TD nº 2 - Représentations des nombres

Exercice 1. *Changements de bases*

1 Convertissez le nombre 1515 de la base 10 à la base 2.

2 Convertissez le nombre 732 de la base 10 à la base 16.

3 Convertissez le nombre CAFE de la base 16 à la base 10.
Remarque : En base 16 (hexadécimal) on utilise couramment les premières lettres de l'alphabet pour représenter les chiffres au-delà de 9. Ainsi $A = 10$, $B = 11$, etc.

4 Convertissez le nombre 888 de la base 9 à la base 2.

5 Convertissez le nombre 738 de la base 9 à la base 5.

6 écrivez 314_{10} en binaire, en hexadécimal et en octal.

7 écrivez 1000101011_2 en hexadécimal, en octal puis en décimal.

8 écrivez FAC_{16} en binaire, en octal puis en décimal.

9 Quelles sont les représentations binaires des entiers 64_{10}, 77_8 et 114_{11} ?

10 Décrivez un algorithme général de conversion d'une chaîne de caractères représentant un nombre en base b en un entier.
Indication : On suppose que l'on dispose d'une fonction `int val(char c)` qui à chaque chiffre associe sa valeur : `val('1')` $= 1$, `val('2')` $= 2$, etc. et que l'on sait effectuer toutes les opérations arithmétiques usuelles sur les entiers.

11 Décrivez l'algorithme inverse du précédent, qui renvoie la représentation d'un entier en une base b quelconque.
Indication : Ici on suppose qu'on a une fonction `char chiffre(int x)` qui pour tout $x < b$ renvoie le symbole qui représente x en base b.

Exercice 2. *Additions dans les différentes bases*

1 Effectuez l'addition en binaire : $10011 + 10101$.

2 Effectuez l'addition en binaire : $1000101011 + 100111010$.

3 Effectuez l'addition en base 5 : $234_5 + 120_5$. Vérifiez en convertissant en base 10.

4 Effectuez l'addition en base 16 : $\mathrm{FACE}_{16} + \mathrm{BABA}_{16}$. Vérifiez en convertissant en base 10.

5 Décrivez un algorithme d'addition en base quelconque β.

Exercice 3. *Arithmétique binaire sur les entiers positifs*

1 Effectuez les opérations suivantes en base 2 :
a. $110011 + 1010$
b. $101 + 101$
c. $1100 - 10$
d. $1010 - 111$

e. 1001×10
f. 1001×110
g. $1101/11$
h. $1001/10$

2 Effectuez les divisions par des soustractions successives :

a. $1101/11$
b. $1001/10$

Exercice 4. *Nombres à virgule*

1 Convertissez les nombres suivants de la base 2 à la base 10 :

a. $0,11$
b. $101,1101$

2 Représentez les valeurs suivantes en base 2 :

a. 1024.5
b. 65.125
c. 14.40
d. 135.15

Exercice 5. *Entiers relatifs, représentation dite complément à 2*

1 Combien de valeurs différentes peut-on représenter avec n chiffres binaires ?

On veut ici représenter des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) avec un nombre de bits fixés à l'avance.

2 Avec n bits, si l'on veut pouvoir représenter à peu près autant d'entiers positifs que d'entiers négatifs, combien peut-on en représenter de chaque signe ?

Une idée simple pour représenter les entiers relatifs est de représenter e signe à l'aide du premier bit : 0 pour les nombres positifs, et 1 pour les nombres négatifs. C'est la représentation binaire *avec un bit de signe*.

3 Avec cette représentation, quelles sont les valeurs extrêmes que l'on peut représenter sur n bits ?

4 Comment peut-on déterminer le signe et la valeur absolue d'un nombre relatif représenté sur n bits avec un bit de signe ?

5 Comment peut-on effectuer l'addition ou la soustraction de deux nombres relatifs ?

6 Quels sont les inconvénients de cette représentation ?

Pour simplifier les opérations arithmétiques, on peut utiliser une autre représentation des nombres relatifs, la représentation *en complément à 2*.

La représentation R_x en complément à deux d'un entier x sur n bits est définie comme suit :
— si $0 \leq x < 2^{n-1}$, alors R_x est le codage binaire de x sur n chiffres ;
— si $-2^{n-1} \leq x < 0$, alors R_x est le codage binaire de $(x + 2^n)$ sur n chiffres.
Remarque : Cette représentation est en fait le *complément à* 2^n (mais on dit simplement « complément à 2 ») puisque l'opposé d'un entier positif x est représenté par l'entier $2^n - x$.

7 Quelles sont les valeurs extrêmes que l'on peut représenter en complément à 2 sur n chiffres ?

8 Comment peut-on déterminer le signe et la valeur absolue d'un nombre représenté en complément à 2 ?

9 Remplissez le tableau suivant :

binaire 32 bits	signé en complément à 2	non signé
000…000		
000…001		
000…010		
…		
011…110		
011…111		
100…000		
100…001		
100…010		
…		
111…110		
111…111		

Exercice 6. *Calculs en complément à deux*

On suppose dans cet exercice que les entiers sont représentés sur 8 bits en complément à deux.

1 Effectuez les opérations suivantes sur 8 bits :

a. $00110011 + 00001010$

b. $00001100 + 11111110$

c. $00001010 - 11111001$

d. 00001100×11111011

Vérifiez en décodant tous les nombres (en base 10).

2 Comment peut-on déterminer si le résultat d'une addition ou d'une soustraction en complément à 2 est correct ou s'il y a eu un débordement de capacité) ?

3 Effectuez les divisions suivantes par des soustractions successives :

a. 00001101 / 11111101

b. 11110111 / 00000010

Exercice 7. Overflow

✎ Expliquez la capture d'écran suivante, tirée du jeu de cartes en ligne *Hearthstone : Heroes of Warcraft* :

Indication : Une créature qui a initialement 1073750016 points de vie meurt lorsqu'on double ses points de vie.