UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E ENERGIA



# IA–856 Exercício Computacional

# Controle Linear Quadrático

# Giovanni Chemello Caprio

# RA: 211483

# 

# 

# **Linear Quadrático Determinístico**

# Dado a Gu escolhida sendo: Gu = tf(540, conv([1 6],[1 5 72]). Foi transformada em discreta, amostrada e gerada em espaço de estados a fim de análises posteriores. Sendo:

# A

# 

# B

# 

# C

# 

# Assim, para nossas analises, testamos a controlabilidade entre (A,B) e observabilidade de (A,C) e foi visto que o sistema era controlável e observável. Partindo então para os cenários de controle.

# N = 3 e Q = I

# Para esse cenário, geramos um x0 inicial com valor de [1;2;3]. Com isso, tivemos que fazer a relação de Filtro de Kalman, para gerar os x estimados futuros e gerar o controle ótimo u\* e os custos ótimos associados por estágio. Obtendo:

# u\* = (-1.0336 , 0.2033)

# Custos = (28.6085, 14.3674 , 1.18)

# Custo Total = 44.1558 Custo Médio = 14.71

# Horizonte Infinito

# Caso não tenhamos os N’s que levarão nosso controle ótimo a cada iteração, podemos calcular o controle que gera o menor custo em relação ao infinito.

# Para isso, vamos gerar a matriz S via Eq. Algébricas de Riccati. Mas para isso, devemos provar que (A,B) é estabilizável e (D\*,A\*) é detectável. (A,B) é detectável, justamente por (A,B) ser controlável. O que foi calculador anteriormente. (D\*,A\*) não é observável, mas podemos calcular o autovalor que não está no circulo unitário e verificar se é observável, o que foi provado. Assim, temos as condições de existência e unicidade de solução.

# Com isso, calculamos a solução pelo código de matlab dare, que devolve a matriz S que minimiza o custo no infinito.

# Os resultados obtidos foram:

# u1 = (-0.3257)

# Custo = (14,0159)

# Variação de f

# Para f=0.001

# Observamos um que para:

# - N = 3: u\* = (-0.0114 , 0.000237) / Custo = (12.1926, 0.0474, 0.00014);

# - Infinito: u1 = (0.0231) / Custo = (14.0159);

# Assim, os custos e ações de controles foram diminuidos.

# Para f=1000

# Observamos um que para:

# - N = 3: u\* = (-0.0121, 1.5259e-06) / Custo = (24.3873, 0.0124, 0.0001);

# - Infinito: u1 = (-0.0060) / Custo = (14.0159);

# Assim, os custos e ações de controles foram aumentados.

# **Linear Quadrático Gaussiano**

# Adicionado o ruído gaussiano com variância 0.04. Percebe-se que a planta continuou observável e controlável. Assim, os resultados para o controle finito com N= 3 e Q = I, adotando um x inicial na origem:

# u\*=(0,0)

# Custo = (200.26, 9.377, 1.7583)

# Utilizando o código do LQ para determinação do Infinito, percebeu-se que a modificação gerou um (A,B) estabilizável e um (D\*,A\*) detectável. Assim,

# u1 = (-0.3257)

# Custo = (14,0159)

# Para a mesma planta, o sistema não apresentou mudanças no custo no infinito para ruídos, isso deve-se ao fato do ruído ser gaussiano com média nula.

# Para f=0.001

# Observamos um que para:

# - N = 3: u\* = (-0.0121, 1.5259e-06) / Custo = (294.8, 21.31 , 0.0890);

# - Infinito: u1 = (0.0231) / Custo = (14,0159);

# Assim, o custo no caso finito aumentou.

# Para f=1000

# Observamos um que para:

# - N = 3: u\* = (-0.0121, 1.5259e-06) / Custo = (329.88, 33.432, 2.2560);

# - Infinito: u1 = (-0.0060) / Custo = (14,0159);

# 

# Para o infinito, foi caculado com um p=0.9. Isso ocorre para dar menos importancia ao futuro das predições. Com isso, obtivemos:

# u1 = (-0.3263)

# Custo = (14,0143)

# Devido ser muito próximo de 1, não obteve tanta diferença.

# **Código LQ**

% Exercicio 4 - LQG

clc, close all, clear all

%% Sistema Escolhido não-paramétrico

Ts = 1; % Tempo a cada amostra

Gu = tf(540, conv([1 6],[1 5 72])); % F.T. continua

Gud = c2d(Gu,Ts); % F.T. discreta

sys = ss(Gud); % Espaço de Estados

Co = ctrb(sys.A,sys.B)

rank(Co) % testa controlabilidade

Ob = obsv(sys.A,sys.C)

rank(Ob) % testa observabilidade

%% LQ Deterministico (wk=0) (x\_k+1 = sys.a \* x\_k + sys.b \* u\_k)

% i)(Finito com N=3)

N = 3;

Q = eye(3); %Q = I

% cálculo dos ganhos de controle ótimo M(j) e S(N)

S{N} = Q;

A = sys.a; B=sys.b; F = 1; D = 1;

for j=N-1:-1:1

M{j} = ((B'\*S{j+1}\*A + F'\*D)/(B'\*S{j+1}\*B + F'\*F));

S{j} = A'\*S{j+1}\*A + D'\*D - (A'\*S{j+1}\*B + D'\*F)\*(B'\*S{j+1}\*A + F'\*D);

end

% cálculo do filtro de Kalman

F = sys.a; G = sys.b; H = sys.C; D = sys.D;

P{1} = F\*Q\*F'; % covariancia inicial

L=[0 0 1; 0 1 1; 1 1 1];

R=1;

x{1} = sqrt(5)\*L\*randn(3,1); % gera condição inicial

y{1} = H\*x{1}; % gera observação inicial

xa = [1 2 3]'; % valor do estado a priori [k|k-1]

xe{1} = xa;

for k=1:N-1

% Measurement update

K{k} = P{k}\*H'/(H\*P{k}\*H'+R); % Ganhos de kalman

P{k+1} = (eye(3) - K{k}\*H)\*P{k}; % Proxima Cov

% evolução do sistema verdadeiro:

u{k} = -M{k}\*xa; % controle ótimo que minimiza o custo

x{k+1} = F\*x{k} + G\*u{k};

y{k+1} = H\*x{k+1};

%valor estimado:

xa = F\*xe{k} + G\*u{k}; % x[k+1|k]

xe{k+1}= xa + K{k}\*(y{k+1}-H\*xa); % x[k+1|k+1]

% custo no estágio

c(k) = x{k}'\*Q\*x{k} + u{k}'\*R\*u{k};

end

% custo final

c(N) = x{N}'\*S{N}\*x{N};

% ii)(Infinito)

A = sys.a; B=sys.b; D = 1; F = 1;

% teste de estabilizavel e detectavel

%(A,B) é estabilizavel pois (A,B) é controlável

D\_ = (eye(3)-F\*inv(F'\*F)\*F')\*D;

A\_ = A-(B\*inv(F'\*F)\*F'\*D);

a = A\_(1,:);

Ob2 = obsv(D\_,a)

rank(Ob2) % testa observabilidade para verificar detecbilidade

eig(A\_) % verifica o pólo não observável para analise

aa = [-400\*eye(3) - a; D\_]% verifica a detectabilidade no

rank(aa) % no pólo fora do circulo unitario

[X,L,G] = dare(A,B,Q,R) % Valor do Ricatti

Mx=inv(B'\*X\*B+F'\*F)\*(B'\*X\*A+F'\*D);

x\_inf = [1 2 3]';

u\_inf = -Mx\*x\_inf %controle ótimo infinito

V\_inf = x\_inf'\*X\*x\_inf %custo no infinito

# **Código LQG**

% Exercicio 4 - LQG

clc, close all, clear all

%% Sistema Escolhido não-paramétrico

Ts = 1; % Tempo a cada amostra

Gu = tf(540, conv([1 6],[1 5 72])); % F.T. continua

Gud = c2d(Gu,Ts); % F.T. discreta

sys = ss(Gud); % Espaço de Estados

Co = ctrb(sys.A,sys.B)

rank(Co) % testa controlabilidade

Ob = obsv(sys.A,sys.C)

rank(Ob) % testa observabilidade

%% Caso Ruido I)

% ruido de medida y\_k = C\*x\_k + sqrt(var\_y)\* e\_k com e\_k ~ N(0,1)

var\_y = 0.04;

% ruido do sistema x\_k+1 = sys.a \* x\_k + sys.b \* u\_k + F\*w\_k

F = [1 0 0;0 1 0;0 0 1];

Cor = ctrb(sys.A,F); rank(Cor) % testa controlabilidade através do ruído

% desempenho E[ sum\_1^(N-1) [x\_k'\*Qc\*x\_k +u\_k\*Rc\*u\_k] + x\_N'\*Sf\*x\_N]

% problema inicia-se no instante k=1 com x\_1 ~ N( m\_1, P\_1)

L = [1 0 0; 1 1 0;1 1 1];

P\_1 = 500\*L\*L';

m\_1 = [0 0 0]';

% i)

N = 3;

R = var\_y;

Q = eye(3); %Q = I

% cálculo dos ganhos de controle ótimo M(j) e S(N)

S{N} = Q;

A = sys.a; B=sys.b; D = 1; F=1; C=sys.c;

for j=N-1:-1:1

M{j} = ((B'\*S{j+1}\*A + F'\*D)/(B'\*S{j+1}\*B + F'\*F));

S{j} = A'\*S{j+1}\*A + D'\*D - (A'\*S{j+1}\*B + D'\*F)\*(B'\*S{j+1}\*A + F'\*D);

end

% cálculo do ganho do filtro de Kalman

P{1} = P\_1;

for k=1:N-1

% Measurement update

K{k} = A\*P{k}\*C'/(C\*P{k}\*C'+R);

P{k+1} = A\*P{k}\*A'+ F\*Q\*F' - K{k}\*(C\*P{k}\*C'+R)\*K{k}';

end

% Controle

x{1} = sqrt(500)\*L\*randn(3,1); % gera condição inicial

y{1} = C\*x{1} + sqrt(var\_y)\*randn; % gera observação inicial

xa = m\_1; % valor do estado a priori [k|k-1]

xe{1} = xa;

for k=1:N-1

% evolução do sistema verdadeiro:

u{k} = -M{k}\*xa;

x{k+1} = A\*x{k} + B\*u{k} + F\* randn(3,1);

y{k+1} = C\*x{k+1} + sqrt(var\_y)\*randn;

%valor estimado:

xa = A\*xe{k} + B\*u{k}; % x[k+1|k]

xe{k+1}= xa + K{k}\*(y{k+1}-C\*xa); % x[k+1|k+1]

% custo no estágio

c(k) = x{k}'\*Q\*x{k} + u{k}'\*R\*u{k};

end

% custo final

c(N) = x{N}'\*S{N}\*x{N};

custo = cumsum(c);

plot(c,'\*')

%% ii)(Infinito)

A = sys.a; B=sys.b; D = 1; F = 1;

% teste de estabilizavel e detectavel

%(A,B) é estabilizavel pois (A,B) é controlável

D\_ = (eye(3)-F\*inv(F'\*F)\*F')\*D;

A\_ = A-(B\*inv(F'\*F)\*F'\*D);

a=A\_(1,:);

Ob2 = obsv(D\_,a)

rank(Ob2) % testa observabilidade para verificar detecbilidade

eig(A\_) % verifica o pólo não observável para analise

aa = [-3.9\*eye(3) - a; D\_]% verifica a detectabilidade no

rank(aa) % no pólo fora do circulo unitario

[X,L,G] = dare(A,B,Q,R) % Valor do Ricatti

Mx=inv(B'\*X\*B+F'\*F)\*(B'\*X\*A+F'\*D);

x\_inf = [1 2 3]';

u\_inf = -Mx\*x\_inf %controle ótimo infinito

V\_inf = x\_inf'\*X\*x\_inf %custo no infinito

%% descontado(Descontado)

p = 0.0001;

p2 = p^(1/2);

A = p2\*A; B = p2\*B; F = p2\*F; D= p2\*D;

[Xp,L,G] = dare(A,B,Q,R) % Valor do Ricatti

Mxp=inv(B'\*Xp\*B+F'\*F)\*(B'\*Xp\*A+F'\*D);

x\_infp = [1 2 3]';

u\_infp = -Mxp\*x\_infp %controle ótimo infinito

V\_infp = x\_infp'\*Xp\*x\_infp %custo no infinito