Entonces tenemos la ecuación de onda escalar:

$$\nabla^2 U + \frac{n^2}{c^2}\omega^2 U = 0,$$

con $E(\underline{r}) = Re\{U(\underline{r})e^{i\omega t}\}$. De la misma forma

$$\nabla^2 U + n^2 k_0^2 U = 0 \iff \nabla^2 U + k^2 U = 0.$$

En coordenadas cartesianas

$$U(\underline{r}) = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \Rightarrow U(\underline{r}) = Ae^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} + Be^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}.$$

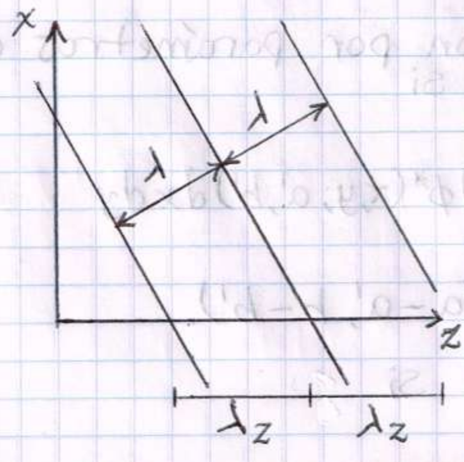
En coordenadas cilíndricas se tienen los modos de Bessel

$$U(r) = U(\rho,\phi,z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \Rightarrow U(\underline{r}) = J_m(\rho k_T)e^{im\phi}e^{-i\beta z},$$

con $k_T = \sqrt{k^2-\beta^2} = \sqrt{k_x^2+k_y^2}$, $\beta^2 = k_z^2$ y m es un número entero.

Regresando a ondas planas... Así como tenemos una frecuencia ν, también hay una frecuencia espacial, la longitud de onda λ está relacionada, a saber $f = \lambda^{-1}$.

Los frentes de onda satisfacen que $\underline{k}\cdot\underline{r}$ es constante, como tenemos una onda plana $e^{\pm i\underline{k}\cdot\underline{r}}$ entonces λ es la distancia entre planos de frentes de onda de una misma fase.



Dado un sistema coordenado es posible definir, para una onda plana, las frecuencias f_x, f_y y f_z, tales que

$$f_i = \frac{1}{\lambda_i},$$

así que f_x, f_y y f_z están relacionadas con los cosenos directores de la onda plana:

$$k_x = k\cos\alpha = 2\pi f_x,\quad k_y = k\cos\beta$$

y $k_z = k\cos\gamma = 2\pi f_z$; de modo que $f_i = \cos\theta_i/\lambda$.

06/09/2021

De manera que $U(\underline{r}) = Ae^{-i2\pi \underline{f}\cdot\underline{r}} + Be^{i2\pi\underline{f}\cdot\underline{r}}$.

Por otro lado, k_x, k_y y k_z no son completamente independientes (por separación de variables) y se tiene que

$$k_z = \pm\sqrt{k^2-(k_x{}^2+k_y{}^2)} \quad \text{o equiv.} \quad f_z = \pm\sqrt{\lambda^{-2}-(f_x{}^2+f_y{}^2)}$$

• Si $f_x{}^2+f_y{}^2 > \lambda^{-2} \Rightarrow f_z \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{\pm ik_z z} = e^{\mp 2\pi a z}$ en donde $a = \sqrt{f_x{}^2+f_y{}^2-\lambda^{-2}}$; puesto que para $z \to \infty$ mi campo tiene que ser cero, entonces A o B vale cero (dependiendo del signo de f_z.

En este caso se tiene una onda evanescente (onda no propagante), de modo que la solución es:

$$U(\underline{r};\underline{f}) = Ce^{-\alpha_0 z}e^{\pm i2\pi(f_x x+f_y y)},$$

donde $\alpha_0 = 2\pi|f_z|$.

• Si $f_x{}^2+f_y{}^2 < \lambda^{-2}$ entonces se tiene una onda propagante

$$U(\underline{r};\underline{f}) = Ce^{-i2\pi(f_x x+f_y y-\frac{\alpha_0}{2\pi}z)}$$

→ Relaciones de ortogonalidad y completitud:

Dos funciones ϕ, que se diferencian por parámetros a y b continuos, son <u>ortogonales</u> si

$$\langle\phi(x,y;a,b),\phi(x,y;a',b')\rangle := \iint_{\mathbb{R}^2}\phi(x,y;a,b)\phi^*(x,y;a',b')\,dx\,dy$$
$$= \delta(a-a', b-b').$$

y se dicen que cumplen completez si

$$\langle\phi(x,y;a,b),\phi(x',y';a,b)\rangle := \iint_{\mathbb{R}^2}\phi(x,y;a,b)\phi^*(x',y';a,b)\,da\,db$$
$$= \delta(x-x', y-y').$$

06/09/2021

La función $\phi(x,y;a,b)=e^{-i2\pi(ax+by)}$ satisfacen las anteriores; esto es, las ondas planas son una base ortogonal.

• Rebanadas de ondas planas: es la superficie dada por $U(\underline{r};\underline{f})$ para un z dado (que hemos puesto como dirección de propagación).

Entonces puedo construir un campo arbitrario tomando como base a las ondas planas (a sus rebanadas):

$$U(\underline{r})=\iint_{\mathbb{R}^2}\underbrace{\tilde{U}(f_x,f_y;z)}_{\text{evaluada a } z \text{ fija pero arbitraria}}e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}df_x df_y,$$

donde U ya no es necesariamente de onda plana; lo anterior es equivalente a conocer qué ecuación satisface $\tilde{U}$ respecto a la de Helmholtz que satisface U, de manera que

$$\frac{d^2}{dz^2}\tilde{U}+[k^2-4\pi^2(f_x^2+f_y^2)]\tilde{U}=0 \Rightarrow \tilde{U}(f_x,f_y;z)=\tilde{U}_0 e^{-i\alpha_0 z},$$

esto es que tenemos una expansión en ondas planas con

$$\tilde{U}(f_x,f_y;z)=\tilde{U}(f_x,f_y;0)\,e^{i\alpha_0 z};$$

siendo $\tilde{U}(f_x,f_y;0)$ el peso de las ondas planas y a $e^{i\alpha_0 z}$ se le conoce como <u>propagador del espectro del campo</u>. Así, a la ecuación

$$U(\underline{r})=\iint_{\mathbb{R}^2}\tilde{U}(f_x,f_y;0)\,e^{i\alpha_0 z}e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}df_x df_y,$$

se le denomina representación espectral angular.

¿Cómo interpretar esto?

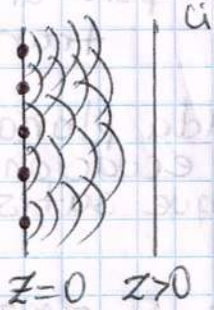
06/09/2021

Lo que podemos conocer es el campo de entrada, esto es, conocemos $U(x,y;0)$.

1. Primero descomponemos el campo de entrada en rebanadas de ondas planas; esto es equivalente a conocer los pesos de esta descomposición, los cuales son $\tilde{U}(f_x, f_y; 0)$ dados por

$$\tilde{U}(f_x, f_y; 0) = \iint_{\mathbb{R}^2} U(x,y;0) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx\, dy,$$

esta expresión nos dice que cada punto (x,y) en $z=0$ emite una rebanada de onda y que tenemos que sumar todas aquellas que compartan el par de frecuencias espaciales (f_x, f_y).

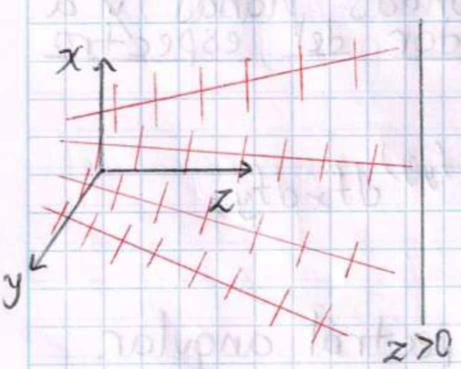


2. Con estos pesos $\tilde{U}(f_x, f_y; 0)$ que están asociados a las rebanadas ahora se construyen las ondas planas en todo el espacio; para ello se utiliza el propagador

$$\tilde{U}(f_x, f_y; 0) e^{i\alpha_0 z} e^{i2\pi(f_x x + f_y y)},$$

el trabajo del propagador es asignar el peso correcto de la onda plana, es decir, propaga el peso de $z=0$ a $z>0$.

3. Finalmente se suman todas estas ondas planas en $z>0$ para obtener $U(x,y;z)$



$$U(x,y;z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{U}(f_x, f_y; 0) e^{i\alpha z} e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x\, df_y.$$

08/09/2021

Ya vimos que el espectro en z está dado por éste en el origen por el propagador

$$\tilde{U}(f_x, f_y; z) = \tilde{U}(f_x, f_y; 0)\, e^{i\alpha z},$$

$\alpha = 2\pi\sqrt{\lambda^{-2} - (f_x^2 + f_y^2)}$; de modo que:

$$U(\underline{r}) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}(f_x, f_y; z)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}(f_x, f_y; 0)\} \otimes \mathcal{F}^{-1}\{e^{i\alpha z}\}.$$

En lo anterior, $e^{i\alpha z}$ es la función de transferencia del campo eléctrico, mientras que $\mathcal{F}^{-1}\{e^{i\alpha z}\}$ se conoce como la respuesta al impulso $h(\underline{r})$. Así

$$U(x, y; z) = U(x, y; 0) \otimes h(x, y; z)$$

esto es la propagación en el espacio libre. De lo que ya conocemos de teoría electromagnética tenemos que h está relacionada con la función de Green del campo EM que es el campo de un dipolo eléctrico oscilante.

El campo $U(x, y; 0)$ es uno que conocemos en $z=0$ y es el resultado lejano de las fuentes para que podamos trabajar en ecuaciones sin fuentes. $U(x, y; 0)$ se puede pensar como la emisión de radiación debido a deltas $(h(x, y; z))$ cuyos pesos son $U(x, y; 0)$; de manera que en un punto z el campo es la suma de todas las emisiones (de allí la convolución), lo cual es el principio de Huygens-Fresnel.

Lejos de las fuentes se tienen ondas esféricas y eso es lo que encontró Weyl.

Así $h(x, y; z) = \dfrac{e^{ikr}}{2\pi r}(r^{-1} - ik)\dfrac{z}{r}$, donde z/r es la proyección del campo $U(x, y; z)$ sobre el plano $Z = z$.

El termino e^{ikr}/r es una onda esférica que sale del origen ($x' = y' = 0$, con x', y' las variables mudas de la convolución).

Finalmente, el término e^{ikr}/r^2 es una onda esférica distorsionada por $1/r$.

08/09/2021

Así $U(x,y;z)=\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{2\pi R}\left(-ik+\frac{1}{R}\right)\frac{z}{R}\,dx'dy'$, que es

justamente una suma de ondas "tipo" esféricas que interfieren (por estar trabajando con fasores) en el plano $z=z$ y que son emitidas desde los puntos x', y'; y entonces se suman. $R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+z^2$.

La anterior se conoce como solución de Rayleigh - Sommerfeld.

Paréntesis: Campo vectorial en espacio libre.

$\nabla\cdot\underline{E}=0 \Rightarrow E_z=-\int\left(\frac{\partial}{\partial x}E_x+\frac{\partial}{\partial y}E_y\right)dz$ con $E_z\to 0$ si

$z\to\infty$ (suposición). Como vemos, una componente no es independiente y nos lleva a la solución de Rayleigh-Sommerfeld-Smite.

Observemos que

$-ik+\frac{1}{r}=k\left(-i+\frac{1}{kr}\right)=k\left(-i+\frac{\lambda}{2\pi r}\right)$. Si analizamos valores $r\gg\lambda$ entonces $-ik+r^{-1}\simeq -ik$, de forma que

$$h(x,y;z)\simeq\frac{e^{ikr}}{2\pi r}\left(-ik\frac{z}{r}\right),$$

que es onda esférica. Por lo tanto

$$U(x,y;z)\simeq\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{2\pi R}(-ik)\frac{z}{R}\,dx'dy'.$$

Otra aproximación es $R\sim z$ de modo que $\frac{e^{ikR}}{R}\frac{z}{R}\to\frac{e^{ikR}}{z}$, con esto

$$U(x,y;z)\simeq\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{2\pi z}(-ik)\,dx'dy'.$$

Estas aproximaciones no son muy restrictivas. Pero la siguiente sí lo es:

08/09/2021

• Aproximación de Fresnel

$$kR = kz\sqrt{\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}+1}\ ,\quad \text{sea}\quad \xi = [(x-x')^2+(y-y')^2]/z^2;$$

lo que ahora se pide es que $\xi < 1$, de manera tal que

$$kR \simeq kz + \left.\frac{kz}{2\sqrt{\xi+1}}\right|_{\xi=0}\xi - \left.\frac{kz}{8(\xi+1)^{3/2}}\right|_{\xi=0}\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3),\ \text{esto es}$$

$$kR \simeq kz + \frac{1}{2}kz\left[\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}\right] - \frac{1}{8}kz\left[\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}\right]^2 + \dots$$

Que $\xi<1$ es pedir que $R\sim z$ lo cual ya teníamos; ahora nos interesa pedir como aproximación que

$$\frac{1}{8}kz\left[\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}\right]^2 \ll 1\ \text{rad},$$

que es la llamada condición de Fresnel; así:

$$e^{ikR} \simeq e^{ikz}e^{ikz\xi/2} \longleftarrow$$ por ello la condición es en radianes.

De forma total

$$U(x,y;z) = \iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\frac{e^{ikz}}{2\pi z}e^{ikz\xi/2}(-ik)\,dx'dy',$$

o escrito de otra forma

$$U_F(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}dx'dy'$$

Aproximación de Fresnel