15. Si $U(\underline{r})$ satisface $\nabla^2 U + k^2 U = 0$, demostrar que en coordenadas cartesianas se tiene

$$U(\underline{r}) = Ae^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} + Be^{i\underline{k}\cdot\underline{r}},$$

como solución general.

Suponemos que $U(\underline{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ entonces se cumple que

$$\frac{1}{X}\frac{d^2}{dx^2}X + \frac{1}{Y}\frac{d^2}{dy^2}Y + \frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z = -k^2,$$

los tres términos son independientes de las demás variables, y suman una constante, entonces cada uno es igual a una constante:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2}{dx^2}X = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2}{dy^2}Y = -k_y^2 \quad y \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z = -k_z,$$

en donde ya hemos (anticipadamente) asignado las constantes adecuadas pues la suma es, en efecto, $-k^2$.

Cada una de las anteriores tiene dos soluciones

$$\left.\begin{aligned} X_1(x) &= e^{-ik_x x} \\ Y_1(y) &= e^{-ik_y y} \\ Z_1(z) &= e^{-ik_z z} \end{aligned}\right\} U_1(\underline{r}) = e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\left.\begin{aligned} X_2(x) &= e^{ik_x x} \\ Y_2(y) &= e^{ik_y y} \\ Z_2(z) &= e^{ik_z z} \end{aligned}\right\} U_2(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}},$$

por lo que la solución general es una combinación lineal de las anteriores:

$$U(\underline{r}) = Ae^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} + Be^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}.$$