IA–856 Exercício Computacional
Controle Linear Quadrático

Giovanni Chemello Caprio
RA: 211483

1. Considere o funcional de custo:

$$J_2(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{1} (dx_k + fu_k)^2 + qx_2^2, \quad \text{e } \mathbf{u} = \{u_0, u_1\},$$

$$x_{k+1} = \alpha x_k + \beta u_k, \quad \text{com } x_0 \text{ conhecido .}$$

(a) Determine a sequência de controle $\mathbf{u}^* = \{u_0^*, u_1^*\}$ ótimo de tal forma que

$$J_2(\mathbf{u}^*) \leq J_2(\mathbf{u}) \quad \text{para todo } \mathbf{u} = \{u_0, u_1\}.$$

(b) Para este problema resolva a equação de Bellman (em (6.1.4) do livro de Davis & Vinter) tomando $V_2(x) = qx^2$ e calculando $V_1(x)$ e $V_0(x)$. Utiliza o Teorema de Verificação e tese se o controle calculado na parte (a) é de fato ótimo.

A)

Para a geração da sequência de controle ótima u_0 e u_1 e posterior verificação na (b), foram utilizado as seguintes fórmulas do 6 capítulo do livro "Stochastic Modelling and Control", de Davis & Vinter.

Para uma sequencia dada u = (u_0 , u_1) e uma condição inicial x_0. As sequencias ficarão da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_1 &= A(0)x_0 + B(0)u_0 \\ x_2 &= A(1)x_1 + B(1)u_1 \\ &= A(1)A(0)x_0 + A(1)B(0)u_0 + B(1)u_1, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Os estados calculados ficarão:

$$x_1 = \alpha x_0 + \beta u_0$$

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta u_1 = \alpha(\alpha x_0 + \beta u_0) + \beta u_1 = \alpha^T \alpha x_0 + \alpha\beta u_0 + \beta u_1$$

Precisamos minimizar o custo, com custo baseando-se na fórmula 6.1.2 do livro, iremos minimizar a seguinte fórmula:

$$V_j(x) = \min_v \left[\|D(j)x + F(j)v\|^2 + V_{j+1}(A(j)x + B(j)v) \right] \quad (6.1.4)$$

Sabemos que o u_j* é o valor de v que alcança o mínimo da formula anterior. Assim, substituindo os valores do problema na formula obtemos:

$$V_2(x_2) = x_2^T q x_2$$

$$V_1(x_1) = \min_V [(dx+fu_1)^2 + x_2^T q x_2]$$

$$V_1(x_1) = \min_V [(d(\alpha x_0+\beta u_0)+fu_1)^2 + q(\alpha^2 x_0+ \alpha\beta u_0 + \beta u_1)^2]$$

Sabendo que está função é concâva, podemos concluir que terá um minimizador global para u*. Com isso, basta acharmos o gradiente do vetor V em relação a ($u_1 u_0$) e igualar a 0. Para a verificação do gradiente, foi utilizado o wolfram alpha

- Gradiente em relação a $u_0 = 2\beta$ $(d\ (\beta d u_0 + f u_1 + \alpha d x_0) + \alpha q\ [\alpha\beta u_0 + \beta u_1 + \alpha^2 x_0]\ q^T\ [\alpha\beta u_0 + \beta u_1 + \alpha^2 x_0])$
- Gradiente em relação a $u_1 =$ $2\ (f\ (\beta d u_0 + f u_1 + \alpha d\ x_0) + \beta q\ [\alpha\beta u_0 + \beta u_1 + \alpha^2 x_0]\ q^T\ [\alpha\beta u_0 + \beta u_1 + \alpha^2 x_0])$

Portanto, o u* ótimo será:

$$u^* = (\,2\beta\ (d\ (f u_1 + \alpha d x_0) + \alpha q\ [\beta u_1 + \alpha^2 x_0]\ q^T\ [\beta u_1 + \alpha^2 x_0])\ ,\ 2\ (f\ (\beta d u_0 + \alpha d\ x_0) + \beta q\ [\alpha\beta u_0 + \alpha^2 x_0]\ q^T\ [\alpha\beta u_0 + \alpha^2 x_0])$$

B)

Para a geração do código em MATLAB, foram utilizadas as seguintes fórmulas restantes:

- **$u_j(x)$:**

$$u_j^1(x) = -M(j)x$$

- **M(j):**

$$M(j) = [B^T(j)S(j+1)B(j) + F^T(j)F(j)]^{-1} \cdot [B^T(j)S(j+1)A(j) + F^T(j)D(j)]. \qquad (6.1.16)$$

- **$V_k(x)$:**

$$V_k(x) = x^T S(k)x \qquad k = 0, 1, \ldots, N \qquad (6.1.15)$$

- **$V_N(x)$:**

$$V_N(x) = x^T Q x, \qquad (6.1.7)$$

- **S(j):**

$$S(N) = Q$$
$$S(j) = A^{\mathrm{T}}(j)S(j+1)A(j) + D^{\mathrm{T}}(j)D(j) - (A^{\mathrm{T}}(j)S(j+1)B(j) + D^{\mathrm{T}}(j)F(j))(B^{\mathrm{T}}(j)S(j+1)B(j) + F^{\mathrm{T}}(j)F(j))^{-1} \cdot (B^{\mathrm{T}}(j)S(j+1)A(j) + F^{\mathrm{T}}(j)D(j))$$
$$j = N-1, N-2, \ldots, 0. \qquad (6.1.20)$$

- **J_n(u):**

$$J_N(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \|D(k)x_k + F(k)u_k\|^2 + x_N^{\mathrm{T}} Q x_N. \qquad (6.1.2)$$

Com a geração dos controles ótimos (u*), foi utilizado o Teorema de Verificação(6.1.1) para obter o Custo total e os seguintes valores para cada iteração. Os resultados podem ser vistos a seguir:

- V_2(x):

v2 = q*x2^2

- V_1(x):

v1 = x1^2*(a^2*q + d^2 - (d*f + a*b*q)^2/(q*b^2 + f^2))

- V_0(x):

v0 = x0^2*(d^2 - (d*f + a*b*(a^2*q + d^2 - (d*f + a*b*q)^2/(q*b^2 + f^2)))^2/(f^2 + b^2*(a^2*q + d^2 - (d*f + a*b*q)^2/(q*b^2 + f^2))) + a^2*(a^2*q + d^2 - (d*f + a*b*q)^2/(q*b^2 + f^2)))

- J_2(u*):

J = (d*x1 - (f*x1*(d^2 + a*b*q))/(q*b^2 + f^2))^2 + (d*x0 - (f*x0*(d^2 + a*b*(a^2*q + d^2 - (d*f + a*b*q)^2/(q*b^2 + f^2))))/(f^2 + b^2*(a^2*q + d^2 - (d*f + a*b*q)^2/(q*b^2 + f^2))))^2 + q*x2^2

Para o teorema:

$$V_0(x_0) \leq J_N(u). \qquad (6.1.12)$$

Optou-se por dar valores númericos as varíaveis simbólicas, para uma mais fácil verificação e substituindo-se no MATLAB, gerou os resultados de que $V_2(x)>V_1(x)>V_0(x)$. Assim como, $V_0(x)$ gerou um resultado próximo de 0, e menor que $J_2(u^*)$.

Portanto, o Teorema de Verificação foi concluido e provado que a solução ótima tem o menor custo.

Código

```
%% IA 856 Controle Linear Quadratico Gaussiano Ex.1😎
clear all,close all,clc

syms d, syms f, syms q, syms x0, syms x1, syms x2
syms a  % alpha
syms b  % beta

% gerando S(j):

s2 = q; % S(2)
A  = (a*s2*b + d*f); % A,B,C apenas para organizar S(1)
B  = (b*s2*b + f*f)^(-1);
C  = (b*s2*a+f*d);
s1 = a*s2*a + d*d -A*B*C; %S(1)
D  = (a*s1*b + d*f); % A,B,C apenas para organizar S(1)
E  = (b*s1*b + f*f)^(-1);
F  = (b*s1*a+f*d);
s0 = a*s1*a + d*d -D*E*F; %S(0)

% gerando M(j):

M1 = ((b*s2*b +f*f)^(-1))*(b*s2*a + d*d);
M0 = ((b*s1*b +f*f)^(-1))*(b*s1*a + d*d);

% gerando u(j):

u1 = -M1*x1
u0 = -M0*x0

% gerando Vj(x):

v2 = x2*s2*x2
v1 = x1*s1*x1
v0 = x0*s0*x0

%calculo do J:

J=((d*x0+f*u0)^2)+((d*x1+f*u1)^2) + v2
```