17. La respuesta al impulso está dada por

$$h(x,y;z)=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha z}e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}\,df_x\,df_y=-\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{i}{\alpha}e^{i\alpha z}e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}\,df_x\,df_y,$$

donde la última doble integral es la expansión en ondas planas de una onda esférica (representación de Weyl). Demostrar que esta última integral es, en efecto, una onda esférica:

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{i}{\alpha}e^{i\alpha z}e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}\,df_x\,df_y=\frac{e^{ikr}}{2\pi r}.$$

Vamos a suponer que $\frac{e^{ikr}}{2\pi r}$ tiene una expansión en ondas planas, esto es

$$\frac{e^{ikr}}{2\pi r}=\iint_{\mathbb{R}^2} a(f_x,f_y)\,e^{i\alpha z}e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}\,df_x\,df_y,$$

para $z>0$ (que es la región de interés). Por lo que hace falta encontrar $a(f_x,f_y)$, i.e., basta demostrar que $a(f_x,f_y)=i/\alpha$. También suponemos que la anterior expansión es válida cuando $z\to 0$ (excepto en $r=0$ donde está la singularidad de la onda esférica). Tomando el límite $z\to 0$ en la anterior expresión se tiene:

$$\frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}=\iint_{\mathbb{R}^2} a(f_x,f_y)\,e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}\,df_x\,df_y,$$

la anterior es la TF inversa de $g(x,y)=e^{ik\sqrt{x^2+y^2}}/2\pi\sqrt{x^2+y^2}$, y su TF es

$$a(f_x,f_y)=\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\,e^{-i2\pi(f_x x+f_y y)}\,dx\,dy;$$

cambiando de variable, sean

$$x=R\cos\psi,\quad y=R\,\mathrm{sen}\,\psi,$$
$$2\pi f_x=k\rho\cos\chi,\quad 2\pi f_y=k\rho\,\mathrm{sen}\,\chi \quad \text{con } k=\|\underline{k}\|>0,$$

en cuanto a la integral se tiene que pasamos de coordenadas cartesianas a polares, así

$$a(f_x, f_y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ikR}}{\cancel{R}} e^{-ikR\rho(\cos\psi\cos\chi + \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\chi)} \cancel{R}\, dR\, d\psi,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{ikR} e^{-ikR\rho\cos(\psi-\chi)}\, dR\, d\psi.$$

Por otro lado, sabemos que

$$J_0(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iw\cos(\psi-\chi)}\, d\psi,$$

de modo que

$$a(f_x, f_y) = \int_0^{\infty} e^{ikR} J_0(kR\rho)\, dR,$$

como $k>0$ tenemos que con $kR=s$

$$a(f_x, f_y) = \frac{1}{k}\int_0^{\infty} e^{is} J(\rho s)\, ds$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\infty} \frac{e^{is}}{s} J(\rho s) s\, ds,$$

con la anterior forma se tiene que la integral anterior es la transformada de Hankel de la función $f(s) = e^{is}/s$, la cual es

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{is}}{s} J(\rho s) s\, ds = \frac{i}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

entonces

$$a(f_x, f_y) = \frac{i}{k\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{i\lambda}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{i}{2\pi\sqrt{1/\lambda^2 - (f_x^2 + f_y^2)}} \Rightarrow a(f_x, f_y) = \frac{i}{\alpha}.$$