20/09/2021

Las variables x', y' son en el plano del objeto $(z=0)$

Observemos que el exponente de e en la aproximación de Fresnel se puede aproximar por

$$\frac{k}{2z}\left[(x^2-2xx'+x'^2)+(y^2-2yy'+y'^2)\right] \approx \frac{k}{2z}\left(x^2+y^2+2xx'-2yy'\right)$$

para ello se pide que $\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2) \ll 1$ rad, que es mucho más restrictivo que la condición de Fresnel y es para objetos pequeños (campo lejano).

$$\Rightarrow U_F \longrightarrow U_{FH}(x,y;z) = \frac{e^{ikz}e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z}}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0) \times e^{-i2\pi(f_x x'+f_y y')}dx'dy'$$

$Z_{FH} \gg \frac{k}{2}(x'^2+y'^2)_{máx}$

condición de Fraunhofer

$$\therefore U_{FH}(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z}\mathcal{F}\{U(x',y';0)\}\Big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z},\, f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

Por lo que en campo lejano tenemos que el campo de una fuente es su transformada de Fourier. Si ponemos una abertura circular sabemos que el campo será una función circ y cuya TF es la bsenc, cuya norma (módulo) al cuadrado es la función de Airy; que es justo lo que se observa.

Esto es la aproximación y el regimen de Fraunhofer y la condición más restrictiva es la condición de Fraunhofer.

Regresemos a Fresnel, veamos que

$$U_F(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}U(x,y;0) \otimes h_F(x,y)$$

con $h(x,y) = e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}$ la respuesta al impulso de Fresnel. Mientras que $\mathcal{F}\{h\}$ es la función de transferencia de Fresnel, H_F.

Algunos meten el factor funcional $e^{ikz}/i\lambda z$ en la respuesta al impulso de Fresnel; en este caso

$$H_F(f_x, f_y; z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}(\lambda z)^2 e^{i\pi\lambda z(f_x^2+f_y^2)},$$

que también se conoce como propagador de Fresnel.

En Rayleigh-Sommerfeld se tiene que

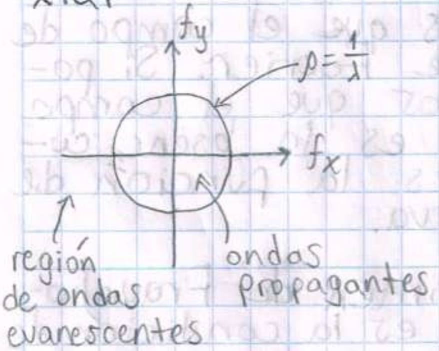
$$|\mathcal{F}\{U\}| = |\mathcal{F}\{U\}|\Big|_{z=0},$$

pues el propagador es sólo una fase, pero en el caso de Fresnel

$$|\mathcal{F}\{U_F\}| = \lambda z\, |\mathcal{F}\{U_F\}|\Big|_{z=0}.$$

Así como tenemos la condición de Fresnel en el espacio de coordenadas, ¿cual es la condicion en el espacio de frecuencias para pasar de H a H_F?

La solución de Fresnel corresponde a la solución paraxial



La condición es

$$\frac{1}{\lambda^2} >> f_x^2 + f_y^2,$$

entonces, de entrada en Fresenel no hay ondas evanescentes. La condición que se toma es la del desarrollo de Taylor:

$$\frac{1}{8}(\lambda^2 f_x^2 + \lambda^2 f_y^2)^2 \frac{2\pi}{\lambda} z \ll 1 \text{ rad}.$$

Como $\lambda^2(f_x^2+f_y^2) = \operatorname{sen}^2\gamma$ con γ el ángulo del coseno director del eje z, y por ser ángulos pequeños podemos hacer $\operatorname{sen}\gamma \simeq \gamma$, así

$$\frac{1}{8}\gamma^4 \frac{2\pi}{\lambda} z << 1 \text{ rad},$$

que es la condición de Fresnel (angular, tenemos z), que es menos restrictiva.

22/09/2021

Trabajemos algunos ejemplos:

1. Una abertura rectangular de largos l_x y l_y.

Entonces en el regimen de Fraunhofer:

$$U(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}\{U(\xi,\eta;0)\}\Big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z}, f_y=\frac{y}{\lambda z}},$$

donde $U(\xi,\eta,0) = U_0 \operatorname{rect}(x/l_x)\operatorname{rect}(y/l_y)$. Definimos una transferencia, una transmitancia

$$t_A(\xi,\eta;0) = \frac{U(\xi,\eta;0)}{U_0}.$$

Entonces $\mathcal{F}\{t_A(\xi,\eta;0)\}(f_x,f_y) = l_x l_y \operatorname{senc}(\pi l_x f_x)\operatorname{senc}(\pi l_y f_y)$

$$\Rightarrow U(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik(x^2+y^2)/2z} \underbrace{l_x l_y}_{A} \operatorname{senc}\left(\frac{\pi l_x x}{\lambda z}\right)\operatorname{senc}\left(\frac{\pi l_y y}{\lambda z}\right).$$

La intensidad es

$$I(x,y;z) \propto \frac{A^2}{(\lambda z)^2} \operatorname{senc}^2\left(\frac{\pi l_x x}{\lambda z}\right)\operatorname{senc}^2\left(\frac{\pi l_y y}{\lambda z}\right),$$

este patrón no cambia al alejarnos, sólo se ensancha.

En el regimen de Fresnel (Fraunhofer $\subset$ Fresnel) tenemos

$$U_F(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} U(\xi,\eta;0) e^{i\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]} d\xi d\eta$$

$$= \frac{e^{ikz}}{i} I_x(x) I_y(y), \quad \text{donde}$$

$$I_x(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}(\xi/l_x) e^{i\frac{k}{2z}(x-\xi)^2} d\xi = \frac{\sqrt{\lambda z}}{\sqrt{\lambda z}}\int_{-\frac{l_x}{2\sqrt{\lambda z}}}^{\frac{l_x}{2\sqrt{\lambda z}}} e^{i\pi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda z}}-\xi'\right)^2} d\xi',$$

el número de Fresnel es $N_F = (l/2)^2/\lambda z$ donde l es el ancho a lo largo de una coordenada.

$$\Rightarrow I_x(x) = \int_{-\sqrt{N_F}}^{\sqrt{N_F}} e^{i\pi\left(\sqrt{N_F}\frac{2x}{l_x} - \xi'\right)^2} d\xi',$$

definimos las integrales de Fresnel

$$C(z) = \int_0^z \cos(\pi t^2/2)\,dt,$$

$$S(z) = \int_0^z \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt,$$

así

$$I_x(x) = \left\{C(t_2) + C(t_1) + i\left[S(t_2) + S(t_1)\right]\right\}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

con $t_1 = \sqrt{2N_F}\,(1 + 2x/l_x)$ y $t_2 = \sqrt{2N_F}\,(1 - 2x/l_x)$.

$$\Rightarrow I \propto |U|^2 = I_x^2(x)\, I_y^2(y)$$

• Rejillas de difracción: tienen una estructura periódica a lo largo de un eje con periodo L (variaciones en fase o amplitud). Entonces

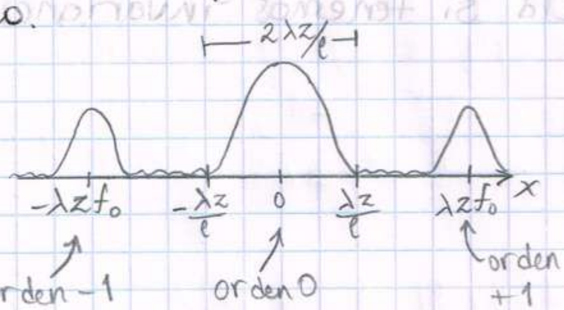
$t_A = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 \xi)\right]\operatorname{rect}(\xi/L_x)\operatorname{rect}(\eta/L_y)$ es una rejilla de amplitud cosenoidal; $f_0^{-1} = L$.

$t_A = e^{i\frac{m}{2}\operatorname{sen}(2\pi f_0 \xi)} \operatorname{rect}(\xi/L_x)\operatorname{rect}(\eta/L_y)$ es una rejilla de fase cosenoidal. Tomemos la rejilla de amplitud:

$\mathcal{F}\{t_A\}$ tiene tantos ordenes de difracción como términos tenga la serie de Fourier de la transmitancia.

$$U_{FH}(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \frac{A}{2}\operatorname{senc}\left(\frac{l y}{\lambda z}\right)\left[\operatorname{senc}\left(\frac{l x}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2}\operatorname{senc}\left(\frac{l}{\lambda z}(x + \lambda z f_0)\right) + \frac{m}{2}\operatorname{senc}\left(\frac{l}{\lambda z}(x - \lambda z f_0)\right)\right]$$

si $\lambda z f_0 >> 2\lambda z/\ell$ ($f_0 >> 1/\ell$) entonces los órdenes de difracción no interfieren (es despreciable). En este caso la intensidad se puede escribir como suma de senc's al cuadrado.



Una pregunta interesante en rejillas es: ¿cuál es la eficiencia de mi rejilla en el orden m?

Es $\eta_m = \frac{P_m}{P}$, con P_m la potencia del orden m y P la potencia total.

$P = \iint_{\mathbb{R}^2} rect^2(x/\ell)\, rect^2(y/\ell)\, dx\, dy = A^2$ (es la potencia de entrada ($P \propto \int I \propto \int |U|^2$). $P_m \propto \iint_{\mathbb{R}^2} |U_{FH,m}|^2 dx\, dy$, para calcular lo anterior se puede usar el teorema de Parseval.

En este caso $\eta_m = m^2/16$ y $\eta_0 = 1/4$

Recordando que para la rejilla cuadrada

$$U_{FH} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \left[\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\ell x}{\lambda z}\right) + \frac{m}{4}\delta\left(\frac{\ell}{\lambda z}(x+\lambda z f_0)\right) + \frac{m}{4}\delta\left(\frac{\ell}{\lambda z}(x-\lambda z f_0)\right)\right]$$
$$\otimes\, senc\left(\frac{\ell x}{\lambda z}\right) senc\left(\frac{\ell y}{\lambda z}\right),$$

la parte en corchetes es la difracción de una abertura infinita (rejilla infinita) y por ser δ no interfieren y así éstas almacenan toda la energía por órdenes y así tenemos la eficiencia de los órdenes (factores al cuadrado). Ya la abertura finita es la convolución y eso sólo hace que la energía se distribuya, pero no se gana ni pierde.

Para una rejilla con una abertura general $t_A = f(x, f_0)$ con $f_0 = L^{-1}$, se toma la serie de Fourier

$$f(x, f_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i2\pi k x/L},$$

por lo anterior concluimos que $\eta_k = |C_k|^2$