Rapport 2 : Décomposition LU et moindres carrés

Loïc Jabiro KAYITAKIRE

NOMA : 53272100

Question 1

Définition

Le conditionnement est un concept qui permet de mesurer la sensibilité d'un problème de calcul numérique par rapport à une perturbation. Il est mesuré grâce au nombre de conditionnement κ qui se calcule comme suit :

$$\kappa(x) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{||\delta x|| \leq \delta} \frac{\frac{||\delta x||}{||x||}}{\frac{||\delta A||}{||A||}}$$

Conditionnement par rapport à A

Le problème de base est : $A^T A x = A^T B$
On pose $A^T A = A'$ et $A^T B = B'$
On suppose une perturbation $\delta A'$ sur A'. On a alors le problème perturbé suivant :

$$(A' + \delta A')(x + \delta x) = B'$$

$$A'x + A'\delta x + \delta A' x + \delta A' \delta x = B'$$

$A'x = B'$ et $\delta A' \delta x$ est négligeable par rapport au reste. On a alors :

$$A' \delta x + \delta A' x = 0$$

Ce qui donne ensuite :

$$\delta x = -A'^{-1} \delta A' x$$

On a alors :

$$||\delta x|| = || - A'^{-1} \delta A' x|| \leq ||A'^{-1}|| ||\delta A'|| ||x||$$

Et donc :

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq ||A'||||A'^{-1}||\frac{||\delta A'||}{||A'||}$$

Ainsi, $\kappa(A^T A) = ||A^T A||||(A^T A)^{-1}||$

En suivant un raisonnement similaire pour une perturbation sur B, on obtient :

$$\kappa(A^T B) = ||A^T B||||(A^T A)^{-1}||$$

Question 2

La complexité

Question 3

Question 4