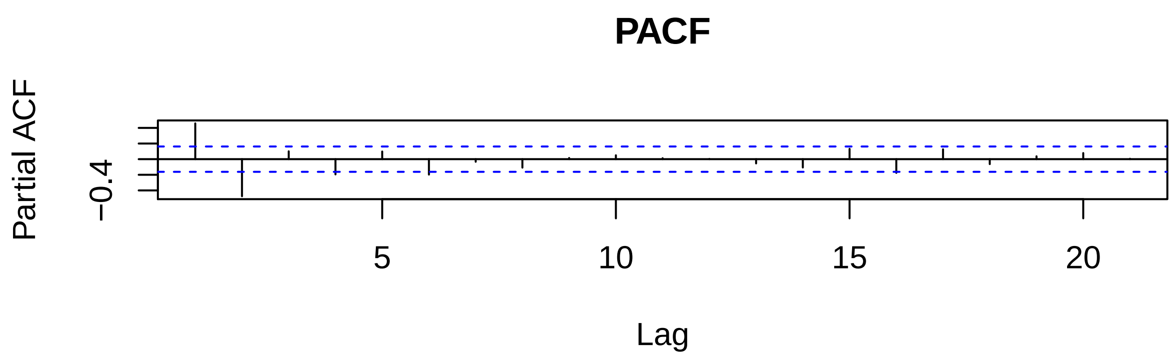
Modelos ARMA

Com 9 séries temporais, iremos avaliar cada uma delas e identificar se ela é gerada por um modelo AR(p), um modelo MA(q) ou um modelo ARMA(p, q). Em todas as diferentes séreis iremos inicialmente visualizar a série, a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial.

Série 1



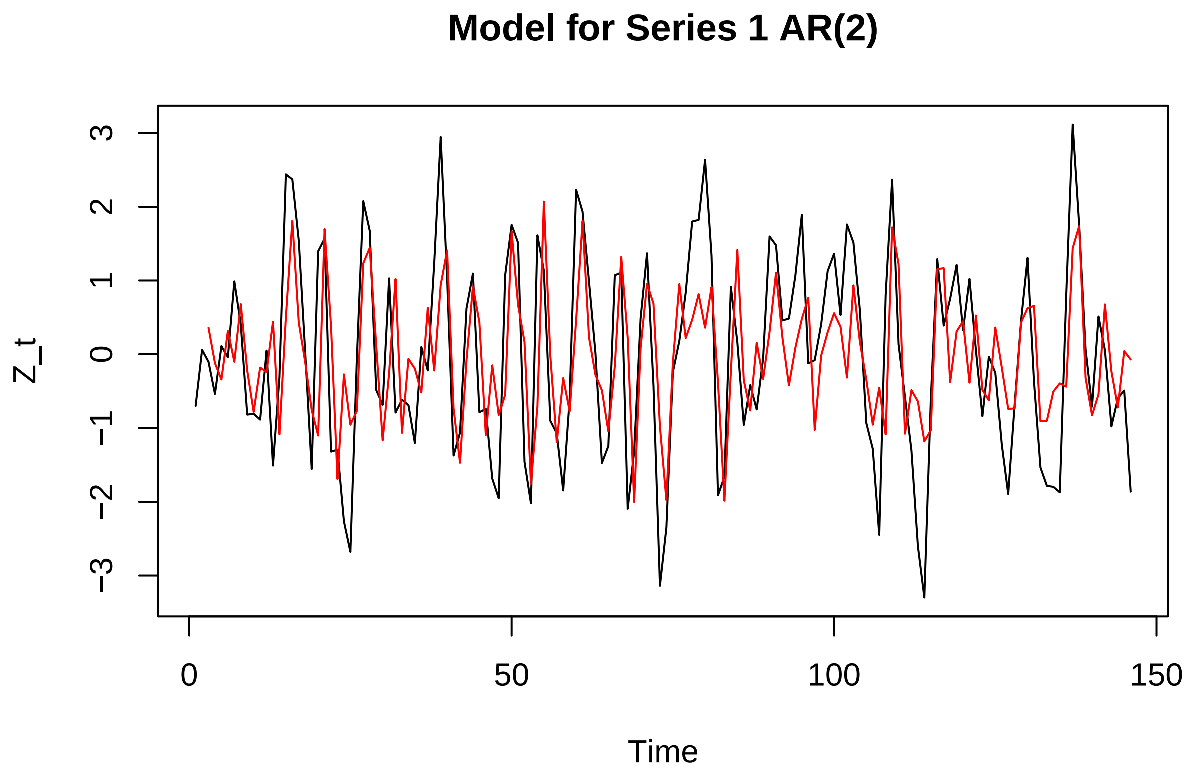




Vemos que a ACF e a PACF decrescem de forma brusca, tendo valores significativos para os dois primeiros lags, dessa forma, iremos considerar dois modelos, o modelo AR(2) e o modelo ARMA(2, 2). Vamos tentar fitar um modelo AR(2).

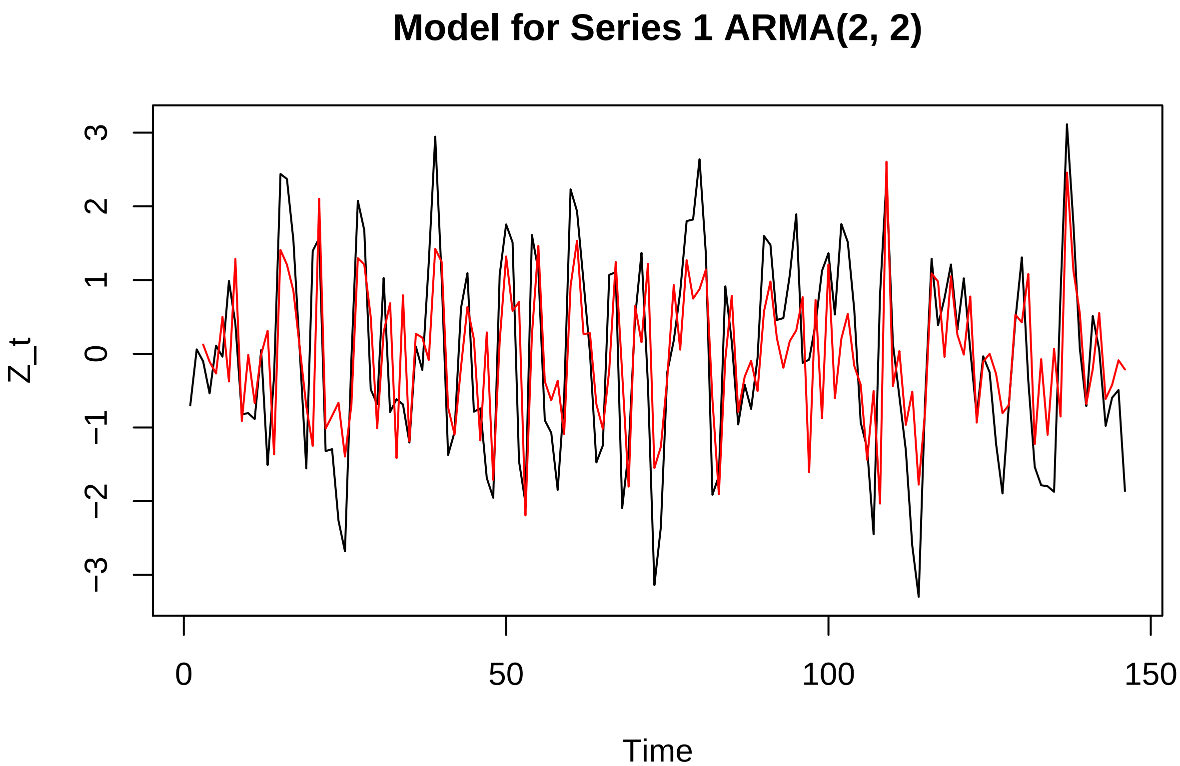
```
##
## Call:
## arma(x = X[[1]], order = c(2, 0))
##
## Model:
## ARMA(2,0)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.3168 -0.7743  0.1256  0.6870  2.4984
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1         0.68921     0.07292    9.451  < 2e-16 ***
## ar2        -0.48531     0.07289   -6.658 2.77e-11 ***
## intercept  -0.02129     0.08702   -0.245    0.807
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 1.113,  Conditional Sum-of-Squares = 159.18,  AIC = 435.98
```

Vamos visualizar inicialmente o modelo real e o previsto, e em sequência, o plot de resíduos.

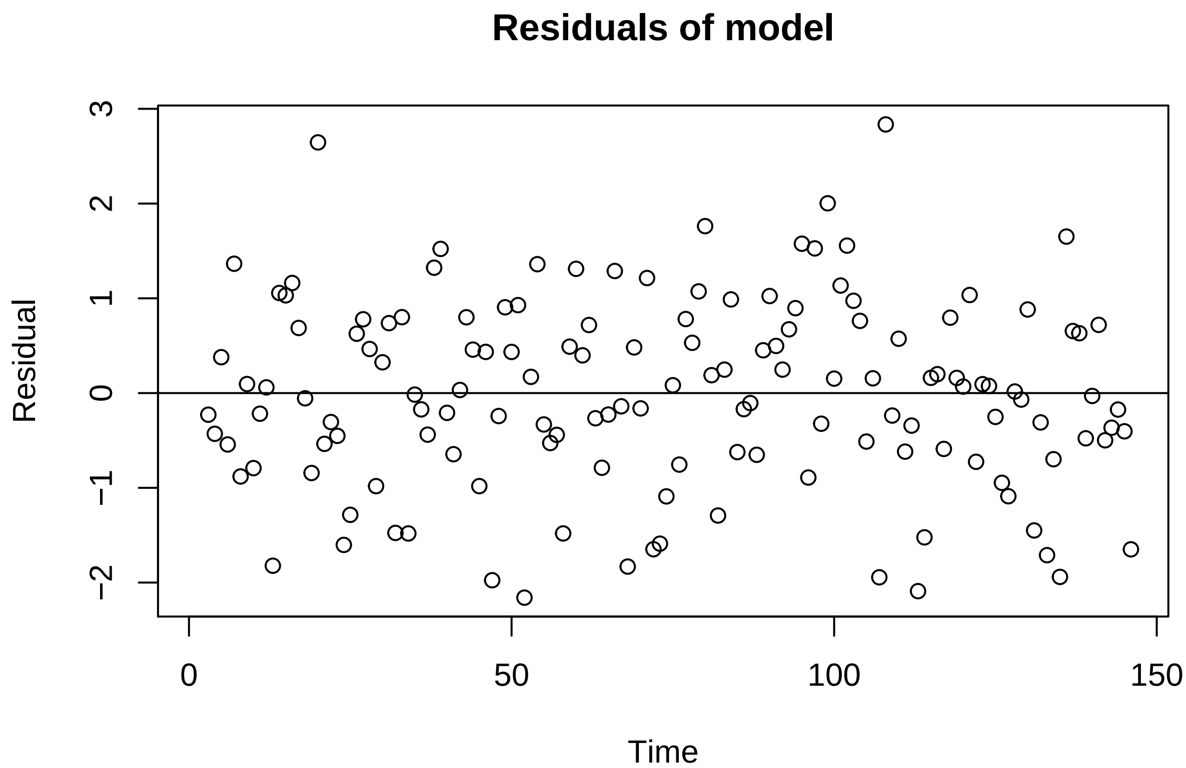


Realizando o mesmo procedimento, mas para o modelo ARMA(2, 2).

```
##
## Call:
## arma(x = X[[1]], order = c(2, 2))
##
## Model:
## ARMA(2,2)
##
## Residuals:
##        Min         1Q     Median         3Q        Max
## -2.1588765 -0.5967001  0.0001618  0.7185817  2.8350422
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1         0.792873    0.133253    5.950 2.68e-09 ***
## ar2        -0.119687    0.107696   -1.111    0.266
## ma1         0.060935    0.110778    0.550    0.582
## ma2        -0.775825    0.116414   -6.664 2.66e-11 ***
## intercept -0.005245    0.024207   -0.217    0.828
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 0.9758,  Conditional Sum-of-Squares = 139.55,  AIC = 420.76
```

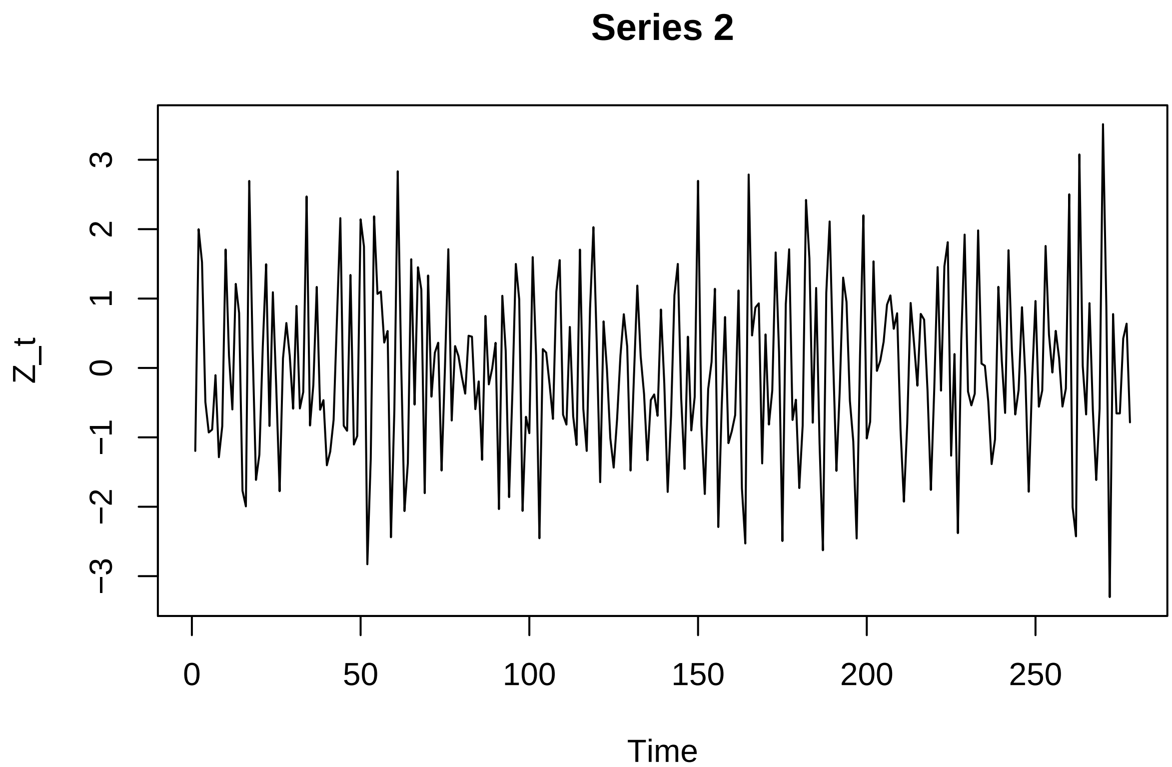


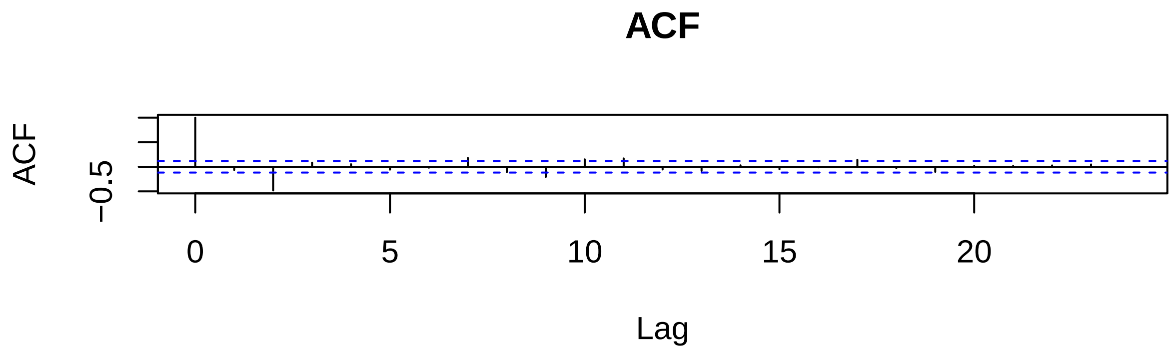
Vemos que o AIC é menor para o modelo ARMA(2, 2), e apesar de ambos se encaixarem bem aos dados, o modelo ARMA(2, 2) representa melhor os pontos extremos da série. Vamos visualizar os resíduos obtidos:

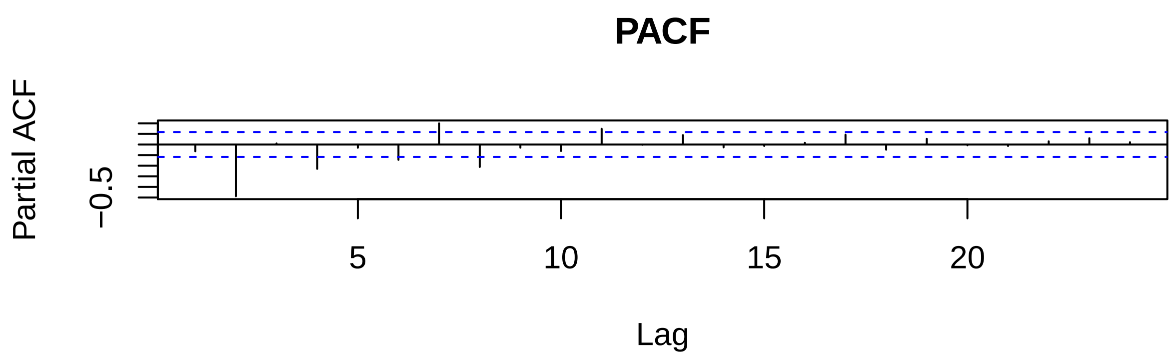


O modelo parece se adequar bem aos dados e também os resíduos não apresentam um padrão de comportamento.

Série 2



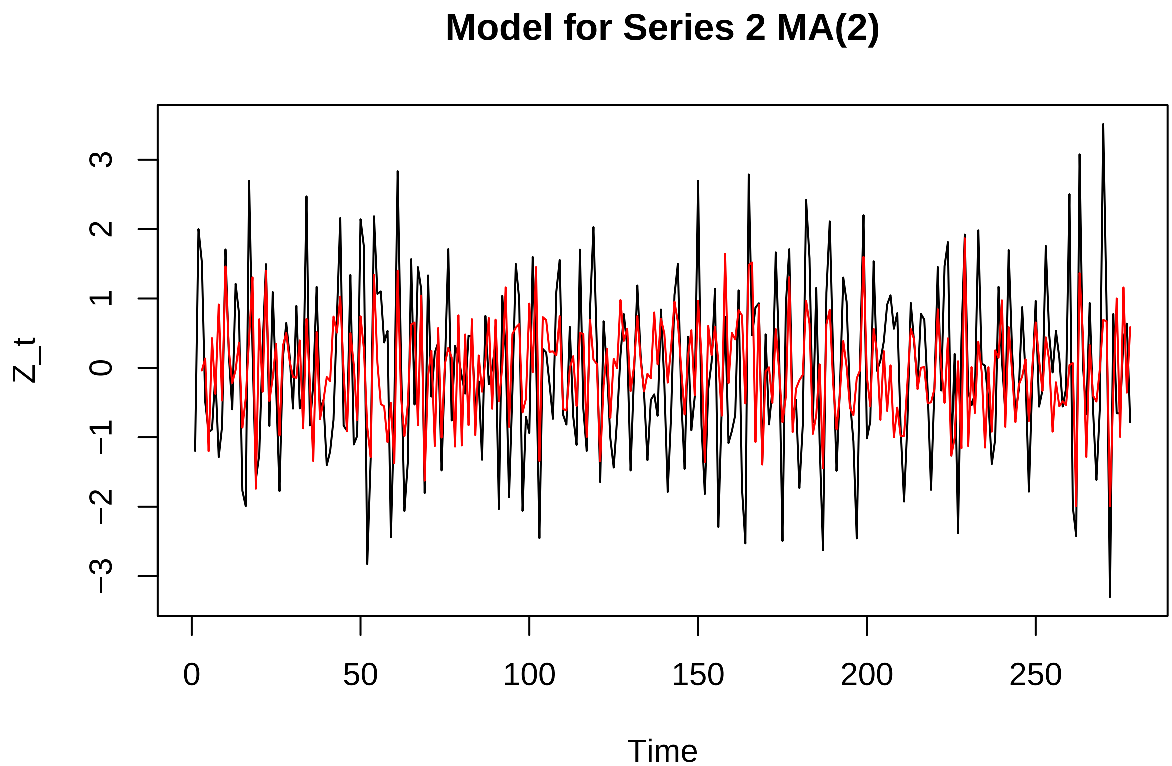




Agora, visualizamos um situação inversa, o lag 2 é significativo na ACF e nos demais não, e na PACF o decrescimento é gradual, o que nos faz pensar se tratar de um modelo MA(2). No entanto, como na PACF o lag 2 também é significativo, iremos comparar com o modelo ARMA(2, 2).

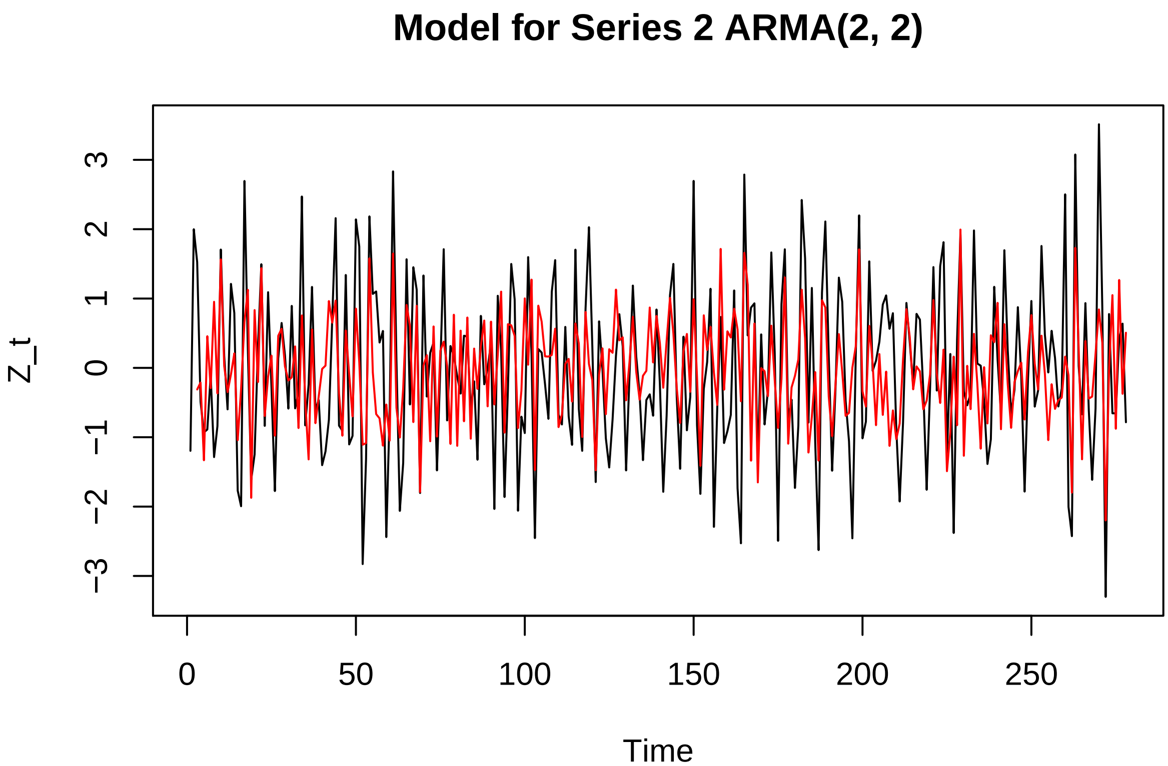
```
##
## Call:
## arma(x = X[[2]], order = c(0, 2))
##
## Model:
## ARMA(0,2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.49044 -0.77251  0.01282  0.77130  2.82319
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ma1         0.11057     0.04029    2.745  0.00606 **
## ma2        -0.70037     0.03931  -17.818  < 2e-16 ***
## intercept  -0.03815     0.02510   -1.520  0.12855
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 1.025,  Conditional Sum-of-Squares = 281.95,  AIC = 801.86
```

O modelo se encaixou bem, vamos comparar a previsão e o real, e em sequência, o plot de resíduos.

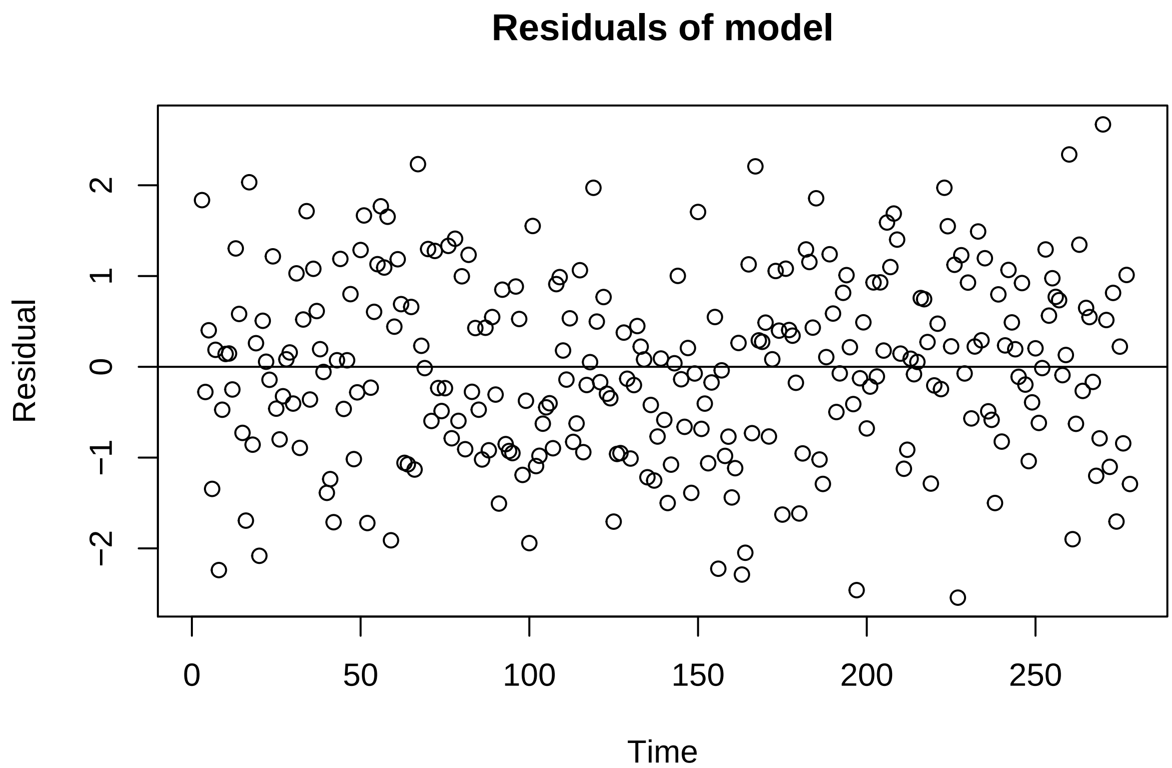


Realizando o mesmo processo com o modelo ARMA(2, 2).

```
##
## Call:
## arma(x = X[[2]], order = c(2, 2))
##
## Model:
## ARMA(2,2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.54256 -0.76754  0.01269  0.73690  2.67023
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1        -0.20365     0.08558   -2.380  0.01733 *
## ar2        -0.12123     0.07719   -1.571  0.11627
## ma1         0.21277     0.06716    3.168  0.00153 **
## ma2        -0.61986     0.06320   -9.808  < 2e-16 ***
## intercept  -0.04935     0.03605   -1.369  0.17106
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 1.003,  Conditional Sum-of-Squares = 275.78,  AIC = 799.72
```

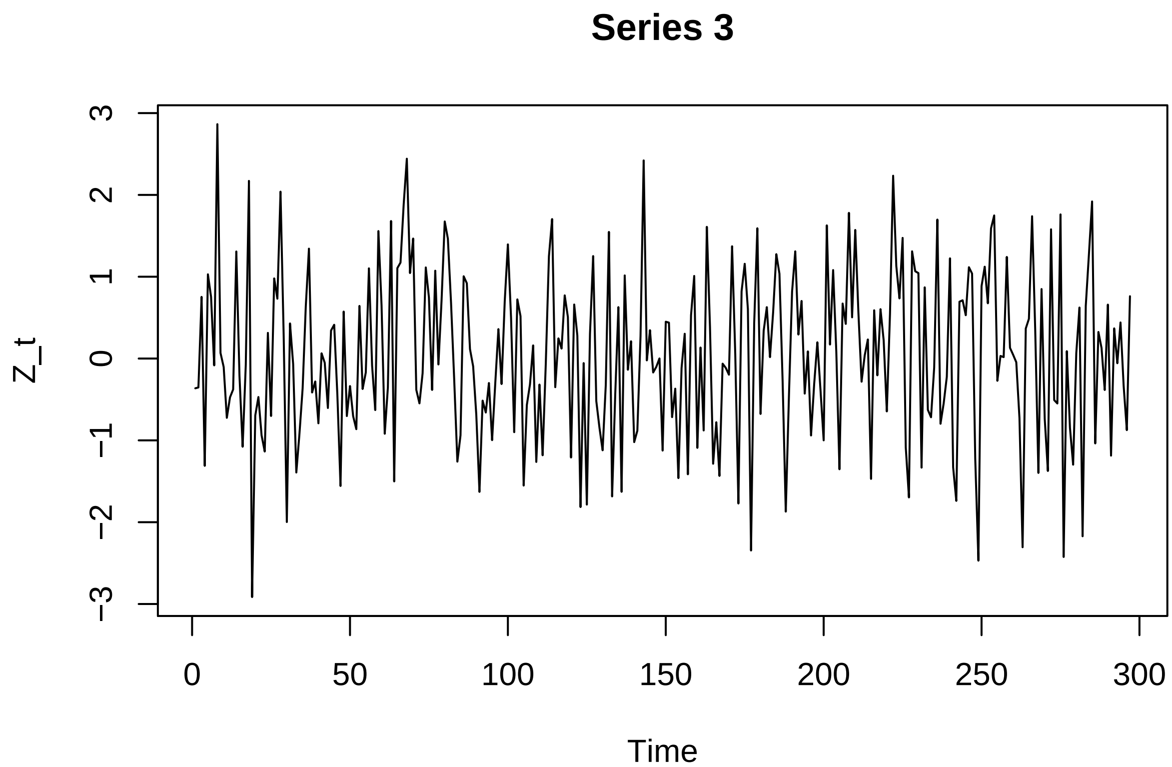


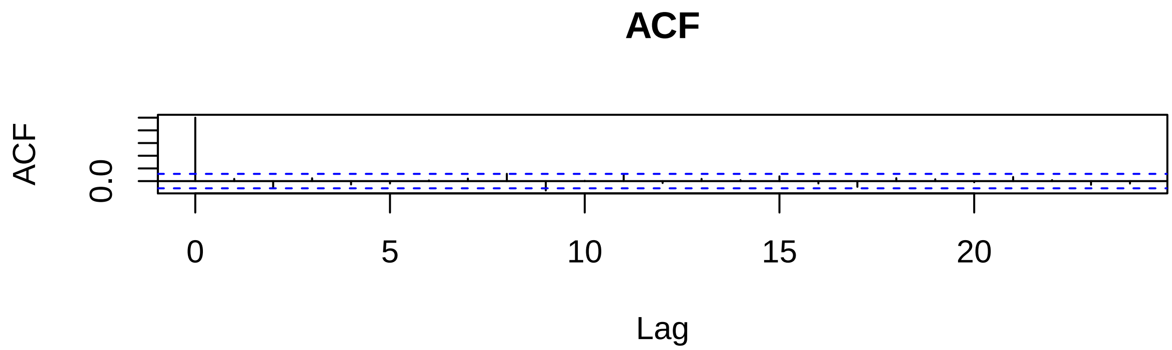
Vemos que apesar de extramemente parecidos, o modelo ARMA(2, 2) teve o AIC um pouquinho menor. Vamos visualizar o resíduo obtido com ele:

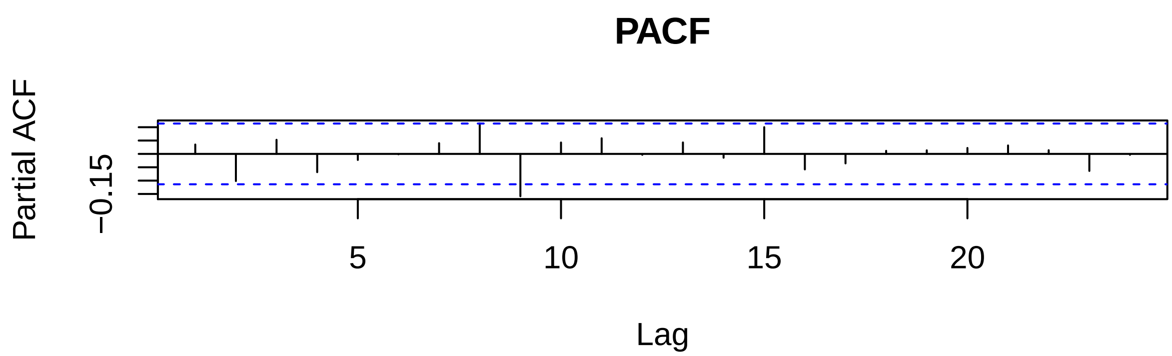


O modelo aparentemente se adequa bem a sazonalidade da série real, no entanto, não conseguimos capturar os picos extremos como ocorrem na série real, e os resíduos também se distribuem uniformemente ao longo da série.

Série 3



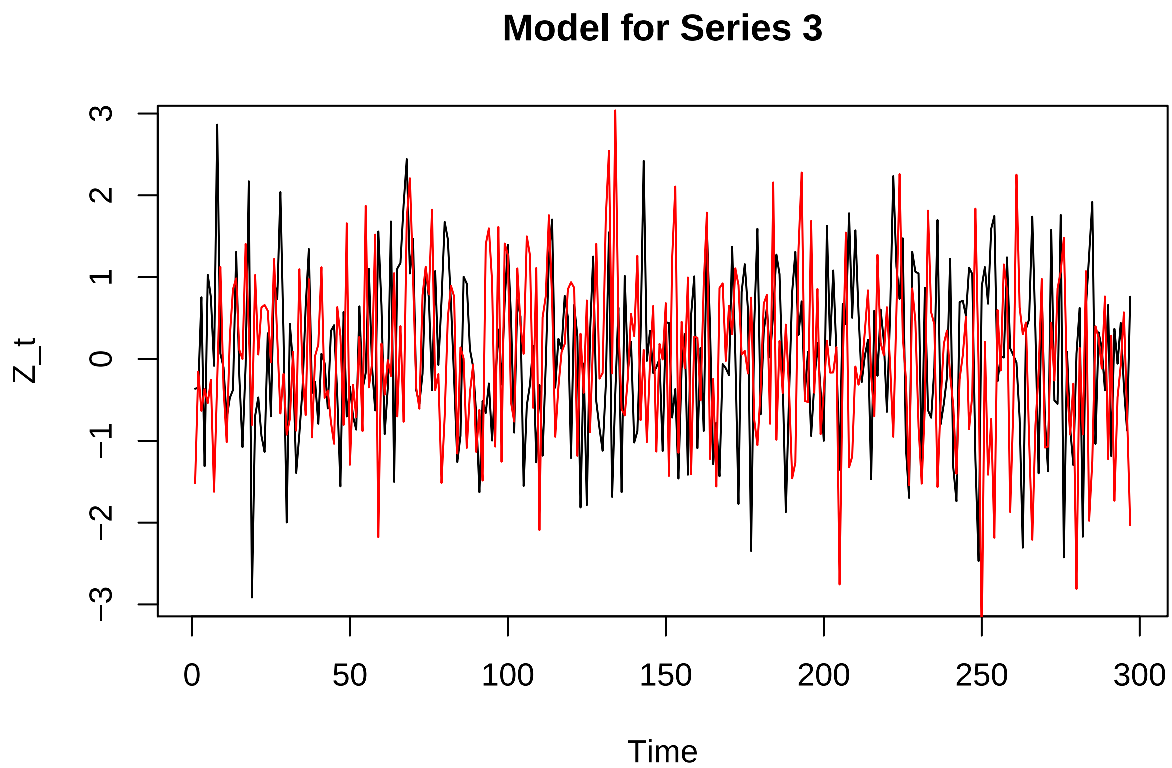




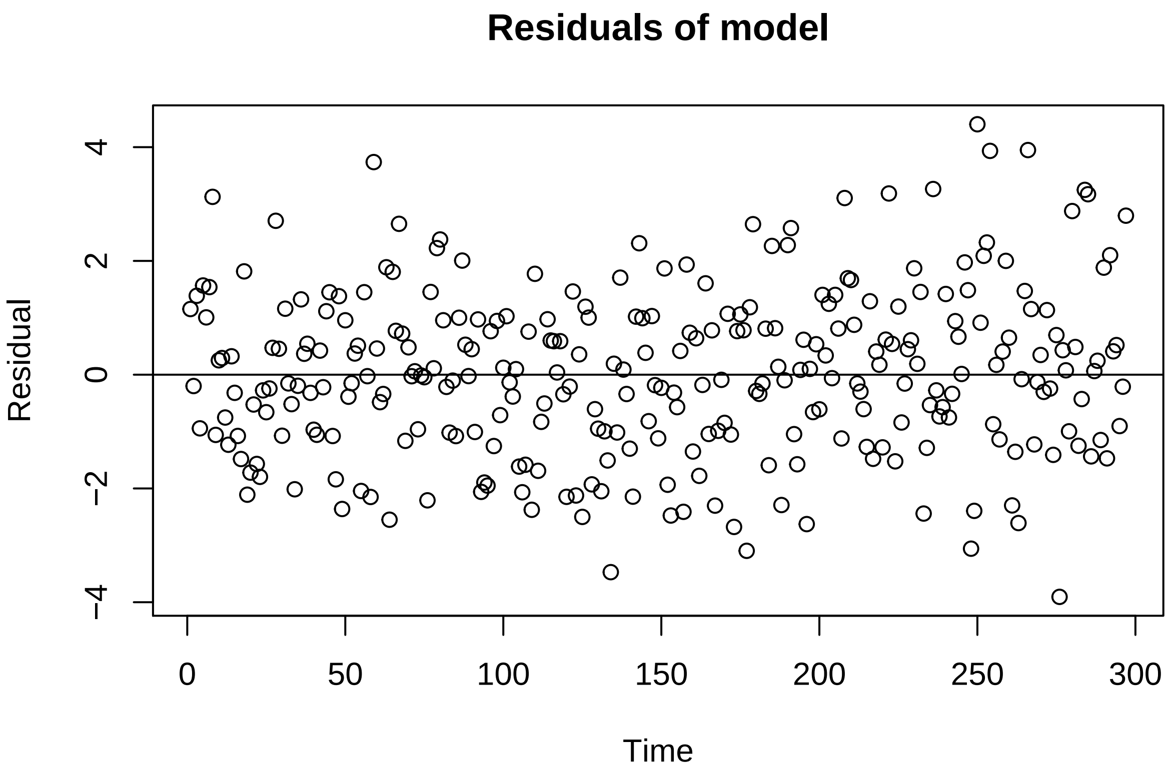
Nesse modelo existe um comportamento diferente dos demais, tanto a ACF quanto a PACF são praticamente nulas para todos os valores, menos para a ACF de 0, o que indica que as amostras não possuem covariância, se comportando como um ruído branco. Vamos verificar a média e a variância da série.

```
##         mean variance
## 1 0.03941307 1.021629
```

Vemos que o modelo se comporta como um ruído branco, isto é, a_t com $E(a_t) = 0$ e $Var(a_t) = 1$. Se nós gerarmos 297 amostras de a_t e visualizarmos tanto o modelo e predição, quanto o residual, teremos:



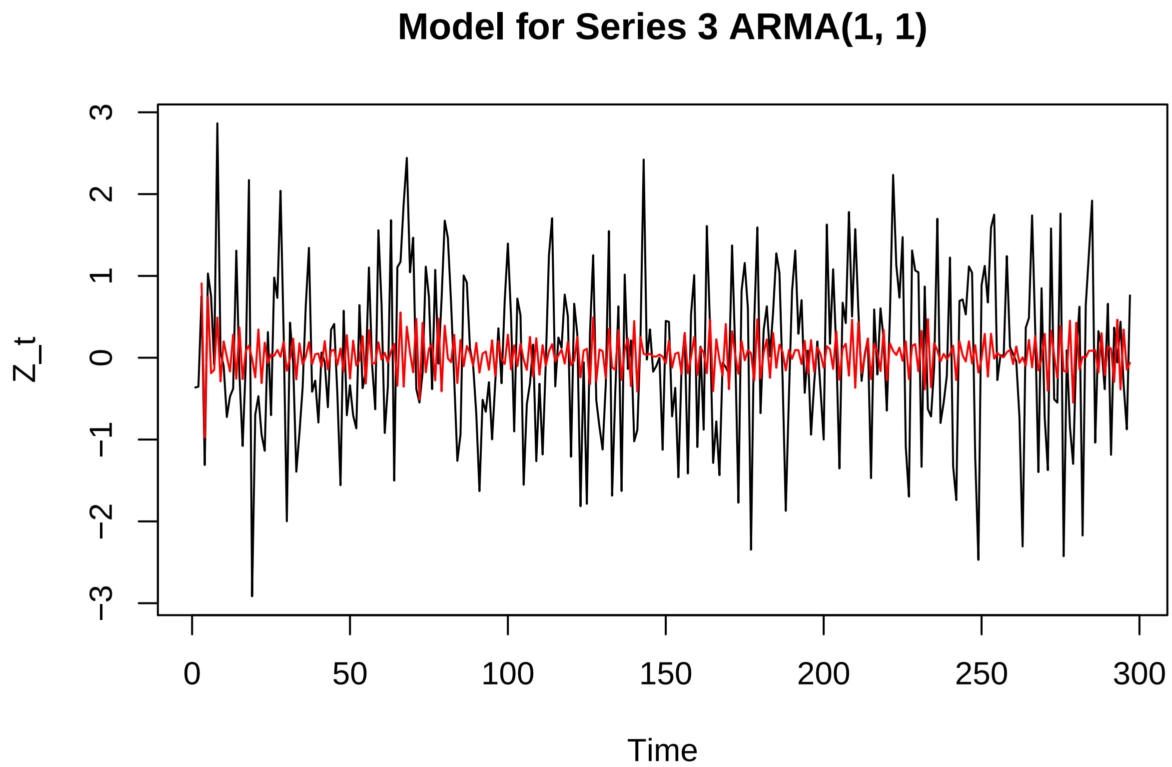

```
## Warning in model3$residual <- X[[3]] - model3: Realizando coerção de LHD para
## uma lista
```



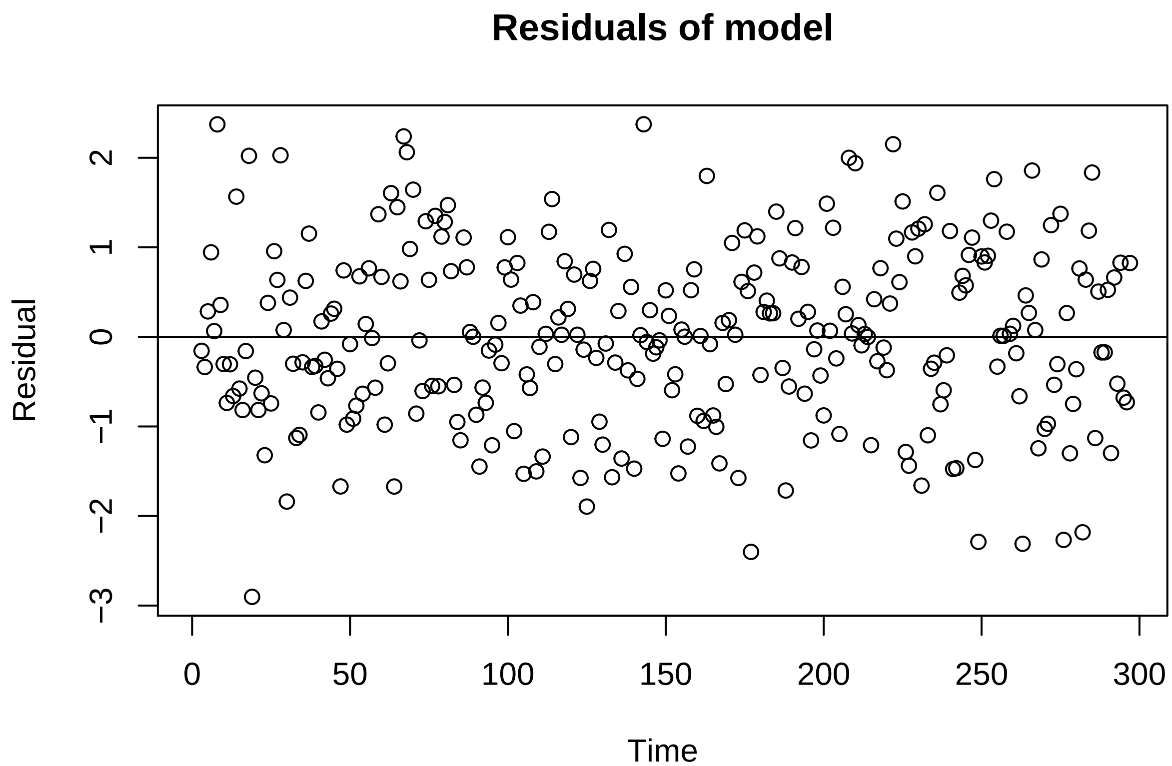
No entanto, também existe a possibilidade de se tratar de um modelo ARMA(p, p), pois a PACF possui valores baixos, mas esses valores se mantem ao longo dos lags, sem diminuir. Além disso, a ACF de uma ARMA(p, p) se comporta como um AR(p - p), isto é, não possui valores significantes para os lags diferentes de 0.

```
##
## Call:
## arma(x = X[[3]], order = c(2, 2))
##
## Model:
## ARMA(2,2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.90256 -0.63458  0.01191  0.73813  2.37413
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1        -1.47421     0.11724  -12.575   <2e-16 ***
## ar2        -0.82126     0.05847  -14.045   <2e-16 ***
## ma1         1.56787     0.15409   10.175   <2e-16 ***
## ma2         0.84398     0.09274    9.101   <2e-16 ***
## intercept   0.08961     0.19398    0.462    0.644
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
```

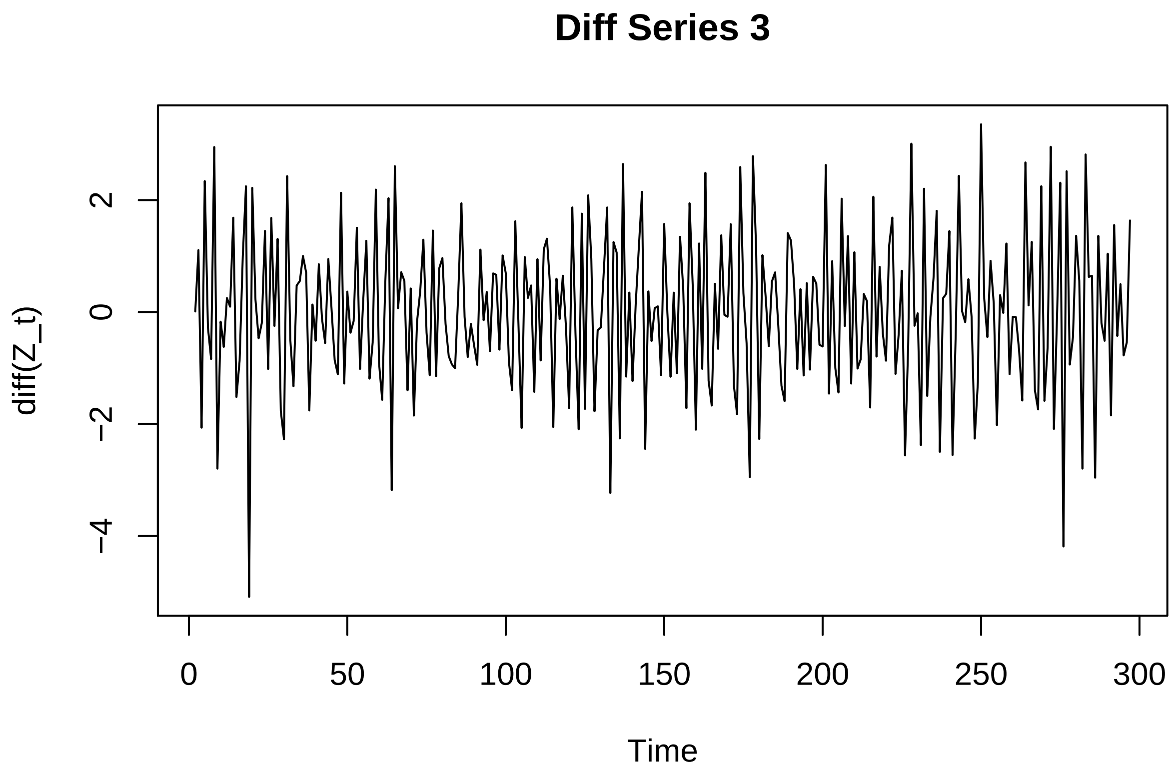
```
## Fit:
## sigma^2 estimated as 0.9752,  Conditional Sum-of-Squares = 286.77,  AIC = 845.39
```

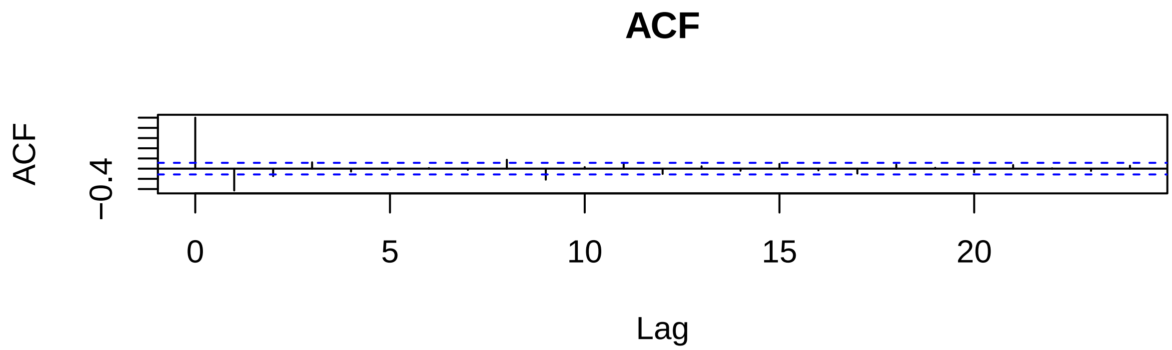


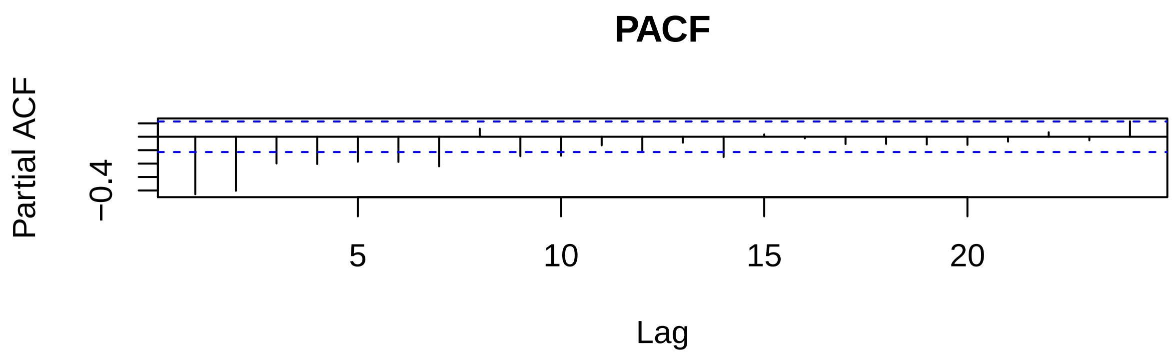
O modelo não apresentou os valores da série real, se mantendo próximo da média 0. Os resíduos serão uniformemente distribuídos, mas com valores altos.



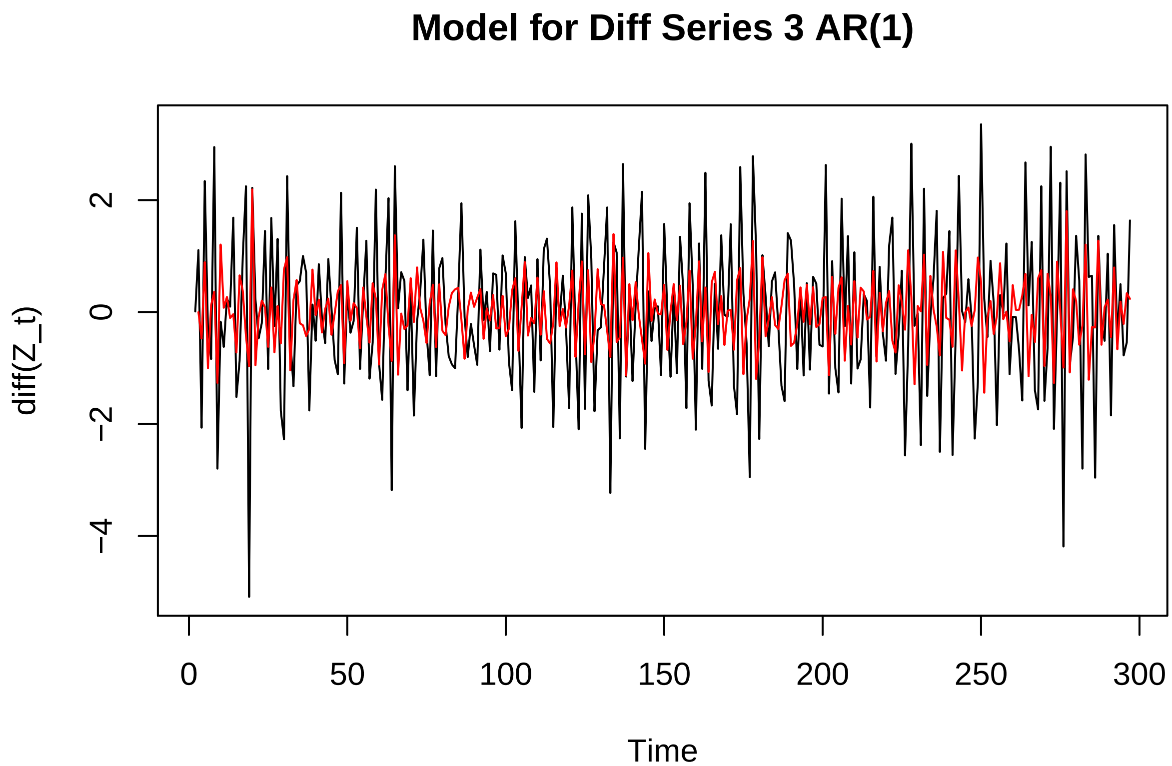
Agora, para fazer mais uma análise, vamos considerar a série 3 diferenciada.


Diff Series 3
diff(Z_t)
2
0
−2
−4
0
50
100
150
200
250
300
Time

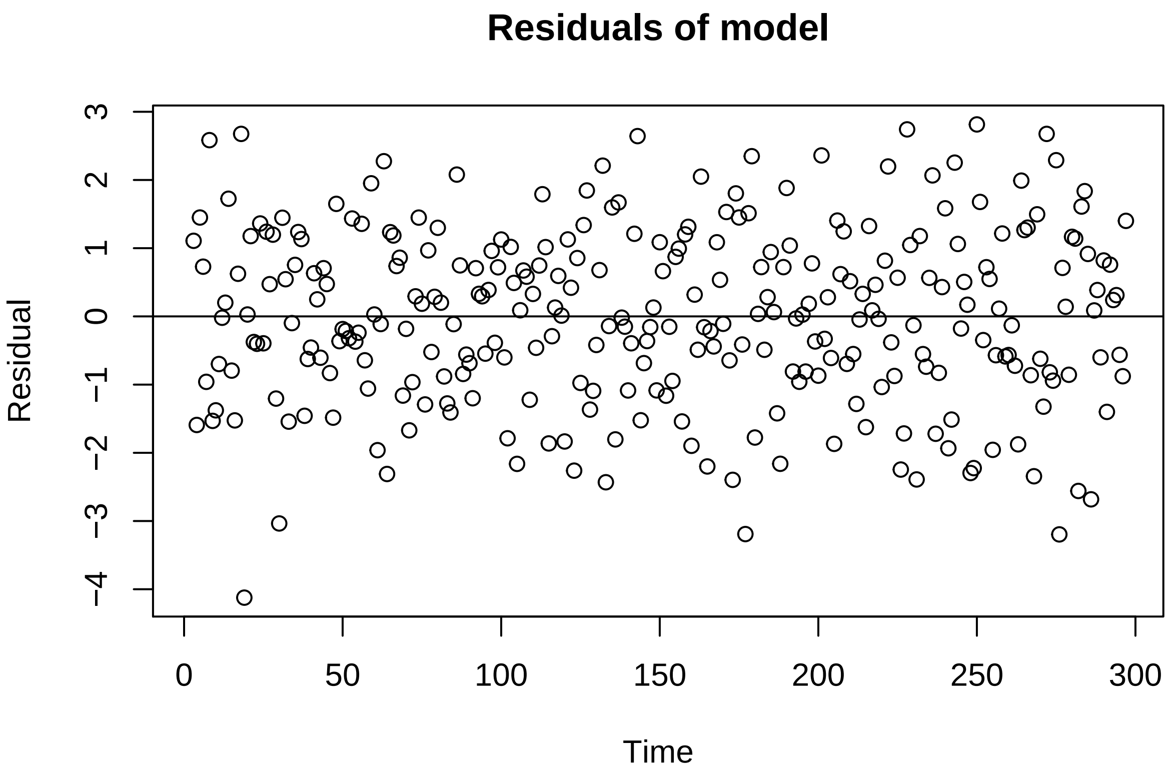




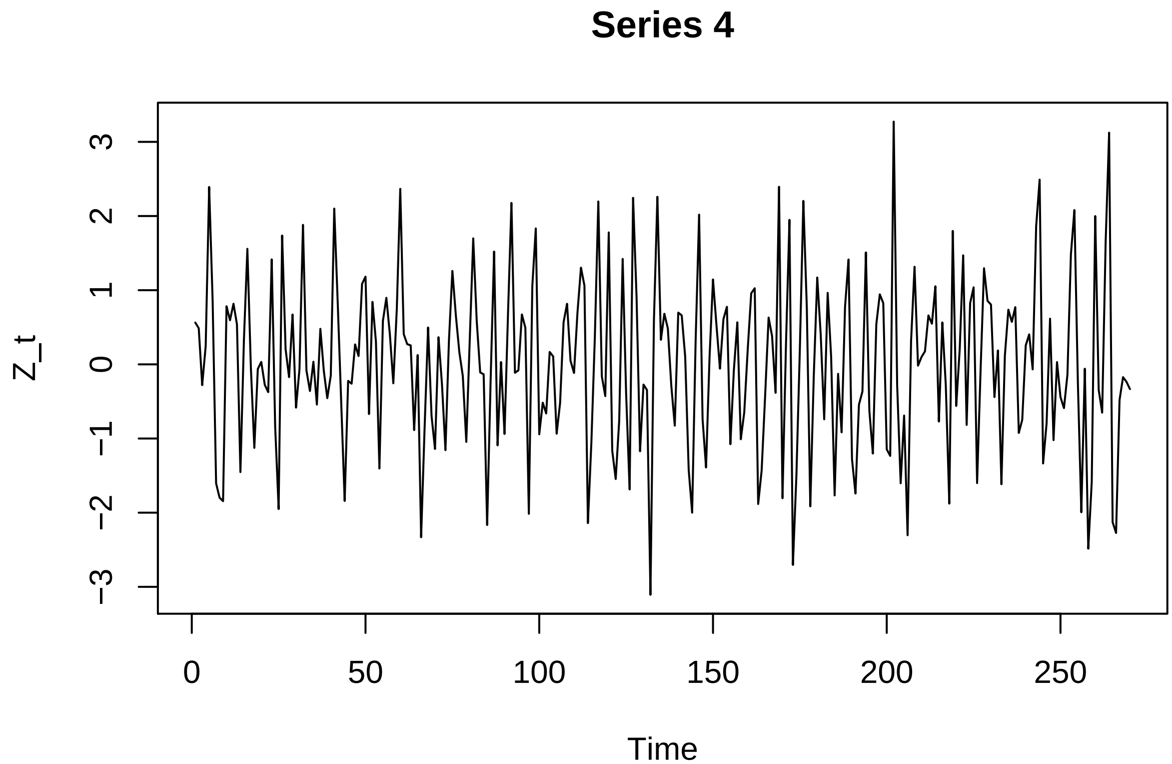

```
##
## Call:
## arma(x = diff(X[[3]]), order = c(1, 0))
##
## Model:
## ARMA(1,0)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -4.12297 -0.83723  0.02588  0.96413  2.81438
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1       -0.430168    0.052618   -8.175 2.22e-16 ***
## intercept  0.003035    0.073914    0.041    0.967
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 1.623,  Conditional Sum-of-Squares = 477.05,  AIC = 987.29
```

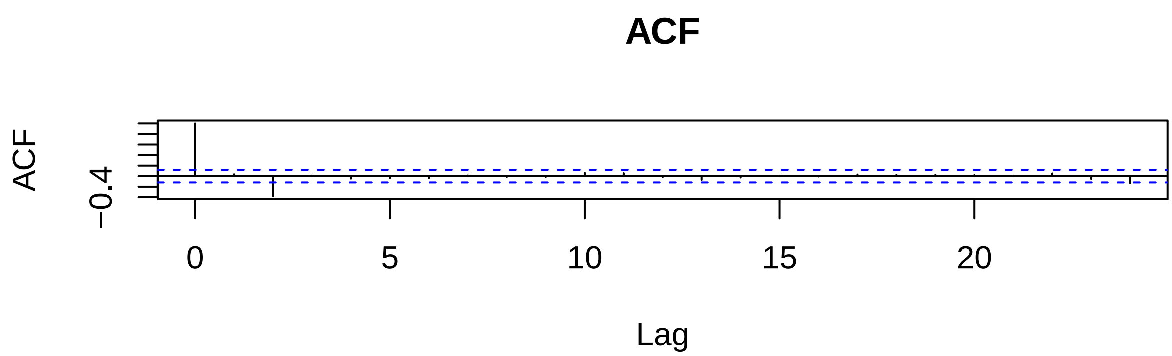


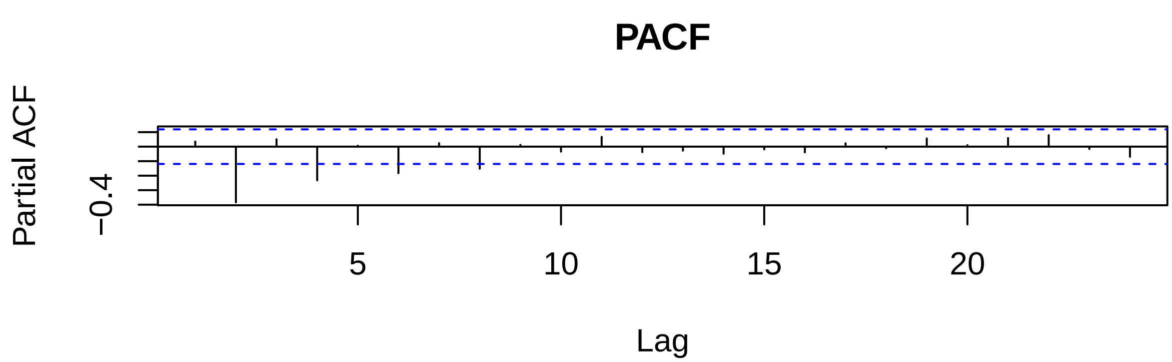
Vemos que o modelo se encaixou melhor para essa série diferenciada, representando melhor os picos.


Residuals of model
Residual
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0
50
100
150
200
250
300
Time

Série 4

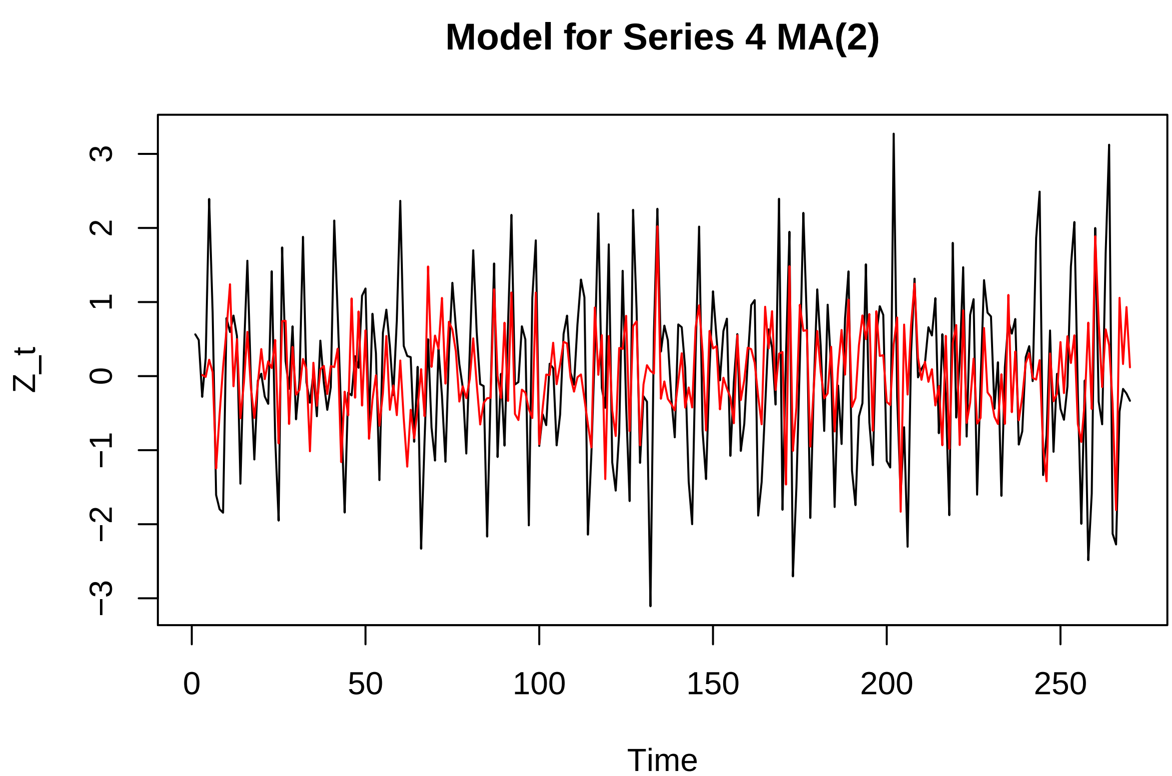

Series 4
Z_t
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
50
100
150
200
250
Time

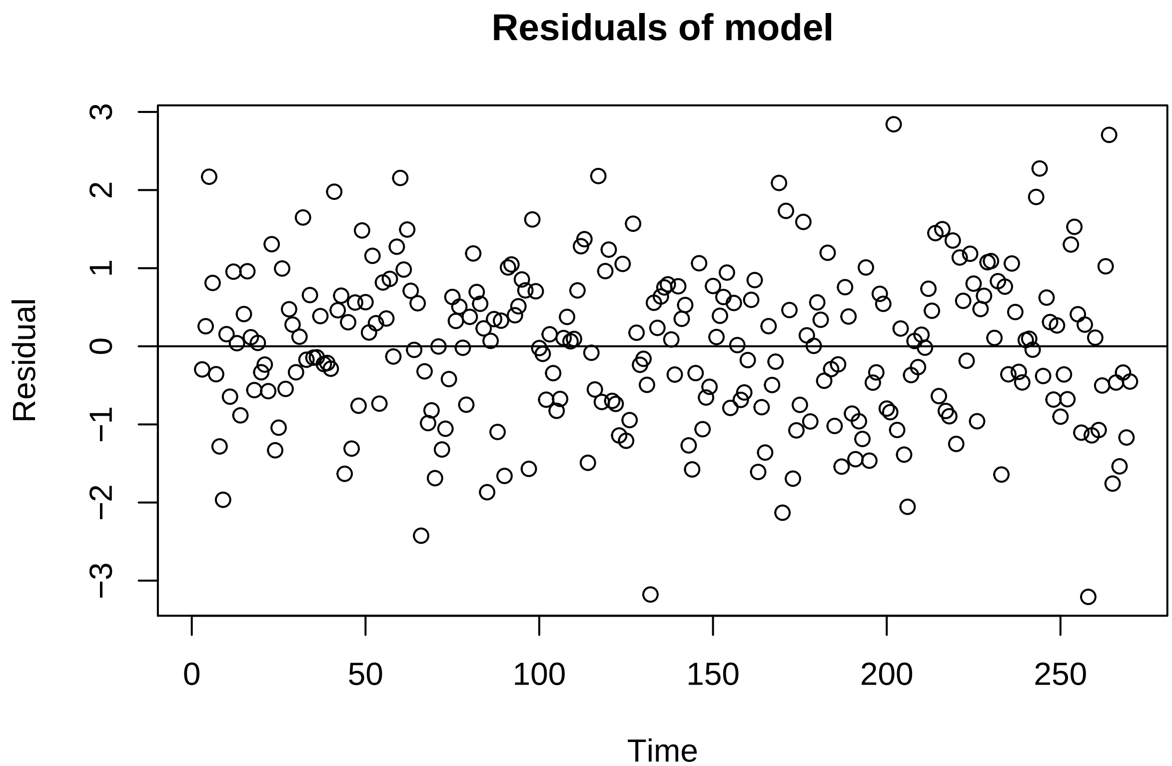

ACF
ACF
−0.4
0
5
10
15
20
Lag


PACF
Partial ACF
−0.4
5
10
15
20
Lag

A série apresenta uma função de ACF que cai drasticamente após o lag 2, enquanto a PACF cai mais gradualmente de forma exponencial, o que dá a noção de se tratar de um modelo MA(2). Utilizando dessa observação, fitamos:

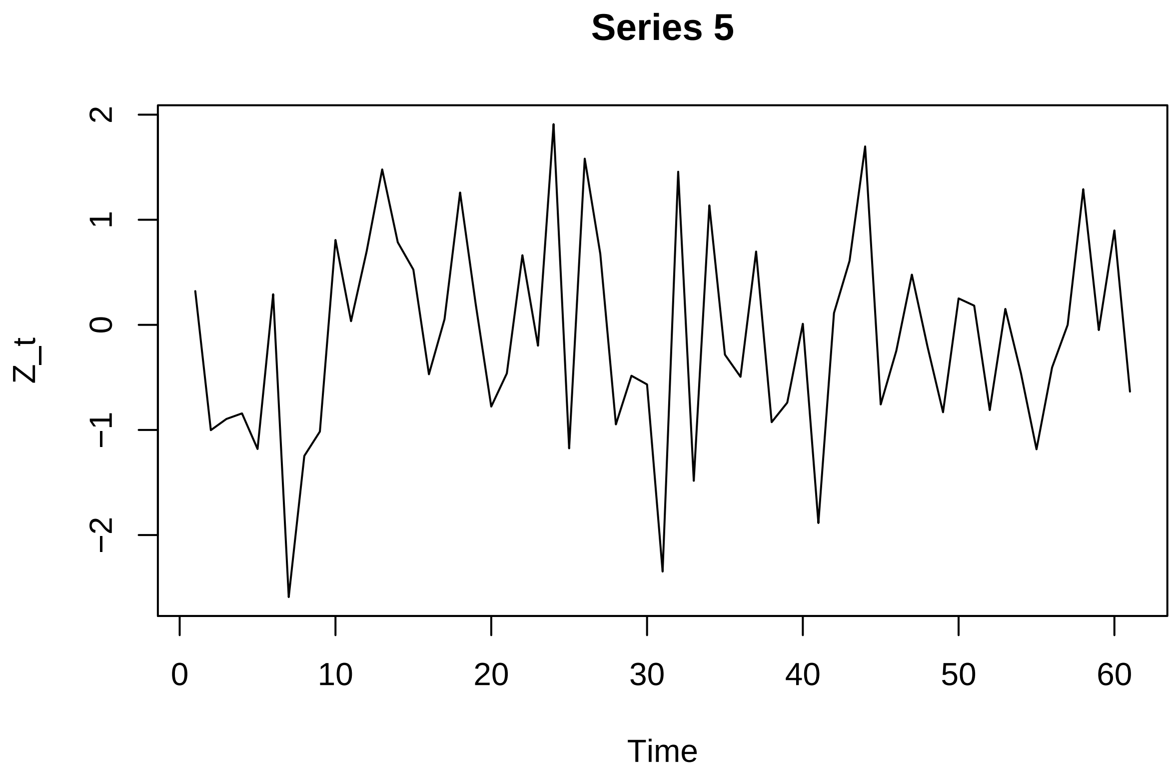
```
##
## Call:
## arma(x = X[[4]], order = c(0, 2))
##
## Model:
## ARMA(0,2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.20748 -0.68404  0.06891  0.64994  2.84235
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ma1         0.09013     0.05112    1.763   0.0779 .
## ma2        -0.61589     0.05318  -11.581   <2e-16 ***
## intercept   0.01590     0.02884    0.551   0.5813
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 0.9865,  Conditional Sum-of-Squares = 263.41,  AIC = 768.57
```

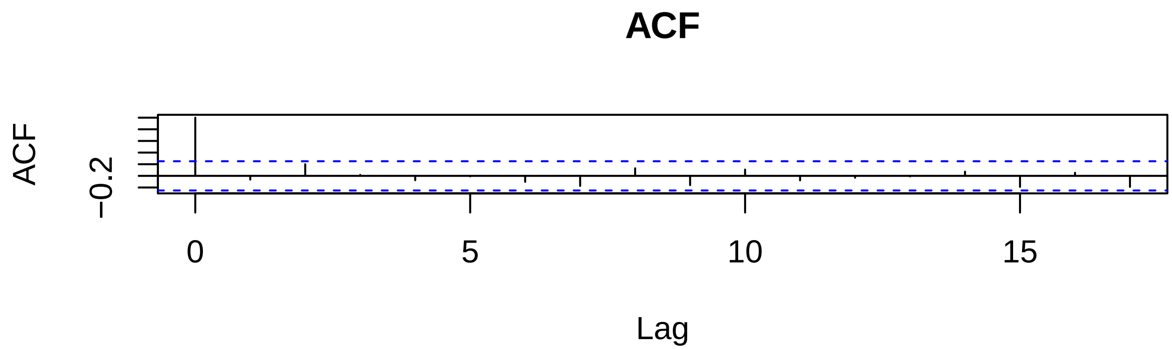


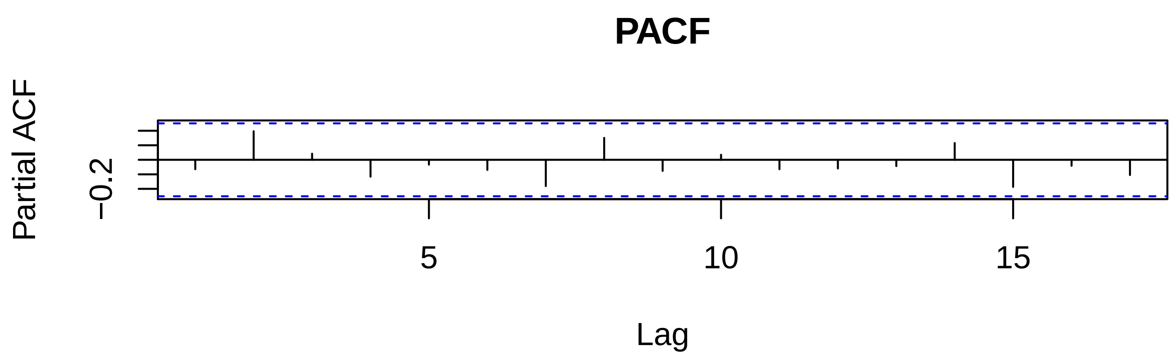


O modelo se encaixou bem aos dados, incluindo apresentando uma distribuição uniforme dos ruídos.

Série 5

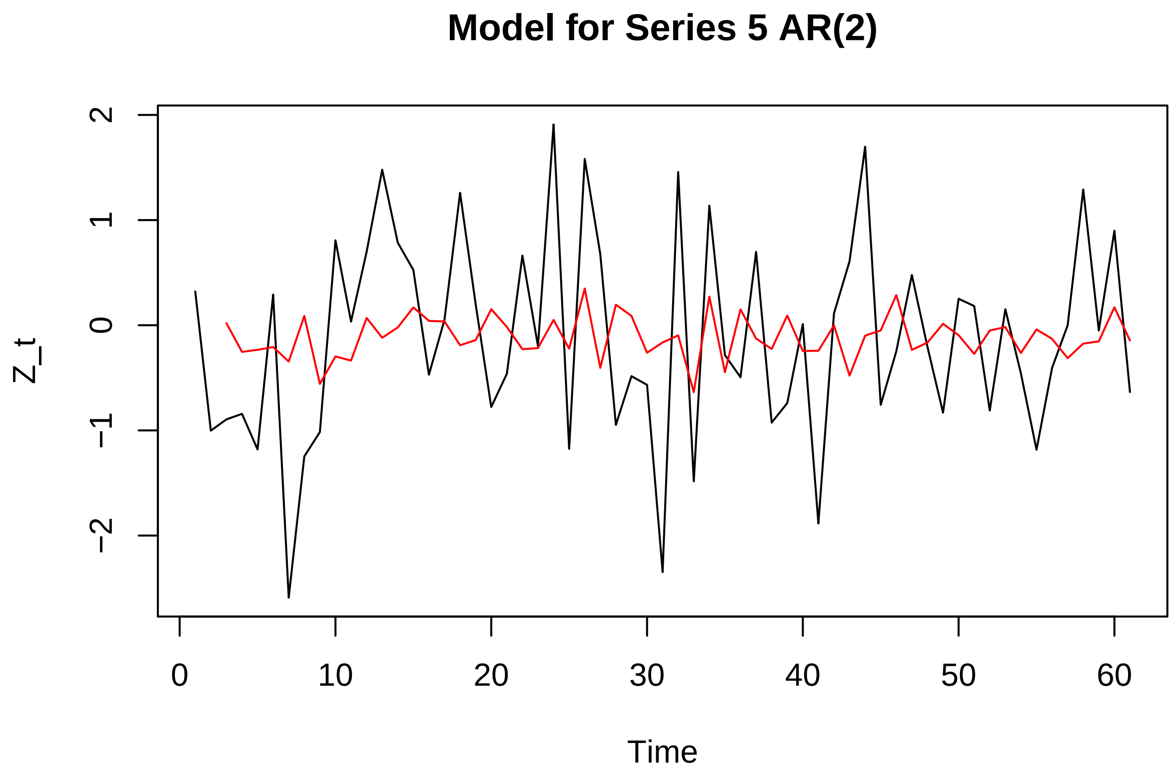






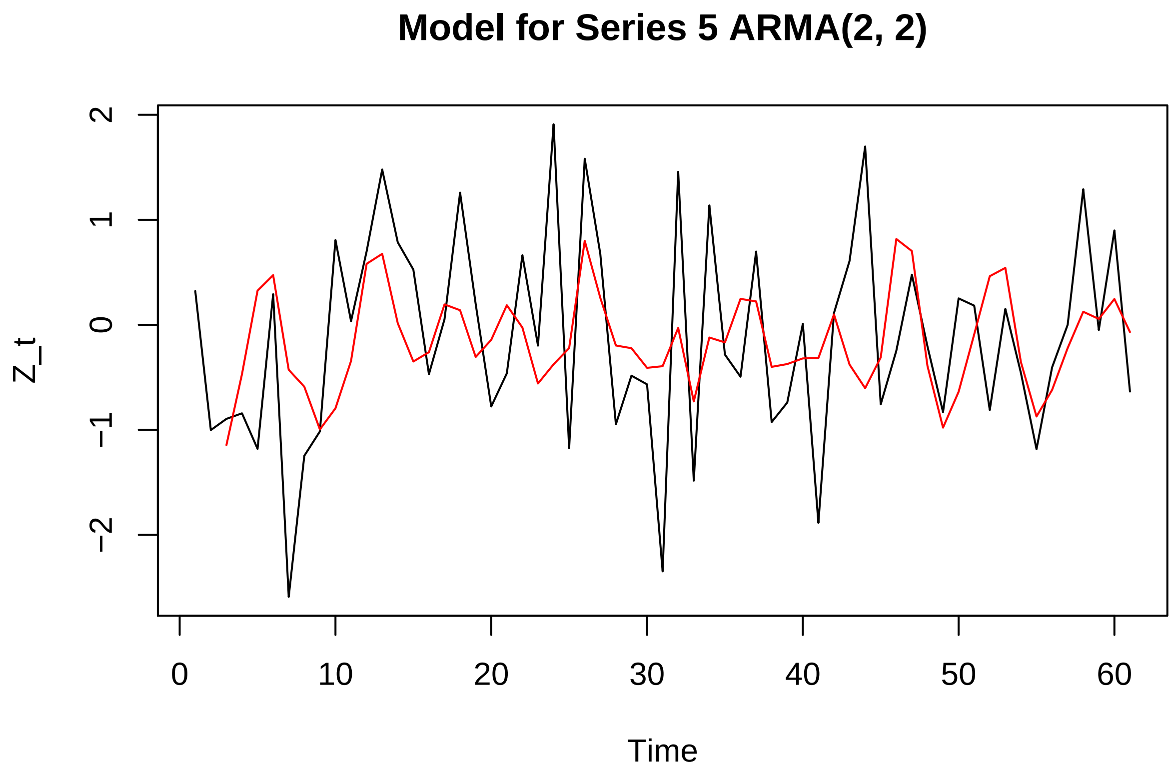
Vemos que tanto a ACF quanto a PACF são extremamente baixas para valores diferentes de 0, no entanto, nessa série possuímos bem menos amostras que as demais, possuindo apenas 61 amostras. Por esse motivo, iremos considerar que a importância do segundo lag na PACF e avaliar dois modelos distintos, AR(2) e ARMA(2, 2). Considerando primeiro o modelo AR(2).

```
##
## Call:
## arma(x = X[[5]], order = c(2, 0))
##
## Model:
## ARMA(2,0)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.24498 -0.70396  0.01893  0.71961  1.85873
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1        -0.04726     0.12481   -0.379    0.705
## ar2         0.20225     0.12576    1.608    0.108
## intercept  -0.09259     0.12355   -0.749    0.454
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 0.9154,  Conditional Sum-of-Squares = 53.09,  AIC = 173.72
```

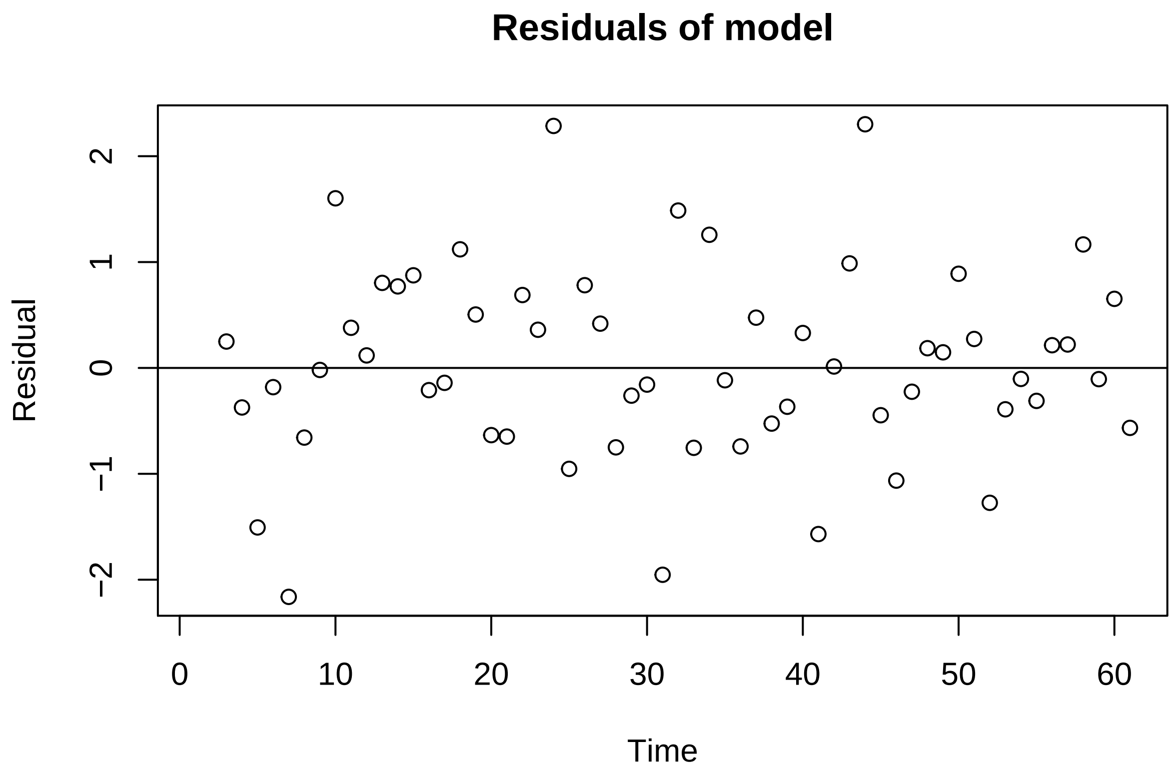


E agora o modelo ARMA(2, 2).

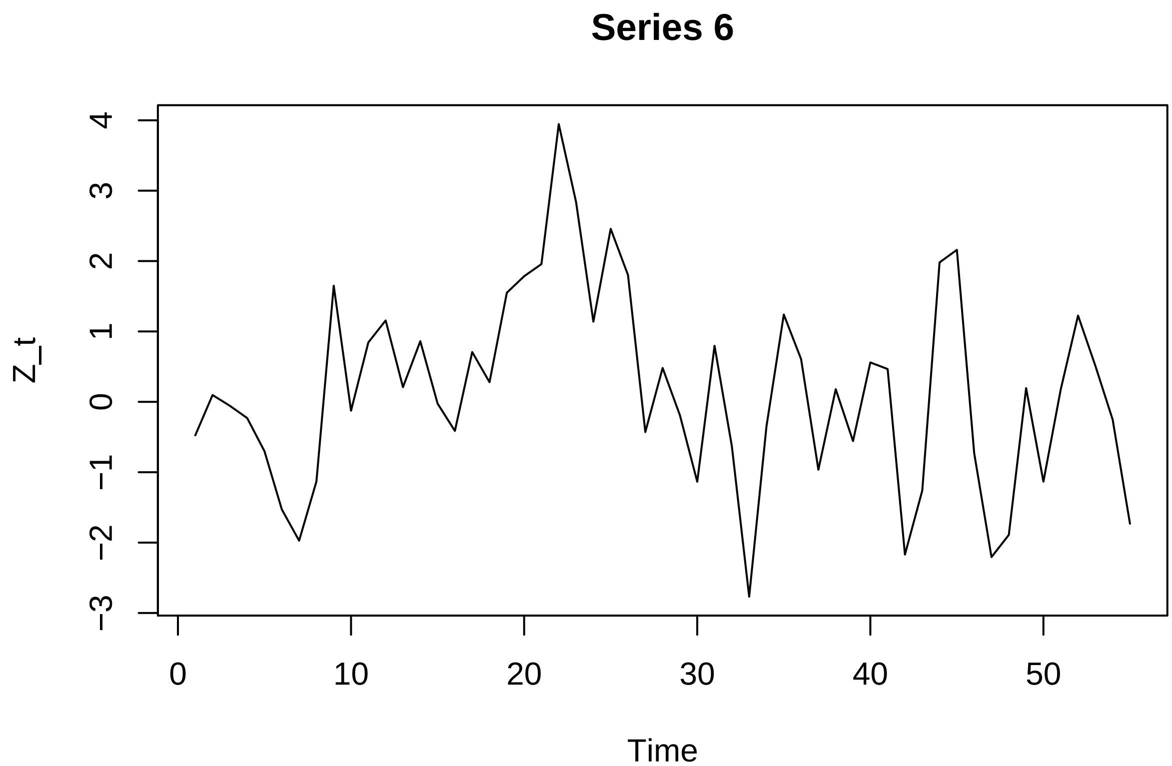
```
##
## Call:
## arma(x = X[[5]], order = c(2, 2))
##
## Model:
## ARMA(2,2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.16208 -0.48610 -0.01902  0.57863  2.30147
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1         0.81736     0.17739    4.608 4.07e-06 ***
## ar2        -0.62001     0.10722   -5.783 7.35e-09 ***
## ma1        -0.92912     0.09675   -9.603  < 2e-16 ***
## ma2         0.95619     0.10319    9.266  < 2e-16 ***
## intercept  -0.12685     0.11679   -1.086    0.277
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 0.8179,  Conditional Sum-of-Squares = 47.54,  AIC = 170.85
```

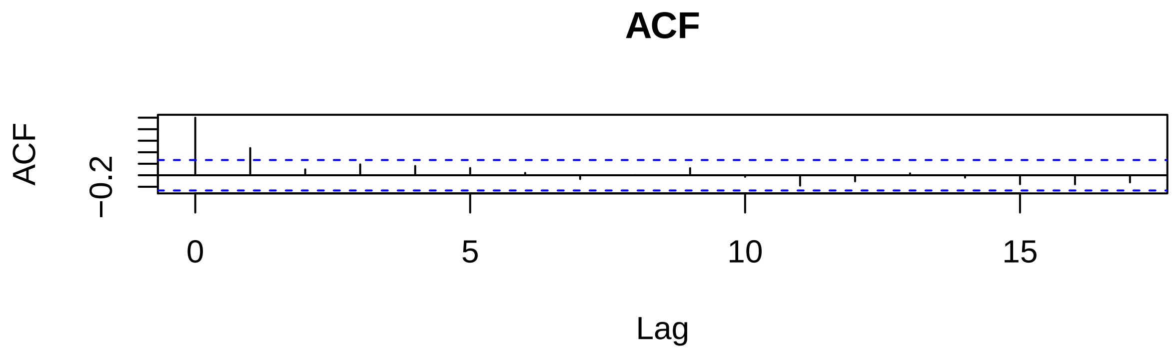


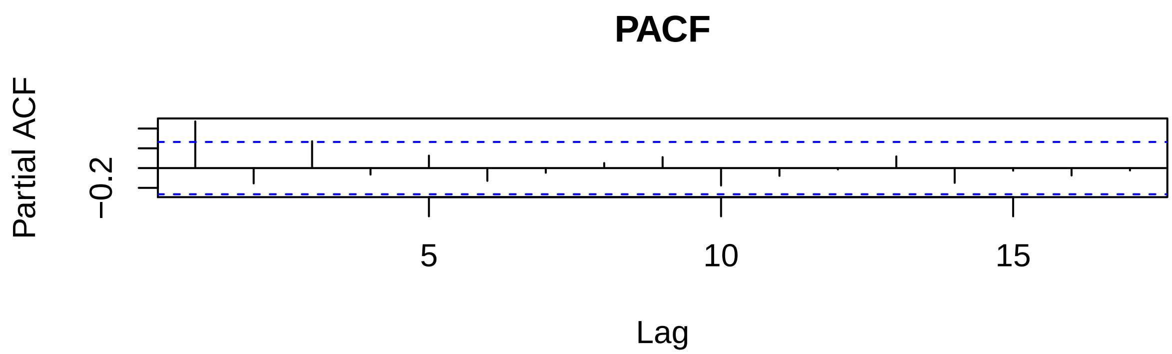
Vemos que o modelo ARMA(2, 2) apresentou um AIC menor, de 170, em comparação com o AR(2), além disso, ele também encaixou melhor na curva real dos dados. Vamos visualizar os resíduos:


Residuals of model
Residual
Time
2
1
0
−1
−2
0
10
20
30
40
50
60

Série 6

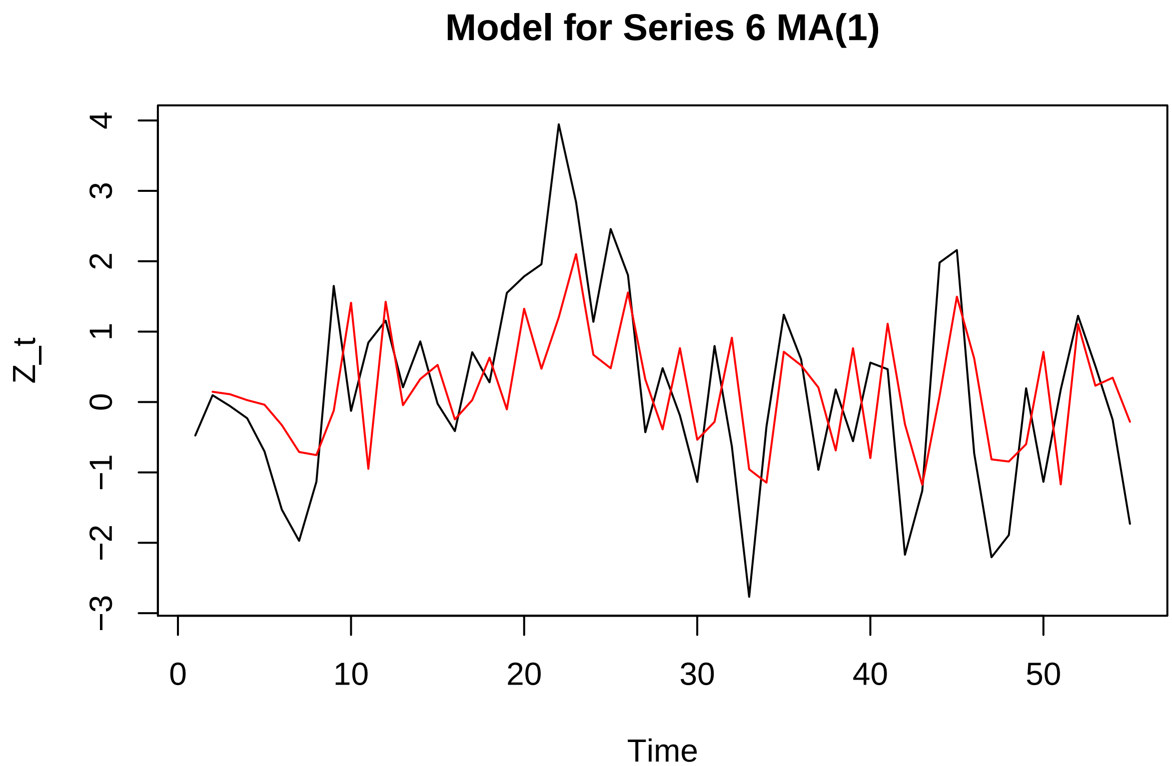


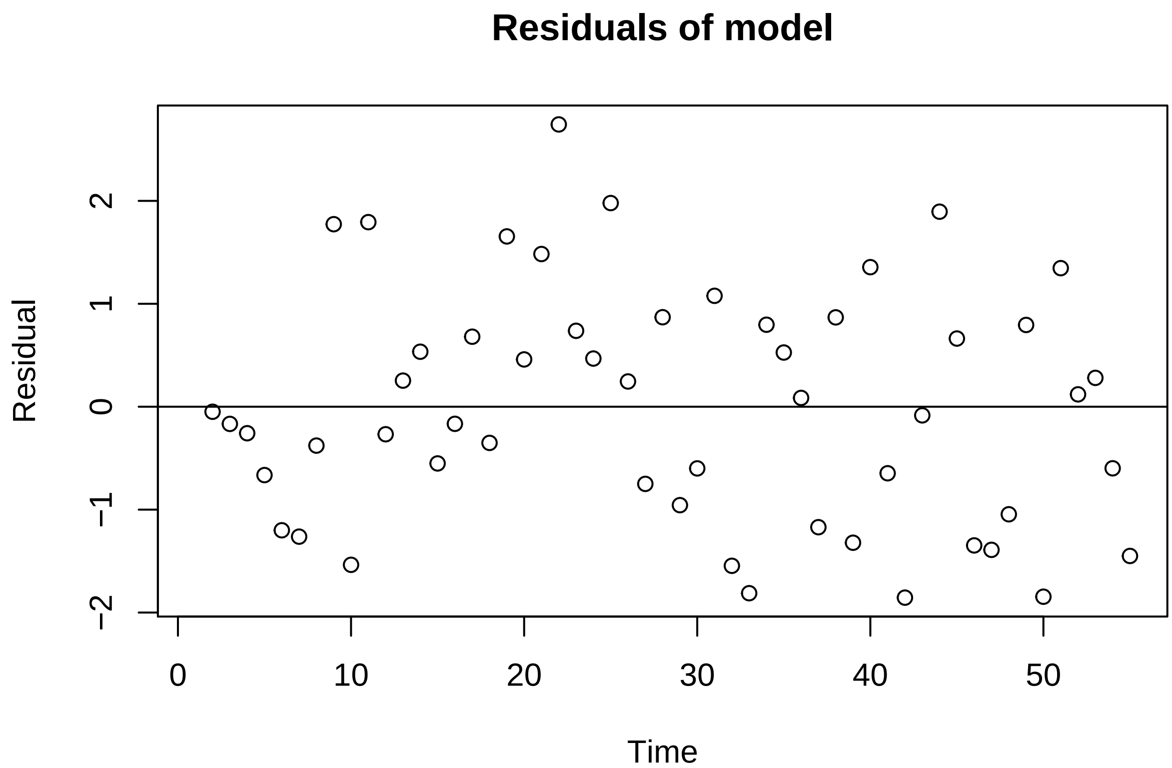


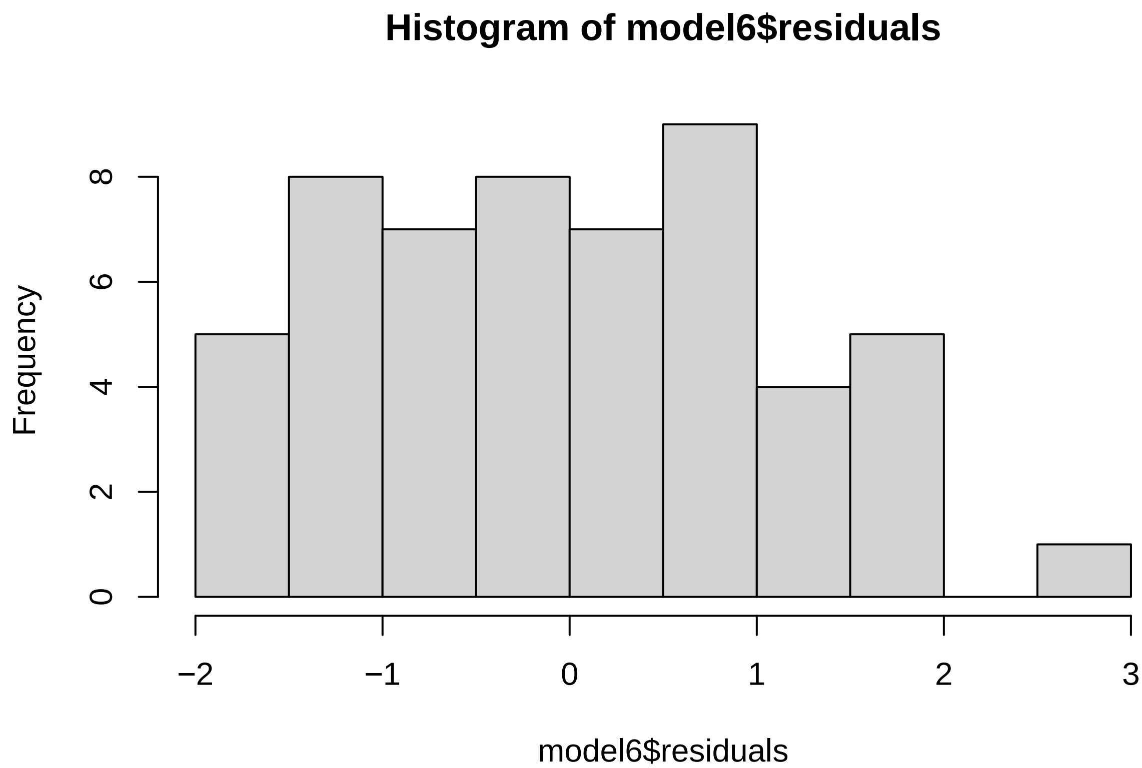


Aqui temos que o ACF diminui bastante para lag acima de 1 enquanto que o PACF se mantém consistentemente baixo para lag maiot que 0, o que indica que o modelo MA(1) pode ser apropriada para essa série.

```
##
## Call:
## arma(x = X[[6]], order = c(0, 1))
##
## Model:
## ARMA(0,1)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.85487 -0.90462 -0.06636  0.78021  2.74265
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ma1          0.7129      0.0991    7.194 6.31e-13 ***
## intercept    0.1458      0.2557    0.570    0.569
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 1.29,  Conditional Sum-of-Squares = 68.38,  AIC = 174.1
```

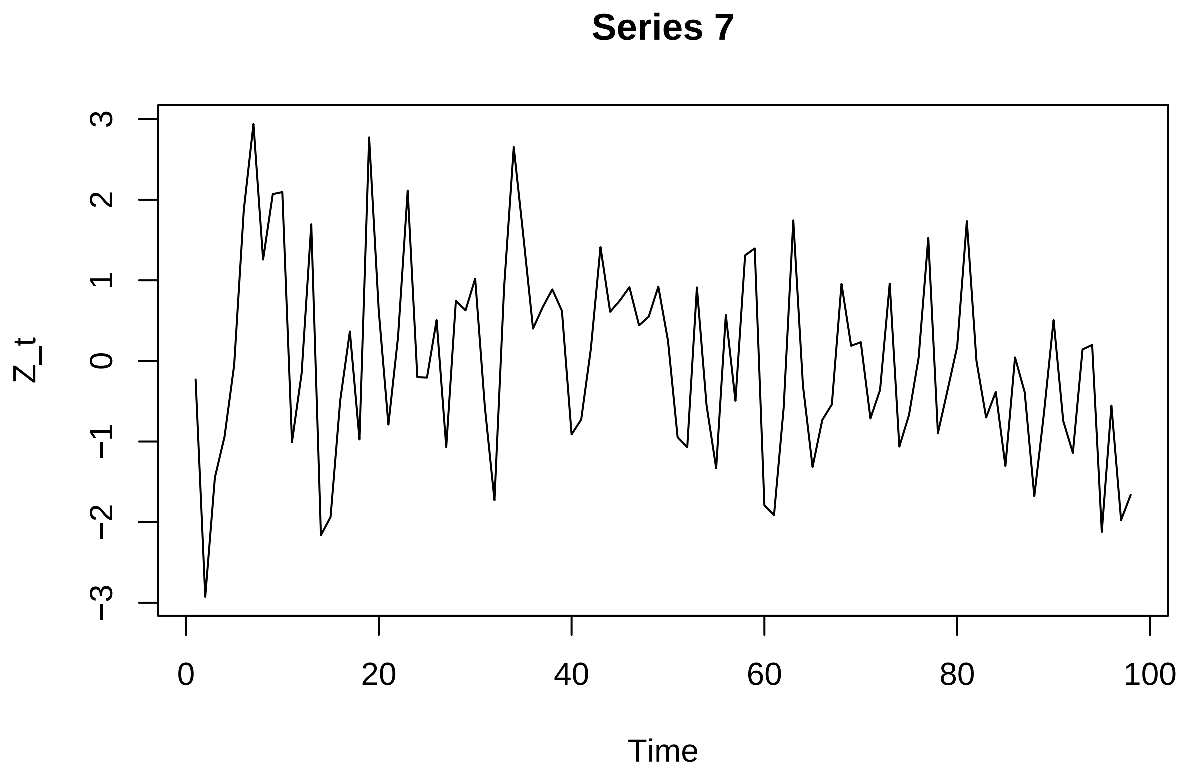

Model for Series 6 MA(1)
Z_t
Time
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
0
10
20
30
40
50

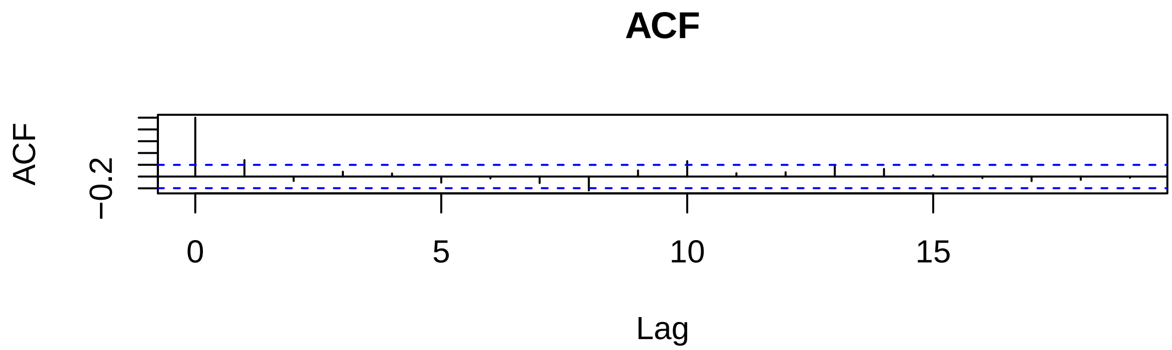

Residuals of model
Residual
Time
2
1
0
−1
−2
0
10
20
30
40
50

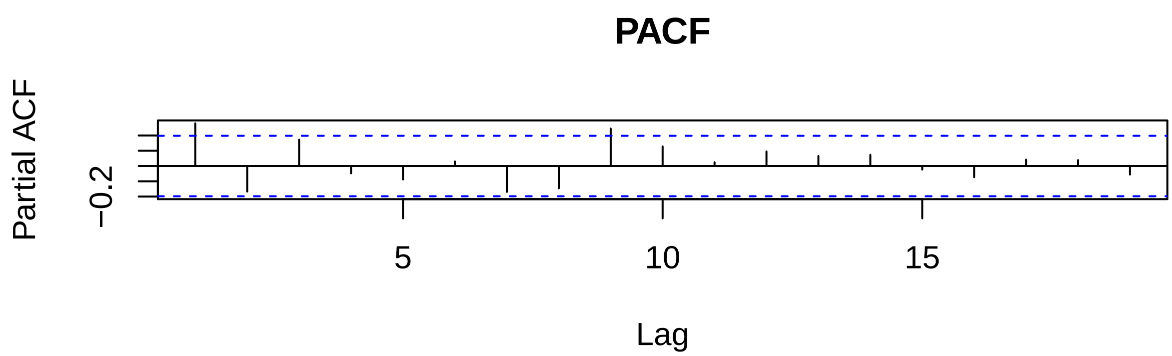


O modelo não conseguiu capturar bem os picos da série real, mas se encaixou razoavelmente bem.

Série 7



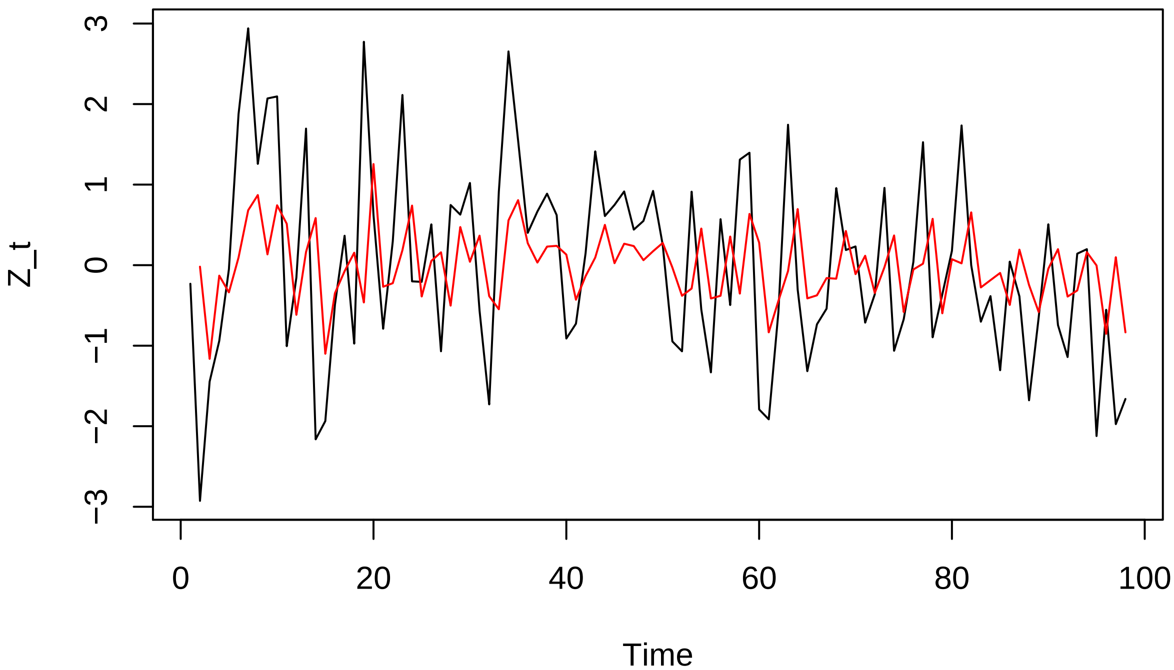


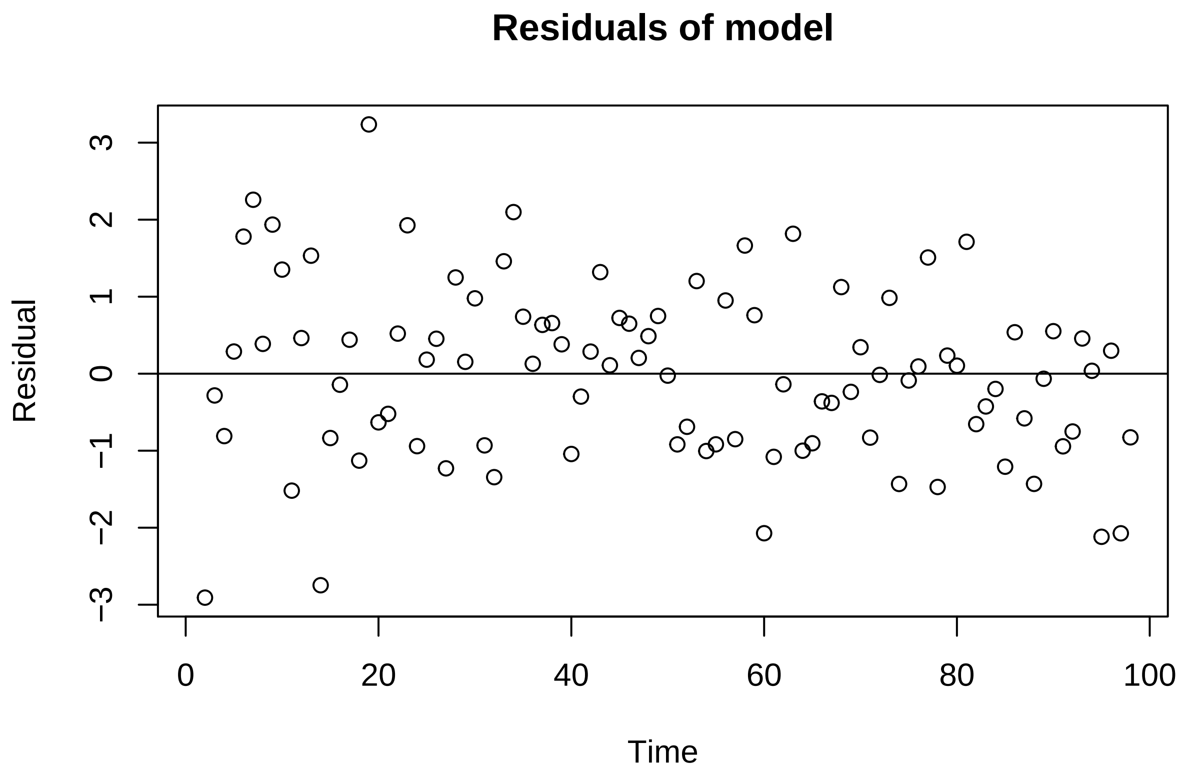


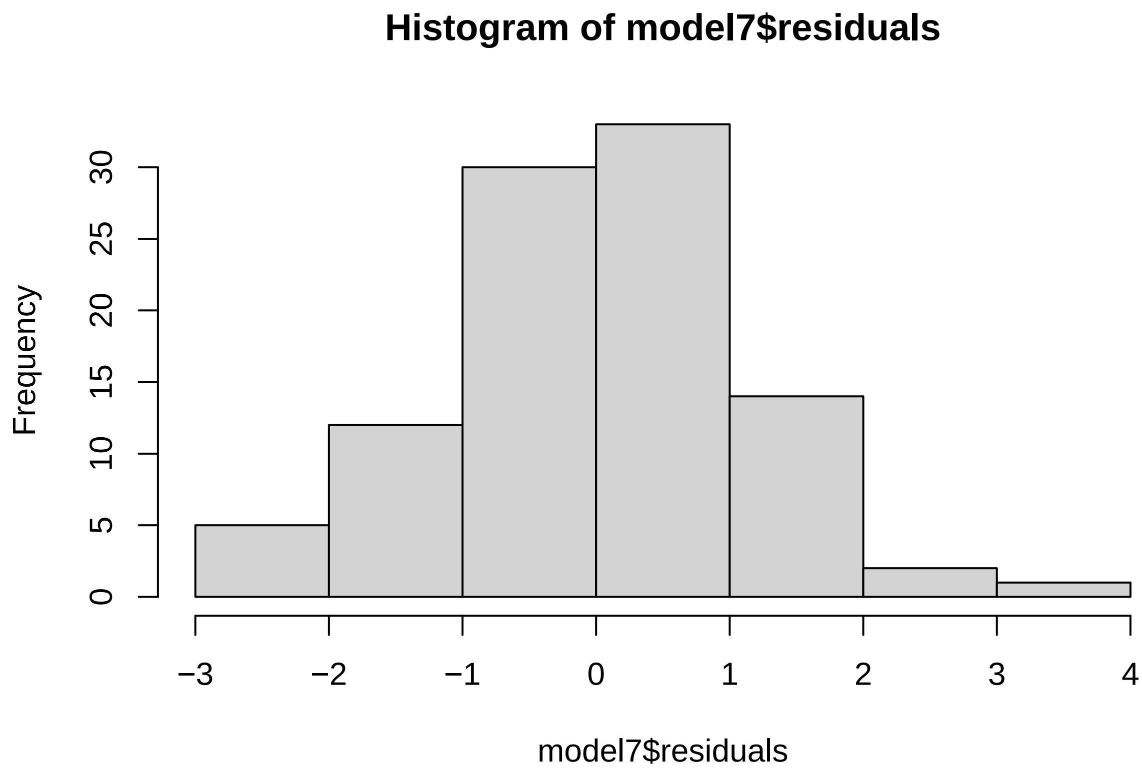
O ACF decai rapidamente para lag maior do que 1, enquanto que o PACF decresce bem lentamente, o que indica que o modelo MA(1) é uma boa escolha aqui.

```
##
## Call:
## arma(x = X[[7]], order = c(0, 1))
##
## Model:
## ARMA(0,1)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.90811 -0.83574  0.09345  0.65703  3.23671
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ma1         0.39365     0.10095    3.900 9.64e-05 ***
## intercept  -0.01875     0.15811   -0.119    0.906
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 1.282,  Conditional Sum-of-Squares = 123.1,  AIC = 306.47
```

Model for Series 7 MA(1)

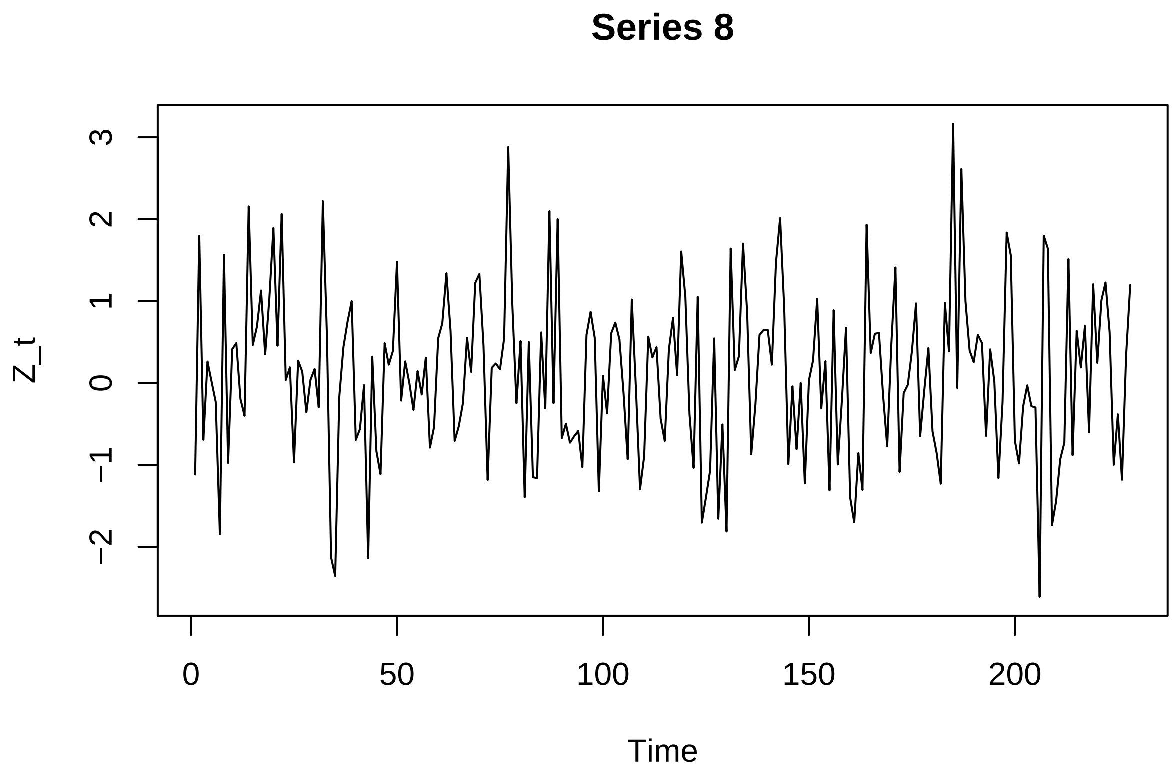


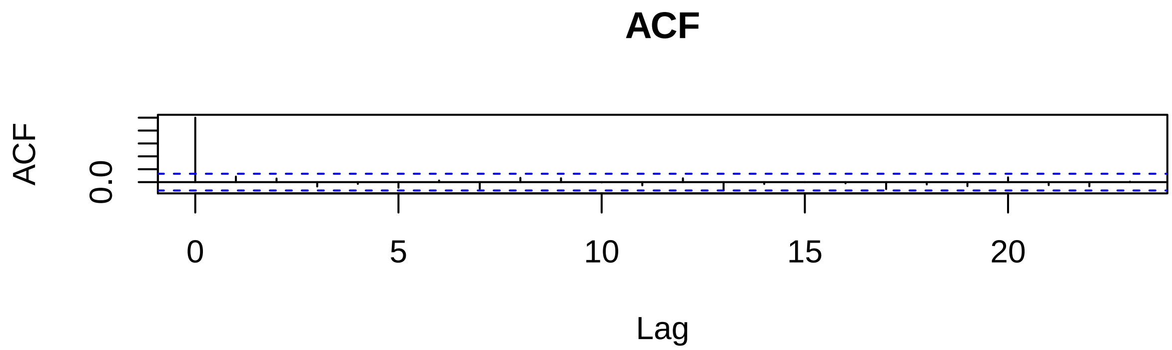

Residuals of model
Residual
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
20
40
60
80
100
Time

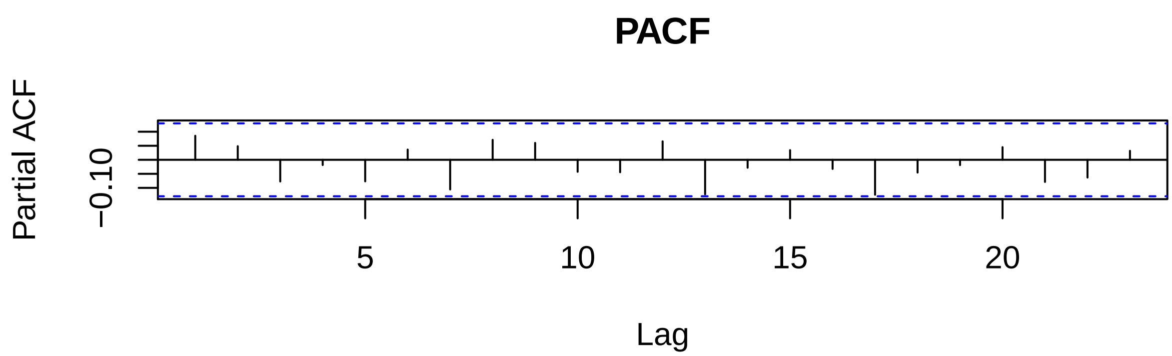


O modelo se enccaixou razoavelmente aos dados, mas não capturou bem os picos apresentados.

Série 8



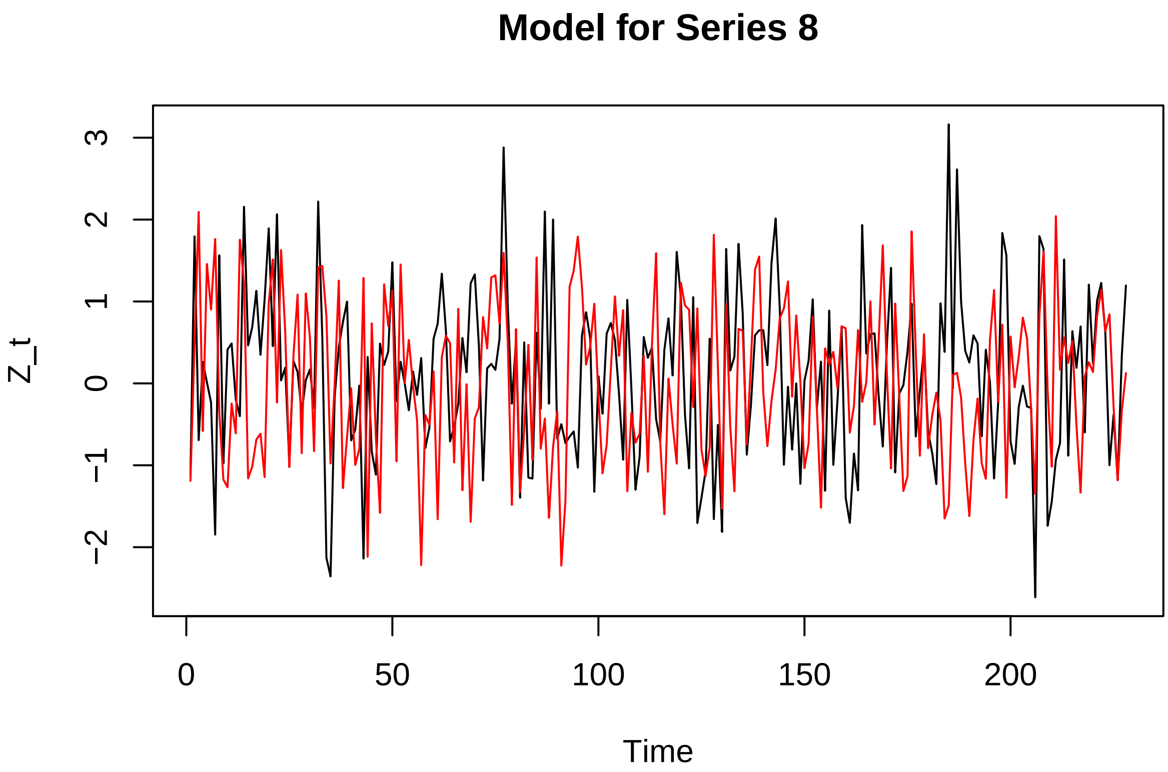




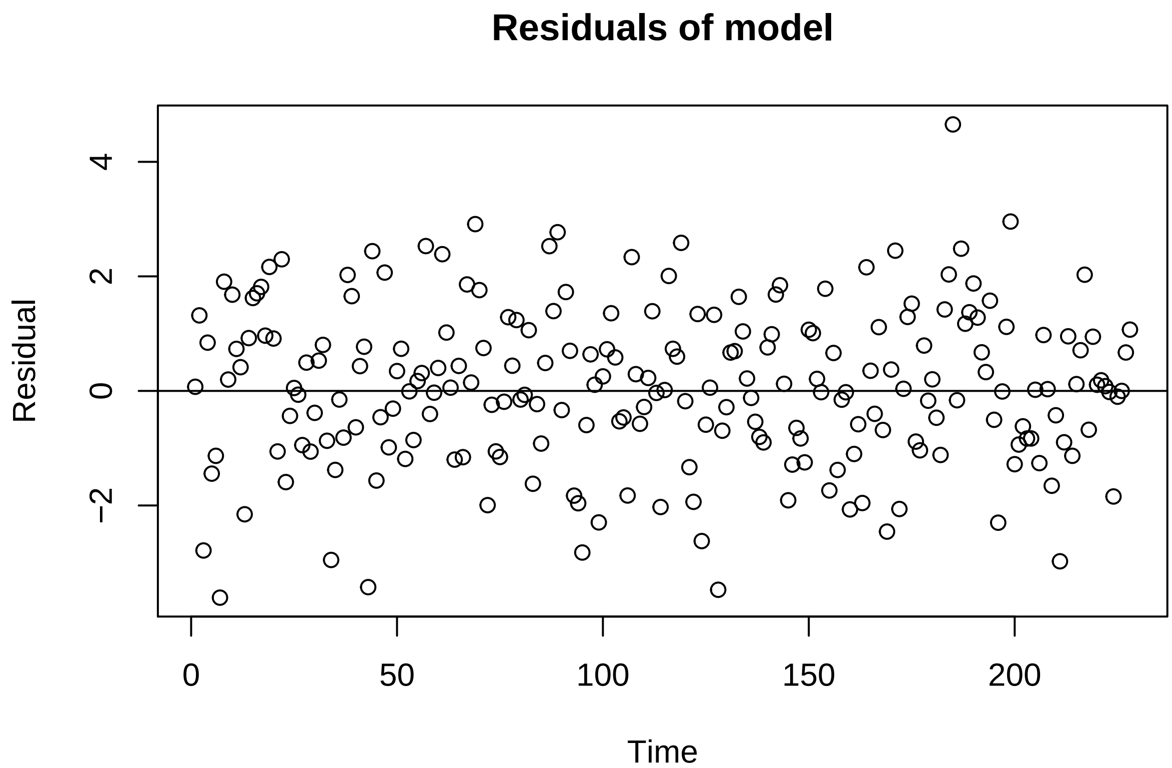
Tanto ACF quanto PACF são bem pequenas para lag maiores que zero, indicando que é um ruído branco.

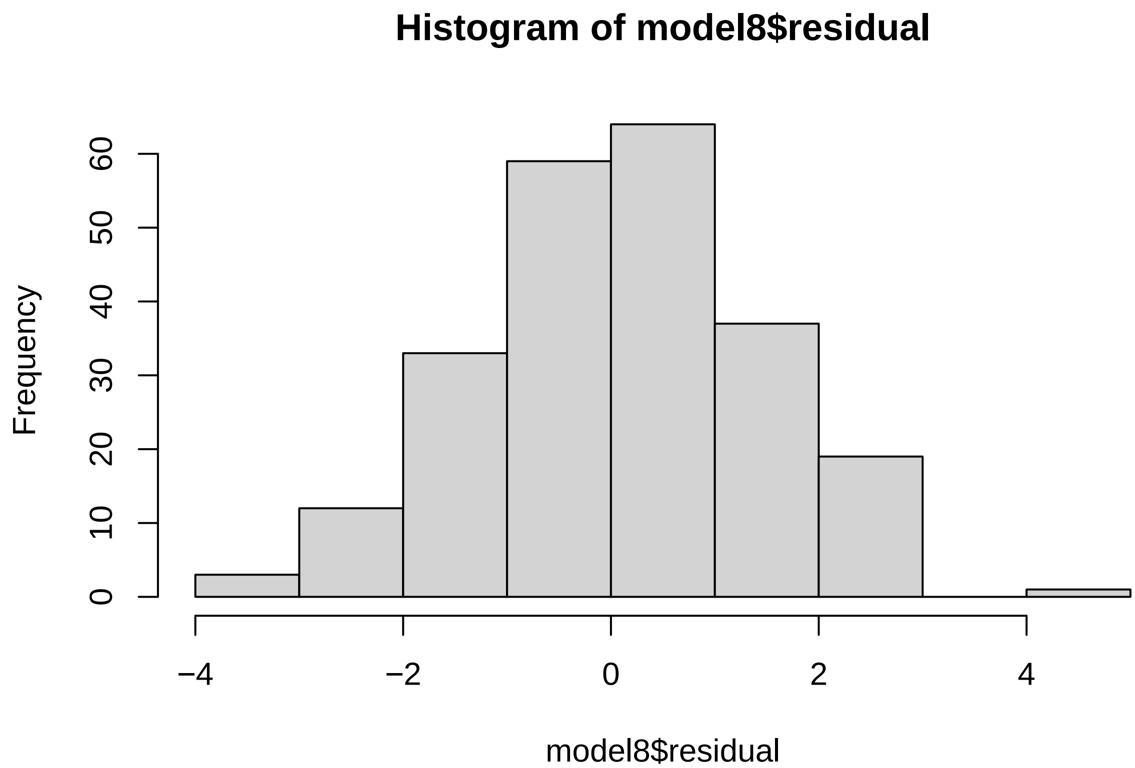
```
##         mean variance
## 1 0.09216291 0.996732
```

Temos que $E(a_t) = 0$ e $Var(a_t) = 1$, o que indica que o modelo se comporta como um ruído branco. Gerarmos 228 amostras de a_t e visualizarmos tanto o modelo e predição, quanto o residual:



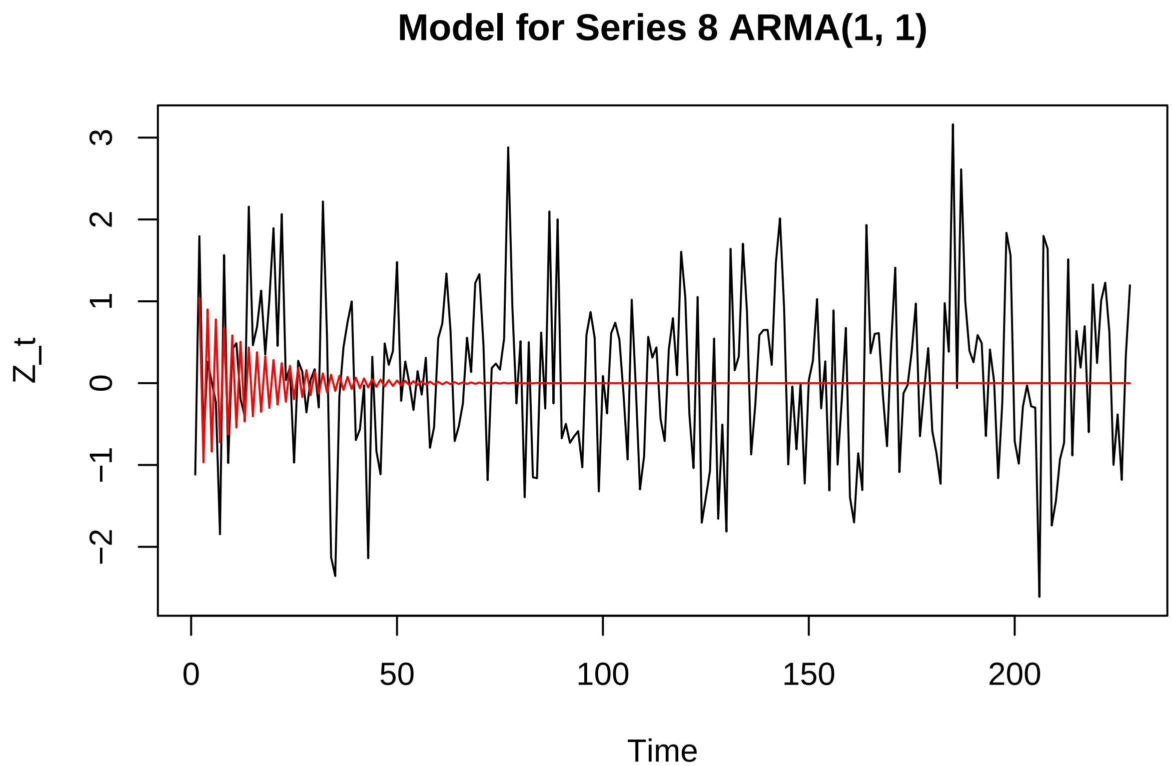

```
## Warning in model8$residual <- X[[8]] - model8: Realizando coerção de LHD para
## uma lista
```


Residuals of model
Residual
4
2
0
−2
0
50
100
150
200
Time



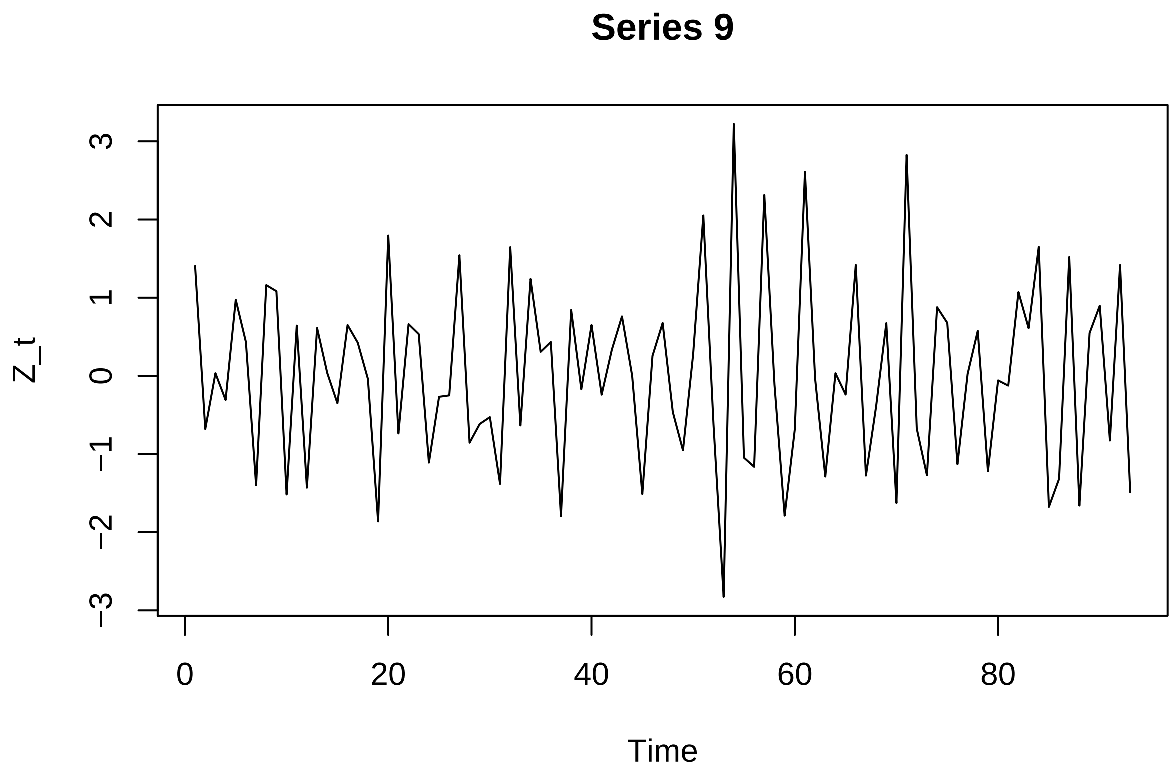
Mas da mesma forma da série 3, podemos estar tratando com um modelo ARMA(p ,p), que dessa vez novamente iremos considerar.

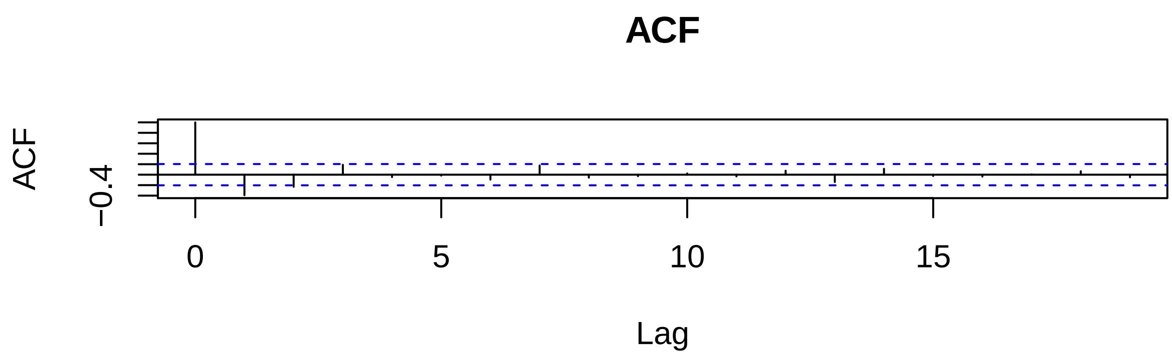
```
##
## Call:
## arma(x = X[[8]], order = c(1, 1), include.intercept = FALSE)
##
## Model:
## ARMA(1,1)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.6110 -0.6468  0.1682  0.6612  3.1628
##
## Coefficient(s):
##      Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1  -0.93015     0.03316   -28.05   <2e-16 ***
## ma1   0.92999     0.04085    22.77   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 0.9688,  Conditional Sum-of-Squares = 221.01,  AIC = 643.82
```

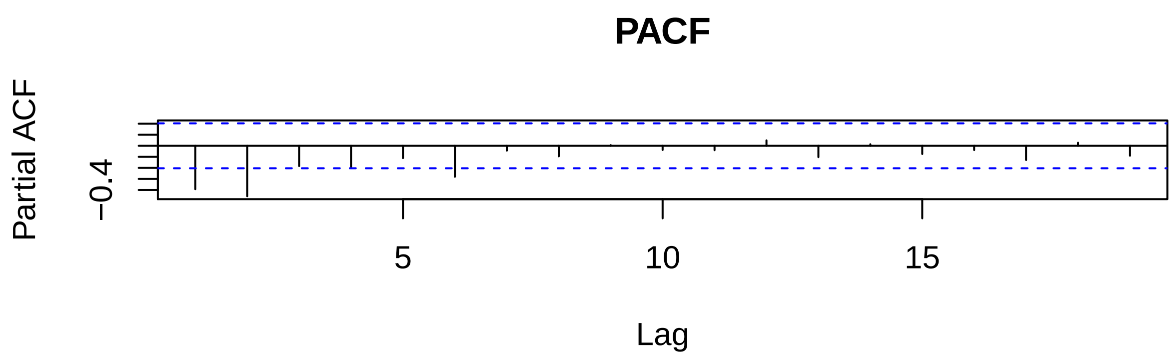


Vemos que o modelo não consegue se encaixar com os dados, produzindo uma previsão incondizente.

Série 9

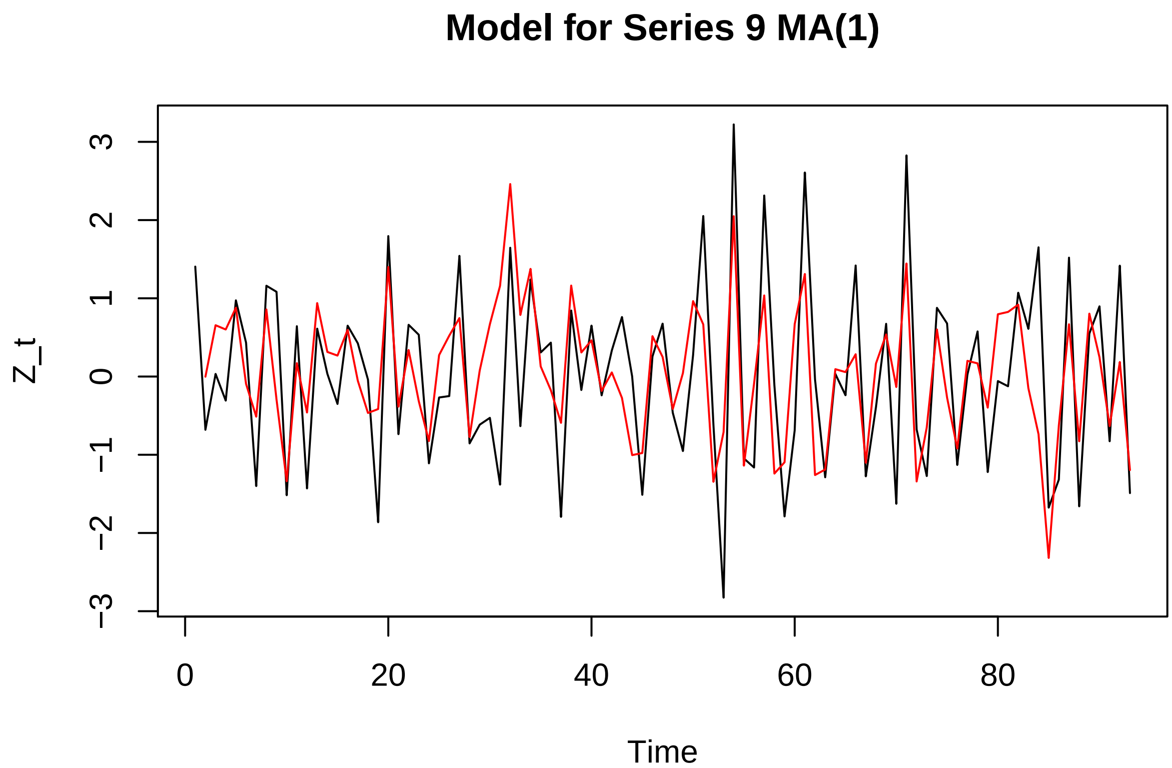




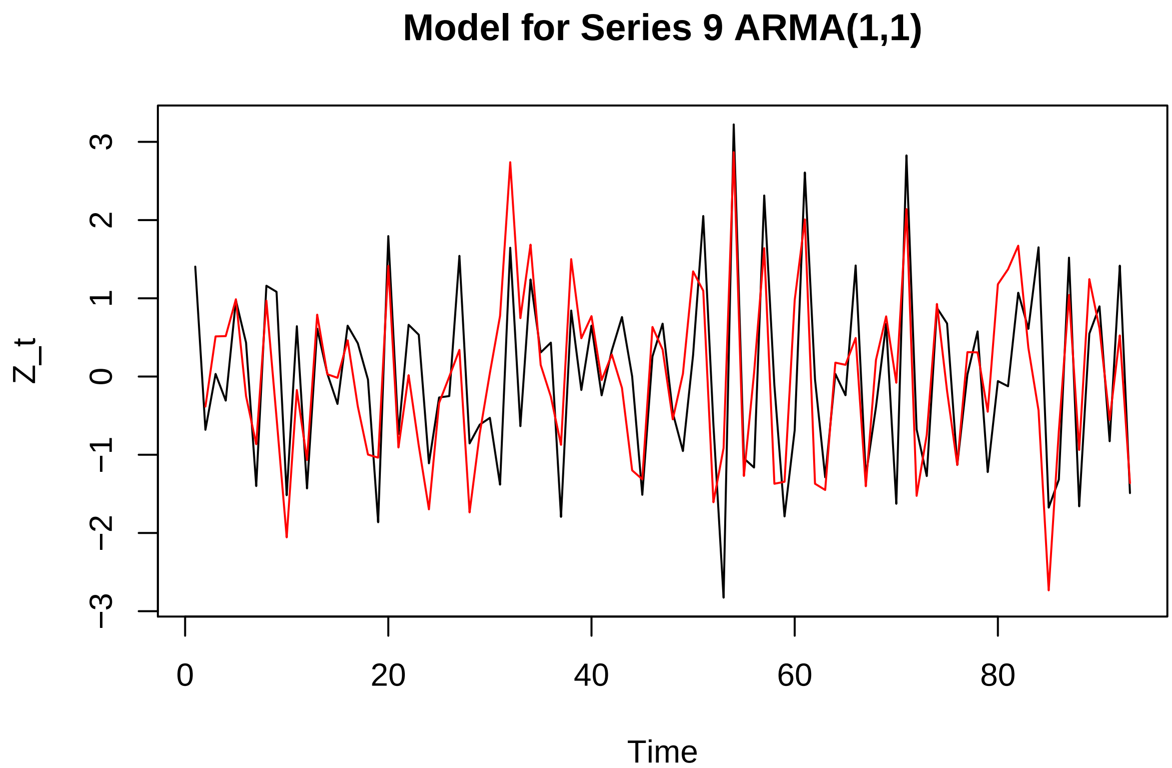


O ACF decai rapidamente para lag maior do que 1, equanto que o PACF decai mais lentamente para lag maior do que 1. Assim, testaremos os modelos MA(1) e ARMA(1,1).

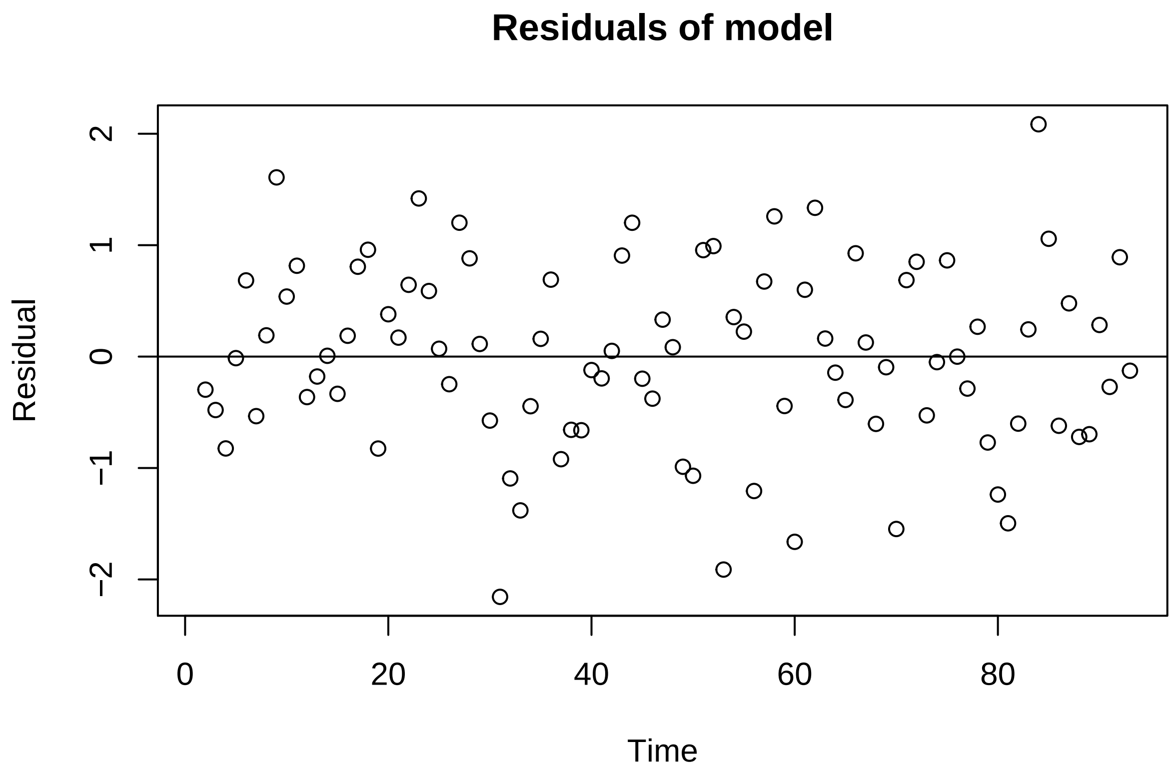
```
##
## Call:
## arma(x = X[[9]], order = c(0, 1))
##
## Model:
## ARMA(0,1)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.5405 -0.6815 -0.1173  0.5474  2.3902
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ma1       -0.969369    0.038766  -25.006   <2e-16 ***
## intercept -0.002035    0.004299   -0.473    0.636
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 0.7455,  Conditional Sum-of-Squares = 68.05,  AIC = 240.61
```

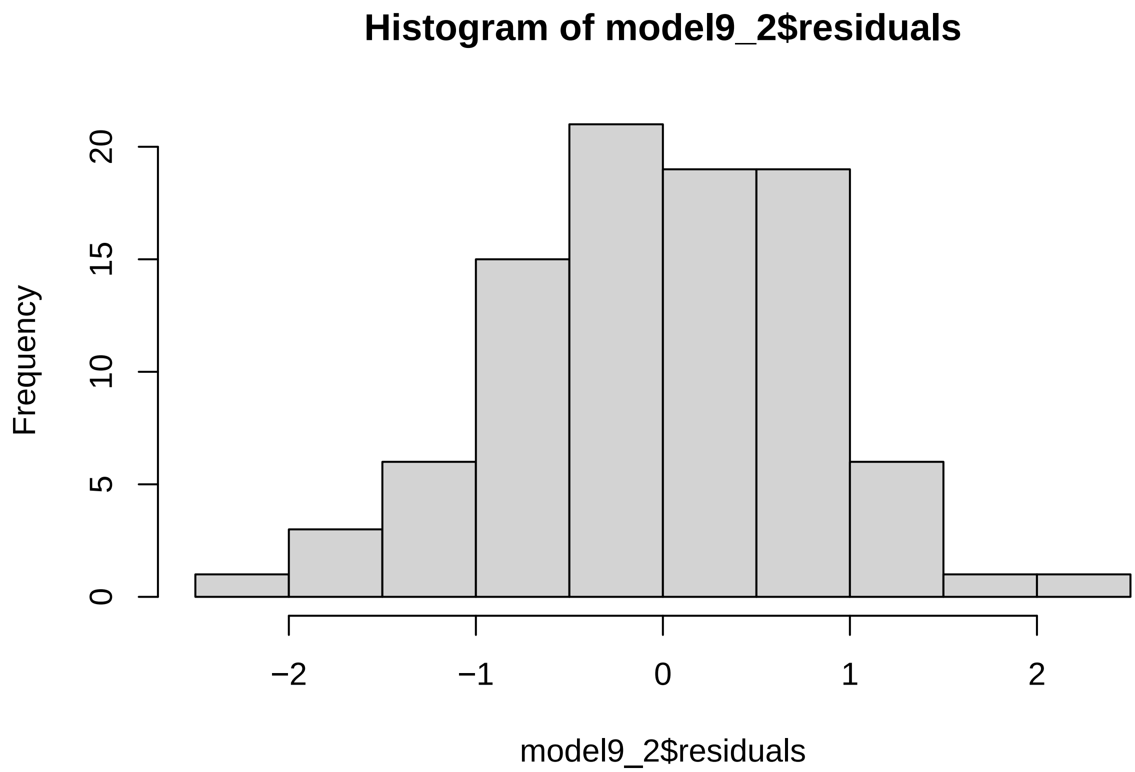



```
## Warning in arma(X[[9]], order = c(1, 1)): Hessian negative-semidefinite

## Warning in sqrt(diag(object$vcov)): NaNs produzidos

## Warning in sqrt(diag(object$vcov)): NaNs produzidos

##
## Call:
## arma(x = X[[9]], order = c(1, 1))
##
## Model:
## ARMA(1,1)
##
## Residuals:
##       Min        1Q    Median        3Q       Max
## -2.156261 -0.544383  0.003433  0.651768  2.085140
##
## Coefficient(s):
##            Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
## ar1       -0.274298          NA       NA       NA
## ma1       -1.094195          NA       NA       NA
## intercept  0.001394          NA       NA       NA
##
## Fit:
## sigma^2 estimated as 0.6787,  Conditional Sum-of-Squares = 61.76,  AIC = 233.87
```



Tivemos que o modelo ARMA(1,1) apresentou AIC menor que o modelo MA(1), além de aparentar visualmente se encaixar um pouco melhor nos dados.


Residuals of model
Residual
2
1
0
−1
−2
0
20
40
60
80
Time



O modelo se encaixou bem aos dados, conseguindo capturar razoavelmente os picos.