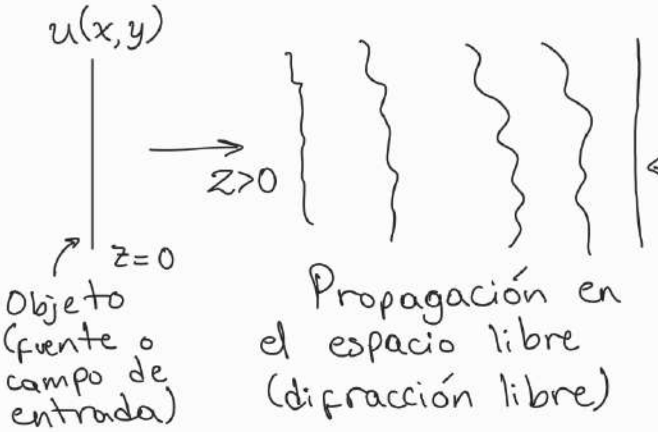
Óptica de Fourier

Introducción

La óptica de Fourier va relacionado con el análisis de Fourier. El análisis de una señal con esto se conoce como procesamiento de señal.



El campo de interés $u(x,y,z>0)$ se difracta en el espacio libre. Aunque también puede haber obstáculos.

$\leftarrow I(x,y) \propto |u|^2 \Longrightarrow$ Digitalización (FFT)

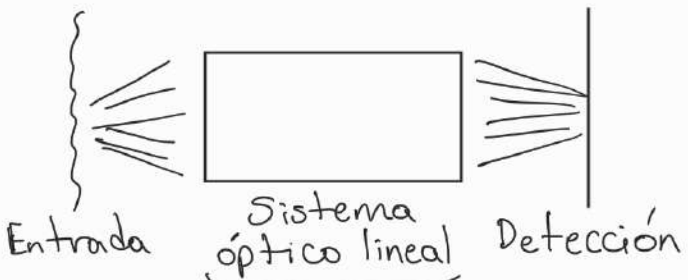
Por ahora, nos concentramos desde la propagación hasta la detección pero considerando una detección con una alta resolución.

Además de obstáculos se tienen otros componentes: lentes, prismas, espejos, filtros, rejillas de difracción, DOE's (contraparte difractiva de los elementos refractivos o reflectivos) o láminas retardadoras (pero con éstas hay que tratar la parte vectorial).

Aplicaciones

- Holografía
- Microscopía
- Tomografía
- Resonancia magnética
- Procesamiento de ondas acústicas
- Analisis de pulsos
- Espectroscopía

Nos vamos a concentrar en campos propagantes (no evanescentes), campos escalares y paraxiales. Queda fuera la óptica no lineal y escalas nanométricas



Análisis $\longrightarrow$ Descomponer en partes más simples

Con linealidad nos referimos a que la salida resultante será la superposición de todas las señales de entrada.

Invarianza: todas las señales tienen la misma forma funcional recorrida en el espacio.

Análisis $\xrightarrow{\text{es}}$ descomposición $\longrightarrow$ entender el problema. Encontrar soluciones generales independientes de la complejidad de la entrada.

$\downarrow$

Síntesis (ingeniería)

↳ Manipulación del campo mediante componentes y el diseño de dispositivos para obtener una salida específica.

Para el análisis se utiliza:

- Ecuaciones de Maxwell ⟷ Ecuación de onda con fuentes.
- Ecuación de onda sin fuentes.
- Ecuación de onda escalar.
- Ecuación de Helmholtz ⟵ Campos armónicos
  ↳ Rayleigh – Sommerfeld.
- Ecuación de onda paraxial ⟶ Aproximación de Fresnel y difracción de Fraunhofer

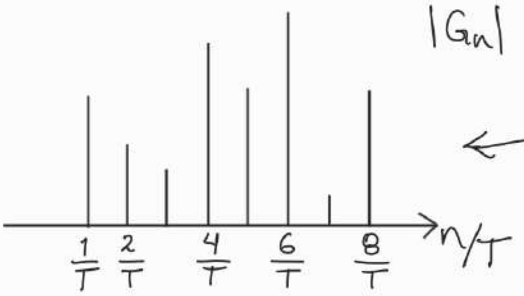
Dadas distintas circunstancias (señales, dispositivos ópticos lineales, sistemas de detección, etc.) esperamos responder cómo se propaga el campo, cómo son las soluciones, cómo se descompone en funciones más simples, cómo dependen estas soluciones de los parámetros involucrados, cuándo estos sistemas son invariantes, cómo construimos soluciones generales para señales arbitrarias de entrada o cómo construimos o diseñamos dispositivos con alguna función particular.

Series de Fourier

Sirven para representar puntualmente funciones periodicas y continuas por partes mediante senos y cosenos.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x + \phi_n\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{i2\pi n x/T}.
\end{aligned}
$$

Las proyecciones a_n, b_n o G_n se pueden representar en una gráfica:



Descomposición espectral

- El espectro es simétrico.
- El espaciamiento es $1/T$.

• Existencia de la serie de Fourier: para sistemas físicos se supone que esta serie existe.

$$\int_0^T \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{i\frac{2\pi n x}{T}} - g(x) \right|^2 dx \longrightarrow 0,$$

La convergencia de la serie de Fourier se da si se cumple lo anterior; aunque tenemos otras tres condiciones a satisfacer para conocer si la serie existe, llamadas condiciones de Dirichlet.

* Condiciones de Dirichlet

1. Integrabilidad, esto es $\int_0^T |g(x)| dx < \infty$.
2. $g(x)$ tiene que ser continua por partes, número finito de discontinuidades, número finito de máximos y mínimos.
3. $g(x)$ no debe tener discontinuidades infinitas.

Para $g(x) = \sum_n G_n e^{i2\pi n x/T}$, entonces

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x) e^{-i2\pi n x/T} dx$$

Demostración

Tenemos que $g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m e^{i2\pi m x/T} \Rightarrow g(x) e^{-i2\pi n x/T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m e^{i2\pi(m-n)x/T}$, entonces integramos sobre el período

$$\int_{-T/2}^{T/2} g(x) e^{-i2\pi n x/T} dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi(m-n)x/T} dx.}_{I_{mn}}$$

Ahora nos toca calcular la integral I_{mn}; primero para $m \neq n$, entonces:

$$I_{m\neq n} = \frac{T}{i2\pi(m-n)} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{d}{dx}\left[e^{i2\pi(m-n)x/T}\right] dx = \frac{T}{\pi(m-n)} \frac{e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)}}{2i}, \text{ esto es}$$

$I_{m\neq n} = \frac{T}{\pi(m-n)} \operatorname{sen}[(m-n)\pi] = 0$, pues la función seno es cero en cualquier múltiplo de π. Por otro lado, para $m=n$:

$$I_{m=n}=\int_{-T/2}^{T/2}dx=T \Rightarrow I_{mn}=T\delta_{mn} \Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} g(x)e^{-i2\pi nx/T}dx=\sum_{m=-\infty}^{\infty}G_m T\delta_{mn}$$
$$=G_n T, \text{ por lo tanto } G_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)e^{-i2\pi nx/T}dx.$$

Si $g(x)$ es una función suave $\Rightarrow$ La serie de Fourier convergirá con un número finito de términos.

Si $g(x)$ no es suave $\Rightarrow \begin{cases} \text{Converge con infinitos términos.} \\ \text{Converge en el valor medio.} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ Por ejemplo, para una señal cuadrada en los puntos no derivables se tendrán oscilaciones (llamadas oscilaciones de Gibbs) cuyo valor medio es el de la señal.

Transformada de Fourier

Una forma de pensarla es el límite de una serie de Fourier para funciones no periódicas ($T \longrightarrow \infty$).

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_n e^{i2\pi nx/T}, \quad G_n=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i2\pi nx/T}dx$$

redefinimos como sigue

$$\frac{n}{T}\longrightarrow f_n \Rightarrow G_n \longrightarrow G(f_n); \quad \Delta f = f_{n+1}-f_n = 1/T,$$

de manera que si $T\longrightarrow\infty$, $\Delta f\longrightarrow df$ y $f_n \rightarrow f$ (variable continua):

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{i2\pi fx}df \quad \text{y} \quad G(f)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}dx$$

Transformada inversa de Fourier — Transformada de Fourier

- Condiciones de existencia:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty.$

2. Número finito de discontinuidades, número finito de máximos y mínimos

3. No infinitos.

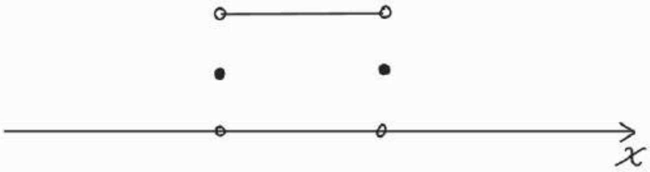
Si se relajan 2 y 3 se tiene lo que llamamos **Transformada generalizada de Fourier** (que es una función generalizada).

• Caso en 2D: en coordenadas cartesianas

$$G(f_x, f_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)}\, dx\, dy,$$

$$g(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} G(f_x, f_y) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)}\, df_x\, df_y.$$

– Ejemplo: hallar la transformada de Fourier para $g(x) = \mathrm{rect}(x/L)$.



$$\mathrm{rect}(x/L) = \begin{cases} 1, & |x| < L/2 \\ 1/2, & |x| = L/2 \\ 0, & |x| > L/2 \end{cases}$$

$$G(f) = \int_{-L/2}^{L/2} g(x) e^{-i2\pi f x}\, dx = \int_{-L/2}^{L/2} e^{-i2\pi f x}\, dx = \frac{i}{2\pi f}\left(e^{-i\cancel{2}\pi f \frac{L}{\cancel{2}}} - e^{i\cancel{2}\pi f \frac{L}{\cancel{2}}}\right)$$

$$= L \cdot \mathrm{senc}(\pi f L).$$

Los ceros de esta G son de la forma $n/L \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Uno puede pensar que, por construcción, la transformada de Fourier inversa de $\mathrm{senc}(\pi L f)$ es $\mathrm{rect}(x/L)/L$; pero estrictamente la función senc no tiene TF pues no es integrable en toda la recta. Aquí es donde entran las funciones generalizadas y definimos la TFI de la función senc con la función rect.

– Ejemplo: para $\delta(x)$. Tenemos $\delta(x) = \lim_{L \to 0} \frac{1}{L} \mathrm{rect}(x/L)$.

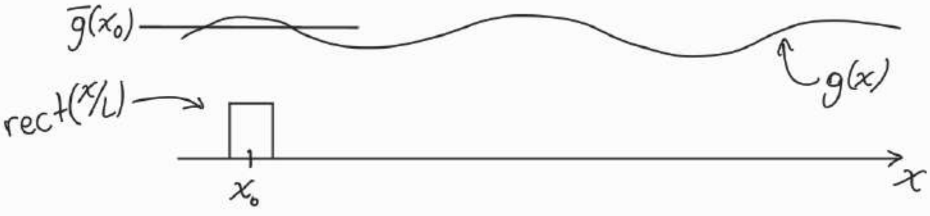
$$\mathcal{F}\{\delta(x)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i2\pi f x}\, dx = \lim_{L \to 0} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(x/L) e^{-i2\pi f x}\, dx$$

$$= \lim_{L \to 0} \mathrm{senc}(\pi L f) = 1.$$

Por lo anterior decimos que $\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(x)$.

Algo que siempre va a ocurrir es que entre más acotada en dominio esté una función en el espacio de coordenadas, estará más esparcida en el espacio de frecuencias.

• Propiedad de muestreo de la función delta:



$\bar{g}(x_0)$ es un promedio de la función $g(x)$, es una primeda aproximación y está dado por

$$\bar{g}(x_0) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{L}\right)dx;$$

el muestreo será más preciso entre más angosto sea el rectángulo, de manera que:

$$g(x_0) = \lim_{L\to 0}\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)dx =: \int_{-\infty} g(x)\,\delta(x-x_0)\,dx.$$

- Delta con reescalamiento: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

- Propiedades de la TF:
  1. Linealidad $\mathcal{F}\{c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)\} = c_1 G_1(f) + c_2 G_2(f)$.
  2. Escalamiento $\mathcal{F}\{g(x/a)\} = |a|\,G(af)$.
  3. Corrimiento $g(x,y) = u(x-x_0, y-y_0) \Rightarrow \mathcal{F}\{g(x,y)\} = U(f_x, f_y)e^{-i2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)}$.
  4. Teorema de Parseval (conservación de energía)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,dx.$$

  5. Convolución $g(x) = u_1(x) \otimes u_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)u_2(x-t)\,dt$, entonces
$$\mathcal{F}\{g(x)\} = U_1(f)U_2(f).$$
  6. Autocorrelación $g(x) = u_1(x) * u_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)\,u_1^*(x-t)\,dt$, entonces
$$\mathcal{F}\{g(x)\} = |U_1(f)|^2.$$

- Ejemplos:

  a) $g(x) = u'(x) \Rightarrow \mathcal{F}\{g(x)\}(f) = i2\pi f\,\mathcal{F}\{u(x)\}$.

  b) $g(x) = u^{(n)}(x) \Rightarrow \mathcal{F}\{g(x)\}(f) = (i2\pi f)^n\,\mathcal{F}\{u(x)\}$.

  c) $g(x) = \mathrm{sen}(2\pi f_0 x) \Rightarrow \mathcal{F}\{g(x)\}(f) = \frac{1}{2i}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right]$.

- Función réplica.

Tenemos que $\delta(x) = \lim_{L\to 0}\frac{1}{L}\mathrm{rect}(x/L) = \lim_{N\to\infty} N^2 e^{-N^2\pi x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f x}\,df$.

Por otro lado, $\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$, de manera que $\text{comb}(x/\Lambda)$ es igual a $|\Lambda| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Lambda)$. Por otro lado:

$$g(x') = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x)\, \text{comb}\left(\frac{x-x'}{\Lambda}\right) dx = |\Lambda| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x)\, \delta(x - x' - n\Lambda)\, dx$$

$$= |\Lambda| \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0(x' + n\Lambda) = |\Lambda| \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0(x' - n\Lambda).$$

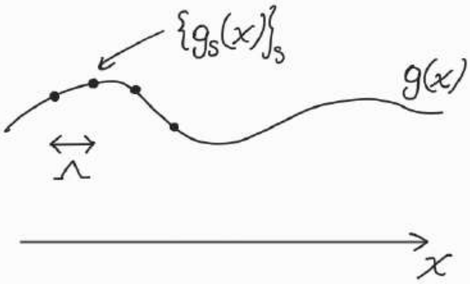
De forma que la convolución de una función g_0 con la función comb es una réplica de g_0 que se repite (es periódica) en $n\Lambda$ (escalada por $|\Lambda|$.

La serie de Fourier de la función comb es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n x}$, por lo tanto la transformada de Fourier de la función $\text{comb}(x)$ es ella misma $\text{comb}(f)$.

$\rightarrow \mathcal{F}\{\text{comb}(x)\}(f) = \text{comb}(f)$

$\rightarrow \mathcal{F}\{\text{comb}(x/\Lambda)\}(f) = |\Lambda|\, \text{comb}(\Lambda f)$.

- Muestreo



$$g_s(x) \propto \text{comb}\left(\frac{x}{\Lambda}\right) g(x)$$

Definición del muestreo

Si $\mathcal{F}_A\{g\} = \frac{1}{a} \iint_{\mathbb{R}^2} g(\xi, \eta)\, e^{-i\frac{2\pi}{a}(f_x \xi + f_y \eta)}\, d\xi\, d\eta$:

a) ¿$\mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g(x,y)\}\}$? Donde $\mathcal{F}_B$ es cambiar a por b.

b) ¿Qué pasa si $a > b$? ¿Y si $b > a$?

$$\mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g\}\}(w_x, w_y) = \frac{b}{a}\, g\left(-\frac{b}{a} w_x, -\frac{b}{a} w_y\right)$$

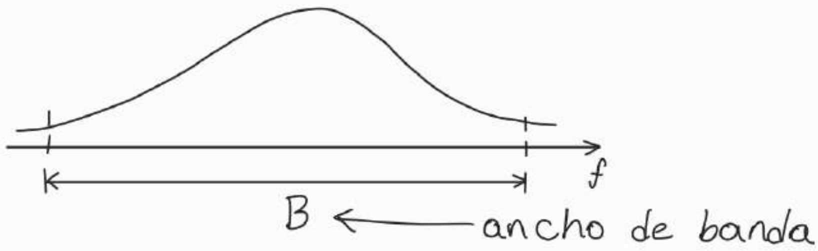
Si $a>b$ entonces $\mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g\}\}$ es la función g estrechada verticalmente, estirada en las direcciones x y y, y reflejada por los planos YZ y XZ. Si $a<b$ $\mathcal{F}_A\{\mathcal{F}_B\{g\}\}$ es la función g estirada verticalmente, estrechada en las direcciones x y y, y reflejada por los planos YZ y XZ.

Teoría de muestreo

Es imposible obtener una señal completa pues es información infinita. Surge la pregunta de cómo muestrear para adquirir toda la información de interés.

Una vez con las muestras sigue el procesamiento digital para reconstruir la señal.

→ Señal con ancho de banda acotado



Para este tipo de señales uno puede (virtualmente) recuperar la información completa con un número finito de muestreos.

$$\{g_s(x,y)\} = \text{comb}(x/L_x)\,\text{comb}(y/L_y)\,g(x,y), \quad \text{entonces}$$

$$G_s(f_x,f_y) = \mathcal{F}\{\text{comb}(x/L_x)\,\text{comb}(y/L_y)\}(f_x,f_y) \otimes G(f_x,f_y)$$

$$= L_x L_y\,\text{comb}(L_x f_x)\,\text{comb}(L_y f_y) \otimes G(f_x,f_y)$$

$$= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} G(f_x - m/L_x,\, f_y - n/L_y)$$

Entonces, la TF de la señal discretizada no es la TF discretizada de la señal original. En su lugar tenemos réplicas en una malla, y sólo se podrá recuperar la señal si estas réplicas no interfieren (no se traslapan). Esto nos da una condición para el muestreo.

$$1/L_x \geq B_x \quad y \quad 1/L_y \geq B_y$$

Condición mínima de muestreo

Cuando se cumple la igualdad se denomina **frecuencia de Nyquist**.

Para filtrar sólo la réplica central utilizamos un filtro en el espacio de frecuencias $H(f_x,f_y) := \text{rect}(f_x/L_x)\,\text{rect}(f_y/L_y)$

$$\Rightarrow G(f_x,f_y) = G_s(f_x,f_y)\,H(f_x,f_y)$$

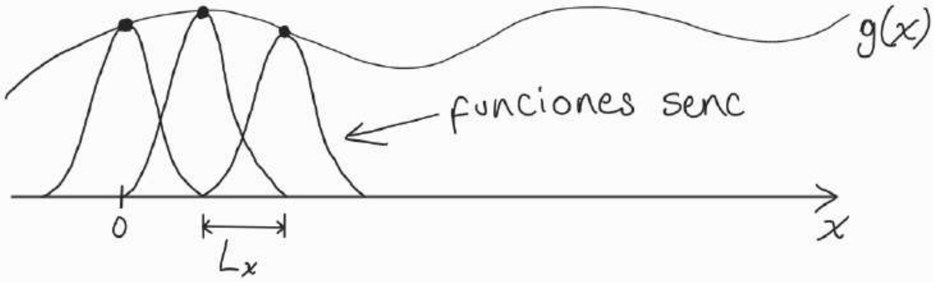
Así $\hat{g}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f_x,f_y)\}(x,y) \otimes \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\{H(f_x,f_y)\}(x,y)}_{h(x,y)}$, con $h(x,y)$ la **respuesta al impulso del filtro.**

$$\hat{g}(x,y) = \text{comb}(x/L_x)\,\text{comb}(y/L_y)\,g(x,y) \otimes B_x\,\text{senc}(\pi B_x x)\,B_y\,\text{senc}(\pi B_y y)$$

$$\Rightarrow \hat{g}(x,y) = B_x B_y L_x L_y \sum_{m,n} g(mL_x, nL_y)\,\delta(x-mL_x, y-nL_y) \otimes \mathrm{senc}(\pi B_x x)\,\mathrm{senc}(\pi B_y y)$$

$$\therefore\ \hat{g}(x,y) = B_x B_y L_x L_y \sum_{m,n} g(mL_x, nL_y)\,\mathrm{senc}[\pi B_x (x-mL_x)]\,\mathrm{senc}[\pi B_y (y-nL_y y)].$$

Para la frecuencia de Nyquist se obtiene la **interpolación senc**:



A esto se le conoce como **teorema de muestreo de Whittaker-Shannon**.

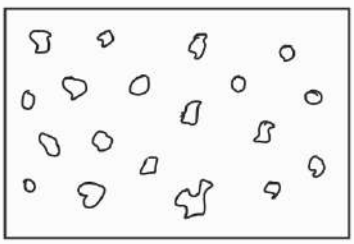
Si tomamos muestras con menor frecuencia (L_x más grande) se dice que submuestreamos la señal. La interferencia en el espacio de frecuencias provoca que se pierda información, se pierden las frecuencias más altas y se pueden introducir señales artificiales. Este fenómeno se conoce como **aliasing**.

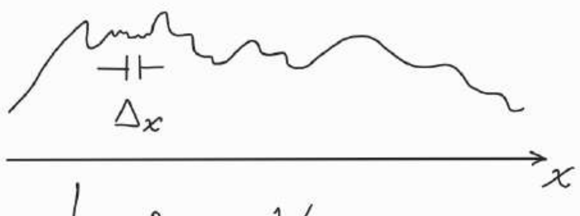
Supongamos que la señal tiene un ancho de banda acotado (B_x, B_y), el número de puntos que se necesitan (mínimo) para recuperar una señal contenida en un área $S_x S_y$, y con ancho de banda B_x y B_y (i.e que en el espacio de frecuencias está en el área $B_x B_y$), es

$$N = S_x S_y B_x B_y.$$

Esta N está relacionada con la entropía de Shannon y se conoce como producto espacio-ancho de banda. Mide la complejidad de la señal.

Por ejemplo, un sistema de microscopía:

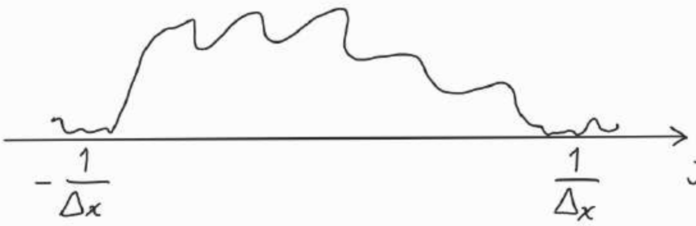




Δ_x: longitud mínima de lo que nos interesa resolver.

$\hookrightarrow f_{máx} = 1/\Delta_x$

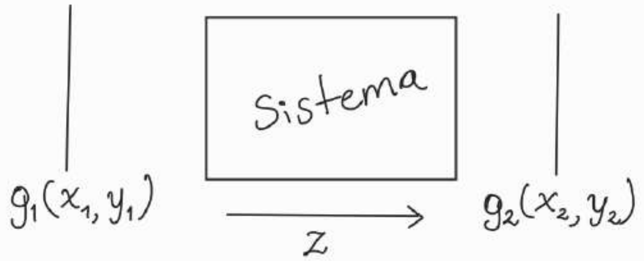
$$\Rightarrow N = S_x S_y \frac{1}{\Delta_x}\frac{1}{\Delta_y},$$



para un campo de $100\,\mu m^2$ y resolución $1\,\mu m$ se tiene

$$N = 10,000$$

Sistemas lineales y sistemas lineales invariantes



$g_1(x_1, y_1) = \alpha p_1(x_1, y_1) + \beta q_1(x_1, y_1)$, si el sistema es lineal:

$g_2(x_2, y_2) = S\{g_1(x_1, y_1)\} = \alpha S\{p_1(x_1, y_1)\} + \beta S\{q_1(x_1, y_1)\}$. Entonces puedo pensar en un sistema de entrada:

$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{\mathbb{R}^2} g_1(u, v)\, \delta(x_1 - u)\, \delta(y_1 - v)\, du\, dv$$

← Funciones elementales o impulsos (wavelets)

← Pesos de las funciones delta.

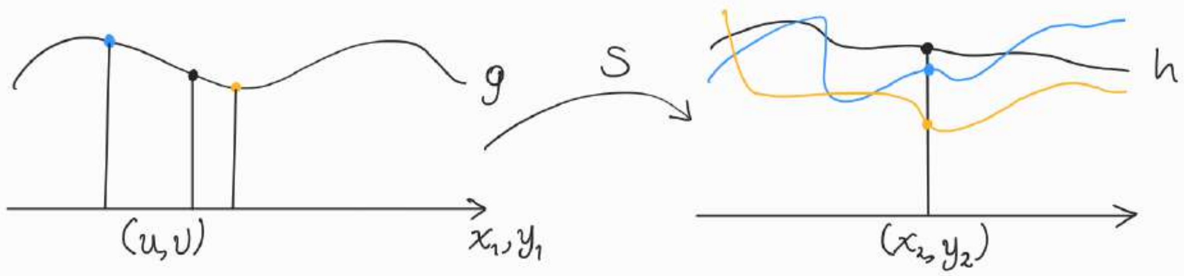
Lo anterior es una descomposición en el espacio de coordenadas de la función de entrada. De esta manera:

$$g_2(x_2, y_2) = S \iint_{\mathbb{R}^2} g_1(u,v)\, \delta(x_1 - u)\delta(y_1 - v)\, du\, dv = \iint_{\mathbb{R}^2} g_1(u,v) S\{\delta(x_1 - u, y_1 - v)\}\, du\, dv.$$

$S\{\delta(x_1 - u, y_1 - v)\} = h$ ← respuesta al impulso (PSF: point spread function).

$$S\{\delta(x_1 - u, y_1 - v)\} = h(x_2, y_2; x_1 = u, y_1 = v) := h(x_2, y_2; u, v),$$

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} g_1(u, v)\, h(x_2, y_2; u, v)\, du\, dv$$



La respuesta total del sistema en (x_2, y_2) va ser la suma de todas las respuestas en ese punto.

La respuesta de forma arbitraria de mi sistema estará determinada por las respuestas al impulso de todo el espacio de entrada. Notar que las respuestas son independientes de la función de entrada g_1. Basta con conocer las respuestas al impulso del sistema.

- Sistema lineal invariante: cuando las respuestas al impulso son similares por regiones.

El caso ideal es con una única h para todo el dominio

$$\Rightarrow h(x_2, y_2; u, v) = h(x_2 - u, y_2 - v),$$

si esto sucede entonces $g_2(x_2, y_2) = (g_1 \otimes h)(x_2, y_2)$. Esto cobra relevancia si utilizamos la TF inversa de g_1 y g_2 $\Rightarrow$ $G_2(f_x, f_y) = H(f_x, f_y)\, G_1(f_x, f_y)$.

Por lo que en un sistema lineal invariante en el espacio de frecuencias se tiene que la salida es "proporcional" a la entrada, modificando la amplitud a f_x, f_y fijas. H se llama **función de transferencia**.

Transformada discreta de Fourier

Para computar la TF necesitamos discretizar esta transformada.

En lugar de tener $g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $g(x_n)$ con $x_n \in \{x_1, \dots, x_m\}$; si queremos calcular la TF de g dados estos puntos que están igualmente espaciados Δx y cubren una longitud L_x (por lo que el número de puntos es $N_x = L_x/\Delta_x$) se calcula

$$\hat{G}(f_x) = \sum_{n=0}^{N_x-1} g(n\Delta x) e^{-i2\pi n \Delta x f_x}.$$

Tambien las frecuencias están discretizadas con un ancho de banda de B_x. Para evitar aliasing se toma $\Delta x = 1/B_x$. Sin embargo, sólo se puede calcular una frecuencia del espacio $p\Delta f_x$:

$$\underbrace{\hat{G}(p\Delta f_x)}_{\hat{G}_p} = \sum_{n=0}^{N_x-1} \underbrace{g(n\Delta_x)}_{g_n} e^{-i2\pi n p \Delta x \Delta p};$$

el espaciamiento en frecuencia es análogo y dado por $\Delta f_x = 1/L_x$.

Notemos que $\Delta x \Delta f_x = 1/N_x$ y que un cálculo de $\hat{G}$ para hacerse unidimensional necesita N_x^2 operaciones. Así

$$\mathrm{DFT}\{g_n\} = \sum_{n=0}^{N_x-1} g_n e^{-i2\pi np/N_x},$$

y su inversa

$$\mathrm{IDFT}\{\hat{G}_p\} = \frac{1}{N_x} \sum_{p=0}^{N_x-1} \hat{G}_p e^{i2\pi np/N_x}.$$

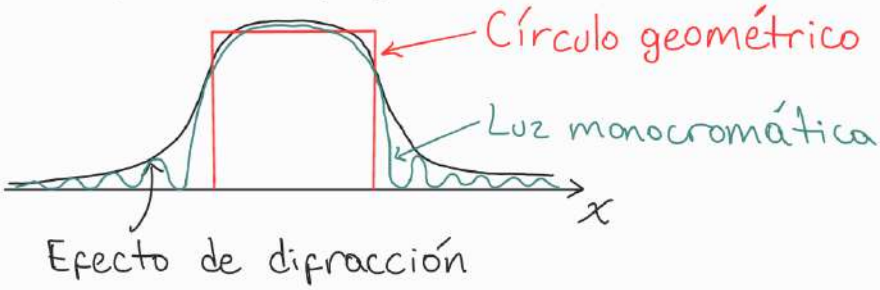
La generalización a dimensiones mayores es simple, se realizan los mismos calculos sobre otro eje, incrementando el número de cálculos por un factor de N_i^2.

En la mayoría de lenguajes programación al calcular la DFT (con la conocida FFT) calculan la DFT sin el factor Δx (u otros en más dimensiones) por lo que si se quiere comparar con un resultado analítico se deben de introducir.

Teoría de difracción escalar

Uno tiene que distinguir entre difracción y efectos geométricos, estos últimos se pueden entender con el efecto de una cámara oscura: si una cámara con un agujero se ilumina con una fuente extensa entonces su imagen adentro de la cámara tendrá los bordes difusos (no bien definidos), lo anterior es un efecto puramente geométrico asociado a los círculos de confusión. De hecho la imagen será en general difusa por ser la superposición de todos los discos imagen de cada punto de la fuente, pero los bordes mostrarán este efecto con mayor evidencia.

Lo que sí es un efecto de difracción es que sustituyendo, en lo anterior, la fuente extensa por una puntual la óptica geométrica dice que la imagen debería ser de bordes perfectos y definidos. Sin embargo, experimentalmente uno siempre encuentra bordes difusos sin importar que tan pequeña sea la fuente.



En una fuente extensa estrictamente sí existen efectos de difracción pero son despreciables en comparación a otros efectos que tienen relación con el tamaño de la fuente. A menor tamaño de la fuente los efectos de difracción serán del orden o mayor orden al tamaño.

Difracción $\longleftrightarrow$ Ondulatorio $\longleftrightarrow$ Interferencia $\longleftrightarrow$ Difracción

De manera general, la difracción es cualquier desviación de la luz que no sea por reflexión ni "refracción" (pues a escalas microscópicas estos también deben su origen en la difracción).

La difracción puede ocurrir incluso sin ningún obstáculo, como es la propagación de un láser. La difracción tiene que ver con el confinamiento en el espacio.

Campos que no se difractan: ondas planas, haz Bessel; haces adifraccionales.

Historia

- Grimaldi (1665): disminución gradual de borde de una fuente puntual.
- Huygens (1678): teoría ondulatoria de la luz. Propuso los wavelets, estos frentes de onda secundarios. Pero el peso de Newton impidió que se hiciera un caso profundo.
- Young (1804): introduce el término de **interferencia**.

- Fresnel (1818): unifica en una teoría las ideas de Young y que se conoce como teoría de Young-Fresnel. Esta teoría, más matemática, introduce conceptos de amplitud y fases, lo que lleva a conceptos de interferencia y propagación ondulatoria.
  ↳ Con él surge un experimento que da lugar a la teoría ondulatoría de la luz, derrumbando la teoría corpuscular: el **punto de Poisson-Arago**.

- Maxwell: integra los fenómenos de la luz con la teoría EM.

- Kirchoff: utiliza la teoría de Maxwell y desde primeros principios deriva la teoría de Fresnel.

- Fraunhoffer, Sommerfeld, Rayleigh, Poincaré.
  ↳ Teoría de la difracción escalar.

Ecuaciones de Maxwell

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla\cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla\times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \\ \nabla\times \mathbf{H} &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{J} \end{aligned}\right\}$$

E: campo eléctrico [V/m].

B: densidad de flujo magnético.

D: desplazamiento, densidad de flujo eléctrico.

H: campo magnético [A/m].

Relaciones constitutivas:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{H}) \end{aligned}\right\}$$

$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, ϵ_0 la permitividad,

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, μ_0 la permeabilidad,

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2.$$

- Dieléctrico: material no conductor ($j=0$, $\rho=0$).
- Material lineal: $\mathbf{D} \propto \mathbf{E}$, respuesta del material es una combinación lineal de las respuestas de los elementos de la combinación lineal de la excitación.
- Material isotrópico: $\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon$, $\overleftrightarrow{\mu} = \mu$.
- Material homogéneo: $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon$ y $\mu(\mathbf{r}) = \mu$; o $\nabla\epsilon = 0$ y $\nabla\mu = 0$.
- Material no dispersivo: en un rango de frecuencias la respuesta es independiente de λ, $\epsilon \neq \epsilon(\lambda)$ y $\mu \neq \mu(\lambda)$.
- Material no magnético: $\mu = \mu_0$.

En este curso consideraremos materiales dieléctricos, lineales, isotrópicos, homogéneos, no dispersivo, no magnético y no absorbente.

$\mathbf{E}$ es una cantidad real, si es armónico entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}\},$$

con $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\lambda/c$. La cantidad $\tilde{\mathbf{E}}$ es un fasor, y cumplen:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\tilde{\mathbf{E}} &= i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}} \\ \nabla\times\tilde{\mathbf{H}} &= i\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}} \\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{E}} &= 0 \\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{H}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ecuaciones de Maxwell para el fasor}$$

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{n^2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0 \qquad \text{Ecuación de onda sin fuentes}$$

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{E}} + \omega^2\mu_0\epsilon\tilde{\mathbf{E}} = 0 \qquad \text{Ecuación de Helmholtz}$$

Las ecuaciones para las compontes de $\tilde{\mathbf{E}}$ van a estar desacopladas dependiendo de las condiciones de frontera. Cerca de una abertura el campo es de naturaleza vectorial. Pero lejos de la frontera se tiene que $\mathbf{E} \simeq U\hat{\mathbf{n}}$, es decir, $\mathbf{E}$ no cambia de orientación y puedo rotar el sistema y que $\mathbf{E}$ sea paralela al, digamos, eje x. Así

$$\nabla^2 U + \frac{n^2}{c^2}\omega^2 U = 0 \qquad \text{Ecuación de onda de Helmholtz escalar}$$