43. Obtener el espectro en frecuencias de la intensidad generada por un campo $t_A(\xi,\eta)=|\cos(2\pi\bar{f}\xi)|$, tanto para luz coherente como incoherente. Utilizar una pupila rectangular $H(f_x,f_y)=\mathrm{rect}(f_x/2f_0)\mathrm{rect}(f_y/2f_0)$, $\bar{f}<f_0<2\bar{f}$.

• Luz coherente:

En este caso tenemos $\mathcal{F}\{I_i\}=(HG_g)*(HG_g)$ con G_g la TF de t_A. Se hará sobre el eje f_x, así

$$G_g(f_x)=\int_{-\infty}^{\infty}|\cos(2\pi\bar{f}\xi)|e^{-i2\pi f_x\xi}d\xi,$$ por otro lado tenemos que

$$\cos(2\pi\bar{f}\xi)\geq 0 \iff \frac{1}{\bar{f}}\left(n-\frac{1}{4}\right)\leq\xi\leq\frac{1}{\bar{f}}\left(n+\frac{1}{4}\right),$$

$$\cos(2\pi\bar{f}\xi)\leq 0 \iff \frac{1}{\bar{f}}\left(n+\frac{1}{4}\right)\leq\xi\leq\frac{1}{\bar{f}}\left(n+\frac{3}{4}\right)$$

para $n\in\mathbb{Z}$, de modo que

$$G_g(f_x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg[\underbrace{\int_{(n-1/4)/\bar{f}}^{(n+1/4)/\bar{f}}\cos(2\pi\bar{f}\xi)e^{-i2\pi f_x\xi}d\xi}_{I_1(f_x;n)}-\underbrace{\int_{(n+1/4)/\bar{f}}^{(n+3/4)/\bar{f}}\cos(2\pi\bar{f}\xi)e^{-i2\pi f_x\xi}d\xi}_{I_2(f_x;n)}\Bigg],$$

$$\Rightarrow I_1(f_x;n)=\frac{1}{i4\pi}\left[\frac{1}{\bar{f}-f_x}e^{i2\pi(\bar{f}-f_x)\xi}\Big|_{(n-1/4)/\bar{f}}^{(n+1/4)/\bar{f}}-\frac{1}{\bar{f}+f_x}e^{-i2\pi(\bar{f}+f_x)\xi}\Big|_{(n-1/4)/\bar{f}}^{(n+1/4)/\bar{f}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-i2\pi nf_x/\bar{f}}\left[\frac{1}{\bar{f}-f_x}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-f_x/\bar{f}\right)\right)+\frac{1}{\bar{f}+f_x}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(1+f_x/\bar{f}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-i2\pi nf_x/\bar{f}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{f_x}{\bar{f}}\right)\left(\frac{1}{\bar{f}-f_x}+\frac{1}{\bar{f}+f_x}\right),$$ entonces

$$I_1(f_x;n)=\frac{\bar{f}}{\pi(\bar{f}^2-f_x^2)}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{f_x}{\bar{f}}\right)e^{-i2\pi nf_x/\bar{f}},$$

luego con el cambio de variable $\xi'=\xi-1/2\bar{f}$ uno encuentra que $I_2(f_x;n)=-e^{-i\pi f_x/\bar{f}}I_1(f_x;n)$, de modo que

$$G_g(f_x) = \left(1+e^{-i\pi f_x/\bar{f}}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_1(f_x; n)$$

$$= \frac{\bar{f}}{\pi(\bar{f}^2-f_x^2)}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{f_x}{\bar{f}}\right)\left(1+e^{-i\pi f_x/\bar{f}}\right)\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n f_x/\bar{f}}}_{\mathrm{comb}(f_x/\bar{f})}$$

$$\therefore\ G_g(f_x) = \frac{\bar{f}}{\pi(\bar{f}^2-f_x^2)}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{f_x}{\bar{f}}\right)\left(1+e^{-i\pi f_x/\bar{f}}\right)\mathrm{comb}(f_x/\bar{f}),$$

entonces al multiplicar por $H(f_x,0)=\mathrm{rect}(f_x/2f_0)$ se tiene que

$$(HG_g)(f_x) = \frac{\bar{f}^2}{\pi(\bar{f}^2-f_x^2)}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{f_x}{\bar{f}}\right)\left(1+e^{-i\pi f_x/\bar{f}}\right)\left[\delta(f_x+\bar{f})+\delta(f_x)+\delta(f_x-\bar{f})\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\delta(f_x)$$

$$\therefore\ \mathcal{F}\{I_i\} = (HG_g)*(HG_g) = \frac{4}{\pi^2}\delta(f_x)$$

• Luz incoherente:

Necesitamos $\mathcal{F}\{I_i\}=(H*H)(G_g*G_g)$; ya sabemos que $H*H$ es la función triángulo con máximo 1 y que va de $-2f_0$ a $2f_0$. Otra forma de escribir G_g, dado que la función comb es suma de δ, es

$$G_g(f_x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}\delta(f_x-2k\bar{f}),$$

así

$$(G_g*G_g)(f_x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k,l=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{(1-4k^2)(1-4l^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2k\bar{f})\,\delta(f_x-t-2k\bar{f})\,dt$$

$$\Rightarrow (G_g * G_g)(f_x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(1-4k^2)(1-4l^2)} \delta(f_x - 2(k+l)\bar{f}), \text{ entonces}$$

$$(H*H)(G_g*G_g)(f_x) = (H*H)(f_x)\left[\frac{1}{4}\delta(f_x+2\bar{f}) + \frac{1}{2}\delta(f_x) + \frac{1}{4}\delta(f_x-2\bar{f})\right]$$

de manera que: