

Documento di L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

Giovanni Canarecci

2 giugno 2019



# Capitolo 1

## Elementi iniziali

### 1.1 Sezione

Iniziamo con una definizione

**Definizione.** *Un sottoinsieme  $S \subset \mathbb{R}^3$  si dice una superficie regolare se, per ogni punto  $p \in S$ , esiste un intorno  $V$  di  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  e un'applicazione  $X : U \rightarrow V \cap S$ , dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , tale che:*

1.  $X$  è differenziabile di classe  $C^\infty$ , cioè scrivendo

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in U$$

le funzioni  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  sono  $C^\infty$ .

2.  $X$  è un omeomorfismo. Cioè  $X$  è continua ed esiste l'inversa continua

$$X^{-1} : V \cap S \rightarrow U.$$

3. (Condizione di regolarità) Per ogni punto  $q \in U$ , il differenziale  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è iniettivo.

**Esempio.** (Superficie tangente). Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrizzazione di una curva. Si definisce superficie tangente alla curva  $\alpha$

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t) \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R}$$

la superficie generata da tutte le rette tangenti alla curva.

**Proposizione.** (Condizione di regolarità per alcune superficie). *I criteri per la regolarità delle rigate tangenti, dei cilindri e dei coni sono le seguenti:*

- Sia  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare la cui curvatura  $K(\alpha)$  è ovunque diversa da zero. Allora la rigata tangente  $X$  ad  $\alpha$  è regolare dappertutto tranne che lungo  $\alpha$ .
- Un cilindro  $X(t, v) = \alpha(t) + vw$   $(t, v) \in I \times \mathbb{R}$  è regolare in tutti i punti in cui  $\alpha' \wedge w$  non si annulla.

- Un cono  $X(t, v) = P + v(\alpha(t) - P)$   $(t, v) \in I \times \mathbb{R}$  è regolare dovunque  $v\alpha \wedge \alpha'$  è diverso da zero. Un cono non è mai regolare nel suo vertice.

*Dimostrazione.* Dimostriamo prendendo in considerazione i tre casi distinti:

- nel primo caso l'equazione della superficie sarà

$$X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t)$$

per avere la regolarità  $X_t$  e  $X_v$  non devono giacere sulla stessa retta, cioè

$$X_t = \alpha'(t) + v\alpha''(t)$$

$$X_v = \alpha'(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X_t \wedge X_v &= (\alpha'(t) + v\alpha''(t)) \wedge \alpha'(t) = \\ &= v\alpha''(t) \wedge \alpha'(t) \neq 0 \iff v \neq 0 \end{aligned}$$

- nel secondo caso abbiamo

$$X_t = \alpha'(t)$$

$$X_v = w$$

$$\Rightarrow X_t \wedge X_v = \alpha'(t) \wedge w \neq 0$$

- nell'ultimo caso abbiamo

$$X_t = v\alpha'(t)$$

$$X_v = \alpha(t) + P$$

$$\Rightarrow X_t \wedge X_v = v\alpha'(t) \wedge (\alpha'(t) + P) = v\alpha'(t) \wedge \alpha \neq 0$$

□

## Capitolo 2

# Contenuti finali

**Esempio (Cono)** Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrizzazione di una curva e sia  $P \in \mathbb{R}^3$  un punto fissato, la superficie generata da tutte le rette che passano per il punto  $P$  e toccano la curva  $\alpha$

$$X(t, v) = P + v(\alpha(t) - P) \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R}$$

si definisce *cono* di direttrice la curva  $\alpha$  e di vertice  $p$ .



Figura 2.1: Cono

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquid ex ea commodi consequat. Quis aute iure reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint obcaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquid ex ea commodi consequat. Quis aute iure reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint obcaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquid ex ea commodi consequat. Quis aute iure reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint obcaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit



Figura 2.2:  
Cono



amet, consectetur adipisicing elit, sed eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquid ex ea commodi consequat. Quis aute iure reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint obcaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquid ex ea commodi consequat. Quis aute iure reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint obcaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquid ex ea commodi consequat. Quis aute iure reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint obcaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquid ex ea commodi consequat. Quis aute iure reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint obcaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.



(a) Prima figura

(b) Seconda figura

**Figura 2.3:** Titolo delle figure