A2 - Q1

domingo, 29 de novembro de 2020 14:41

Questão 1

$$y_t = \gamma X_t + U_t \qquad \mu_t = \phi \mu_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} \qquad a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

1- Temos que:

$y_{t-1} = \gamma X_{t-1} + U_{t-1} \Leftrightarrow \mu_{t-1} = y_{t-1} - \gamma X_{t-1}$

Subsituindo μ_t e μ_{t-1}:

$y_t = \gamma X_t + \phi \mu_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} = \gamma X_t - \phi\gamma X_{t-1} + \phi y_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (y_t - \gamma X_t) - \phi B (y_t - \gamma X_t) = (a_t) - \theta B (a_t)$

$\phi(B) = 1 - \phi B \qquad \theta(B) = 1 - \theta B$

$\phi(B)(y_t - \gamma X_t) = \theta(B) a_t$

2- Temos que:

$F_t = (x_0, \ldots, x_t, y_0, \ldots, y_{t-1}, a_0 = 0)$

$E(y_t | F_t) = \gamma X_t - \phi\gamma X_{t-1} + \phi y_{t-1} + \cancel{E}(a_t)^{\to 0} - \theta a_{t-1}$

$Var(y_t | F_t) = Var(a_t) = \sigma^2$

$a_{t-1} = y_{t-1} - \gamma X_{t-1} - \phi(y_{t-2} - \gamma X_{t-2}) + \theta a_{t-2}$

Logo, a distribuição conjunta de $y_1, \ldots, y_T$ com y_t gaussiano:

$P(y_1, \ldots, y_T | y_0, a_0 = 0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{T/2}} \exp\left[\left(\frac{-1}{2\sigma} \sum_{t=1}^{T} y_t - E(y_t | F_t)\right)\right]$

Seja $\eta = (\phi, \theta, \sigma)$, a verossimilhança condicionada a $x_0, \ldots, x_t, y_0, a_0 = 0$:

$L(\eta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{T}{2}}} \exp\left[\left(\frac{-1}{2\sigma} \sum_{t=1}^{T} y_t - \gamma X_t - \phi\gamma X_{t-1} + \phi y_{t-1} - \theta a_{t-1}\right)\right]$

3- $E(X_t a_{t-j}) = 0, \quad \forall t, j > 0$

O estimador de OLS será o seguinte:

$\gamma_{ols} = \arg\min_{\gamma} \sum_{t=1}^{n} (y_t - \gamma X_t)^2 \Rightarrow \gamma_{ols} = \left(\sum_{t=1}^{n} X_t^2\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_t y_t$

Calculando a média do estimador:

$E(\gamma_{ols} | \{X_i = x_i\}_{i=1}^{n}) = E\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t y_t}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} \middle| \{X_i = x_i\}_{i=1}^{n}\right] = E\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} X_t(\gamma X_t + \mu_t)}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} \middle| \{X_i = x_i\}_{i=1}^{n}\right]$

$= E\left[\frac{\gamma \sum_{t=1}^{n} X_t^2 + \sum_{t=1}^{n} X_t U_t}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} \middle| \{X_i = x_i\}_{i=1}^{n}\right] = \gamma + \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t E[U_t | \{X_i = x_i\}_{i=1}^{n}]}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2}$

Vamos calcular a forma de choques aleatórios de U_t:

$\mu_t = \phi \mu_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} = \phi(\phi \mu_{t-2} + a_{t-1} - \theta a_{t-2}) + a_t - \theta a_{t-1}$

$= \phi^2 \mu_{t-2} + a_t + a_{t-1}(\phi - \theta) - \phi\theta a_{t-2} = \phi^2(\phi \mu_{t-3} + a_{t-2} - \theta a_{t-3}) + a_t + a_{t-1}(\phi - \theta) - \phi\theta a_{t-2}$

$= \phi^3 \mu_{t-3} + a_t + a_{t-1}(\phi - \theta) + a_{t-2}(\phi^2 - \phi\theta) - \phi^2 a_{t-3}$

Podemos notar que:

$\mu_t = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} a_{t-j}(\phi^j - \phi^{j-1}\theta) = \Psi(B) a_t \quad$ com $\Psi(B) = 1 + (\phi - \theta)B + (\phi^2 - \phi\theta)B^2 + \ldots$

Logo:

$E[a_{t-j} X_t] = 0$

$E[\gamma_{ols} | \{X_i = x_i\}_{i=1}^{n}] = \gamma + \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t E[\Psi(B) a_t | X_t]}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2} = \gamma$

$$E[\gamma_{ols} \mid \{X_i = x_i\}_{i=1}^n] = \gamma + \frac{\sum_{t=1}^n X_t \, E[\cancel{\psi(B)} a_t \mid X_t]}{\sum_{t=1}^n X_t^2} = \gamma$$

$$E[\gamma_{ols}] = E(E[\gamma_{ols} \mid \{X_i = x_i\}_{i=1}^n]) = E(\gamma) = \gamma$$

Logo, γ_{ols} é não enviesado. Calculando a variância:

$$Var(\gamma_{ols} \mid \{X_i = x_i\}_{i=1}^n) = Var\left(\gamma + \frac{\sum_{t=1}^n X_t u_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \,\middle|\, \{X_i = x_i\}_{i=1}^n\right) =$$

$$= Var\left(\frac{\sum_{t=1}^n X_t \psi(B) a_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \,\middle|\, \{X_i = x_i\}_{i=1}^n\right) = \frac{\psi^2(B)}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)^2} Var\left(\sum_{t=1}^n X_t a_t \,\middle|\, \{X_i = x_i\}_{i=1}^n\right)$$

$$= \frac{\psi^2(B)}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)^{\cancel{2}}} \cancel{\sum_{t=1}^n X_t^2} \, \xrightarrow{\sigma^2}\cancel{Var}\, a_t = \frac{\psi^2(B)\, \sigma^2}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)} = \frac{\sum_{J=1}^{\infty} \phi^J (1 - \theta/\phi)\, \sigma^2}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{1-\phi} \cdot \left(\frac{\phi - \theta}{\phi}\right) \sigma^2}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)} = \frac{(\phi - \theta)\, \sigma^2}{(1-\phi)\, \phi} \, \frac{1}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)}$$

4- $X_t = \beta X_{t-1} + v_t \qquad v_t \sim N(0, \eta^2) \qquad E[v_t a_{t-J}] = 0 \quad \forall J.$

X_t é um AR(1). Podemos escrever $X_t = v_t + \sum_{J=1}^{\infty} \beta^J v_{t-J} = \omega(B) v_t$

$\hookrightarrow \omega(B) = 1 + \beta B + \beta^2 B^2 + \dots$

$\gamma_{ols} = (\sum X_t^2)^{-1} (\sum X_t y_t)$

$$E(\gamma_{ols}) = E(\gamma + (\sum X_t^2)^{-1} (\sum X_t U_t)) = \gamma + E[(\sum (\omega(B) v_t)^2)^{-1} (\sum \omega(B) v_t \, \psi(B) a_t)]$$

$$= \gamma + E[(\sum \omega(B)^2 v_t^2)^{-1} (\omega(B) \psi(B) \sum v_t a_t)] = \gamma + E[(\omega(B)^2 \sum v_t^2)^{-1} (\omega(B) \psi(B) \sum v_t a_t)]$$

$$= \gamma + E\left[\frac{\omega(B) \psi(B) \sum v_t a_t}{\omega(B)^2 \sum v_t^2}\right] = \gamma + \frac{\psi(B)}{\omega(B)} E\left[\frac{\sum_{t=1}^n v_t a_t}{\sum_{t=1}^n v_t^2}\right] = \gamma + \frac{\psi(B)}{\omega(B)} n\, E\left[E\left[\frac{\sum_{t=1}^n v_t a_t}{\sum_{t=1}^n v_t^2} \,\middle|\, \{v_i = v_i\}_{i=1}^n\right]\right] =$$

$$= \gamma + \frac{\psi(B)}{\omega(B)} E\left[\frac{\sum_{t=1}^n v_t E[\cancel{a_t} \mid \{v_i = v_i\}_{i=1}^n]}{\sum_{i=1}^n v_t^2}\right] = \gamma$$

(com $E[a_t \mid \{v_i = v_i\}_{i=1}^n] \to 0$)

O estimador é não enviesado.

5- Definimos a nossa previsão para T+1 como:

$\hat{y}_T(1) = \hat{\gamma} \hat{X}_T(1)$; $\hat{\gamma} = \gamma_{ols}$ $\quad \hat{X}_T(1) = \beta X_T$

Calculando o erro:

$$e_T(1) = (y_{T+1}) - (\hat{y}_T) = (\gamma X_{T+1} + U_{T+1}) - (\hat{\gamma} \hat{X}_T(1)) = \gamma(\beta X_T + v_T) + U_{T+1} - \hat{\gamma} \beta X_T =$$

$$= (\gamma - \hat{\gamma}) \beta X_T + \gamma v_T + U_{T+1}$$

Se formos calcular o valor esperado do erro:

$$E(e_T(1)) = E[(\gamma - \hat{\gamma}) \beta X_T + \gamma v_T + U_{T+1}] = (\gamma - \cancel{E}(\hat{\gamma})) \beta E(X_T) + \gamma \cancel{E}(v_T)^{\to 0} + E(\cancel{U_{T+1}})^{\to 0} =$$

$$= (\gamma - \gamma)\, \beta E(X_T) = 0$$

A2 - Q2

sexta-feira, 4 de dezembro de 2020 10:31

Questão 2

Inicialmente devemos utilizar o método de Box-Jenkins para encontrar um modelo SARIMA para o período pré-intervenção. Com os dados até junho de 2008:

- Verificamos se é necessário uma transformação para estabilizar a variância (log ou Boxcox)
- Definimos o grau de diferenciação necessário, tanto com lag = 1 quanto com lag = 12, verificando com qual nível de diferenciação a série se torna estacionária (ADF test).
- Com a ACF e PACF identificamos os valores MA e AR para a parte não-sazonal e sazonal do modelo.
- Consideramos diferentes modelos e escolhemos aquele que otimiza certa medida, como o AIC (minimizar).

Depois de termos criado o modelo pré-intervenção podemos fazer um forecast para os meses logo após a intervenção para analisarmos como a série se comportaria sem a intervenção.

Para modelar a intervenção, precisamos escolher uma função de transferência que represente a intervenção, alguns do padrões são:

- Acréscimo na média que se mantém após a intervenção.
- Acréscimo na média que ocorre no momento de intervenção mas depois retorna ao nível original.
- Acréscimo na média que cresce gradualmente até atingir determinado nível e se mantém.
- Acréscimo na média que ocorre no momento de intervenção e decresce gradualmente até retornar ao nível original.

Consideramos uma ou mais funções de transferência e devemos estimar os parâmetros da intervenção e do modelo SARIMA utilizando agora todos os dados, pré e pós intervenção. Na linguagem R a função arimax é capaz de estimar os parâmetros do modelo.

Com o modelo de intervenção construído podemos prever a série para além do período observado.