19. Sea $\underline{U}$ el campo de una onda.

a) Demostrar que

$$U_i(x,y;z) = -\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\mathbb{R}^2} U_i(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{2\pi R}\,dx'dy',$$

para $i \in \{x,y\}$ con $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}$.

b) Demostrar que para un campo en espacio libre se tiene

$$\underline{U}(x,y;z) = \frac{1}{2\pi}\nabla\times\iint_{\mathbb{R}^2}\hat{n}\times\underline{U}(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{R}\,dx'dy',$$

donde $\hat{n}$ es la dirección de propagación de la onda, en este caso $\hat{n}=\hat{z}$

c) Encontrar $\underline{U}$ si $\underline{U}(x,y;0) = A\,\delta(x,y;0)\hat{x}$ con A una constante.

a) Para un campo escalar cualquiera $U(x,y;z)$ tenemos que

$$U(x,y;z) = \iint_{\mathbb{R}^2} a(f_x,f_y)\,e^{i\alpha z}e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}\,df_y\,df_y$$ donde $a(f_x,f_y)$ es

la transformada de Fourier de $U(x,y;z)$ para cualquier rebanada, la cual está dada por

$$a(f_x,f_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\,e^{-i2\pi(f_x x'+f_y y')}\,dx'dy',$$

sustituyendo la anterior en la expresión de U se tiene

$$U(x,y;z) = \iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\underbrace{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i2\pi[f_x(x-x')+f_y(y-y')]}e^{i\alpha z}\,df_x\,df_z}_{G(x-x',y-y',z)}\,dx'dy'$$

$$\Rightarrow U(x,y;z)=\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\, G(x-x',y-y',z)\,dx'dy'.$$

Por otro lado podemos hacer uso de la identidad de Weyl

$$\frac{e^{ikR}}{2\pi R}=\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{i}{\alpha}\,e^{i\alpha z}\,e^{i2\pi[f_x(x-x')+f_y(y-y')]}\,df_x\,df_y$$

derivando respecto a z:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikR}}{2\pi R}\right)=-\iint e^{i\alpha z}\,e^{i2\pi[f_x(x-x')+f_y(y-y')]}\,df_x\,df_y$$

$$=G(x-x',y-y',z)$$

$$\therefore\ U(x,y;z)=-\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\,\frac{e^{ikR}}{2\pi R}\,dx'dy'.$$

Lo cual es válido para cualquier U, en particular U_x y U_y.

b) Como $\hat{n}=\hat{z}$ entonces $\hat{n}\times\underline{U}(x',y';0)$ es constante respecto al rotacional $\nabla\times$, así

$$\frac{1}{2\pi}\nabla\times\iint_{\mathbb{R}^2}\hat{n}\times\underline{U}(x',y';0)\,\frac{e^{ikR}}{R}\,dx'dy'=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\left[\hat{n}\times\underline{U}(x',y';0)\right]\times\nabla\frac{e^{ikR}}{R}\,dx'dy'$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\left(-U_y(x',y';0),U_x(x',y';0),0\right)\times(x-x',y-y',z)\,\frac{e^{ikR}}{R^3}(ikR-1)\,dx'dy'$$

$$=\Bigg(-\iint_{\mathbb{R}^2}U_x(x',y';0)\,\underbrace{z\frac{e^{ikR}}{2\pi R^3}(ikR-1)}_{\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}}\,dx'dy',\ -\iint_{\mathbb{R}^2}U_y(x',y';0)\,z\frac{e^{ikR}}{2\pi R^3}(ikR-1)\,dx'dy',$$

$$-\iint_{\mathbb{R}^2}\left[-U_x(x',y';0)(x-x')-U_y(x',y';0)(y-y')\right]\frac{e^{ikR}}{2\pi R^3}(ikR-1)\,dx'dy'\Bigg)$$

$$=\Bigg(\underbrace{-\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\mathbb{R}^2} U_x(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{2\pi R}dx'dy'}_{U_x(x,y;z)},\ \underbrace{-\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\mathbb{R}^2} U_y(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{2\pi R}dx'dy'}_{U_y(x,y;z)},$$

$$+\iint_{\mathbb{R}^2}\Big[U_x(x',y';0)\underbrace{(x-x')\frac{e^{ikR}}{2\pi R^3}(ikR-1)}_{\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}}+U_y(x',y';0)\underbrace{(y-y')\frac{e^{ikR}}{2\pi R^3}(ikR-1)}_{\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}}\Big]dx'dy'\Bigg)$$

$$=\left(U_x(x,y;z),\ U_y(x,y;z),\ \iint_{\mathbb{R}^2}\left[U_x(x',y';0)\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}+U_y(x',y';0)\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}\right]dx'dy'\right).$$

Dado que es campo en espacio libre entonces $\nabla\cdot\underline{U}=0$
$\Rightarrow\ U_z(x,y;z)=-\int\left(\frac{\partial}{\partial x}U_x+\frac{\partial}{\partial y}U_y\right)dz$, sustituyendo en la anterior las expresiones de U_x y U_y se tiene que

$$U_z(x,y;z)=\int\frac{\partial}{\partial z}\iint_{\mathbb{R}^2}\left[U_x(x',y';0)\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}+U_y(x',y';0)\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}\right]dx'dy'\,dz$$

$$=\iint_{\mathbb{R}^2}\left[U_x(x',y';0)\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}+U_y(x',y';0)\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{ikR}}{2\pi R}\right]dx'dy',$$

por lo tanto, la última componente es $U_z(x,y;z)$,

$$\therefore\ \underline{U}(x,y;z)=\frac{1}{2\pi}\nabla\times\iint_{\mathbb{R}^2}\hat{n}\times\underline{U}(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{R}dx'dy'.$$

c) Para $\underline{U}(x,y;0)=A\delta(x,y;0)\hat{x}$ entonces

$$\underline{U}(x,y;z)=\frac{A}{2\pi}\nabla\times\iint_{\mathbb{R}^2}\delta(x,y;0)\frac{e^{ikR}}{R}dx'dy'\,\hat{y}=\frac{A}{2\pi}\nabla\times\frac{e^{ikr}}{r}\hat{y},\quad \text{así}$$

$$\underline{U}(x,y;0)=\frac{A}{2\pi}\left(-\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ikr}}{r},0,\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ikr}}{r}\right)=\frac{A}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r^2}\left(ik-\frac{1}{r}\right)(-z,0,x)$$

$$\therefore \underline{U}(x,y;z)=\frac{Ae^{ikr}}{2\pi r}\left(ik-\frac{1}{r}\right)\hat{r}\times\hat{y}.$$

Que es la respuesta al impulso; por lo que para fuentes extendidas y con el regimen paraxial la teoría escalar describe bien el campo.

20. La expresión

$$p(x,y)=g(x,y)\otimes\left[\mathrm{comb}\left(\frac{x}{L_x}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{L_y}\right)\right],$$

define una función periodica, con periodo L_x en la dirección x y L_y en la dirección y.

a) Muestra que la transformada de Fourier de p puede escribirse como:

$$P(f_x,f_y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}G\left(\frac{n}{L_x},\frac{m}{L_y}\right)\delta\left(f_x-\frac{n}{L_x},f_y-\frac{m}{L_y}\right),$$

donde $G=\mathcal{F}(g(x,y))$

b) Bosqueja la función $p(x,y)$ cuando

$$g(x,y)=\mathrm{rect}\left(\frac{2x}{L_x}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{2y}{L_y}\right),$$

y encuentra $P(f_x,f_y)$, realiza un bosquejo de P a lo largo de f_x.

a) Tenemos a $p(x,y)$ como una convolución, por las propiedades de la TF se tiene que

$$P(f_x,f_y)=G(f_x,f_y)\mathcal{F}\left[\mathrm{comb}\left(\tfrac{x}{L_x}\right)\mathrm{comb}\left(\tfrac{y}{L_y}\right)\right],$$

luego, el producto de comb es en diferentes variables, con la TF en cartesianas llegamos a que la TF en dos variables es el producto de dos TF en una variable:

$$P(f_x,f_y)=G(f_x,f_y)\mathcal{F}[\mathrm{comb}(x/L_x)]\mathcal{F}[\mathrm{comb}(y/L_y)],$$

dado que $\mathcal{F}[\mathrm{comb}(x/\Lambda)](f)=|\Lambda|\mathrm{comb}(\Lambda f)$, entonces

$$P(f_x,f_y)=G(f_x,f_y)L_xL_y\,\mathrm{comb}(L_xf_x)\,\mathrm{comb}(L_yf_y)$$
$$=G(f_x,f_y)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}L_xL_y\,\delta(L_xf_x-n)\,\delta(L_yf_y-m),$$

luego $\delta(ax-b)=\frac{1}{|a|}\delta(x-b/a)$ y en cartesianas se tiene que $\delta(x-x_0, y-y_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$, de modo que:

$$P(f_x,f_y)=G(f_x,f_y)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(f_x-n/L_x, f_y-m/L_y),$$

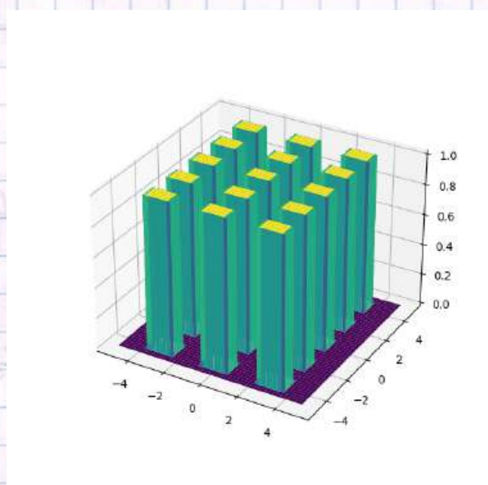
finalmente se introduce G en las sumas y como tenemos la función δ se tiene que $f(u)\delta(u-w)=f(w)\delta(u-w)$, por lo tanto.

$$P(f_x,f_y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}G\left(\frac{n}{L_x},\frac{m}{L_y}\right)\delta\left(f_x-\frac{n}{L_x}, f_y-\frac{m}{L_y}\right).$$

b) Con $g(x,y)=\mathrm{rect}(2x/L_x)\,\mathrm{rect}(2y/L_y)$ tenemos que

$$p(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x-nL_x}{L_x/2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y-mL_y}{L_y/2}\right),$$

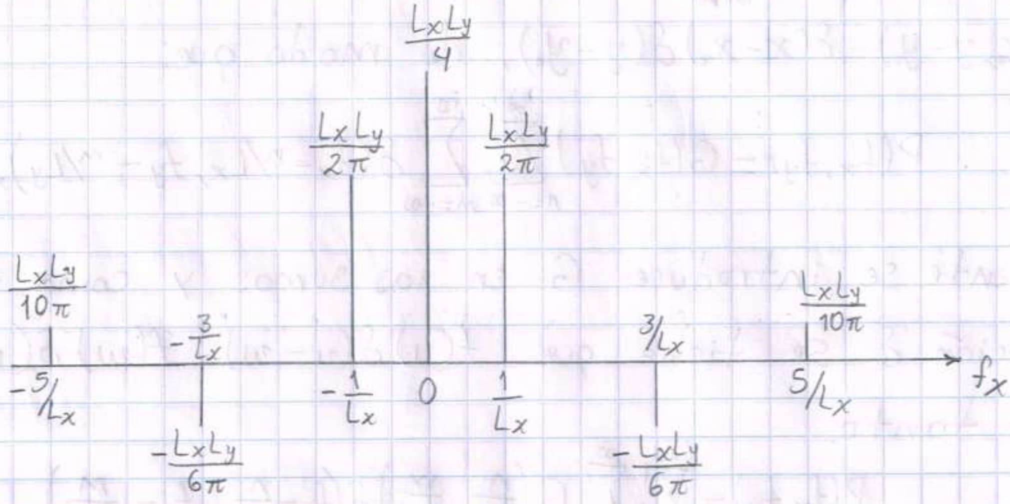
de modo que su gráfica es una malla de rectángulos de medidas $L_x/2\times L_y/2$.



Por otra parte, $\mathcal{F}[\mathrm{rect}(x/L)](f)=L\,\mathrm{senc}(\pi L f)$, de modo que

$$P(f_x,f_y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{L_xL_y}{4}\mathrm{senc}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{senc}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\delta\left(f_x-\frac{n}{L_x}, f_y-\frac{m}{L_y}\right),$$

cuyo bosquejo sería:



21. Calcula la transformada de Fourier de la siguiente función

$$g(x,y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2w}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y}{2w}\right).$$

Traza un esquema a mano de la función original $g(x,0)$ y de $|\mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x,0)|^2$. Ilustra la dependencia en m de ambas funciones.

Tenemos que

$$\mathcal{F}\{g(x,y)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x/2w)\}\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(y/2w)\}$$

$$+ \frac{m}{4}\int_{-w}^{w}\int_{-w}^{w}\left(e^{i2\pi f_0 x} + e^{-i2\pi f_0 x}\right)e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x/2w)\}\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(y/2w)\} + \frac{m}{4}\left[\int_{-w}^{w} e^{-i2\pi(f_x - f_0)x}\,dx + \int_{-w}^{w} e^{-i2\pi(f_x+f_0)x}\,dx\right]$$

$$\times \mathcal{F}\{\operatorname{rect}(y/2w)\}, \quad \text{entonces}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x,f_y) = \mathcal{F}\{\operatorname{rect}(y/2w)\}(f_y)\left[\frac{1}{2}\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x/2w)\}(f_x) + \right.$$

$$\left.\frac{m}{4}\Big(\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x/2w)\}(f_x - f_0) + \mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x/2w)\}(f_x + f_0)\Big)\right]$$

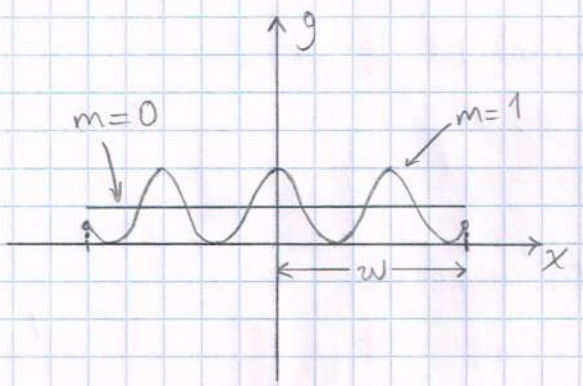
$$\therefore\ \mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x,f_y) = 2w\,\mathrm{senc}(2\pi w f_y)\Big[w\,\mathrm{senc}(2\pi w f_x) + \frac{m}{4}\Big\{2w\,\mathrm{senc}(2\pi w(f_x-f_0)) + 2w\,\mathrm{senc}(2\pi w(f_x+f_0))\Big\}\Big]$$

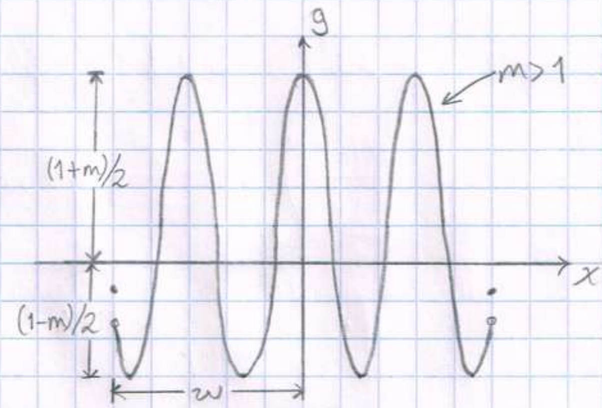
Tenemos que para $y=0$:

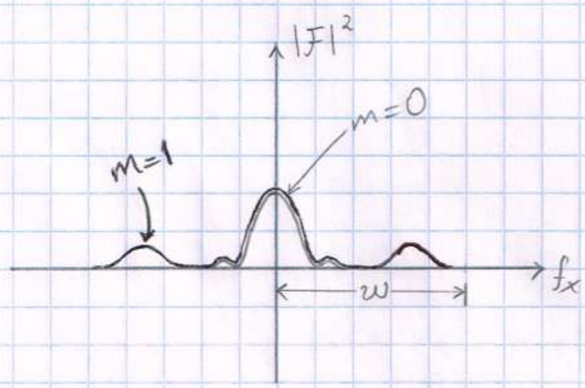
$$g(x,0) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2w}\right),$$

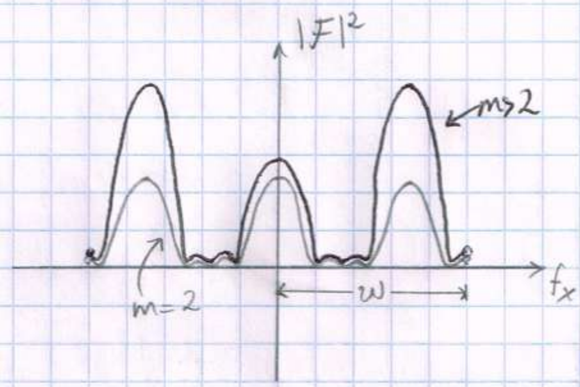
y para $f_y = 0$:

$$\mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x,0) = 2w^2\left\{\mathrm{senc}(2\pi w f_x) + \frac{m}{2}\left[\mathrm{senc}(2\pi w(f_x-f_0)) + \mathrm{senc}(2\pi w(f_x+f_0))\right]\right\}$$









22. Demuestra que la función $\Lambda(x)=\mathrm{rect}(x)\otimes\mathrm{rect}(x)$ es igual a la función triángulo:

$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x|, & \text{si } |x|\leq 1,\\ 0, & \text{si } |x|\geq 1.\end{cases}$$

Calcula su TF. Traza tanto $\Lambda(x)$ como $\mathcal{F}\{\Lambda(x)\}(f)$ utilizando algún programa.

$$\Lambda(x)=\mathrm{rect}(x)\otimes\mathrm{rect}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(u)\mathrm{rect}(x-u)\,du=\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{rect}(x-u)\,du,$$

entonces:

$$\Lambda(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\text{máx}(x-1/2,-1/2)}^{\text{mín}(x+1/2,\,1/2)} ds, & \text{mín}(x+1/2,1/2)\geq\text{máx}(x-1/2,-1/2)\\ 0, & \text{mín}(x+1/2,1/2)\leq\text{máx}(x-1/2,-1/2)\end{cases},$$

usando que $\text{máx}(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ y $\text{mín}(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$

se llega a que:

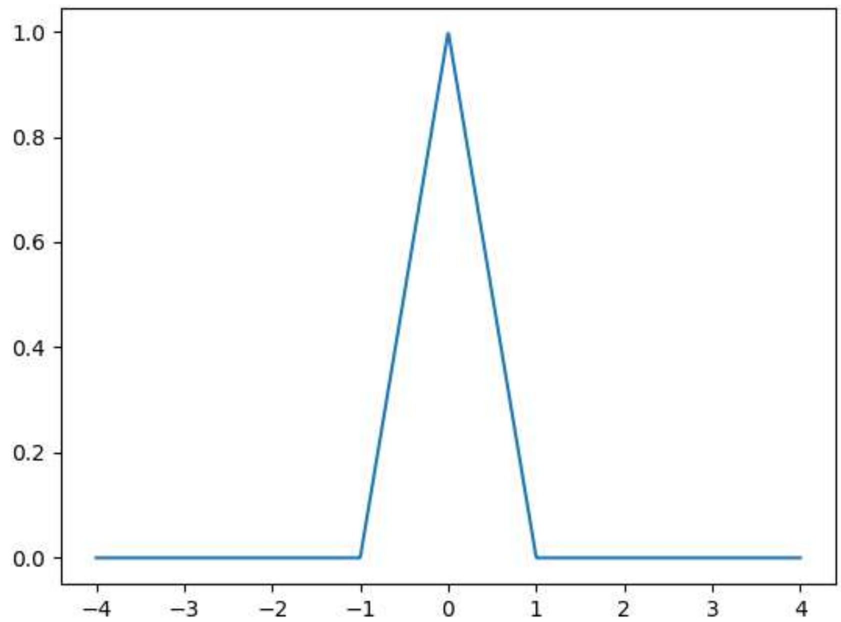
$$\Lambda(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1-|x|}{2}-\dfrac{x-1+|x|}{2}, & \text{si } \dfrac{x+1-|x|}{2}\geq\dfrac{x-1+|x|}{2}\\ 0, & \text{si } \dfrac{x+1-|x|}{2}\leq\dfrac{x-1+|x|}{2}\end{cases},$$

$$\therefore\ \Lambda(x)=\begin{cases}1-|x|, & \text{si } |x|\leq 1\\ 0, & \text{si } |x|\geq 1\end{cases}.$$

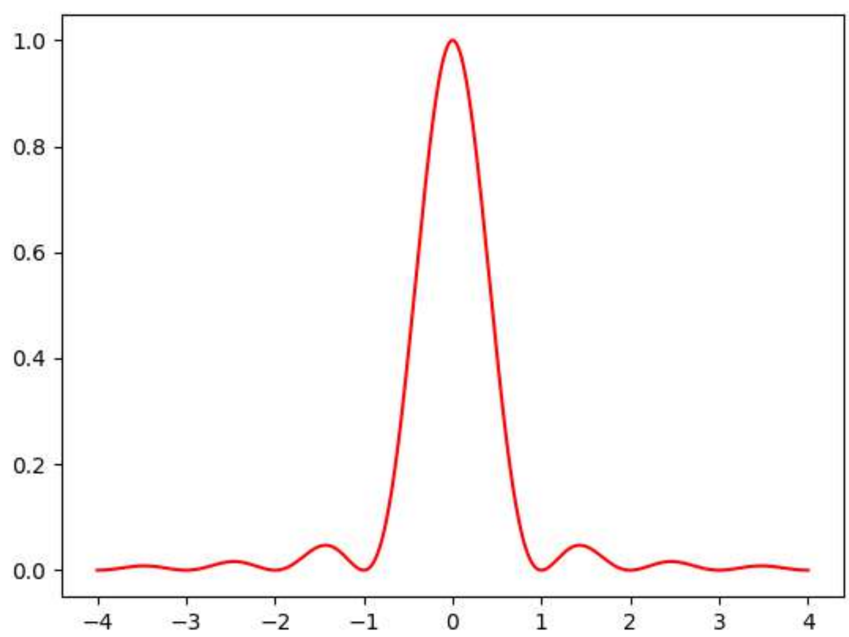
Por otro lado, $\mathcal{F}\{\Lambda(x)\}(f)=\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(x)\}(f)\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(x)\}(f)$

$$\therefore\ \mathcal{F}\{\Lambda(x)\}(f)=\mathrm{senc}^2(\pi f)$$

Entonces las gráficas son:



Gráfica de la función Lambda(x)



Gráfica de la transformada de Fourier

23. Muestra que la onda esférica, definida por $e^{\pm ikr}/r$ con $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, es solución de la ecuación de Helmholtz.

La onda esférica está definida para $r>0$, así que allí se trabajará. Por identidades de cálculo vectorial se tiene

$$\nabla^2 \frac{e^{iakr}}{r} = e^{iakr}\nabla^2\frac{1}{r} + 2\nabla e^{iakr}\cdot\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\nabla^2 e^{iakr},$$ con a una constante. Sabemos que

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 0, \quad \nabla e^{iakr} = iake^{iakr}\hat{r}, \quad \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \quad y$$

también $\nabla^2 e^{iakr} = -a^2k^2e^{iakr} + 2iak\, e^{iakr}/r$, de manera que

$$\nabla^2\frac{e^{iakr}}{r} = \cancel{-2iak\frac{e^{iakr}}{r^2}} - a^2k^2\frac{e^{iakr}}{r} + \cancel{2iak\frac{e^{iakr}}{r^2}}$$

$\Rightarrow \nabla^2\frac{e^{iakr}}{r} + a^2k^2\frac{e^{iakr}}{r} = 0$, sea $U(r) = \frac{e^{\pm ikr}}{r}$ la onda esférica, entonces para $a=\pm 1$ tenemos

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0,$$

que es la ecuación de Helmholtz.

24. Para una onda que viaja en una dirección que forma un ángulo pequeño respecto al eje óptico, la forma general del campo complejo puede aproximarse por:

$$U(x,y,z) \approx A(x,y,z)\,e^{ikz},$$

donde $A(x,y,z)$ es una función que varía lentamente con z.

a) Prueba que para esta onda la ecuación de Helmholtz se puede simplificar a

$$\nabla_t^2 A + i2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0,$$

donde $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es la parte transversal del Laplaciano. Esta ecuación se conoce como la ecuación paraxial de Helmholtz.

b) Muestra que la solución (aproximación) de Fresnel es solución de la ecuación de onda paraxial.

a) Tenemos que $\nabla^2(Ae^{ikz}) = A\nabla^2 e^{ikz} + 2\nabla A\cdot\nabla e^{ikz} + e^{ikz}\nabla^2 A$,

donde $\nabla e^{ikz} = ike^{ikz}\hat{z}$ y $\nabla^2 e^{ikz} = -k^2 e^{ikz}$, entonces

$$\nabla^2(Ae^{ikz}) = e^{ikz}\left(-k^2 A + i2k\frac{\partial A}{\partial z} + \nabla^2 A\right),$$ entonces

$$\nabla^2 A + i2k\frac{\partial A}{\partial z} = e^{-ikz}\left[\nabla^2(Ae^{ikz}) + k^2(Ae^{ikz})\right] = 0,$$ es cero

pues $U = Ae^{ikz}$ satisface la ecuación de Helmholtz,

así que $\nabla^2 A + i2k\frac{\partial A}{\partial z}$.

Finalmente, que A varíe lentamente con z significa que

$$\left|\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right| \ll 2k\left|\frac{\partial A}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right|,$$

por lo que el término $\partial^2 A/\partial z^2$ de ∇^2 se puede despreciar

$$\therefore \nabla_t^2 A + i2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

b) Para la aproximación de Fresnel tenemos

$$A(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}dx'dy',$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}A_F = \frac{1}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} i\frac{k}{z}(x-x')U(x',y';0)e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}dx'dy',$$ así

$$\frac{\partial^2 A_F}{\partial x^2} = i\frac{k}{z}A_F - \frac{1}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{k^2}{z^2}(x-x')^2 U(x',y';0)\, e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}\,dx'dy'$$

$$\Rightarrow \nabla_t^2 A_F = i\frac{2k}{z}A_F - \frac{1}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{k^2}{z^2}\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right] U(x',y';0)\, e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}\,dx'dy',$$

luego:

$$i2k\frac{\partial A_F}{\partial z} = -i\frac{2k}{z}A_F + \frac{1}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{k^2}{z^2}\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right] U(x',y';0)\, e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}\,dx'dy',$$

entonces

$$\nabla_t^2 A_F = -i2k\frac{\partial A_F}{\partial z} \quad \therefore \quad \nabla_t^2 A_F + i2k\frac{\partial A_F}{\partial z} = 0.$$

25. El campo de un punto emisor en $x_0 = 2$, $y_0 = 5$ y $z_0 = 0$ que emite con una amplitud unitaria y una longitud de onda λ en el vacío se puede definir por $U_1(x, y, z_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$. Utilizando la solución de Rayleigh-Sommerfeld:

a) Encuentra su campo a una distancia $z > \lambda$ para cualquier posición (x,y).

b) Traza las curvas de fase constante (frentes de onda) en el plano YZ definido por $x=0$

c) Toma otro punto emisor en $-y_0$ $(U_2(x,y,z_0) = \delta(x-x_0)\times\delta(y+y_0))$. Obtén el campo total de los dos puntos a una distancia z. Realiza un mapa de la intensidad $(I(0,y,z) = |U_1(0,y,z)+U_2(0,y,z)|^2)$ suponiendo $\lambda = 1$ a lo largo del plano YZ. Realiza el trazo para valores poco mayores a λ y para valores muy grandes a λ.

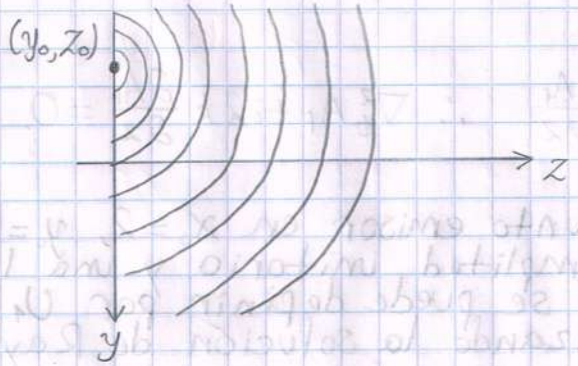
a) $$U(x,y;z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x'-x_0)\,\delta(y'-y_0)\,\frac{e^{ikR}}{2\pi R}\left(-ik+\frac{1}{R}\right)\frac{z}{R}\,dx'dy'$$

$$= \frac{e^{iks}}{2\pi s}\left(-ik+\frac{1}{s}\right)\frac{z}{s}, \quad \text{con } s = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2};$$

escrito de otra forma

$$U(x,y;z) = \frac{z}{2\pi s^2}\sqrt{k^2+1/s^2}\; e^{i[ks - \arctan(ks)]}.$$

b) Por lo anterior, los frentes de onda son las superficies que cumplen que $ks - \arctan(ks)$ es constante, y dado que $f(s) = ks - \arctan(ks)$ es estrictamente creciente excepto en $s=0$, y $f(s) < 0$ para $s<0$ y $f(s) > 0$ para $s>0$, entonces $f(s)$ es constante si y sólo si ks es constante, por lo que los frentes de onda son esféricos



c) El campo total es

$$U(x, y; z) = \frac{e^{iks_1}}{2\pi s_1}\left(-ik + \frac{1}{s_1}\right)\frac{z}{s_1} + \frac{e^{iks_2}}{2\pi s_2}\left(-ik + \frac{1}{s_2}\right)\frac{z}{s_2},$$

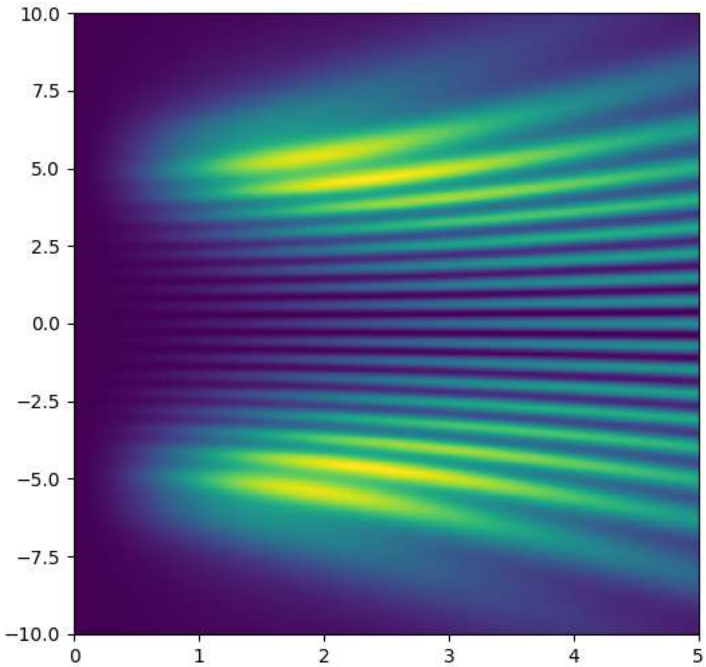
con $s_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}$, $s_2 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + z^2}$.
Entonces la intensidad en el plano yz es:

$$I(0, y, z) = \frac{z^2}{4\pi^2 s_1^4}\left(k^2 + \frac{1}{s_1^2}\right) + \frac{z^2}{4\pi^2 s_2^4}\left(k^2 + \frac{1}{s_2^2}\right) + 2\frac{z^2}{4\pi^2 s_1^2 s_2^2} \operatorname{Re}\left\{e^{iks_1}\left(-ik + \frac{1}{s_1}\right) \times e^{-iks_2}\left(ik + \frac{1}{s_2}\right)\right\}$$

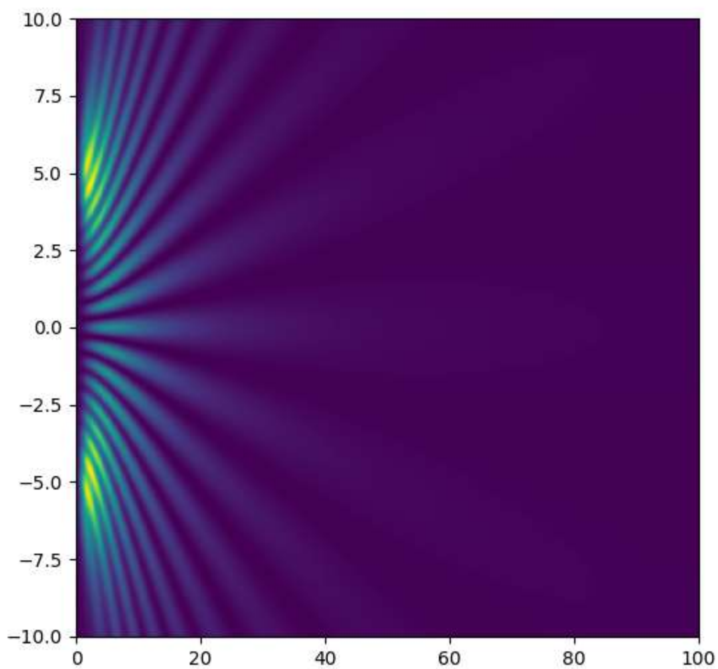
$$\therefore I(0, y, z) = \frac{z^2}{4\pi^2 s_1^4}\left(k^2 + \frac{1}{s_1^2}\right) + \frac{z^2}{4\pi^2 s_2^4}\left(k^2 + \frac{1}{s_2^2}\right) + \frac{z^2}{2\pi^2 s_1^2 s_2^2}\sqrt{k^2 + \frac{1}{s_1^2}}\sqrt{k^2 + \frac{1}{s_2^2}} \cos\left[k(s_1 - s_2) - (\arctan(ks_1) - \arctan(ks_2))\right],$$

donde tiene que ser con $x=0$ en s_1 y s_2.

Los mapas de intensidad se muestran a continuación:

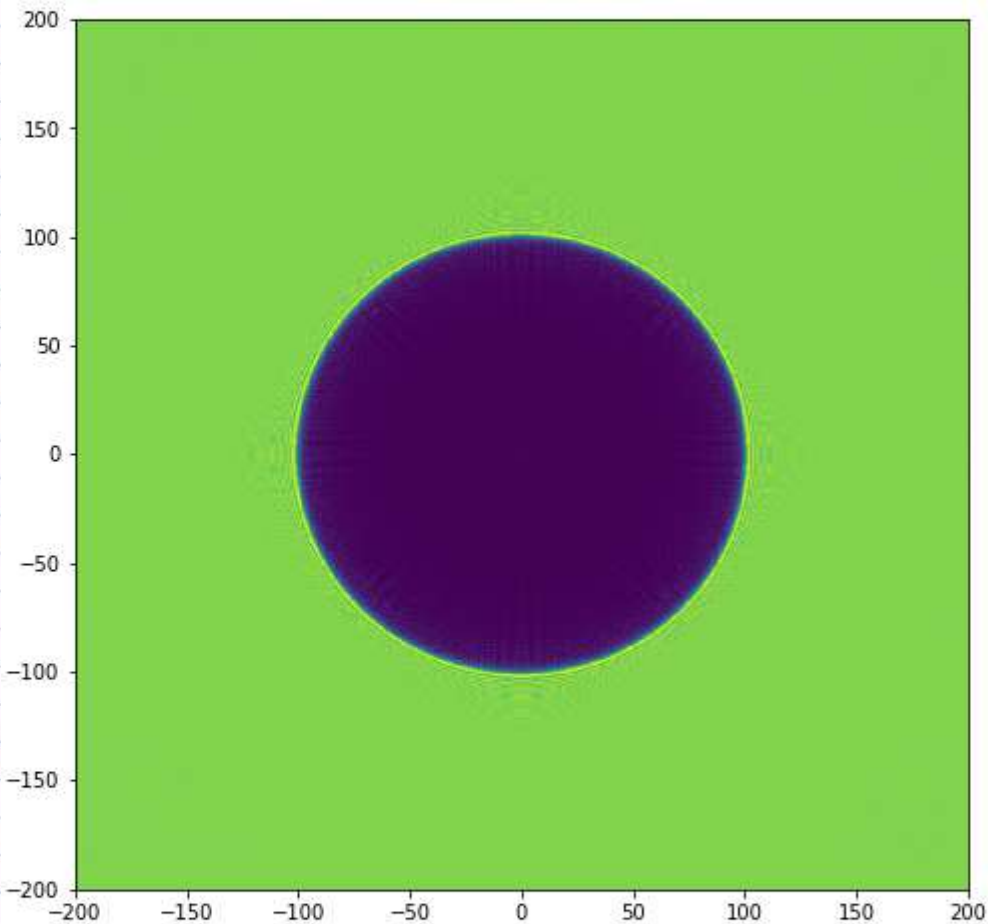


Mapa de intensidad desde z=0 a z=5

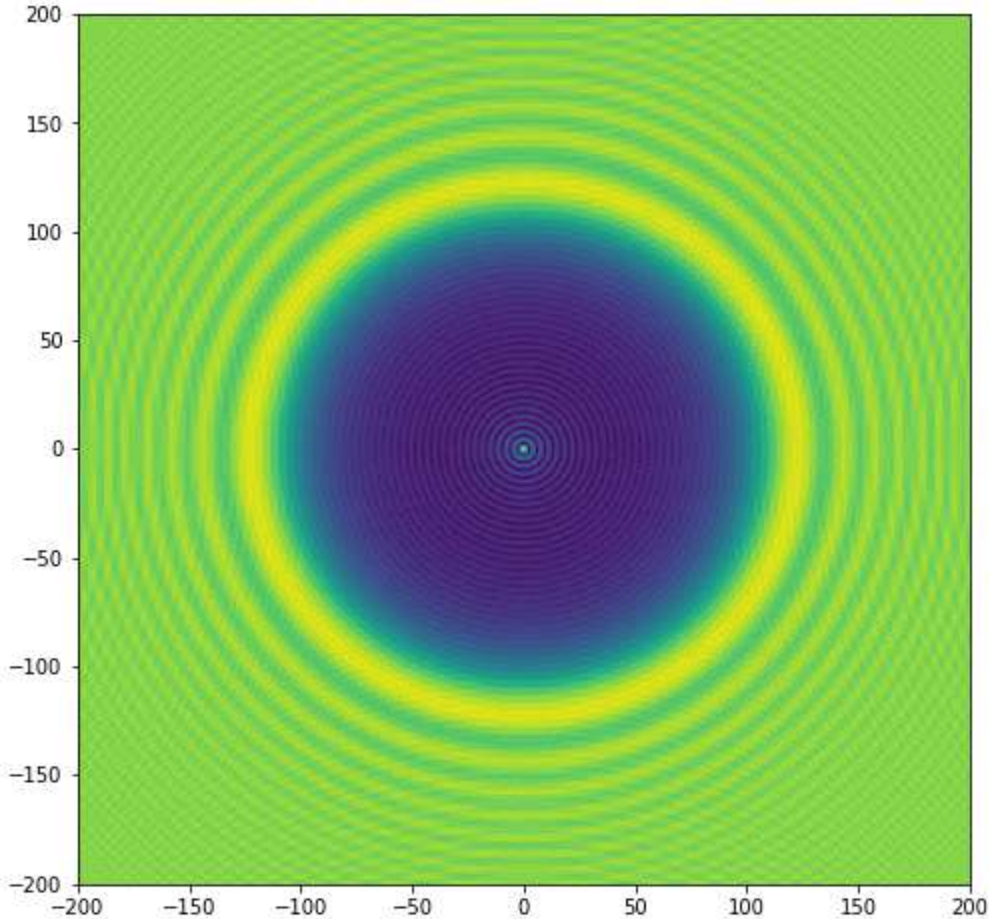


Mapa de intensidad desde z=0 a z=100

26. Utilizando la solución de Rayleigh-Sommerfeld estima la intensidad del campo difractado de una onda plana que pasa a través de un disco opaco de radio r_0. Supón $\lambda=1$ y $r_0=100\lambda$. Traza un mapa de la intensidad en el plano YZ que vaya desde distancias pequeñas hasta distancias grandes, respecto a la longitud de onda.



Mapa de intensidad a una distancia z=5. Se observa que la luz sólo está presente fuera del disco opaco.



Mapa de intensidad a una distancia z=700 longitudes de onda. Se observa interferencia y en el centro está el punto de Poisson-Arago.

27. Utilizando la FFT implementada en los programas, estima la TF de la función gaussiana:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi w}} e^{-x^2/w^2}.$$

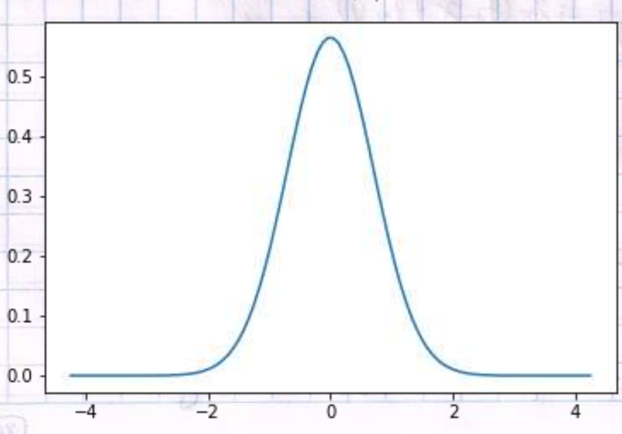
Escoge algún valor razonable para w.

(a) Utilizando un muestreo razonable compara la amplitud $|G_n| = |FFT\{g_m\}|$ y la fase $P_n = angle\{g_m\}$ de la transformada de Fourier numérica con los valores analíticos correspondientes. Para esto traza ambas funciones en una gráfica en función de las frecuencias. Prueba que pasa si no realizas las operaciones ifftshift y fftshift.

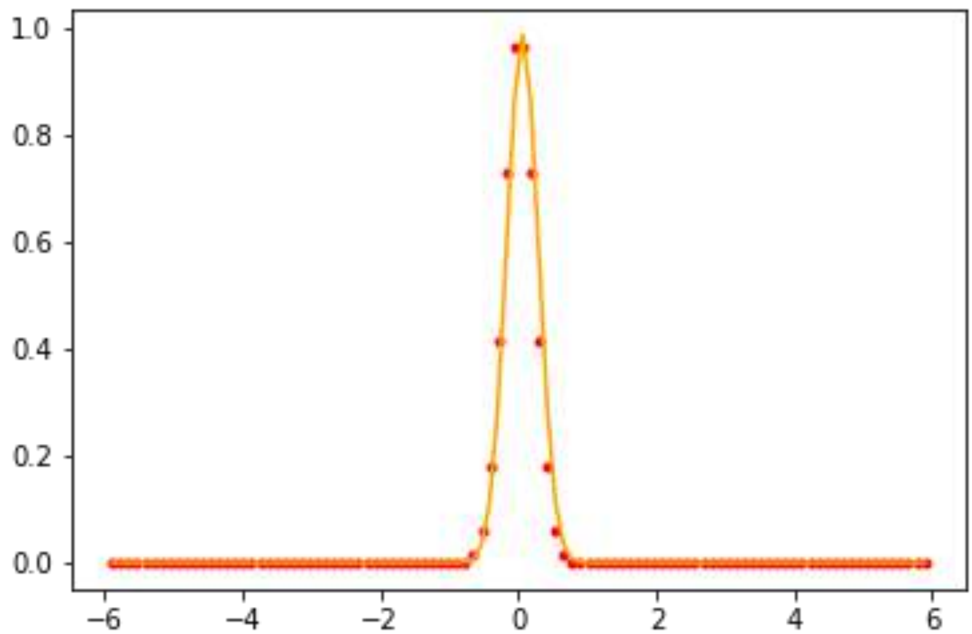
(b) Define los muestreos Δx para realizar el cálculo numérico de tal forma que los anchos de banda en frecuencias contengan el 68.27%, 95.45% y el 99.73% de la energía. Para los tres casos, el ancho de banda en el espacio defínelo de tal forma que contenga el 99.73% de la energía. Compara los resultados de las amplitudes $|FFT(g(x))|$ con la función analítica. En cada caso señala la frecuencia de Nyquist y la región donde se observa el fenómeno conocido como aliasing.

(c) Vuelve a realizar el ejercicio del enunciado anterior, pero ahora considera un ancho espacial dos veces más grande.

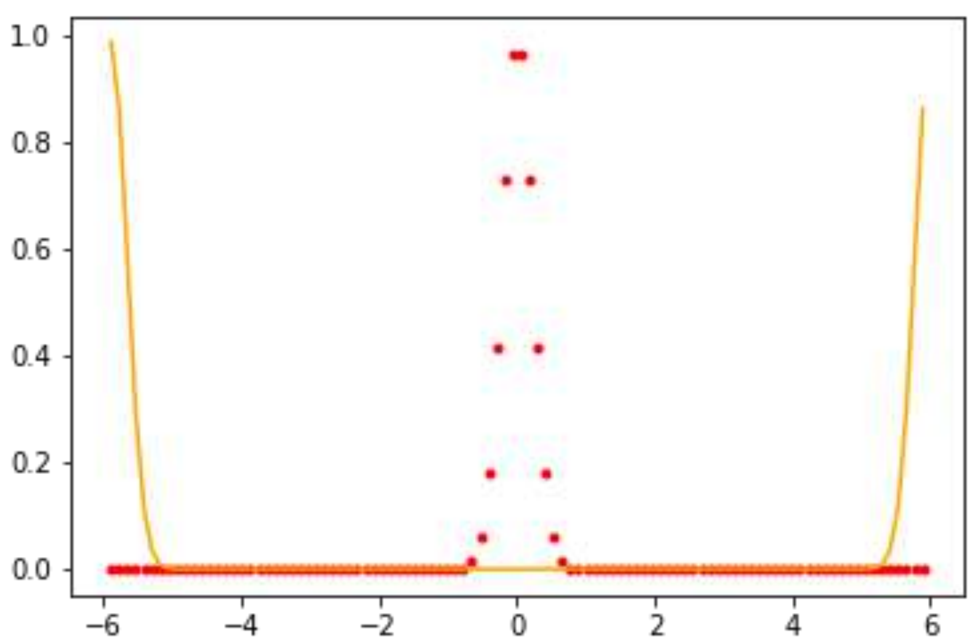
a) Graficamos para $w=1$. En azul la gráfica de g; en naranja la TF numérica, en rojo la analítica. Se observa que FFT primero entrega las frecuencias positivas y luego las negativas (tercer gráfica), por ello es necesario usar fftshift.



Función original



Transformada de Fourier. Los puntos rojos corresponden a la función analítica.



Transformada de Fourier sin utilizar la función fftshift.

28. Calcula el espectro angular de las siguientes aberturas suponiendo que son iluminadas por una onda plana que incide de forma normal de amplitud unitaria:

a) Una abertura circular de radio r_0.

b) Un disco circular opaco de diámetro r_0.

El espectro angular para un campo U es:

$$\tilde{U}(f_x, f_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} U(x,y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy,$$

donde $U(x,y)$ es el campo en la posición de la abertura/obstáculo.

a) Para una abertura circular de radio r_0 se tiene que $U(x,y) = \text{circ}(r/r_0)$ con $r = \sqrt{x^2+y^2}$, entonces:

$$\tilde{U}(f_x, f_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \text{circ}(r/r_0) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy = \mathcal{F}\{\text{circ}(r/r_0)\}(\rho)$$

$$\therefore \tilde{U}(\rho) = \pi r_0^2 \, \text{bsenc}(2\pi r_0 \rho),$$

con $\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$

b) Para un disco opaco tenemos $U(x,y) = 1 - \text{circ}(2r/r_0)$ pues el diámetro es r_0, entonces:

$$\tilde{U}(f_x, f_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} [1 - \text{circ}(2r/r_0)] e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

$$= \mathcal{F}\{1\}(\rho) - \mathcal{F}\{\text{circ}(2r/r_0)\}(\rho)$$

$$\therefore \tilde{U}(\rho) = \delta(\rho) - \frac{\pi r_0^2}{4} \text{bsenc}(\pi r \rho_0)$$

La δ representa el punto de Poisson-Arago.

29. Utilizando la formulación de la representación espectral angular del campo escalar, calcula numéricamente el campo propagado a la distancia $z = 100$ mm y 2000 mm, del campo gaussiano definido en $z=0$ por

$$U(x,y;0) = \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{\sigma^2}\right].$$

Utiliza los siguientes parámetros: $\lambda = 0.0005$ mm y $\sigma = 1$mm. Considera un área y una frecuencia espacial de muestreo adecuados. Compara tu resultado con la solución analítica del haz gaussiano paraxial. Traza los perfiles de intensidad $|U|^2$ a lo largo del eje x.

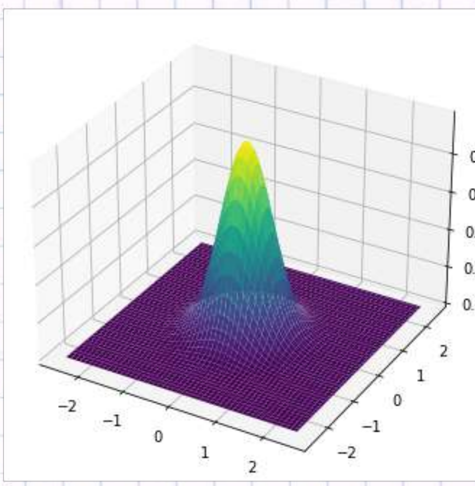
Dado el campo de entrada tenemos que la solución analítica es

$$U(x,y;z) = \frac{\sigma}{W(z)} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}z - i\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda R(z)} + i\zeta(z)\right], \text{ con}$$

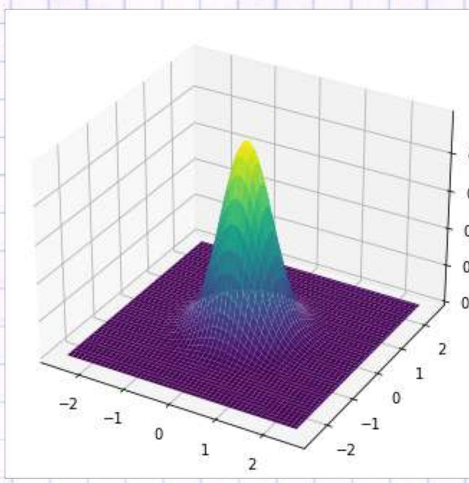
$$W(z) = \sigma\sqrt{1+\left(\frac{\lambda z}{\pi\sigma^2}\right)^2},\quad R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi\sigma^2}{\lambda z}\right)^2\right] \text{ y } \zeta(z) = \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi\sigma^2}\right).$$

El ejercicio lo haremos para $\sigma = 0.7$ mm (con 1 mm no se nota diferencia)

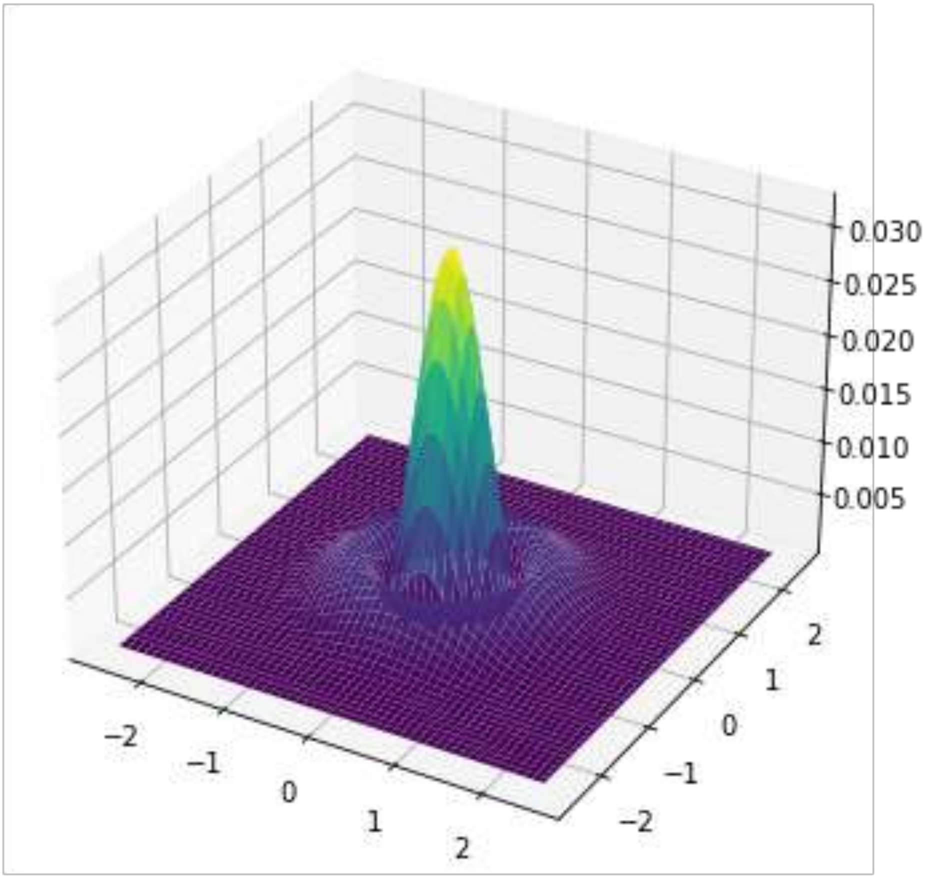
Primero para $z = 100$ mm; con el fin de comparar el campo en z de la expresión analítica y la numérica, entonces se compararán la parte real $|Re\{U\}|$ y la parte imaginaria $|Im\{U\}|$ de la analítica y la numérica. Luego se compara el perfil de intensidad. Para $z=2000$ mm sólo se compara el perfil de intensidad.



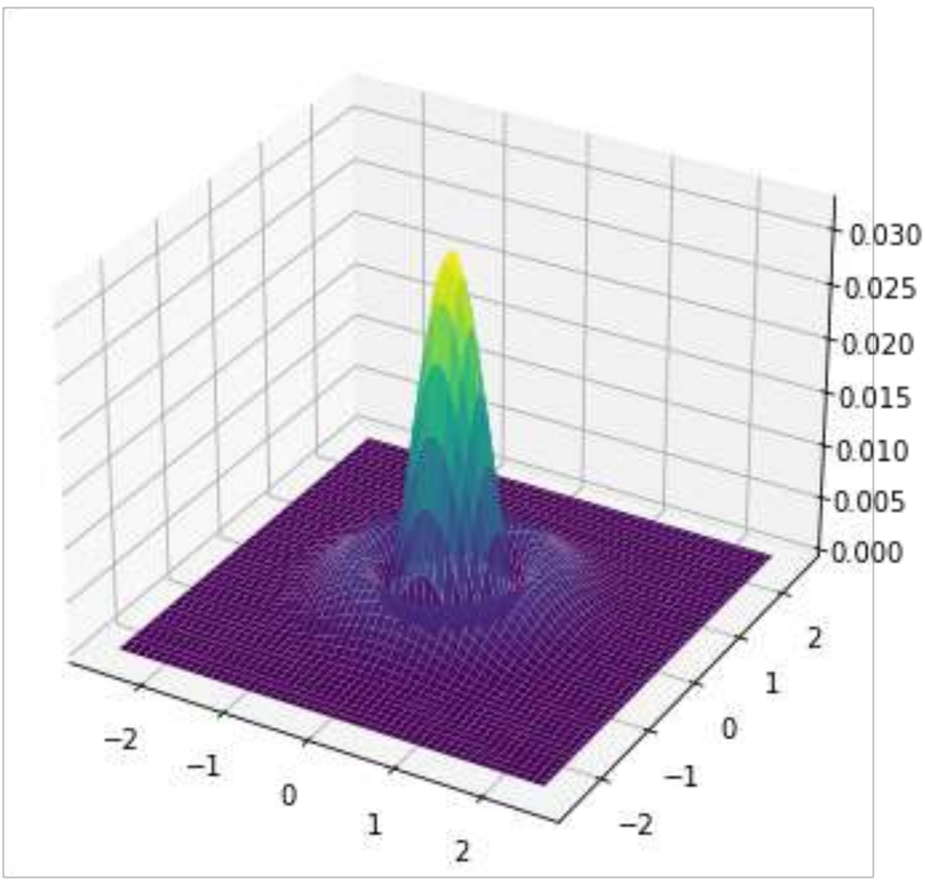
Parte real analítica



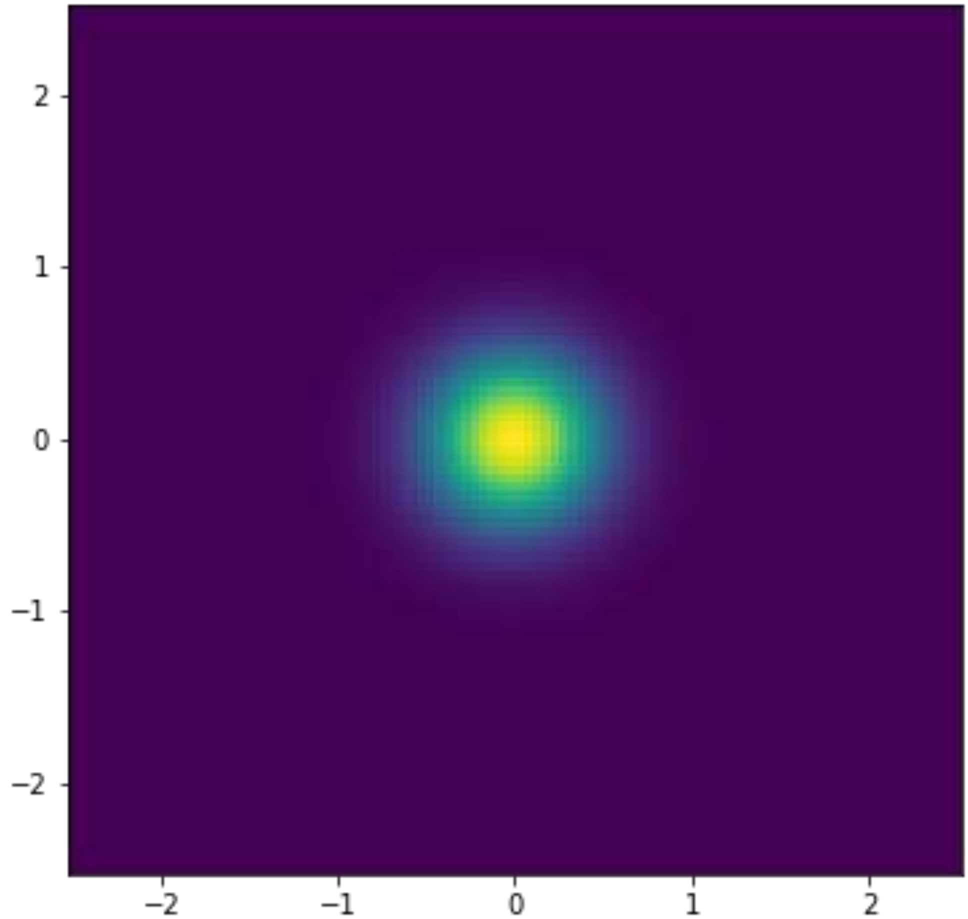
Parte real numérica



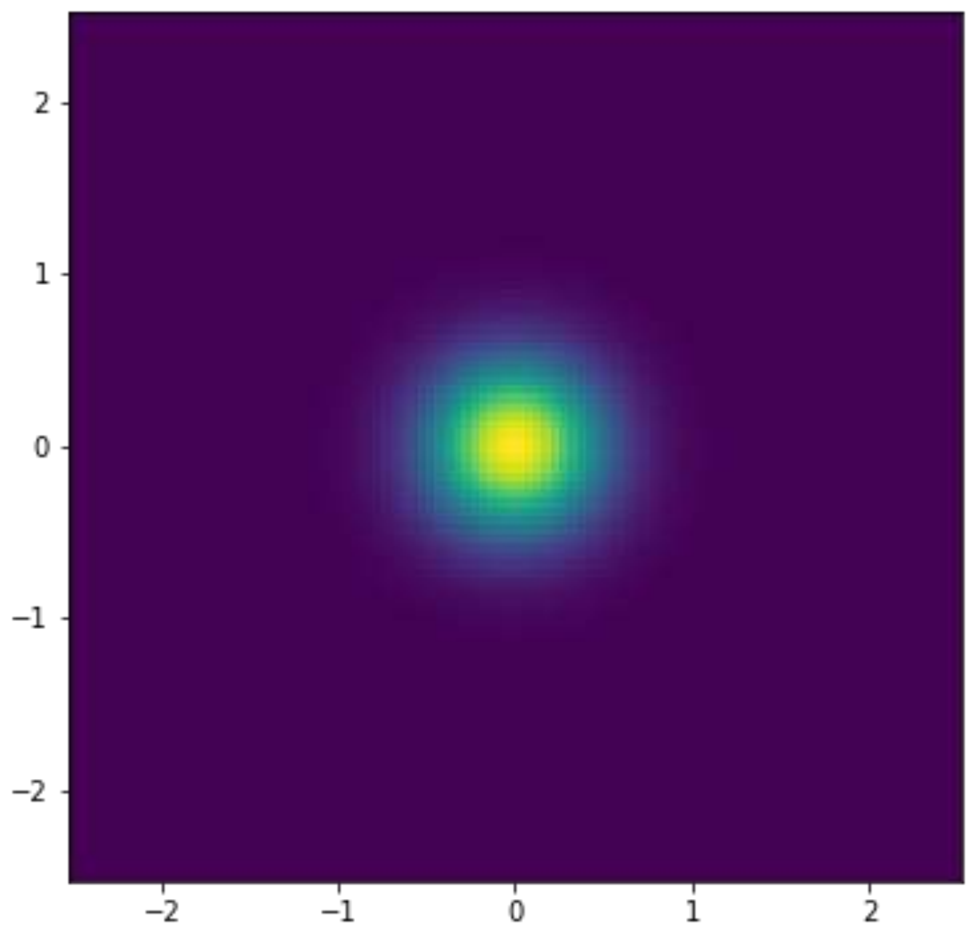
Parte imaginaria analítica



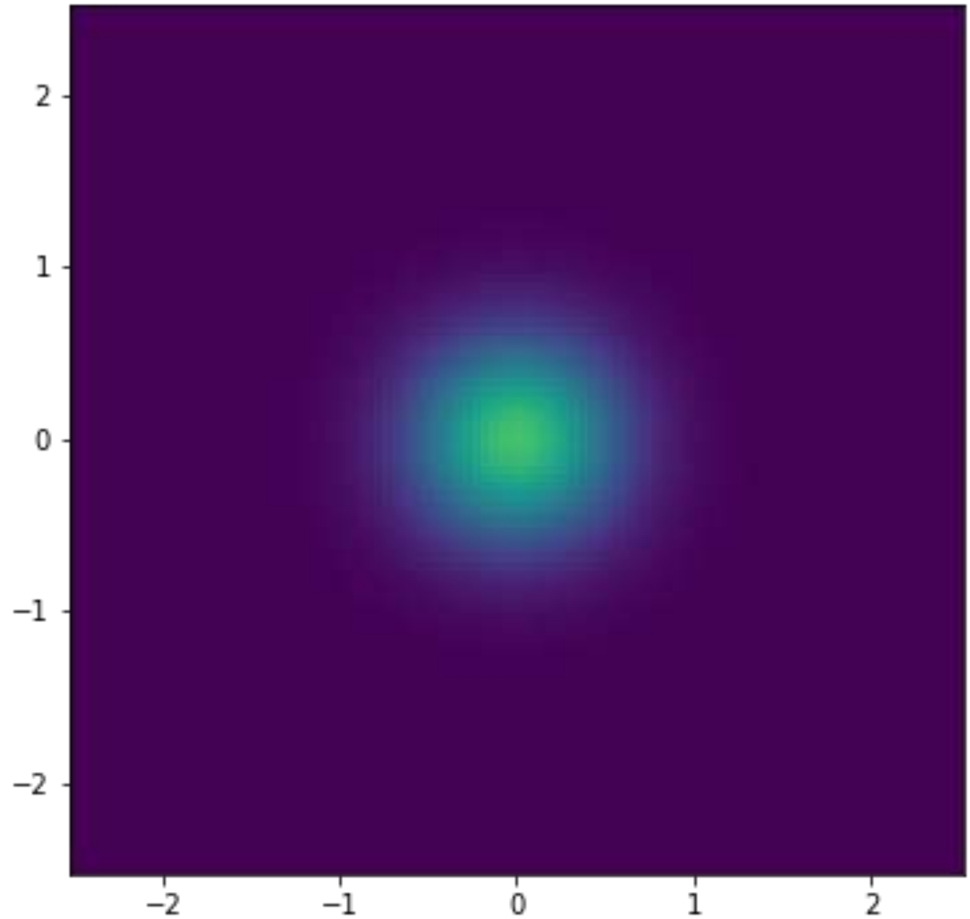
Parte imaginaria numérica



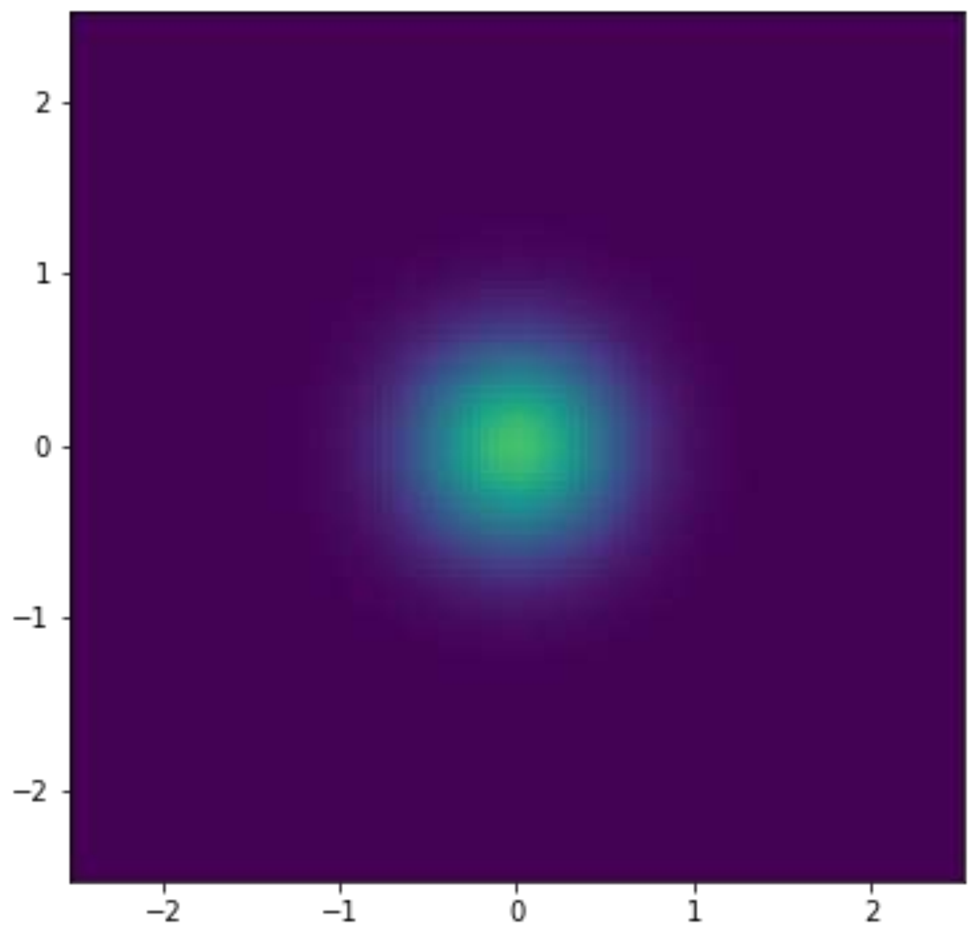
Mapa de intensidad analítica para z = 100mm.



Mapa de intensidad numérica para z = 100mm.

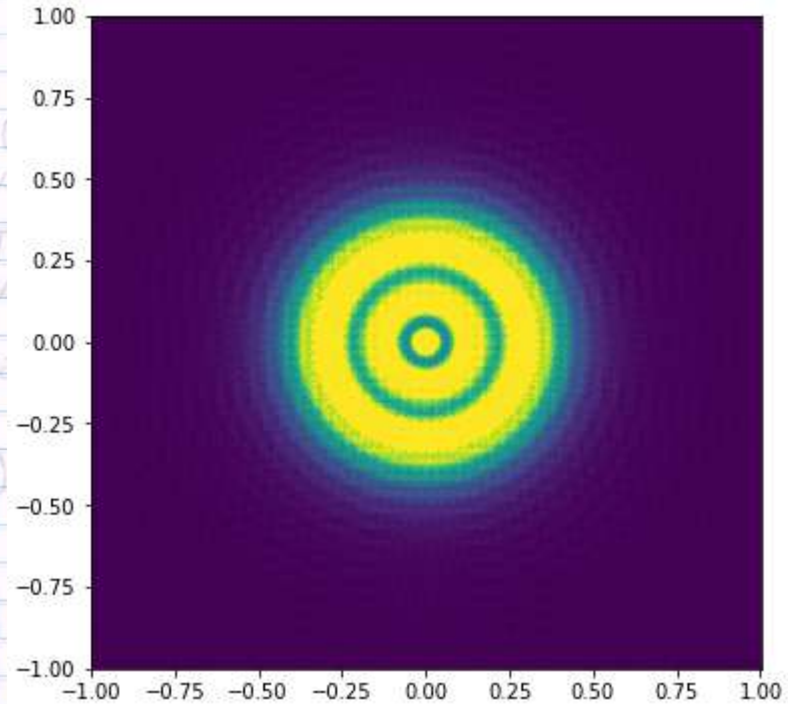


Mapa de intensidad analítica para z = 2000mm.

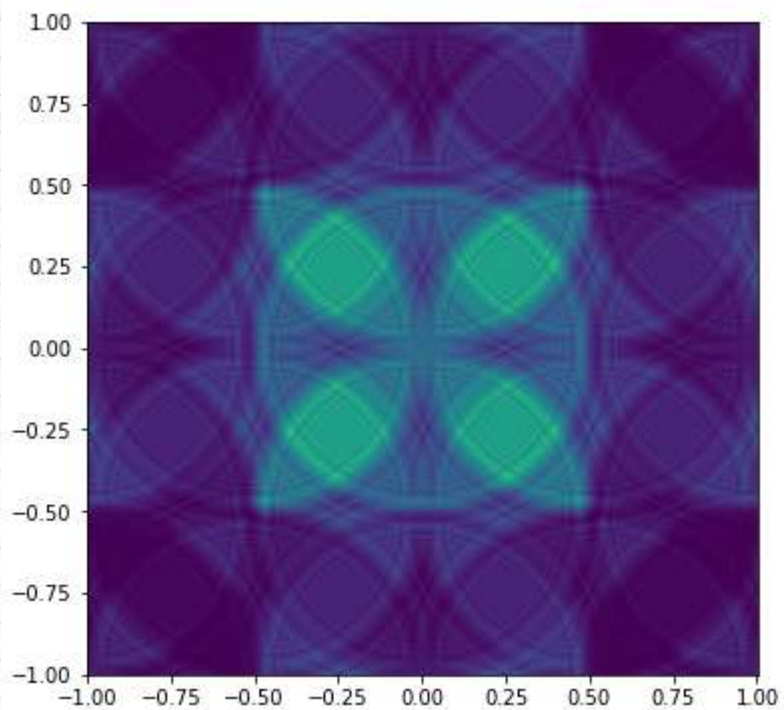


Mapa de intensidad numérica para z = 2000mm.

30. Considera una abertura circular de radio $r_0 = 0.5$ mm en $z=0$ por la cual pasa el haz del inciso anterior. Calcula nuevamente el campo en $z = 100$ mm y en 2000 mm. Traza los perfiles de intensidad a lo largo del eje x.



Mapa de intensidad para z = 100mm.



Mapa de intensidad para z = 2000mm.