LEPL1501 - Projet 1
Modélisation physique du mouvement spatial d'une bille sur des rails

Une bille roule sans glissement sur deux rails d'orientation et de courbure quelconque dans l'espace à trois dimensions. Les rails ont un espacement constant b, la bille a un rayon r (Figure 1). La hauteur du centre de la bille au-dessus des rails est $h = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$, cela correspond au rayon de roulement de la bille sur les rails.

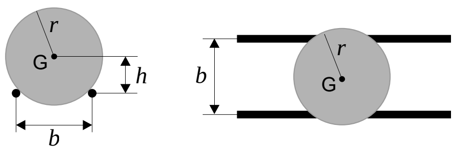

Figure 1.

Le centre de la bille suit la courbe du rail $\vec{X}(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$, où s est l'abscisse curviligne suivant la courbe. En tout point de la courbe, on peut obtenir le vecteur tangent $\vec{T} = \frac{d\vec{X}}{ds}$ et le vecteur de courbure $\vec{C} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{X}}{\mathrm{d}s^2}$. $\vec{T}$ est unitaire ($|\vec{T}| = 1$) et tangent à la courbe. $\vec{C}$ est normal à la courbe dans la direction du centre de courbure, avec $|\vec{C}| = k_c = \frac{1}{r_c}$ où r_c est le rayon de courbure.

Le mouvement de la bille peut se décomposer en deux composantes, l'une tangente à la courbe et l'autre normale à la courbe. La composante tangentielle s se réduit à une dimension, selon l'axe tangent $\vec{T}$, alors que la composante normale est à deux dimensions, dans le plan orthogonal à $\vec{T}$. En général, les vecteurs dans la composante normale ne sont pas collinéaires ; le calcul vectoriel est nécessaire.

Comme illustré Figure 2, les forces qui s'appliquent sur la bille sont le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{e_z}$ et la résultante des forces de contact $\vec{R}$.

$$\vec{P} = \overrightarrow{P_t} + \overrightarrow{P_n} = P_s.\vec{T} + \overrightarrow{P_n} = mg_s.\vec{T} + m\overrightarrow{g_n}$$
$$\vec{R} = \overrightarrow{R_t} + \overrightarrow{R_n} = -R_s.\vec{T} + \overrightarrow{R_n}$$

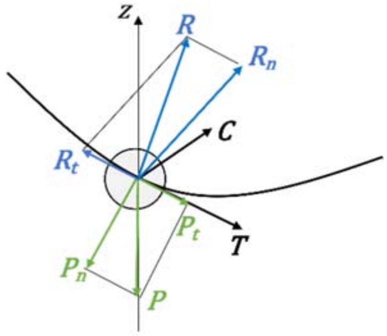

Figure 2.

La trajectoire de la bille est représentée par son abscisse $s(t)$ et sa position $\vec{X}(t) = \vec{X}\big(s(t)\big)$. La vitesse de la bille est tangente à la courbe :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{d\vec{X}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V_s \cdot \vec{T}$$

Le mouvement de la bille est décrit par

$$m\,\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} \tag{1}$$

L'accélération se décompose en composantes tangente et normale :

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t} = a_s.\vec{T} + \overrightarrow{a_t} = \frac{dV_s}{dt} \cdot \vec{T} + V_s^2 \cdot \vec{C}$$

La composante tangente est la variation d'amplitude de la vitesse tandis que la composante normale est l'accélération centripète, suivant le vecteur de courbure.

On peut décomposer l'équation du mouvement (1) selon les deux directions. On obtient :

$$m\frac{dV_s}{dt} = mg_s - R_s \tag{2}$$

$$mV_s{}^2\vec{C} = m\overrightarrow{g_n} + \overrightarrow{R_n} \tag{3}$$

Le mouvement de rotation est décrit par l'équation $I\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \sum \vec{\tau}$. $\vec{\Omega}$ est la vitesse angulaire de rotation de la bille autour d'un axe perpendiculaire aux rails, $\vec{\tau}$ représente les couples appliqués, et $I = \frac{2}{5}mr^2$ est l'inertie de rotation de la bille. Les couple résultent des force de réaction $\vec{R}$, comme schématisé Figure 3.

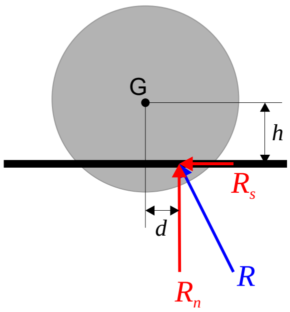

Figure 3.

La distance d représente l'écrasement de la bille au contact du rail. On fait l'hypothèse qu'elle dépend de la vitesse de la bille selon l'expression $d = e.V_s$, où le paramètre e correspond à un coefficient de frottement.

On fait l'hypothèse que la force de réaction normale $\overrightarrow{R_n}$ est approximativement perpendiculaire au plan des rails[1]. Dans ces conditions, la vitesse de rotation et les couples s'exercent dans la même direction, transverse

[1] Ceci suppose que la piste a été inclinée dans les courbes pour qu'il en soit ainsi, à la vitesse attendue de passage de la bille.

à la piste. Par la condition de roulement sans glissement, on a $\Omega = \frac{V_s}{h}$, et l'équation de mouvement de rotation donne :

$$I\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{5}\frac{mr^2}{h}\frac{dV_s}{dt} = -h.R_s + e.V_s.R_n \qquad (4)$$

En combinant et développant les équations (2), (3) et (4), on obtient une équation pour l'évolution de la vitesse V_s en fonction des différents paramètres du problème, sous la forme

$$\frac{dV_s}{dt} = f(V_s, g_s, \overrightarrow{g_n}, \dots) \qquad (5)$$

Cette équation pourra servir de base pour la simulation informatique.

Question : Ecrivez le développement de l'équation (5).

Exemple

Soit une bille roulant sur une piste courbe. A la position de la bille, la courbe suit la direction (dx, dy, dz) = (2, 2, 1) et le vecteur de courbure est $\vec{C}$ = (2, -2, 0) m^{-1}. La vitesse de la bille est V_s = 2 m/s. L'écartement des rails b = 0.012 m, le rayon de la bille r = 0.010 m, le coefficient de frottement e = 0.0004 m/(m/s). On considère $g \approx 9$ m/s^2. Déterminez l'accélération tangentielle qui s'applique à la bille.

Question : Calculez le vecteur tangent unitaire $\vec{T}$.

Question : Calculez les composantes de l'accélération de pesanteur g_s et $\overrightarrow{g_n}$.

Question : Calculez l'accélération centripète $V_s^2\vec{C}$.

Question : Calculez la norme de l'accélération normale $G_n = \left|V_s^2\vec{C} - \overrightarrow{g_n}\right|$

Question : Calculez l'accélération tangentielle $\frac{dV_s}{dt}$