27/09/2021

Difracción y propagación computacional

Hemos visto que para valores $r \gg \lambda$ se tiene que la solución de Rayleigh–Sommerfeld es

$$U(x,y;z) = \frac{1}{i\lambda}\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\frac{e^{ikR}}{R}\frac{z}{R}\,dx'dy',$$

con $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}$. Es necesario transferir del continuo al espacio discreto.

En el caso de Fresnel tenemos

$$U_F(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\, e^{i\frac{\pi}{\lambda z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}\,dx'dy',$$

entonces vale la pena discretizar una fase cuadrática:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}}\, e^{i\frac{\pi}{\lambda z}x^2}.$$

Entonces hay que determinar el muestreo en el espacio. Sea Δx el espaciamiento entre muestras, entonces el k-ésimo valor de la fase es

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}}\, e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\Delta x^2 k^2}.$$

Para $N_F > 0.25$ se debe tener $\Delta x \leq \lambda z/a$, con a el tamaño característico de la abertura. Escogiendo el espaciamiento más grande $\Delta x = \lambda z/a$ se tiene que

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}}\, e^{i\frac{\pi}{4N_F}k^2},$$ (en este caso el número de elementos debe ser por lo menos $K=4N_F$)

a suele ser el "diámetro" de la abertura. Para $N_F < 0.25$ se debe tener $\Delta x \leq a/M$ con M el muestreo de la abertura. Para $\Delta x = a/M$

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}}\, e^{i\pi\frac{4N_F}{M^2}k^2}.$$ (en este caso el número de elementos debe de ser $K > M$)

Hay varias aproximaciones de la integral del regimen de Fresnel.

- Aproximación de convolución:

En este acercamiento se discretiza la fase cuadrática y el campo en la abertura.

En el caso de una abertura 1D (a lo largo de un eje) si su "diámetro" es w y si la ventana de la fase exponencial es W (donde no necesariamente $w=W$) entonces

→ K muestras para la exponencial con tasa de muestreo $W/\lambda z$.

→ M muestras para la abertura con tasa de muestreo M/w.

Lo que sí debe de ser igual es la tasa de muestreo

$$\frac{W}{\lambda z}=\frac{M}{w}\Leftrightarrow W=\frac{Mw}{4N_F}\Leftrightarrow K=\left[\frac{M^2}{4N_F}\right],$$

donde $N_F=(w/2)^2/\lambda z$. La convolución discretizada es con $U(x',y';0)\longrightarrow U_{k,p}(0)$ y $\exp(i\pi\cdots)\longrightarrow h_{n,m}$ con

$$U_{n,m}(z)=\sum_{k=\max(n-K+1,1)}^{\min(n,M)}\sum_{p=\max(m-K+1,1)}^{\min(m,M)}U_{k,p}(0)h_{n-k+1,m-p+1},$$

con $h_{n,m}=\frac{1}{\lambda z}\exp\left[i\frac{4\pi N_F}{M^2}\{(n-K/2)^2+(m-K/2)^2\}\right]$ para $0\leq n\leq K-1$ y $0\leq m\leq K-1$. Sin embargo, un acercamiento más eficiente es utilizando la multiplicación en el dominio de Fourier.

En un programa, antes de multiplicar en el dominio de Fourier ó de convolución, se deben de llenar con 0 a $U_{m,n}$ y $h_{n,m}$ para que tengan el mismo tamaño $N=K+M$.

- Transformada de Fresnel o single DFT:

En este caso nos enfocamos en resolver

$$U_F(x,y;z)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)}\iint_{\mathbb{R}^2}U(\xi,\eta;0)e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(\xi^2+\eta^2)}e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta,$$

aunque es exactamente la misma fórmula de Fresnel, el enfoque cambia para resolver la integral. Observamos en el integrando que a medida que z aumenta, el número de oscilaciones en el factor de fase también aumenta. Por lo tanto, un número N_F pequeño aumenta la eficiencia.

Se escoge un tamaño de campo de manera que la abertura quede completamente dentro. Entonces, con el mismo espaciamiento para la abrtura y el campo

$$\Delta\xi = \frac{W}{N} = \frac{w}{M},$$

usando $\Delta\xi \Delta f_x = 1/N \Rightarrow \Delta x \Delta f_x = \lambda z / N$. La razón de muestreo es

$$Q = N/M = W/w.$$

Y el arreglo de la abertura $(M \times M)$ necesita ser extendido a un campo $(N \times N)$. Para evitar aliasing mantener el criterio $M > 4N_F$, entonces

$$U_{n,m}(z) = e^{i\frac{\pi}{4Q^2 N_F}\left[(n-N/2)^2+(m-N/2)^2\right]} \times \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{N-1} U_{k,p}(0)\, e^{i\frac{4\pi N_F}{M^2}\left[(k-N/2)^2+(p-N/2)^2\right]} \times e^{-i2\pi(nk+mp)}.$$

Suponiendo que el arreglo es cuadrado y centrado en $(N/2, N/2)$.

- Función de transferencia de Fresnel:

En este caso es discretizar

$$U_F(x,y;z) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[U(x,y;0)](f_x,f_y)\cdot H_F(f_x,f_y)\},$$

con $H_F(f_x,f_y) = e^{ikz}e^{-i\pi\lambda z(f_x^2+f_y^2)}$ la función de transferencia de Fresnel. En este caso a menor distancia de propagación menos oscilaciones. Usar con N_F grandes. En este método:

→ Muestreo en el plano de abertura: $\Delta x = \frac{W}{N}$.

→ Muestreo en el dominio de frecuencias: $\Delta f_x = 1/W$

→ Entonces, el número de muestras en la abertura es

$$M = \frac{w}{W} N$$

→ Relación entre espacio y frecuencia:

$$x_w(f_x) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{df_x}(\pi\lambda z f_x^2) = \lambda z f_x$$

→ El ancho de banda $B_x = \frac{M}{w} = \frac{1}{\Delta x}$ limita el dominio de frecuencias, entonces

$$W = \lambda z B_x \Leftrightarrow M = \frac{Ww}{\lambda z} = 4QN_F.$$

→ Y $N = QM = 4Q^2N_F$

→ Se tienen que escoger estos parámetros para cada valor de N_F.

Entonces

$$U_{n,m}(z) = DFT^{-1}\left\{DFT[U_{k,p}(0)]e^{-\frac{i\pi}{4Q^2N_F}[(k-N/2)^2+(p-N/2)^2]}\right\},$$

donde el arreglo se supone centrado en $(N/2, N/2)$.

La condición $M > 4N_F$ debe ser válida en todo momento, lo cual se puede asegurar con $Q > 1$.

• Función de transferencia exacta:

Se trata de discretizar

$$U(x,y;z) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}[U(x,y;0)]\underbrace{e^{i\frac{2\pi z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}}}_{H(f_x,f_y)}\right\},$$

donde la función de transferencia discretizada es

$$H_{k,p} = \exp\left[i\frac{2\pi z}{\lambda}\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{W}\right)^2\left[\left(k-\frac{N}{2}\right)^2+\left(k-\frac{N}{2}\right)^2\right]}\right].$$

→ $\Delta x = \Delta y = W/N$

$$\Longrightarrow M = \frac{w}{W}N.$$

→ $\Delta f_x = \Delta f_y = 1/W$

Sólo que en este caso hay un corte en $1/\lambda$ (por la raíz cuadrada). Por lo que si $2/\lambda > M/w$, la TF está limitada a M/w y valores son descartados.

→ Sea B_A el ancho de banda de la abertura y B_H la de la TF.

→ Para $B_H \gg B_A$ no hay diferencia a Fresnel ⇒ La elección de M depende del criterio de aliasing.

→ Para $B_H \gtrsim B_A$ los efectos del corte de frecuencia se podría ver en el patrón de difracción

→ La fase de la TF dentro de la frecuencia de corte es

$$\phi(f_x, f_y) = \frac{2\pi z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}.$$

→ Relación entre espacio real y espacio de frecuencias:

$$x_w(f_x) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{df_x}\phi(f_x, 0) = -\frac{f_x z \lambda}{\sqrt{1-\lambda^2 f_x^2}},$$

la abertura tiene el ancho W entre $x_w(-\frac{M}{2w})$ y $x_w(M/2w)$:

$$W = \frac{Mw}{4N_F\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\Delta x}\right)^2}}.$$

Con $Q = W/w$:

$$Q = \frac{M}{4N_F\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\Delta x}\right)^2}},$$

entonces $\Delta x < \lambda/2$ tiene límite superior, por lo que $M = w/\Delta x$ tambien tiene un límite inferior.

→ También $N = QM$.