# Interferometro

# Giovanni Laganà, Gioele Lo Presti, Gabriele Manzi

# 12 Giugno 2023

# Indice

1	$\mathbf{Ap_{l}}$	parato sperimentale	2
2		<b>v</b>	3
		Verifica dei massimi di interferenza	
	2.2	Calibrazione del micrometro	Э
3	Mic	chelson	6
	3.1	Calibrazione del micrometro	6
	3.2	Misura dell'indice di rifrazione dell'aria	6
	3.3	Misura dell'indice di rifrazione del vetro	8
4	Inte	erferenza con un righello	9
		Discussione del risultato	11
5	Cor	nclusione 1	۱1
6	Apı	pendice A (tabelle dati)	12
	6.1	Fabry-Perot	12
		6.1.1 massimi di interferenza	12
		6.1.2 calibrazione micrometro	12
	6.2	Michelson	13
		6.2.1 calibrazione micrometro	13
		6.2.2 indice di rifrazione dell'aria	13
		6.2.3 indice di rifrazione del vetro	13

#### Abstract

In questo esperimento si vogliono studiare i fenomeni di interferenza di un laser He-Ne. Si utilizzano diversi sistemi di specchi per produrre una o più sorgenti virtuali coerenti tra loro. In particolare si sono realizzati un interferometro di Fabry-Perot, con cui si è anche calibrato il micrometro utilizzato per spostare uno degli specchi (detto appunto mobile), ed un interferometro di Michelson, con cui oltre a verificare la calibrazione del micrometro, si sono misurati l'indice di rifrazione dell'aria e del vetro e la lunghezza d'onda del laser.

Si è inoltre osservato il fenomeno di rifrazione utilizzando gli intagli di un righello metallico e si è di nuovo calcolata la lunghezza d'onda del laser.

# 1 Apparato sperimentale

L'apparato utilizzato è costituito da:

- un laser He-Ne
- una base d'appoggio (Figura [1]) dove vengono montati i vari componenti e che permette il movimento fine dello *specchio mobile*.
- specchio mobile, uno specchio con una particolare montatura la cui posizione può essere regolata finemente mediante un micrometro.
- degli specchi parziali
- un beam splitter, ovvero uno specchio parziale che divide in due il fascio incidente
- lente da 18mm per divergere il fascio laser
- lastra di vetro
- una camera ad aria dotata di un manometro per aumentarne la pressione interna



Figura 1. Base d'appoggio: è una base di metello fornita di piedini per regolarne l'inclinazione e di diversi slot per inserire i vari componenti; in particolare è dotata di uno slot per lo specchio mobile la cui posizione può essere finemente regolata con un micrometro. Nell'immagine sono montati i componenti per la configurazione di Michelson con la lastra di vetro.

Montando sulla base d'appoggio i diversi specchi, è possibile costruire diversi tipi di interferometri, tra cui in particolare quello di Fabry-Perot e quello di Michelson. Grazie allo specchio mobile è poi possibile variare finemente il cammino ottico percorso dal fascio laser.

Tuttavia è necessario calibrare il micrometro in quanto la scala riportata sullo strumento non corrisponde con il movimento dello specchio mobile, per via dell'usura dello strumento e della forte non linearità dovuta al meccanismo di movimento.

Si osservi inoltre che è necessario che il fascio laser percorra il cammino ottico parallelamente alla base, ciò è possibile aggiustando l'altezza dei piedini della base (ed eventualmente del supporto del laser).

# 2 Fabry-Perot

L'interferometro di Fabry-Perot si compone di due specchi parziali piani paralleli, i quali formano una cavità risonante per la luce. Quando un fascio di luce incide sugli specchi, si genera una serie di riflessioni multiple all'interno della cavità. Ad ogni riflessione, una parte del fascio viene trasmessa fuori dagli specchi.

Si consideri la condizione in cui le onde riflesse interferiscono costruttivamente, ovvero quando la differenza di cammino ottico tra due riflessioni successive è un multiplo intero della lunghezza d'onda del fascio di luce. In questa condizione, si ha la formazione di anelli di interferenza luminosa, noti come frange di interferenza.

Si è costruito un interferometro di Fabry-Perot secondo la seguente configurazione:

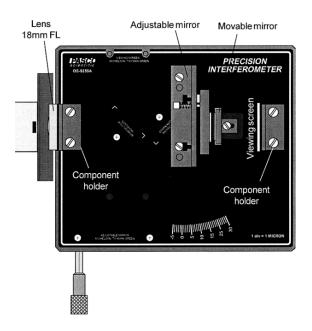


Figura 2. Configurazione interferometro Fabry-Perot: si sono utilizzati due specchi parziali disposti come in figura per formare la cavità ottica ed una lente da 18mm per divergere il fascio. (Si noti che al posto del "viewing screen" si è proiettato il fascio sul muro)

## 2.1 Verifica dei massimi di interferenza

Conservando la posizione degli specchi dell'interferometro immutata, sul muro si produce una figura di interferenza che forma anelli concentrici. Ogni anello ha un picco di interferenza costruttiva sulla sua circonferenza centrale. L'angolo  $\theta$ , tra la direzione normale al secondo specchio (direzione del fascio incidente) e una linea che congiunge il secondo specchio (il punto in cui passa il fascio laser) con un punto qualsiasi sulla circonferenza dell'anello, è descritto dalla relazione:

$$\theta = \arctan\left(\frac{r}{d}\right)$$

In questo caso, r è il raggio dell'anello e d è la distanza tra il secondo specchio e il muro. Il coseno di questo angolo ha una correlazione lineare con N, il numero d'ordine del massimo di interferenza (maggiore per le circonferenze più interne), secondo l'equazione:

$$\delta_r \cdot \frac{\lambda}{2\pi} + 2 \cdot d \cdot \cos \theta = N\lambda \tag{1}$$

Dove  $\delta_r$  denota lo sfasamento indotto dalle riflessioni che subisce il secondo raggio.

Si sono allora misurati i raggi  $r_i$  (Tabella [1]) per le varie circonferenze e la distanza  $d = (127.8 \pm 0.5)cm$ ; si noti che la misura di d è stata effettuata come somma di misure di lunghezze e l'errore è stato quindi propagato. Ai valori dei raggi si è invece associato come errore la metà dello spessore del relativo anello.

Da questi dati si sono quindi calcolati i valori di  $\cos(\theta_i)$  (Tabella [2]) e se ne è verificato l'andamento lineare rispetto ad N fittando con ROOT.

Gli errori sui valori di  $\cos(\theta)$  sono stati calcolati mediante propagazione degli errori:

$$\sigma_{\theta} = \sqrt{\left(\frac{d}{r^2 + d^2} \cdot \text{errore\_r}\right)^2 + \left(\frac{-r}{r^2 + d^2} \cdot \text{errore\_d}\right)^2}$$
$$\sigma_{\cos(\theta)} = \sin(\theta) \cdot \sigma_{\theta}$$

# $cos(\theta)$ vs N

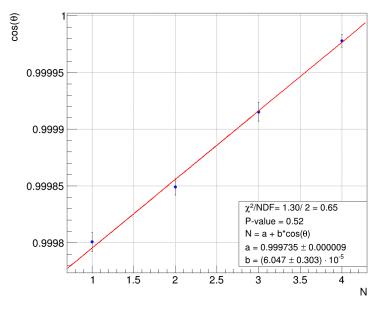


Figura 3. Fit  $cos(\theta)$  in funzione di N: il coseno dell'angolo  $\theta$  di ciascun massimo di interferenza va linearmente con il numero del massimo.

## 2.2 Calibrazione del micrometro

Come detto in precedenza vi è una discrepanza tra la scala del micrometro e lo spostamento effettivo indotto dalla sua rotazione sul *specchio mobile*; è quindi necessario effettuare una calibrazione.

La correlazione tra la rotazione della manopola del micrometro e lo spostamento reale dello specchio non segue una relazione lineare. Di conseguenza, la calibrazione dev'essere effettuata in piccoli intervalli, per mitigare l'impatto di questa non linearità. In particolare, si è calibrato l'intervallo da  $200\,nm$  a  $220\,nm$  sulla scala del micrometro.

Variando di una quantità  $\Delta d$  la posizione dello specchio mobile si osservano scorrere le frange della figura di interferenza, questo succede in quanto varia il cammino ottico; quando  $\Delta d$  corrisponde ad un multiplo di  $\lambda$  allora la figura d'interferenza sarà la medesima di quella di partenza. È' allora evidente dalla (1) che la relazione che lega  $\delta D$  a  $\Delta N$  (ovvero in numero di fasce che scorrono) è:

$$2 \cdot \Delta d \cdot \cos \theta = \Delta N \cdot \lambda \tag{2}$$

da cui possiamo ricavare  $\Delta d$  misurando il numero di frange che scorrono quando giriamo la manopola del micrometro e conoscendo la lunghezza d'onda del laser  $\lambda = 632.8 \, nm$  (da manuale Pasco). Dato che si sono considerati gli anelli che "scomparivano" nel centro della figura d'Interferenza per effettuare il conteggio di  $\Delta N$ , possiamo considerare  $\cos(\theta) = 1$ .

Si sono quindi contate il numero di frange che scorrono girando il micrometro nell'intervallo scelto (Tabella [3]) e si è calcolato  $\Delta d$  dalla (2) per ciascun conteggio. Si è poi effettuata la media e come errore vi si è associata la deviazione standard, ottenendo:

$$\Delta d = (16.6 \pm 0.4) \, \mu m$$

# 3 Michelson

Si è costruito un interferometro di Michelson, utilizzando un beam splitter e due specchi posti come in figura[4]. Di nuovo modificando la posizione dello specchio mobile, mediante la rotazione della manopola del micrometro, è possibile variare il cammino ottico e dunque la figura di interferenza (sempre proiettata sul muro).

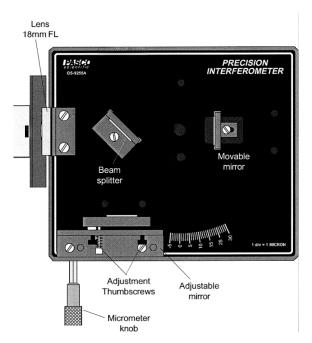


Figura 4. Configurazione interferometro Michelson: si è utilizzato un beam splitter e due specchi disposti come in figura. Inoltre si è utilizzata una lente da 18mm per divergere il fascio. (Si noti che la figura di interferenza è proiettata sul muro)

## 3.1 Calibrazione del micrometro

Utilizzando questa configurazione si è di nuovo calibrato il micrometro sullo stesso intervallo precedentemente calibrato in configurazione di Fabry-Perot. Si è proceduto in modo completamente analogo (ottenendo i dati in Tabella[4]) a quanto fatto in precedenza, ottenendo il risultato:

$$\Delta d = (17.8 \pm 0.6) \, \mu m$$

## 3.2 Misura dell'indice di rifrazione dell'aria

L'indice di rifrazione dell'aria ha un andamento lineare rispetto alla variazione di pressione. Posizionando una camera a pressione lungo uno dei due bracci (Figura [5]) ed aumentando la pressione si varia quindi il cammino ottico e di conseguenza la figura di interferenza.

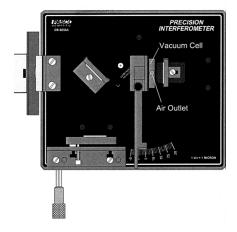


Figura 5. Michelson con camera a pressione: si è inserita una camera a pressione lungo uno dei due bracci dell'interferometro.

Si è sfruttato questo principio per determinare l'indice di diffrazione dell'aria; facendo variare la pressione in diversi intervalli e misurando il numero di frange che scorrono (Tabella [5]), come fatto nelle sezioni precedenti; si noti che è stato usato un errore di  $\pm 0.5$  sui valori di  $\Delta N$  in quanto alla fine della variazione di pressione non sempre tutto un anello era "scomparso", a volte ne rimaneva una parte.

Si ottengono quindi dei dati che seguano la relazione:

$$2 \cdot d \cdot m \cdot (P_i - P_f) = \Delta N \cdot \lambda$$

dove  $m = n_a P + a$ , con  $n_a$  indice di rifrazione dell'aria, e d è lo spessore della camera; in questo esperimento si è utilizzata una camera spessa d = 3 cm (da manuale Pasco).

Mediante ROOT si sono allora fittati i dati della differenza di pressione  $P_i - P_f$  in funzione di  $\Delta N$  secondo una relazione lineare del tipo  $-\Delta P = B\Delta N + A$  (Figura [6]). Da cui si ottiene m come:

$$m = \frac{\lambda}{2dB} = (7.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-6} \, cmHg^{-1}$$

dove l'errore si è calcolato per propagazione come:

$$\sigma_m = \frac{\lambda}{2dB^2} \cdot \sigma_B$$

# 

Figura 6. Fit  $\Delta P$  in funzione di  $\Delta N$ : si ricavano i parametri della relazione lineare tra  $P_i - P_f$  ed il numero di frange che scorrevano osservato  $\Delta N$ .

Possiamo quindi ora ricavare l'indice di rifrazione dell'aria a pressione atmosferica  $n_a$  come:

$$n_a = mP_a + 1 = 1.00055 \pm 0.00002$$

dove si è utilizzato per la pressione atmosferica  $P_a = 76 \, cmHg$  e con errore sempre ricavato dalla propagazione:

$$\sigma_{n_a} = P_a \cdot \sigma_m$$

## 3.3 Misura dell'indice di rifrazione del vetro

In maniera analoga a quanto fatto per l'indice di rifrazione dell'aria si è misurato l'indice di rifrazione del vetro. L'unica differenza nell'apparato è che al posto della camera a pressione si è posizionata una lastra di vetro appoggiata su un supporto imperniato ed in grado di ruotare (Figura [7] e anche foto in Figura [1]). La rotazione del supporto modifica lo spessore di vetro attraversato dal fascio e quindi il cammino ottico.

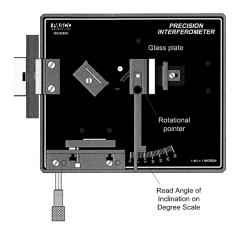


Figura 7. Michelson con lastra di vetro: si è inserita una lastra di vetro, attaccata ad un supporto imperniato libero di ruotare.

La relazione tra il numero di frange che scorrono e la differenza di cammino ottico è la seguente:

$$2 \cdot d \cdot (D_i - D_f) = \Delta N \cdot \lambda$$

da cui possiamo ricavare, sostituendo l'espressione per la variazione di cammino ottico, il valore dell'indice di rifrazione del vetro  $n_v$  in funzione dell'angolo  $\phi$  a cui è inclinata la lastra:

$$n_v = \frac{(2d - \Delta N\lambda)(1 - \cos\phi)}{2d \cdot (1 - \cos\phi) - \Delta N\lambda} \tag{3}$$

Si sono allora contate il numero di frange che scorrevano variando l'angolo della lastra dalla posizione ortogonale rispetto al fascio laser fino ad un certo angolo  $\phi_f$  (Tabella [6]). Con questi dati si è calcolato l'indice di rifrazione dell'aria per ciascuna misura con relativo errore propagato mediante:

$$\begin{split} \sigma_{n_v}^2 &= \left(\frac{2(1-\cos(\phi))}{-\Delta N\lambda + 2d(1-\cos(\phi))} - \frac{2(2d-\Delta N\lambda)(1-\cos(\phi))^2}{(-\Delta N\lambda + 2d(1-\cos(\phi)))^2}\right)^2 \sigma_d^2 \\ &+ \left(\frac{(2d-\Delta N\lambda)\sin(\phi)}{-\Delta N\lambda + 2d(1-\cos(\phi))} - \frac{2d(2d-\Delta N\lambda)(1-\cos(\phi))\sin(\phi)}{(-\Delta N\lambda + 2d(1-\cos(\phi)))^2}\right)^2 \sigma_\phi^2 \\ &+ \left(\frac{\lambda(2d-\Delta N\lambda)(1-\cos(\phi))}{(-\Delta N\lambda + 2d(1-\cos(\phi)))^2} - \frac{\lambda(1-\cos(\phi))}{-\Delta N\lambda + 2d(1-\cos(\phi))}\right)^2 \sigma_{\Delta N}^2 \end{split}$$

Facendo poi la media pesata e propagando l'errore su questa, utilizzando:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{1}{\sigma_{x_i} W} \right]^2$$

dove n è il numero di misurazioni effettuate e W è la somma dei pesi  $(\sum 1/\sigma_{x_i}^2)$ . Si è ottenuto il seguente risultato:

$$n_v = 1.46 \pm 0.01$$

# 4 Interferenza con un righello

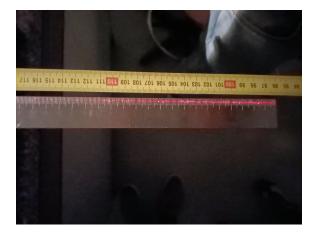


Figura 8. Interferenza con righello: Facendo incidere quasi il raggio laser quasi radente al righello si forma una figura di interferenza sul muro.)

In questa sezione dell'esperimento, utilizzeremo un righello metallico per osservare i fenomeni di interferenza in condizioni insolite, ovvero quando l'ostacolo che la luce incontra ha dimensioni molto superiori alla sua lunghezza d'onda. Si sfrutterà questo tipo di interferenza per misurare la lunghezza d'onda del laser utilizzato.

Il righello viene posizionato orizzontalmente ed il laser viene orientato in modo che una porzione del suo fascio colpisca il righello in maniera radente e si rifletta, mentre l'altra prosegue in linea retta. Sul muro, compariranno vari punti luminosi, tra i quali due saranno particolarmente evidenti: questi corrispondono al raggio laser non deviato  $(P_t)$  e al raggio laser riflesso specularmente  $(P_0)$ .

La relazione che lega l'angolo di incidenza del fascio ( $\theta_{\rm inc}$ ) e l'angolo sotto cui è visto ogni massimo ( $\theta_N$ , dove N rappresenta il numero del massimo, contato a partire dal centro) è:

$$d_{rm} \cdot (\cos \theta_{inc} - \cos \theta_N) = N\lambda$$

Utilizzando questa relazione, potremo calcolare la lunghezza d'onda del laser. Si evince dalla geometria che il valore di  $\theta_{inc}$  (che è uguale all'angolo di riflessione del raggio che forma il punto luminoso  $P_0$ ) si troverà come:

$$\theta_{\rm inc} = \arctan\left(\frac{d_{P_0 - P_t}}{d_{rm}}\right)$$

dove  $d_{P_0-P_t}$  è la distanza tra i punti luminosi  $P_t$  e  $P_0$ , mentre  $d_{rm}$  è la distanza tra il righello e il muro (punto del righello in cui incide il raggio che riflesso va a formare  $P_0$ ).

Analogamente si trovano i valori di  $\theta_N$  come:

$$\theta_N = \arctan\left(\frac{d_{P_N - P_t}}{d_{rm}}\right)$$

Si è quindi osservata la relazione lineare tra  $\Delta\theta$ , ovvero la differenza  $(\cos\theta_{\rm inc} - \cos\theta_N)$ , e N. Mediante ROOT si è quindi eseguito il fit (Figura [9]) andando a trovare il parametro di primo ordine  $B = \lambda/d_{rm}$ . Si è quindi poi calcolato il valore di lambda come:

$$\lambda = bd_{rm}$$

con errore 
$$\sigma_{\lambda} = \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_{d_{rm}}^2};$$
 ottenendo:

$$\lambda = (720000 \pm 70000) \, nm$$

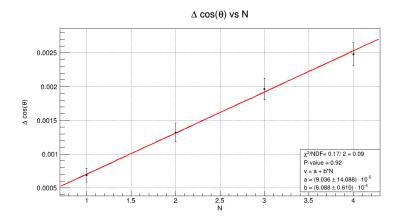


Figura 9. Fit  $\Delta\theta$  in funzione di N: vi è una relazione lineare tra il numero dell'ordine del massimo di interferenza n e la differenza tra i coseni dell'angolo di incidenza e degli angoli sotto cui sono visti tali massimi.

## 4.1 Discussione del risultato

Si osserva che il valore ricavato della lunghezza d'onda è sbagliato addirittura di 3 ordini di grandezza. Questo è dovuto al fatto che i  $\Delta cos(\theta)$  sono molto grandi. Probabilmente il problema è legato al fatto che è difficile identificare il punto in cui viene riflesso il fascio laser (si veda Figura [8]) e quindi effettuare la misura di  $d_{rm}$ .

Inoltre la misura dei punti luminosi corrispondenti ai massimi potrebbe non essere precisa in quanto tali punti non erano nitidissimi.

# 5 Conclusione

Si è verificata, nella configurazione di Fabry-Perot, la relazione lineare tra il coseno dell'angolo sotto il quale si vedono i massimi di interferenza ed il numero d'ordine di tali massimi.

Nella stessa configurazione si è effettuata la calibrazione del micrometro che muove lo specchio mobile, osservando che il valore indicato sulla scala di questo è errata, infatti compiendo una rotazione di  $20 \,\mu m$  indicati sulla scala abbiamo in realtà calcolato che l'effettivo spostamento dello specchio mobile è stata di  $d_{fp} = (16.6 \pm 0.4) \,\mu m$ .

Si è poi ripetuta la stessa calibrazione ma utilizzando la configurazione di Michelson, ottenendo uno spostamento effettivo di  $d_m = (17.8 \pm 0.6) \, \mu m$ . Vediamo innanzitutto che la misura effettuata in configurazione Fabry-Perot è più precisa in quanto ha un errore minore. Possiamo poi confrontare i due valori ottenuti, utilizzando lo z-test. Si è utilizzato questo tipo di confronto sebbene gli errori associati non sono delle deviazioni standard ma sono calcolati tramite propagazione, nonostante questa sia un approssimazione ci dà comunque una buona idea sulla concordanza dei due valori.

$$t = \frac{|d_{fp} - d_m|}{\sqrt{\sigma_{d_{fp}}^2 + \sigma_{d_m}^2}} = 47.7$$

Il p-value associato risulta molto vicino a zero (in quanto t è molto grande) e per questo non è stato possibile calcolarlo utilizzando la libreria scipy di python. Risulta comunque evidente che i due valori non sono compatibili nemmeno con una soglia del 1%.

Proseguendo in questa configurazione si sono misurati l'indice di rifrazione dell'aria e del vetro. Per quanto riguarda l'indice di rifrazione dell'aria si osservi che il fit risulta fin troppo buono (Figura [6]), questo è probabilmente dovuto ad una sovrastima dell'errore. In particolare l'errore di 0.5 sul valore di  $\Delta N$  utilizzato potrebbe essere troppo elevato in quanto la maggior parte delle volte le frange scomparivano completamente e solo alcune volte rimanevano parzialmente. Si sono ottenuti i seguenti valori per gli indici di rifrazione di aria e vetro:

$$n_a = 1.00055 \pm 0.00002$$

$$n_v = 1.46 \pm 0.01$$

Infine non è stato possibile calcolare la lunghezza d'onda del laser mediante l'interferenza con il righello metallico, infatti si è ottenuto un valore per  $\lambda$  di tre ordini di grandezza maggiore rispetto a quello aspettato. Questo è probabilmente dovuto all'inaccuratezza nel determinare il punto in cui il laser si riflette sul righello; si veda Figura [8] per osservare come la luce del fascio illumini buona parte del righello e non ci fosse un chiaro "spot" nel punto di riflessione.

# 6 Appendice A (tabelle dati)

# 6.1 Fabry-Perot

#### 6.1.1 massimi di interferenza

r [cm]	$\sigma_r$ [cm]	N
1.15	0.14	4
2.25	0.11	3
3.00	0.07	2
3.45	0.07	1

**Tabella 1.** Dati r: valore dei raggi dei cerchi dei massimi di interferenza. N rappresenta l'ordine del massimo (si è scelto arbitrariamente il numero da cui partire).

$\cos(\theta)$	$err \cos(\theta)$	N
0.999978	0.000005	4
0.999915	0.000008	3
0.999849	0.000007	2
0.999801	0.000008	1

**Tabella 2.** Dati  $\cos(\theta)$ : valore del coseno dell'angolo  $\theta$ . L'errore su  $\cos(\theta)$  si è propagato a partire dagli errori su r e d. N rappresenta l'ordine del massimo (si è scelto arbitrariamente il numero da cui partire).

### 6.1.2 calibrazione micrometro

53 51 54 51 54 54 52 53
54 51 54 52
51 54 52
54 52
52
~ —
53
52

Tabella 3. Dati  $\Delta N$ : numero di frange che "scompaiono" al centro della figura di interferenza variando la distanza dello specchio mobile nell'intervallo tra  $200\,\mu m$  e  $220\,\mu m$  sulla scala del micrometro.

## 6.2 Michelson

## 6.2.1 calibrazione micrometro

$\Delta N$
59
56
55
56
55
54
59
55

**Tabella 4.** Dati  $\Delta N$ : numero di frange che "scompaiono" al centro della figura di interferenza variando la distanza dello specchio mobile nell'intervallo tra  $200 \,\mu m$  e  $220 \,\mu m$  sulla scala del micrometro.

#### 6.2.2 indice di rifrazione dell'aria

$P_i [cmHg]$	$P_f [cmHg]$	$\Delta N$
0	3	2
0	4	3
0	6	5
0	8	6
0	10	7
0	13	9
0	15	11
0	17	12
0	20	14

Tabella 5. Dati  $\Delta N$  e  $\Delta P$ : sono riportati i valori misurati di pressione iniziale  $P_i$ , pressione finale  $P_f$  e numero di frange che scorrono durante la variazione della pressione da  $P_i$  a  $P_f$ , ovvero  $\Delta N$ . Sul valore di  $\Delta N$  si è associato un errore di  $\pm 0.5$ . Si noti inoltre che la lettura della pressione è relativa alla pressione atmosferica, ma questo non crea problemi in quanto si è interessati alla differenza.

#### 6.2.3 indice di rifrazione del vetro

$\overline{\phi_i}$	$\phi_f$	$\Delta N$
-2	2	20
-2	4	39
-2	6	53
-2	9	128

Tabella 6. Dati  $\Delta N$  in funzione della variazione dell'angolo: Numero di frange che scorrevano contate durante la variazione dell'angolo del supporto imperniato della lastra di vetro da un angolo  $\phi_i$  (ortogonale al fascio laser) ad un angolo  $\phi_f$ .