UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

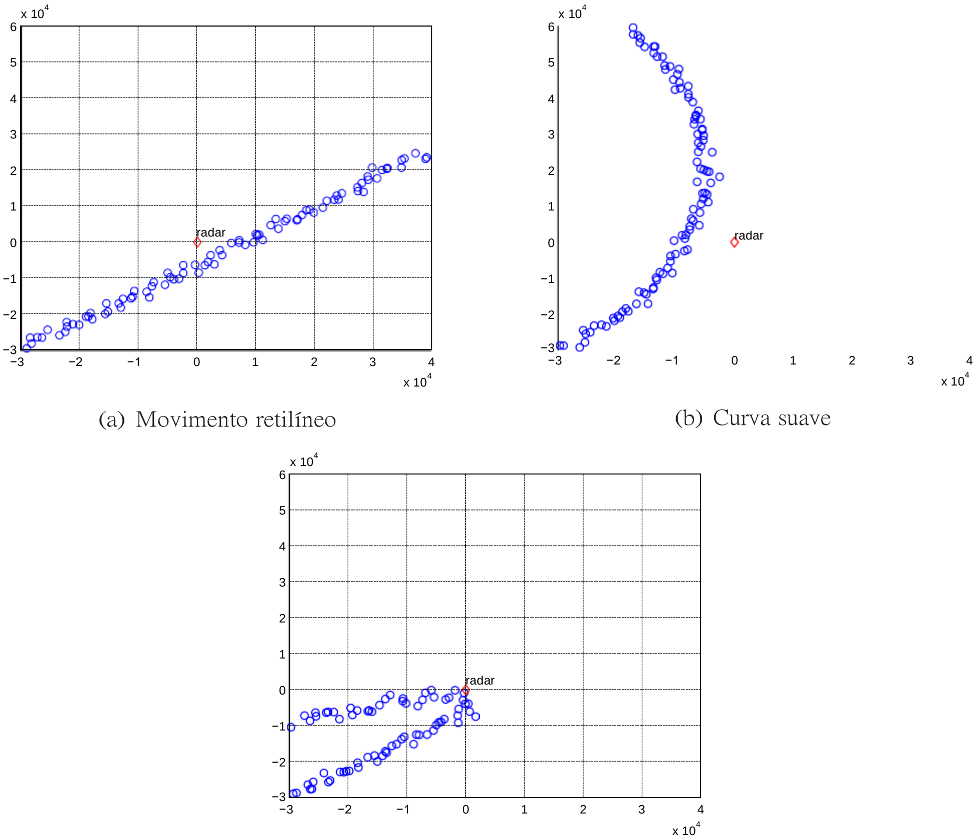
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E ENERGIA

IA–856 Exercício Computacional
Filtro de Kalman

Giovani Chemello Caprio

O problema de rastreamento

Suponha que um dispositivo (como um radar) meça as duas posições coordenadas de objetos (avião, navio, etc) realizando movimentos dentro do alcance deste sensor. A Fig 1 apresenta três movimentos observados através de medidas sucessivas a cada 4s., tomando-se a posição do radar como referência.



(a) Movimento retilíneo

(b) Curva suave

(c) Manobra

Figura 1: Trajetórias observadas – escala em metros.

As trajetórias observadas não tem precisão suficiente para acompanhamento destes movimentos para, por exemplo, emitir alerta de colisões, detetar ataques em situação de guerra, etc. Além disso, é desejável estimar a velocidade do objeto móvel. Para este fim iremos utilizar um filtro de Kalman e adotaremos um modelo cinemático simples para a descrição dos movimentos. Identificam-se quatro variáveis de estados:

x_1 : posição do objeto na abcissa

x_2 : componente da velocidade do objeto na direção da abcissa

x_3 : posição do objeto na ordenada

x_4 : componente da velocidade do objeto na direção da abcissa

O modelo cinemático, conhecido como modelo de velocidade (quase) constante em cada uma das componentes ortogonais é descrito por:

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ x_{i+1}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dT \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_i(k) \end{bmatrix}$$

para $i = 1, 2$. Aqui temos que:

- $dT = 4$s é a taxa de amostragem/intervalo de tempo entre as medidas;
- $\varepsilon_i(k)$ $i = 1$ ou $i = 2$ representa a alteração imposta à velocidade do móvel durante o intervalo de amostragem na direção coordenda correspondente. Como esta ação é desconhecida, deve-se modelar a aceleração imposta pelo navegador como uma amostra de ruído gaussiano a cada instante, com média nula e certa variância fixa, adotada *a priori*. Esta variância a princípio é desconhecida, e terá que ser estimada através de tentativas de ajustes do filtro de Kalman, variando-se este dado no modelo utilizado até se encontrar um valor representativo.

São disponíveis a cada instante medidas com ruído das posições cartesianas na forma seguinte:

$$z_1(k) = x_1(k) + \nu_1(k)$$
$$z_2(k) = x_3(k) + \nu_2(k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

o número total de amostras k depende da permanência do objeto no alcance do sensor. Aqui $\nu_j(k), j = 1, 2$ representam os erros cometido pelo sensor, modelados por ruído gaussiano com média nula e variância conhecida, dada por $\sigma^2_{\nu_1} = \sigma^2_{\nu_2} = 1200^2$, sendo não-correlacionados.

As seqüências de dados de medidas para as três trajetórias estão disponíveis nos arquivos `reta.mat` e `curva_suave.mat` e `manobra.mat` (variável `x_m`), além dos dados exatos de posição dos objetos (variável `x_c`) disponíveis para efeito de comparação e avaliações de desempenho do filtro para cada trajetória.

Questões

1. Implemente o filtro de Kalman para estimar a posição no plano e a velocidade do móvel, assumindo-se que $\varepsilon(k)$ e $\nu(k)$ são processos estocásticos independentes brancos com média nula, com matriz de covariância $\Sigma_\varepsilon = \sigma^2_\varepsilon I$ e $\Sigma_\nu = 1200^2 I$ sendo σ^2_ε desconhecido.

   Utilize os dados nos três arquivos e estabeleça condições iniciais apropriadas para o estado do filtro e para a covariância inicial, lembrando que ela deve ser suficientemente grande para representar o desconhecimento inicial que temos sobre a velocidade e o valor correto de posição.

   Faça experimentos com as três trajetórias e verifique a adequação de ajustes do valor de σ^2_ε para cada caso, através do erro que o filtro comente (vide os itens 2. e 4. em seguida, para adotar uma forma sistemática de avaliar o erro). Adote em seguida um único valor para σ^2_ε que deverá ser mantido em todos experimentos subseqüentes.

2. Estime o erro quadrático médio existente entre a posição real (coordenadas (x, y)) e os valores estimados, a partir dos dados nos arquivos e o resultado do filtro. Verifique a compatibilidade dos erros observados com o erro médio quadrático de estimação de estados de posição teóricos do filtro, dados por elementos correspondentes da matriz de covariância do filtro de Kalman $P_x(k|k)$. Verifique a compatibilidade destes valores com a variância dos ruídos do sistema σ_ε^2 e de observação σ_ν^2.

3. De forma similar, estime a covariância da saída (erro da medida, avaliada através da inovação) e compare com a covariância de erro de medida teórica do filtro de Kalman, dada pela matriz $P_z(k|k)$. Em seguida plote a verossimilhança das medidas ao longo do intervalo de observação através da distribuição condicional do erro de previsão da observação, dada por

$$p_{k|k-1}(z(k)|\hat{x}(k|k-1), P_x(k|k-1)) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi P_z(k|k-1)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z(k)-z(k|k-1))P_z(k|k-1)^{-1}(z(k)-z(k|k-1))'\right)$$

Aqui, $z(k|k-1)$ é a previsão da medida para o instante k fornecida pelo filtro no passo anterior; $P_z(k|k-1)$ covariância da medida no instante k, prevista no instante anterior e $|\cdot|$ representa o determinante.

4. Analise a influência no comportamento do filtro na evolução do estado estimado, alterando os seguintes aspectos:

   - a inicialização do filtro,
   - as variâncias dos ruídos estado e da medida.

   Comente os resultados. Sugestão: aumente e diminue a variância da ordem de uma grandeza.

5. Determine pela teoria se a estabilidade do filtro estacionário é garantida. Verifique pela implementação do filtro se ele atinge uma solução estacionária. Se positivo, verifique também

   - se a solução estacionária depende da condição inicial utilizada, a matriz $P_x(0)$.
   - se a solução encontrada de fato torna o filtro estacionário estável.

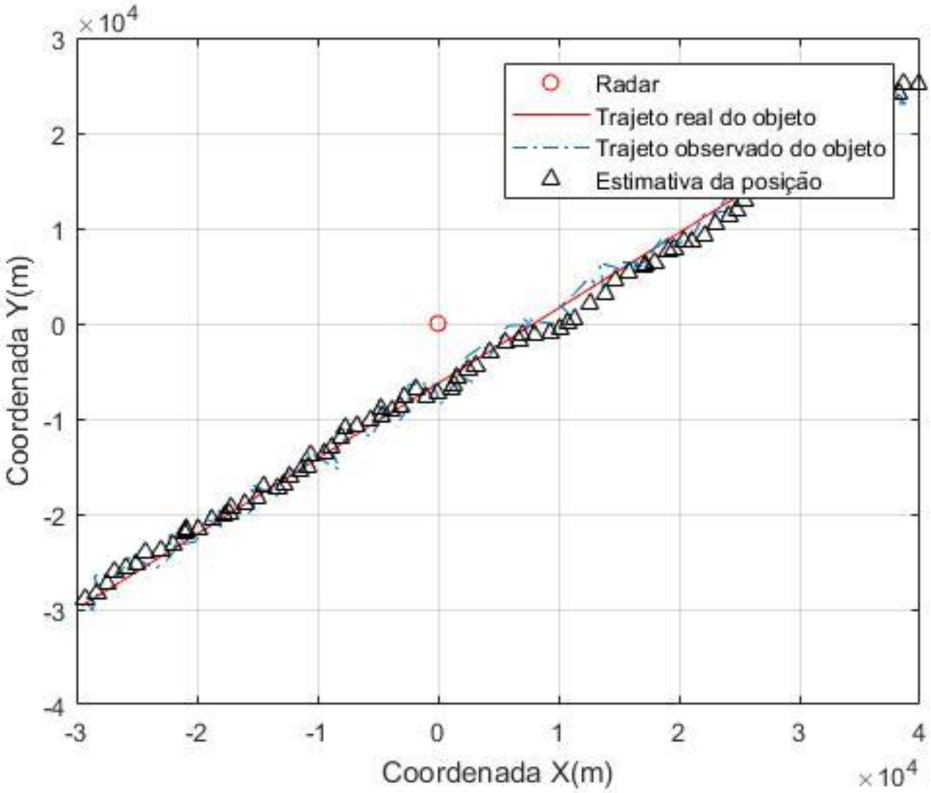
6. Verifique através do acompanhamento de erros se o filtro têm deficiências em curvas fechadas, e avalie a razão deste comportamento, explicando o observado.

7. Utilizando a informação sobre o erro previsto, proponha uma estratégia de adaptação do ganho do filtro de Kalman, para que ele rastreie melhor não estacionariedades do estado. Faça experimentos numéricos com a modificação proposta, e compare com a solução do item anterior.

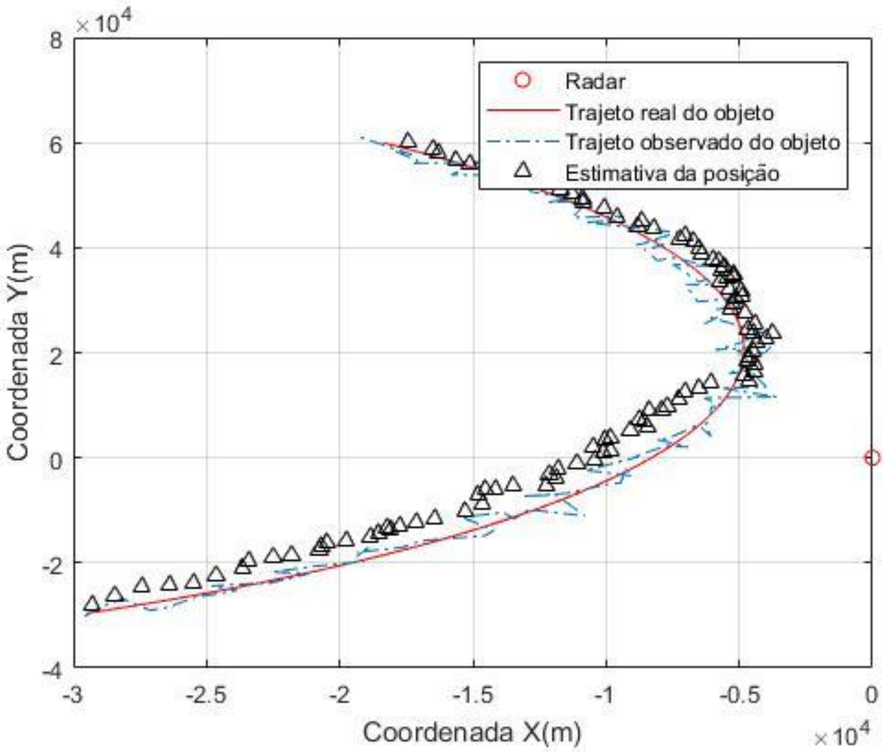
Experimento

Após a realização do experimento de implementação do filtro de Kalman, para as observações geradas pelo radar. Obtivemos o seguinte resultado:

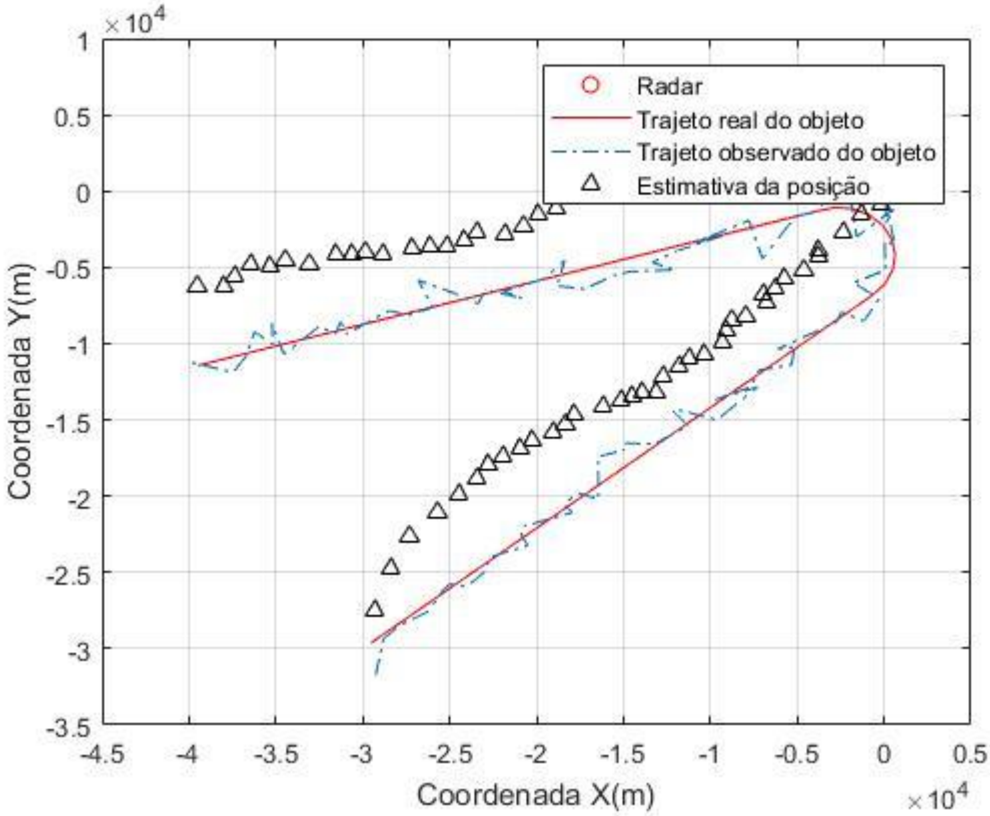
- Reta



- Curva Suave



- Manobra



Claramente, se percebeu que a reta teve uma resposta satisfatória, a curva uma boa resposta e no caso da manobra uma resposta ruim.

Para obter a qualidade dessa aproximação da estimação de uma forma númerica, foi calculado o erro quadrático médio entre a curva real e estimado. Alem disso, obteus-se a velocidade média e sua variância para cada observação.

- Reta

Erro Médio Quadrático	Velocidade Média	Variância(Velocidade)
1.2115e+03	492.3853	5.8312e+03

- Curva Suave

Erro Médio Quadrático	Velocidade Média	Variância(Velocidade)
2.9443e+03	272.3832	1.9076e+04

- Manobra

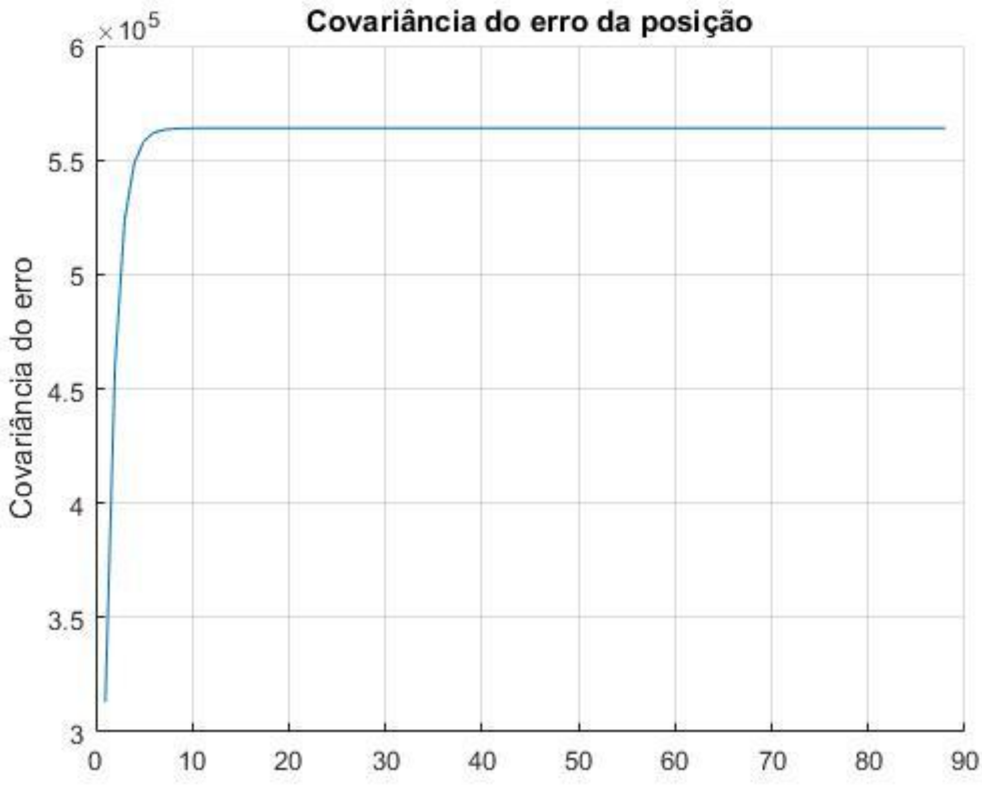
Erro Médio Quadrático	Velocidade Média	Variância(Velocidade)
6.7030e+03	500.31	1.5182e+04

Portanto, percebe-se que o erro aumenta no caso de manobras brutas. Isto ocorre devido a matriz de covariância do erro(P) tentar acompanhar o estimado, mas não prever as mudanças bruscas.

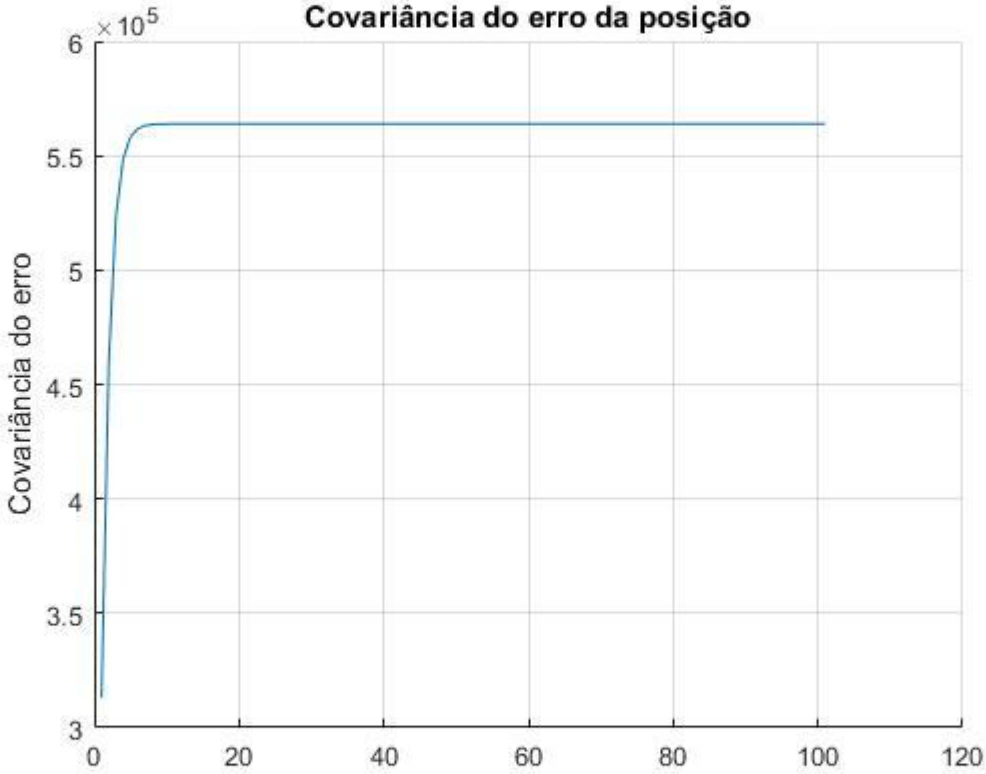
A fim de testes, foram mudados valores das matrizes Q e R, a variação de Q levou a estimação errada, devido ser do próprio sistema. Em mudanças de R, houve piora e melhora, menos significativas.

Por fim, foi feito o gráfico de Covariância de erros da posição, percebe-se que todos tenderam a um valor. Como pode-se ver a seguir:

- Reta



- Curva Suave



- Manobra

Código

```
close all, clear all, clc

load('reta.mat')
%load('curva_suave.mat')
%load('manobra')

posicao = x_m';

% Inicialização
    media = 0; %média da distribuição gaussiana
    variancia = 200;%variância da aceleração-estimado
    sigma = sqrt(variancia);%desvio padrão
    a_x = normrnd(media,sigma);%aceleracao em x com média nula
    a_y = normrnd(media,sigma);%aceleracao em y com média nula
    dT = 4; %Intervalo entre amostras
    v_x = abs(posicao(1,1)-posicao(2,1))/dT;%velocidade em x
    v_y = abs(posicao(1,2)-posicao(2,2))/dT;%velocidade em y
    t = length(x_m(1,:)); %números de amostras de observação
    cov_v=(1200).^2; %covariação
    sigma_pos=sqrt(cov_v);%desvio padrão
    R=[cov_v 0 0 0;0 variancia 0 0;0 0 cov_v 0;0 0 0 variancia];
    %R=[variance_pos 0 0 0;0 variance 0 0;0 0 variance_pos 0;0 0 0
variance];
    Q = [600^2 0 0 0;0 50^2 0 0;0 0 600^2 0;0 0 0 50^2]; %Erro da
velocidade)

% Planta
    F = [1 dT 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 dT; 0 0 0 1];
    G = [(1/2)*(dT)^2 0;dT 0; 0 (1/2)*(dT)^2; 0 dT];
    H =[1 0 0 0; 0 1 0 0;0 0 1 0; 0 0 0 1];

figure(1)
plot(0,0,'or'); %Posicionamento do radar em coordenadas
legend('Radar')
xlabel('Coordenada X(m)'), ylabel('Coordenada Y(m)')
grid on
hold on

figure(1)
plot(x_c(:,1),x_c(:,2),'r') %traçado real(x_c)
legend('Radar','Trajeto real do objeto')

figure(1)
plot(x_m(1,:),x_m(2,:),'-.') %traçado observado(x_m)
legend('Radar','Trajeto real do objeto','Trajeto observado do objeto')

% Variáveis Filtro de Kalman
    vel=[];
    Erro=0; %Erro que soma a cada iteração
    errocov=[];
    P = F*Q*F'; %Erro Inicial da Covariancia
    D=diag(P);
    P=diag(D); %zera os termos cruzados da matriz P
    x = [-30000; v_x;-30000; v_y]; %estado inicial x=[x; x_dot; y; y_dot]
```

```
% Filtro de Kalman
for i = 1:t

   xkp = (F*x) + [0;a_x;0;a_y];%z de kalman a cada iteração
   % B*[acel_x;acel_y];%[0;acel_x;0;acel_y];

   %atualização das acelerações(modeladas como ruídos gaussianos)
   %para cada ciclo
   a_x = normrnd(media,sigma);
   a_y = normrnd(media,sigma);

   Mn = P*H'/(H*P*H'+R); %ganho

   %medições + respectivos ruídos do sensor
   Y =
F*[posicao(i,1);xkp(2,1);posicao(i,2);xkp(4,1)];%+[normrnd(mean,sigma_pos)
;0;normrnd(mean,sigma_pos);0];
   %calculo do estado atual
   x = (xkp) + Mn*(Y - H*x);
   %atualizando a covariância do processo
   P = (eye(4) - Mn*H)*P; %atualização covariancia do erro
   errocov=[errocov; H*P*H'];%covariância do erro de estimação do estado
   P = F*P*F' + Q;
   D=diag(P);
   P=diag(D);%zera os termos cruzados da matriz P

   %Somatório para o EMQ
   Erro = Erro + sqrt((x(1,1)- x_c(i,1)).^2 + (x(3,1)- x_c(i,2)).^2 );
   %estimativa da velocidade
   vel=[vel; (sqrt((xkp(2,1)).^2 + (xkp(4,1)).^2))];


   figure(1)
   plot(x(1,1), x(3,1),'^k');
   legend('Radar','Trajeto real do objeto','Trajeto observado do objeto',
'Estimativa da posição')
end

%Erro Médio Quadrático
Erro_MQ = Erro/t

% Velocidade Média Estimada
V_media = sum(vel)/(max(size(vel)))

% Variancia da velocidade Média
V_var = var(vel)


% Plotando a covariância do erro da posição
    figure(3)
    title('Covariância do erro da posição')
    ylabel('Covariância do erro')
    grid on
    hold on
    errocov_pos=[];
for i=1:4:(4*t)

   errocov_pos = [errocov_pos;errocov(i,1)];

end
    figure(3)
    plot(errocov_pos)
```