UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

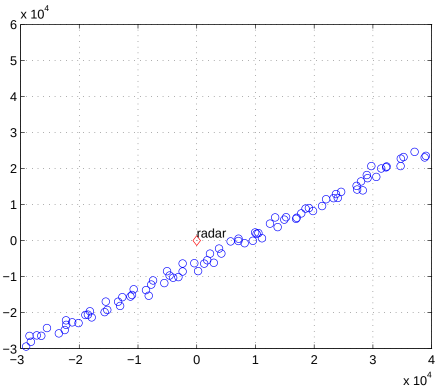
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E ENERGIA

UNICAMP

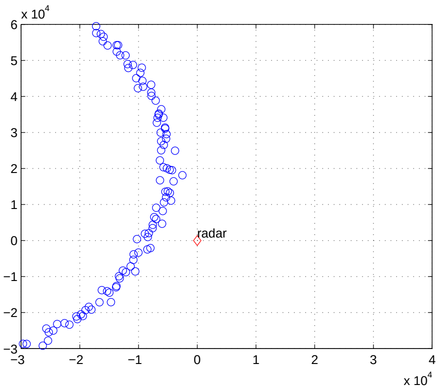
IA–856 Exercício Computacional
Filtro de Kalman

O problema de rastreamento

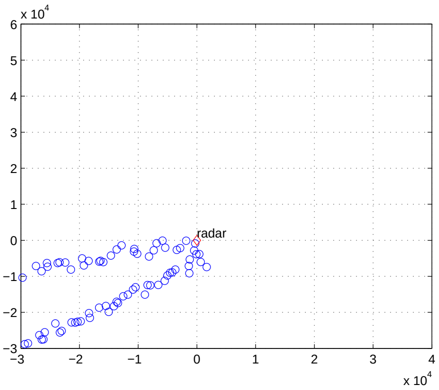
Suponha que um dispositivo (como um radar) meça as duas posições coordenadas de objetos (avião, navio, etc) realizando movimentos dentro do alcance deste sensor. A Fig 1 apresenta três movimentos observados através de medidas sucessivas a cada 4s., tomando-se a posição do radar como referência.



(a) Movimento retilíneo



(b) Curva suave



(c) Manobra

Figura 1: Trajetórias observadas – escala em metros.

As trajetórias observadas não tem precisão suficiente para acompanhamento destes movimentos para, por exemplo, emitir alerta de colisões, detetar ataques em situação de guerra, etc. Além disso, é desejável estimar a velocidade do objeto móvel. Para este fim iremos utilizar um filtro de Kalman e adotaremos um modelo cinemático simples para a descrição dos movimentos. Identificam-se quatro variáveis de estados:

x_1 : posição do objeto na abcissa
x_2 : componente da velocidade do objeto na direção da abcissa
x_3 : posição do objeto na ordenada
x_4 : componente da velocidade do objeto na direção da abcissa

O modelo cinemático, conhecido como modelo de velocidade (quase) constante em cada uma das componentes ortogonais é descrito por:

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ x_{i+1}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & dT \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_i(k) \end{bmatrix}$$

para $i = 1, 2$. Aqui temos que:

- $dT = 4$s é a taxa de amostragem/intervalo de tempo entre as medidas;
- $\varepsilon_i(k)$ $i = 1$ ou $i = 2$ representa a alteração imposta à velocidade do móvel durante o intervalo de amostragem na direção coordenda correspondente. Como esta ação é desconhecida, deve-se modelar a aceleração imposta pelo navegador como uma amostra de ruído gaussiano a cada instante, com média nula e certa variância fixa, adotada *a priori*. Esta variância a princípio é desconhecida, e terá que ser estimada através de tentativas de ajustes do filtro de Kalman, variando-se este dado no modelo utilizado até se encontrar um valor representativo.

São disponíveis a cada instante medidas com ruído das posições cartesianas na forma seguinte:

$$z_1(k) = x_1(k) + \nu_1(k)$$
$$z_2(k) = x_3(k) + \nu_2(k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

o número total de amostras k depende da permanência do objeto no alcance do sensor. Aqui $\nu_j(k), j = 1, 2$ representam os erros cometido pelo sensor, modelados por ruído gaussiano com média nula e variância conhecida, dada por $\sigma^2_{\nu_1} = \sigma^2_{\nu_2} = 1200^2$, sendo não-correlacionados.

As seqüências de dados de medidas para as três trajetórias estão disponíveis nos arquivos `reta.mat` e `curva_suave.mat` e `manobra.mat` (variável `x_m`), além dos dados exatos de posição dos objetos (variável `x_c`) disponíveis para efeito de comparação e avaliações de desempenho do filtro para cada trajetória.

Questões

1. Implemente o filtro de Kalman para estimar a posição no plano e a velocidade do móvel, assumindo-se que $\varepsilon(k)$ e $\nu(k)$ são processos estocásticos independentes brancos com média nula, com matriz de covariância $\Sigma_\varepsilon = \sigma^2_\varepsilon I$ e $\Sigma_\nu = 1200^2 I$ sendo σ^2_ε desconhecido.

   Utilize os dados nos três arquivos e estabeleça condições iniciais apropriadas para o estado do filtro e para a covariância inicial, lembrando que ela deve ser suficientemente grande para representar o desconhecimento inicial que temos sobre a velocidade e o valor correto de posição.

   Faça experimentos com as três trajetórias e verifique a adequação de ajustes do valor de σ^2_ε para cada caso, através do erro que o filtro comente (vide os itens 2. e 4. em seguida, para adotar uma forma sistemática de avaliar o erro). Adote em seguida um único valor para σ^2_ε que deverá ser mantido em todos experimentos subseqüentes.

2. Estime o erro quadrático médio existente entre a posição real (coordenadas (x, y)) e os valores estimados, a partir dos dados nos arquivos e o resultado do filtro. Verifique a compatibilidade dos erros observados com o erro médio quadrático de estimação de estados de posição teóricos do filtro, dados por elementos correspondentes da matriz de covariância do filtro de Kalman $P_x(k|k)$. Verifique a compatibilidade destes valores com a variância dos ruídos do sistema σ_ε^2 e de observação σ_ν^2.

3. De forma similar, estime a covariância da saída (erro da medida, avaliada através da inovação) e compare com a covariância de erro de medida teórica do filtro de Kalman, dada pela matriz $P_z(k|k)$. Em seguida plote a verossimilhança das medidas ao longo do intervalo de observação através da distribuição condicional do erro de previsão da observação, dada por

$$p_{k|k-1}(z(k)|\hat{x}(k|k-1), P_x(k|k-1)) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{|2\pi P_z(k|k-1)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z(k) - z(k|k-1))P_z(k|k-1)^{-1}(z(k) - z(k|k-1))'\right)$$

   Aqui, $z(k|k-1)$ é a previsão da medida para o instante k fornecida pelo filtro no passo anterior; $P_z(k|k-1)$ covariância da medida no instante k, prevista no instante anterior e $|\cdot|$ representa o determinante.

4. Analise a influência no comportamento do filtro na evolução do estado estimado, alterando os seguintes aspectos:

   - a inicialização do filtro,
   - as variâncias dos ruídos estado e da medida.

   Comente os resultados. Sugestão: aumente e diminue a variância da ordem de uma grandeza.

5. Determine pela teoria se a estabilidade do filtro estacionário é garantida. Verifique pela implementação do filtro se ele atinge uma solução estacionária. Se positivo, verifique também

   - se a solução estacionária depende da condição inicial utilizada, a matriz $P_x(0)$.
   - se a solução encontrada de fato torna o filtro estacionário estável.

6. Verifique através do acompanhamento de erros se o filtro têm deficiências em curvas fechadas, e avalie a razão deste comportamento, explicando o observado.

7. Utilizando a informação sobre o erro previsto, proponha uma estratégia de adaptação do ganho do filtro de Kalman, para que ele rastreie melhor não estacionariedades do estado. Faça experimentos numéricos com a modificação proposta, e compare com a solução do item anterior.