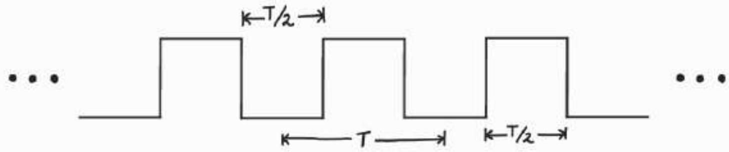
Ejercicios

1. Expresar un tren de pulsos cuadrados en una serie de Fourier exponencial.



Con un programa graficar la serie para 10, 10 y 1000 términos. Discutir las oscilaciones de Gibbs y analizar la convergencia.

Nuestro ten de pulso será la función $g(x)=\frac{T}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{rect}\left[\frac{2}{T}(x-nT)\right]$, entonces tenemos una función periódica de período T, de forma que $g(x)=\sum_{m}G_m e^{i2\pi mx/T}$, para $m\neq 0$:

$$G_m=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g(x)e^{-i2\pi mx/T}dx=\frac{1}{2}\int_{-T/4}^{T/4}e^{-i2\pi mx/T}dx=\frac{T}{i4\pi m}\left(e^{i\pi m/2}-e^{-i\pi m/2}\right),$$

$G_m=\frac{T}{2m\pi}\text{sen}(m\pi/2)=\frac{T}{4}\text{senc}(m\pi/2)$; mientra que para $m=0$:

$G_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g(x)\,dx=\frac{T}{4}$ que coincide con $\lim_{m\to 0}G_m$, por simplicidad lo dejaremos en términos de funciones senc. Así

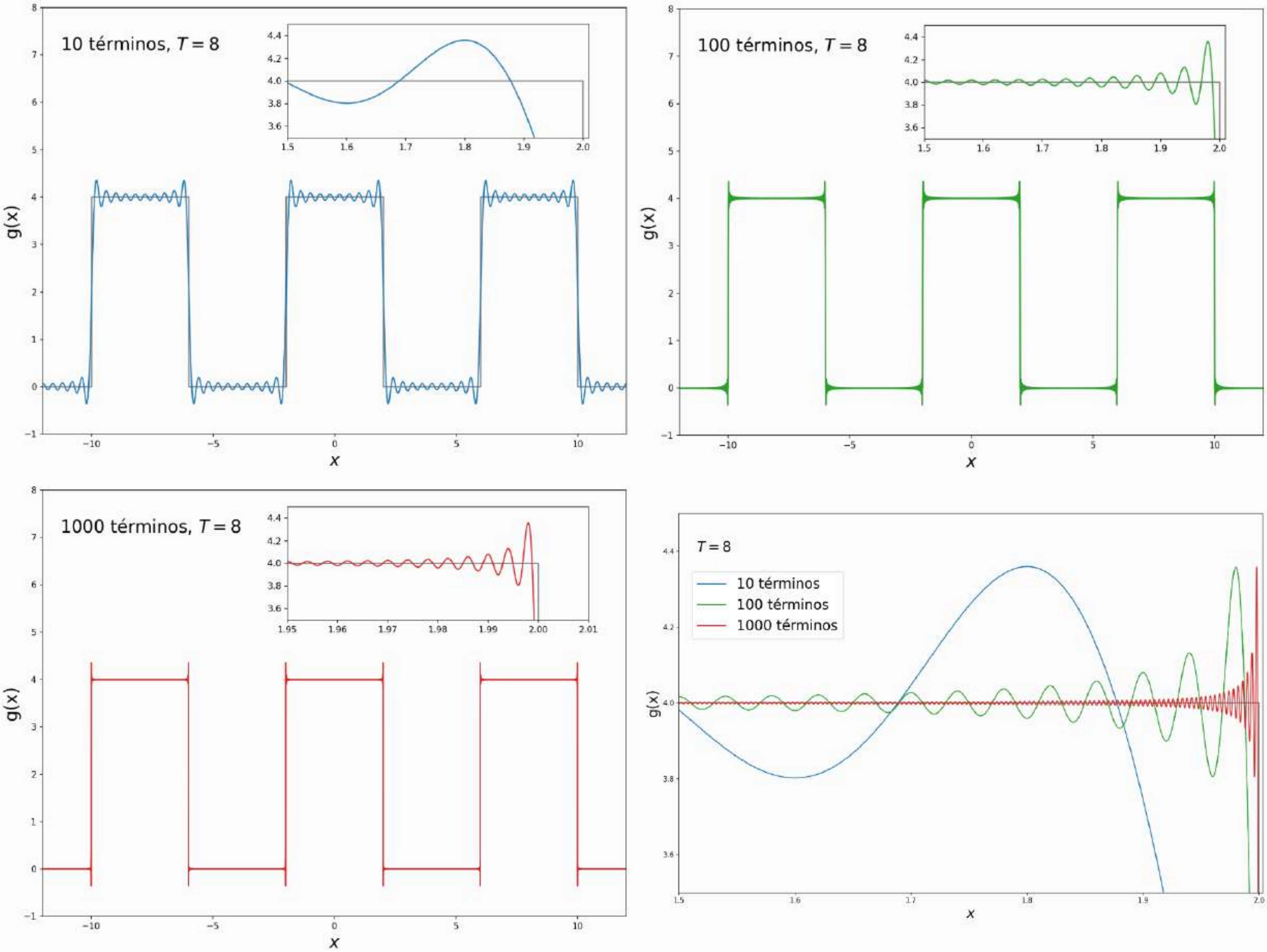
$$\boxed{g(x)=\frac{T}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\text{senc}(m\pi/2)e^{i2\pi mx/T}},$$

$$=\frac{(T/2)}{2}+T/2\sum_{m=1}^{\infty}\text{senc}\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{T/2}x\right).$$

Donde $T/2$ es la amplitud del tren de pulsos.

La segunda expresión, obtenida de la primera aislando el término $m=0$ y agrupando los términos m y $-m$, es para poder graficar. Esta expresión se puede simplificar como

$$g(x)=\frac{T}{4}+\frac{T}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\left[\frac{2(2m+1)\pi}{T}x\right].$$



Arriba están las gráficas de la serie de Fourier para 10, 100 y 1000 términos. Adicionalmente colocamos una gráfica con las tres series de Fourier en la vecindad donde ocurren una de las oscilaciones de Gibbs.

De las gráficas podemos concluir que en los puntos donde la derivada es discontinua surgen estas oscilaciones. A mayor número de términos entonces mejor será la aproximación, esto se ve en la última gráfica: para 10 términos tenemos que la aproximación no es muy buena y es visible en la primera gráfica; para 100 términos se tiene una mejora significativa, aún así en la última grafica vemos que las oscilaciones de menor amplitud todavía se alejan del valor real por 0.01 (aproximadamente) y que las oscilaciones van aumentando de amplitud; para 1000 términos la aproximación es muy buena, sin embargo, cerca del punto de derivada discontinua se van aglomerando y también van aumentando de amplitud.

De hecho, si observamos la última gráfica vemos que la "última" oscilación de cada serie (antes de bajar hacia el eje x) no cambia de amplitud y da el efecto de que a mayor número de términos las nuevas frecuencias agregan oscilaciones que "apachurran" esta "última" oscilación pero que no cambia de amplitud. Por lo que, en el límite con infinitos términos la serie de Fourier será puntualmente convergente al tren de pulsos cuadrados en todo su dominio excepto en estos puntos de derivada discontinua. De hecho, como se ve en las gráficas de 100 y 1000 términos, parece ser que sin importar que tantos términos se agreguen siempre estarán esas "pestañas" que son esa "última" oscilación de la que se discutió.

Para saber que sucede en el límite de infinitos términos debemos analizar la convergencia en uno de estos puntos. En la expresión general tenemos que uno de estos puntos está en $x = T/4$:

$$g(T/4) = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi/2)^{\to 0}}{2m+1} = \frac{T}{4}.$$

Como vemos, en estos puntos el valor de la serie converge al valor medio pues el tren tiene amplitud $T/2$.

2. Expresar la función $g(x) = \text{sen}(2\pi f_0 x)$ en una serie de Fourier exponencial.

La función $g(x) = \text{sen}(2\pi f_0 x)$ tiene período $T = 1/f_0$ de manera que

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{i2\pi n f_0 x} \quad \text{con} \quad G_n = f_0\int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} g(x) e^{-i2\pi n f_0 x}dx = f_0\int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} \text{sen}(2\pi f_0 x)e^{-i2\pi n f_0 x}dx$$

$$= \frac{1}{-i2\pi n}\left[\text{sen}(2\pi f_0 x)e^{-i2\pi n f_0 x}\Big|_{-1/2f_0}^{1/2f_0} - 2\pi f_0\int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}}\cos(2\pi f_0 x)e^{-i2\pi n f_0 x}dx\right]$$

$$= \frac{f_0}{in}\frac{1}{-i2\pi n f_0}\left[\cos(2\pi f_0 x)e^{-i2\pi n f_0 x}\Big|_{-1/2f_0}^{1/2f_0} + 2\pi f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\text{sen}(2\pi f_0 x)e^{-i2\pi n f_0 x}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi n^2}\left[2i\,\text{sen}(\pi n) + 2\pi G_n\right] = \frac{1}{n^2}G_n \Rightarrow G_n = \frac{1}{n^2}G_n,$$ lo cual es válido

si $n \neq 0$ y es una identidad para $n = \pm 1 \Rightarrow G_n = 0 \;\; \forall n \neq 0, \pm 1$. Luego

$$G_0 = f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\text{sen}(2\pi f_0 x)dx = \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi f_0 x)\Big|_{-1/2f_0}^{1/2f_0} = 0 \Rightarrow G_0 = 0.$$

Finalmente $$G_{\pm 1} = f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\text{sen}(2\pi f_0 x)e^{\mp i2\pi f_0 x}dx = \frac{f_0}{2i}\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} e^{i2\pi(1\mp 1)f_0 x}dx -$$

$$\frac{f_0}{2i}\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} e^{-i2\pi(1\pm 1)f_0 x}dx = \pm\frac{f_0}{2i}\left(\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}dx - \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}e^{-i4\pi f_0 x}dx\right) = \pm\frac{f_0}{2i}\left(\frac{1}{f_0} +\right.$$

$$\left.\frac{1}{i4\pi f_0}\left[e^{-i2\pi} - e^{i2\pi}\right]\right) = \pm\frac{1}{2i} \Rightarrow G_{\pm 1} = \pm\frac{1}{2i}.$$

Por lo que los únicos términos distintos de cero son G_1 y G_{-1}, así que

$$\operatorname{sen}(2\pi f_0 x) = \frac{1}{2i} e^{i2\pi f_0 x} - \frac{1}{2i} e^{-i2\pi f_0 x}.$$

Que es justamente la expresión de la función seno en exponenciales complejas.

3. Demostrar que $\mathcal{F}\{c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)\}(f) = c_1 G_1(f) + c_2 G_2(f)$.

$\mathcal{F}\{c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)] e^{-i2\pi f x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} c_1 g_1(x) e^{-i2\pi f x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} c_2 g_2(x) e^{-i2\pi f x} dx = c_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) e^{-i2\pi f x} dx}_{G_1(f)} + c_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) e^{-i2\pi f x} dx}_{G_2(f)}$, entonces

$$\mathcal{F}\{c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)\}(f) = c_1 G_1(x) + c_2 G_2(f).$$

4. Demostrar que $\mathcal{F}\{g(x/a)\}(f) = |a| G(af)$.

$\mathcal{F}\{g(x/a)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x/a) e^{-i2\pi f x} dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} g(x/a) e^{-i2\pi f x} dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-\frac{M}{a}}^{\frac{M}{a}} g(s) e^{-i2\pi (af) s} a\, ds$

$= a \lim_{M\to\infty} \int_{-M/a}^{M/a} g(s) e^{-i2\pi (af) s} ds$, si $a > 0 \Rightarrow \pm M/a \xrightarrow[M\to\infty]{} \pm\infty$ mientras que si $a < 0 \Rightarrow \pm M/a \xrightarrow[M\to\infty]{} \mp\infty$, así $\mathcal{F}\{g(x/a)\}(f) = a \int_{-\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty}^{\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty} g(s) e^{-i2\pi (af) s} ds$ o de forma equivalente $\mathcal{F}\{g(x/a)\}(f) = |a| \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi (af) x} dx}_{G(af)}$, entonces

$$\mathcal{F}\{g(x/a)\}(f) = |a| G(af).$$

5. Demostrar que si $g(x,y) = u(x - x_0, y - y_0)$ entonces

$$\mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x, f_y) = U(f_x, f_y) e^{-i2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)}.$$

$\mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x, f_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} u(x - x_0, y - y_0) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy =$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u(r,s) e^{-i2\pi[f_x(r + x_0) + f_y(s + y_0)]} dr ds$$

$$= e^{-i2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^2} u(r,s) e^{-i2\pi(f_x r + f_y s)} dr\, ds}_{U(f_x, f_y)}$$

$$\therefore \mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x, f_y) = U(f_x, f_y)\, e^{-i2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)}.$$

6. Demostrar el teorema de Parseval (conservación de energía).

$$|G(f)|^2 = G(f)\, G^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x} dx \int_{-\infty}^{\infty} g^*(s) e^{i2\pi f s} ds = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x) g^*(s) e^{i2\pi(s-x)f} ds\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x) g^*(s) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(s-x)f} df}_{2\pi\,\delta[2\pi(s-x)] = \delta(s-x)} ds\, dx = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x) g^*(s)\, \delta(s-x)\, ds\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx.$$

7. Demostrar que si $g(x) = u_1(x) \otimes u_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) u_2(x-s) ds$ entonces

$$\mathcal{F}\{g(x)\}(f) = U_1(f)\, U_2(f).$$

$$\mathcal{F}\{g(x)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) u_2(x-s) e^{-i2\pi f x} dx\, ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) u_2(r) e^{-i2\pi f(s+r)} dr\, ds,$$

$$\mathcal{F}\{g(x)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) e^{-i2\pi f s} ds \int_{-\infty}^{\infty} u_2(r) e^{-i2\pi f r} dr = U_1(f)\, U_2(f).$$

8. Demostrar que si $g(x) = u(x) * u(*) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s) u^*(x-s) ds$ entonces

$$\mathcal{F}\{g(x)\}(f) = |U(f)|^2.$$

Utilizando lo anterior con $u_1(x) = u(x)$ y $u_2(x) = u^*(x)$, de manera que $U_1(f) = U(f)$ y $U_2(f) = U^*(f)$.

9. Demostrar que $\mathcal{F}\{g'(x)\}(f) = i2\pi f\, \mathcal{F}\{g(x)\}(f)$.

$\mathcal{F}\{g'(x)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) e^{-i2\pi f x} dx = g(x)e^{-i2\pi f x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i2\pi f)\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x} dx$, dado que suponemos que existe $\mathcal{F}\{g(x)\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, así

$$\mathcal{F}\{g'(x)\}(f) = i2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x} dx = i2\pi f\, \mathcal{F}\{g(x)\}(f).$$

10. Demostrar que $\mathcal{F}\{g^{(n)}(x)\}(f) = (i2\pi f)^n \mathcal{F}\{g(x)\}(f)$.

Por inducción, ya lo tenemos para $n=1$, supongamos para $n=k$, luego

$$\mathcal{F}\{g^{(k+1)}(x)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g^{(k+1)}(x) e^{-i2\pi f x} dx = g^{(k)}(x) e^{-i2\pi f x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i2\pi f)\int_{-\infty}^{\infty} g^{(k)}(x) e^{-i2\pi f x} dx,$$

$$= i2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} g^{(k)}(x) e^{-i2\pi f x} dx = i2\pi f\, \mathcal{F}\{g^{(k)}(x)\}(f) = (i2\pi f)^n \mathcal{F}\{g(x)\}(f).$$

11. Sea $\mathcal{F}_X\{g\}(f_\xi, f_\eta) = \frac{1}{X}\iint_{\mathbb{R}^2} g(\xi,\eta) e^{-i\frac{2\pi}{X}(f_\xi \xi + f_\eta \eta)} d\xi\, d\eta$

a) Calcular $\mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g\}\}$.

b) ¿Qué sucede si $a>b$? ¿Y si $a<b$?

a) $\mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g\}\}(w_x, w_y) = \frac{1}{a}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{b}\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) e^{-i\frac{2\pi}{b}(f_x x + f_y y)} dx\, dy\, e^{-i\frac{2\pi}{a}(w_x f_x + w_y f_y)} df_x\, df_y$

$$= \frac{1}{ab}\iiiint_{\mathbb{R}^4} g(x,y) e^{-i2\pi\left(\frac{x}{b}+\frac{w_x}{a}\right)f_x} e^{-i2\pi\left(\frac{y}{b}+\frac{w_y}{a}\right)f_y} dx\, dy\, df_x\, df_y$$

$$= \frac{1}{ab} b^2 \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, \delta\!\left(x + \frac{b}{a}w_x\right)\delta\!\left(y+\frac{b}{a}w_y\right) dx\, dy = \frac{b}{a} g\!\left(-\frac{b}{a}w_x, -\frac{b}{a}w_y\right).$$

$$\therefore\ \mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g\}\}(w_x, w_y) = \frac{b}{a} g\!\left(-\frac{b}{a}w_x, -\frac{b}{a}w_y\right).$$

b) Si $a>b$ entonces $\mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g\}\}$ es la función g estrechada verticalmente, estirada en las direcciones x y y, y reflejada por los planos YZ y XZ. Si $a<b$ $\mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g\}\}$ es la función g estirada verticalmen

te, estrechada en las direcciones x y y, y reflejada por los planos YZ y XZ.

12. Sea $\text{circ}(r)=1$ si $r<1$, $1/2$ si $r=1$ y 0 si $r>1$ con $r=\sqrt{x^2+y^2}$, encontrar $\mathcal{F}\{\text{circ}(r/a)\}(\rho)$ con $\rho=\sqrt{f_x^2+f_y^2}$.

Primero expresemos la transformada de Fourier en otras variables, en concreto de $(x,y)\xrightarrow[\mathcal{F}]{}(f_x,f_y)$ a $(r,\theta)\xrightarrow[\mathcal{F}]{}(\rho,\phi)$ en donde $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=y/x$, $\rho=\sqrt{f_x^2+f_y^2}$ y $\tan\phi=f_y/f_x$. De forma que

$$\mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x,f_y)=\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)e^{-i2\pi(f_x x+f_y y)}dxdy=\iint_{\mathbb{R}^2} g(r,\theta)e^{-i2\pi\rho r\cos\theta\cos\phi}\times$$

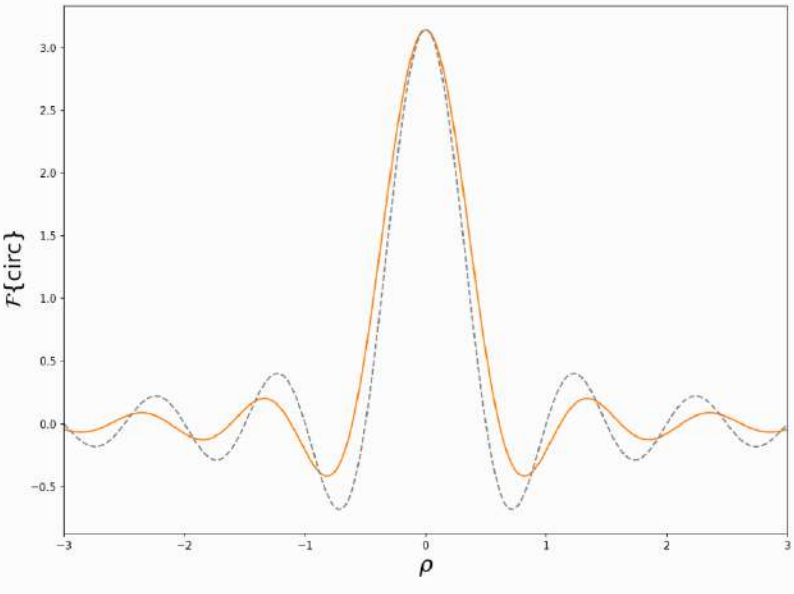
$$e^{-i2\pi\rho r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi}\,r\,dr\,d\theta=\iint_{\mathbb{R}^2} r g(r,\theta)e^{-i2\pi\rho r\cos(\theta-\phi)}dr\,d\theta,$$

dado que $J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iz\cos(\theta-\phi)}d\theta$ tenemos que si $g(r,\theta)=g(r)$ entonces $\mathcal{F}\{g(x,y)\}(f_x,f_y)\longrightarrow\mathcal{F}\{g(r)\}(\rho)=2\pi\int_0^{\infty}r g(r)J_0(2\pi\rho r)dr$. Por tanto

$$\mathcal{F}\{\text{circ}(r/a)\}(\rho)=2\pi\int_0^{\infty}r\,\text{circ}(r/a)J_0(2\pi\rho r)dr=2\pi\int_0^{a}r J_0(2\pi\rho r)dr$$

$$=\frac{2\pi}{(2\pi\rho)^2}\underbrace{\int_0^{2\pi\rho a}\xi J_0(\xi)d\xi}_{(2\pi\rho a)J_1(2\pi a\rho)}=\frac{a}{\rho}J_1(2\pi a\rho)=\pi a^2\,\text{bsenc}(2\pi a\rho),$$

donde la función $\text{bsenc}(z)=2J_1(z)/z$ es la función Bessel senc que vale 1 en $z=0$.



$$\mathcal{F}\{\text{circ}(r/a)\}(\rho)=\pi a^2\,\text{bsenc}(2\pi a\rho)$$