16. Si U satisface $\nabla^2 U + k^2 U = 0$, demostrar que en coordenadas cilíndricas se tiene

$$U(\underline{r}) = J_m(k_T \rho) e^{im\phi} e^{-i\beta z},$$

con β un número, $k_T = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ y m un número entero.

Suponemos que $U(\underline{r}) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ entonces:

$$0 = \nabla^2 U + k^2 U = \Phi Z \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} P \right) + \frac{1}{\rho^2} P Z \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + P \Phi \frac{d^2}{dz^2} Z$$

$+ k^2 P \Phi Z$, entonces

$$\frac{1}{P} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} P \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z = -k^2,$$

los dos primeros terminos (que dependen de ρ y ϕ) y el tercer término que sólo depende de z son iguales a una constante pues su suma es $-k^2$, una constante, así

$\frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z = -\beta^2 \Rightarrow Z(z) = e^{-i\beta z}$. Sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\frac{\rho^2}{P} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P + \frac{1}{\rho} \frac{1}{d\rho} P \right) + \underbrace{(k^2 - \beta^2)}_{k_T^2} \rho^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = 0,$$

ahora, los dos primeros términos y el tercer término son constantes al ser términos con variables diferentes, así

$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = -m^2 \Rightarrow \Phi(\phi) = e^{im\phi}$, para que lo anterior tenga sentido físico entonces al regresar a un mismo punto angular el valor del campo debe ser el mismo, por lo que $m \in \mathbb{Z}$. Finalmente.