08/09/2021

- Aproximación de Fresnel

$$kR = kz\sqrt{\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}+1}\,,\quad \text{sea } \xi = [(x-x')^2+(y-y')^2]/z^2;$$

lo que ahora se pide es que $\xi<1$, de manera tal que

$$kR \simeq kz + \left.\frac{kz}{2\sqrt{\xi+1}}\right|_{\xi=0}\xi - \left.\frac{kz}{8(\xi+1)^{3/2}}\right|_{\xi=0}\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3),\ \text{esto es}$$

$$kR \simeq kz + \frac{1}{2}kz\left[\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}\right] - \frac{1}{8}kz\left[\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}\right]^2 + \dots$$

Que $\xi<1$ es pedir que $R\sim z$ lo cual ya teníamos; ahora nos interesa pedir como aproximación que

$$\frac{1}{8}kz\left[\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}\right]^2 \ll 1\ \text{rad},$$

que es la llamada condición de Fresnel; así:

$$e^{ikR} \simeq e^{ikz}e^{ikz\xi/2} \longleftarrow$$ por ello la condición es en radianes.

De forma total

$$U(x,y;z) = \iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\,\frac{e^{ikz}}{2\pi z}\,e^{ikz\xi/2}(-ik)\,dx'dy',$$

o escrito de otra forma

$$U_F(x,y;z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{\mathbb{R}^2} U(x',y';0)\,e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}\,dx'dy'$$

Aproximación de Fresnel