14. Si $\nabla^2 \underline{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E} = 0$ y $\underline{E}(\underline{r},t) = Re\{\underline{\tilde{E}}(\underline{r})e^{i\omega t}\}$ entonces

$$\nabla^2 \underline{\tilde{E}} + \omega^2 \mu_0 \epsilon \underline{\tilde{E}} = 0,$$

demostrar esto último. Es notación usual usar $\underline{U}$ para el fasor, $\underline{U} = \underline{\tilde{E}}$.

Para esto usamos identidades vectoriales:

$\nabla^2 \underline{E} = \nabla^2(\underline{\tilde{E}}e^{i\omega t}) = \underline{\tilde{E}}\nabla^2 e^{i\omega t} + 2(\nabla e^{i\omega t}\cdot\nabla)\underline{\tilde{E}} + e^{i\omega t}\nabla^2\underline{\tilde{E}}$, dado que $e^{i\omega t}$ no depende de $\underline{r}$ entonces $\nabla e^{i\omega t} = 0$, de modo que $\nabla^2 \underline{E} = e^{i\omega t}\nabla^2\underline{\tilde{E}}$.

Luego $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E} = \underline{\tilde{E}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{i\omega t} = -\omega^2\underline{\tilde{E}}e^{i\omega t}$, así pues

$$\nabla^2 \underline{\tilde{E}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E} = e^{i\omega t}\nabla^2\underline{\tilde{E}} + \frac{1}{v^2}\omega^2\underline{\tilde{E}}e^{i\omega t} = e^{i\omega t}\left(\nabla^2\underline{\tilde{E}} + \omega^2\mu\epsilon\underline{\tilde{E}}\right),$$

al estar considerando materiales no magnéticos tenemos $\mu = \mu_0$, entonces

$$\nabla^2 \underline{\tilde{E}} + \omega^2 \mu_0 \epsilon \underline{\tilde{E}} = 0.$$

15. Si $U(\underline{r})$ satisface $\nabla^2 U + k^2 U = 0$, demostrar que en coordenadas cartesianas se tiene

$$U(\underline{r}) = Ae^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} + Be^{i\underline{k}\cdot\underline{r}},$$

como solución general.

Suponemos que $U(\underline{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ entonces se cumple que

$$\frac{1}{X}\frac{d^2}{dx^2}X + \frac{1}{Y}\frac{d^2}{dy^2}Y + \frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z = -k^2,$$

los tres términos son independientes de las demás variables, y suman una constante, entonces cada uno es igual a una constante:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2}{dx^2}X = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2}{dy^2}Y = -k_y^2 \quad y \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z = -k_z,$$

en donde ya hemos (anticipadamente) asignado las constantes adecuadas pues la suma es, en efecto, $-k^2$.

Cada una de las anteriores tiene dos soluciones

$$\left.\begin{aligned} X_1(x) &= e^{-ik_x x} \\ Y_1(y) &= e^{-ik_y y} \\ Z_1(z) &= e^{-ik_z z} \end{aligned}\right\} U_1(\underline{r}) = e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\left.\begin{aligned} X_2(x) &= e^{ik_x x} \\ Y_2(y) &= e^{ik_y y} \\ Z_2(z) &= e^{ik_z z} \end{aligned}\right\} U_2(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}},$$

por lo que la solución general es una combinación lineal de las anteriores:

$$U(\underline{r}) = Ae^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} + Be^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}.$$

16. Si U satisface $\nabla^2 U + k^2 U = 0$, demostrar que en coordenadas cilíndricas se tiene

$$U(\underline{r}) = J_m(k_T \rho)\, e^{im\phi} e^{-i\beta z},$$

con β un número, $k_T = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ y m un número entero.

Suponemos que $U(\underline{r}) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ entonces:

$$0 = \nabla^2 U + k^2 U = \Phi Z\left(\frac{d^2}{d\rho^2}P + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}P\right) + \frac{1}{\rho^2}PZ\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi + P\Phi\frac{d^2}{dz^2}Z$$

$+ k^2 P\Phi Z$, entonces

$$\frac{1}{P}\left(\frac{d^2}{d\rho^2}P + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}P\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi + \frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z = -k^2,$$

los dos primeros terminos (que dependen de ρ y ϕ) y el tercer término que sólo depende de z son iguales a una constante pues su suma es $-k^2$, una constante, así

$\frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z = -\beta^2 \Rightarrow Z(z) = e^{-i\beta z}$. Sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\frac{\rho^2}{P}\left(\frac{d^2}{d\rho^2}P + \frac{1}{\rho}\frac{1}{d\rho}P\right) + \underbrace{(k^2 - \beta^2)}_{k_T^2}\rho^2 + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi = 0,$$

ahora, los dos primeros términos y el tercer término son constantes al ser términos con variables diferentes, así

$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi = -m^2 \Rightarrow \Phi(\phi) = e^{im\phi}$, para que lo anterior tenga sentido físico entonces al regresar a un mismo punto angular el valor del campo debe ser el mismo, por lo que $m \in \mathbb{Z}$. Finalmente.

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2}P + \rho\frac{d}{d\rho}P + \left[(k_T\rho)^2 - m^2\right]P = 0,$$ haciendo un cam

bio de variable a $u = k_T\rho$ entonces

$$u^2\frac{d^2}{du^2}P + u\frac{d}{du}P + (u^2 - m^2)P = 0,$$

que es la ecuación diferencial de Bessel y su solución es $J_m(u) = J_m(k_T\rho)$. Por lo tanto

$$U(\underline{r}) = J_m(k_T\rho)e^{im\phi}e^{-i\beta z}.$$