

# Circuiti 1

Giovanni Laganà, Gioele Lo Presti, Gabriele Manzi

16 Marzo 2023

## Indice

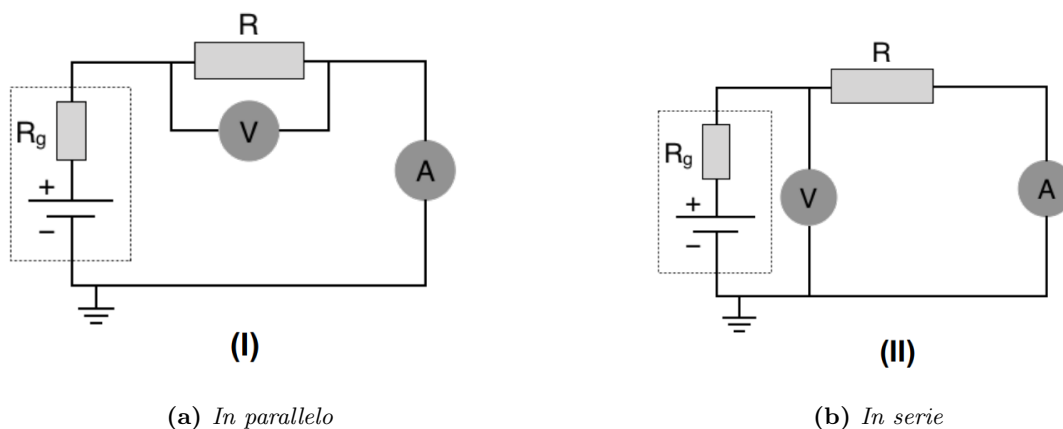
<b>1</b>	<b>Configurazione degli strumenti di misura ed errori</b>	<b>2</b>
1.1	Errori . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Resistenze interne Voltmetro ed Amperometro</b>	<b>3</b>
2.1	Voltmetro . . . . .	3
2.2	Amperometro . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Legge di Ohm</b>	<b>5</b>
3.1	Resistenza singola . . . . .	5
3.2	Resistenze in parallelo . . . . .	6
3.3	Resistenze in serie . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Corrente-Tensione di un Diodo</b>	<b>9</b>
4.1	Presa dati . . . . .	9
4.2	Analisi dati . . . . .	9
4.2.1	Legge di Shockley . . . . .	9
4.2.2	Tensione di soglia . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>12</b>

## Abstract

L'esperimento consiste nello studio delle caratteristiche di un diodo e di un resistore. Si valutano le configurazioni degli strumenti di misura per la misura della caratteristica corrente-tensione di un resistore e si verifica la legge di Ohm. In seguito, si misura la caratteristica corrente-tensione di un diodo per verificare la legge di Shockley e si analizzano le variazioni della corrente in funzione della tensione di alimentazione. I risultati mostrano una conformità del resistore alla legge di Ohm ed una curva esponenziale per il diodo, confermando la legge di Shockley. Tuttavia non è stato possibile determinare la tensione di soglia del diodo.

## 1 Configurazione degli strumenti di misura ed errori

Gli strumenti di misura utilizzati sono un voltmetro ed un amperometro i quali si dispongono adeguatamente all'interno del circuito in base alla resistenza che si vuole misurare.



**Figura 1.** *Le due disposizioni degli strumenti utilizzati: la (1a) si utilizza per misurare resistenze piccole rispetto a quella del voltmetro, mentre la (1b) si utilizza per misurare resistenze grandi rispetto a quella dell'amperometro.*

Per misurare resistenze piccole si utilizzerà un circuito di tipo (1a), infatti in questo modo la grande resistenza interna del voltmetro fa sì che la corrente passi principalmente attraverso la resistenza di interesse, minimizzando l'effetto della resistenza del voltmetro.

Viceversa per misurare resistenze grandi si utilizza una configurazione del tipo (1b), poiché la corrente misurata dall'amperometro non è influenzata dalla caduta di potenziale dovuta alla resistenza interna del voltmetro.

I dati possono essere trovati su Github nelle cartella "data": [https://github.com/GiovanniLag/laboratorio\\_2/tree/main/circuiti\\_1/data](https://github.com/GiovanniLag/laboratorio_2/tree/main/circuiti_1/data)

## 1.1 Errori

Per tutto l'esperimento, gli errori sulle misure sono stati presi o come l'incertezza dello strumento oppure, nel caso in cui i valori oscillassero (in intervalli più ampi dell'incertezza), si sono presi come l'intervallo di oscillazione. Si noti che gli strumenti mostrano i valori misurati tramite un display numerico digitale, quindi determinare con precisione l'intervallo di oscillazione non è banale; si è cercato di individuarlo il più accuratamente possibile osservando l'oscillazione dei valori sul display.

## 2 Resistenze interne Voltmetro ed Amperometro

Si sono utilizzati questi due circuiti per misurare le resistenze interne degli strumenti di misura. Infatti utilizzando al posto delle  $R$  nelle figure (1a) e (1b) delle resistenze note è possibile ricavare le resistenze interne di amperometro e voltmetro.

### 2.1 Voltmetro

Per il voltmetro si è utilizzato il circuito (1a) ed una resistenza nota di  $(1.40 \pm 0.01) M\Omega$ , in modo che fosse di grandezza comparabile a quella interna dello strumento, così da permettere di misurare, tramite la legge di Ohm, la resistenza equivalente del circuito (resistenza nota e resistenza del voltmetro in parallelo).

Si è impostata una tensione, misurata dal voltmetro, di  $(2.864 \pm 0.005) V$ .

La corrente misurata è di  $(2.6 \pm 0.5) \mu A$ . Dunque:

$$R_{eq} = V/I = (1.1 \pm 0.2) M\Omega$$

Con errore calcolato mediante propagazione come:

$$\sigma_{R_{eq}}^2 = \frac{\sigma_V^2}{I^2} + \frac{V^2 \sigma_I^2}{I^4}$$

Dove  $R_{eq}$  è la resistenza equivalente

Una volta ricavata la resistenza equivalente è stato possibile trovare la resistenza interna del voltmetro tramite:

$$R_{voltmetro} = \frac{(R_{eq} \cdot R_u)}{(R_u - R_{eq})} = 5.2 M\Omega$$

Dove  $R_u$  è la resistenza nota utilizzata. L'errore associato si ricava per propagazione come:

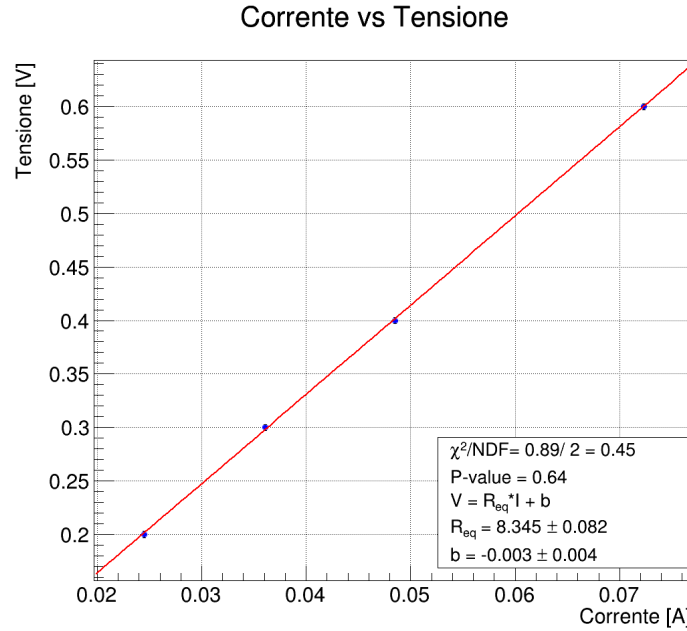
$$\sigma_{R_{voltmetro}} = \sqrt{\left( \left( \frac{R_u}{R_u - R_{eq}} + \frac{R_{eq} \cdot R_u}{(R_u - R_{eq})^2} \right) \sigma_{R_{eq}} \right)^2 + \left( \left( \frac{R_{eq}}{R_u - R_{eq}} - \frac{R_{eq} \cdot R_u}{(R_u - R_{eq})^2} \right) \sigma_{R_u} \right)^2}$$

Tuttavia il risultato ottenuto è di  $4.6 M\Omega$ , che è dello stesso ordine di grandezza del valore stesso. Questo è dovuto al fatto che l'errore sul valore della corrente è abbastanza grande (19.2%). Questa imprecisione è in gran parte attribuibile alla limitata capacità dell'amperometro utilizzato di maneggiare correnti di bassa intensità: i valori registrati, infatti, oscillavano sensibilmente, rendendo quindi difficile ottenere una lettura più precisa.

## 2.2 Amperometro

Si è misurata la resistenza interna dell'amperometro utilizzando invece il circuito (1b). In modo simile a quanto fatto per il voltmetro si sono misurati i valori di tensione - corrente, tuttavia invece di prendere una singola misura se ne sono prese multiple e si sono poi interpolati i dati (usando ROOT) con una relazione lineare (Figura [2]), dato che  $V = RI$ . In questo modo è stato possibile ricavare la resistenza equivalente  $R_{eq}$  che corrisponde a  $R_{amp} + R_u$ , dove  $R_{amp}$  è la resistenza dell'amperometro ed  $R_u = (2.7 \pm 0.2)\Omega$  la resistenza utilizzata.

Si noti che si sono divisi gli errori sui valori di tensione e corrente per  $\sqrt{12}$ , in quanto questi sono incertezze strumentali.



**Figura 2. Fit tensione-corrente amperometro:** interpolazione lineare dei dati di tensione-corrente misurati per calcolare la resistenza interna dell'amperometro. Le barre di errore sono molto piccole ed è quindi difficile vederle ad occhio.

Si è trovata una resistenza equivalente  $R_{eq} = (8.34 \pm 0.08)\Omega$ , dalla quale si è ricavata quindi la resistenza interna dell'amperometro come:

$$R_{amp} = R_{eq} - R_u = (5.6 \pm 0.2)\Omega$$

Dove l'errore è stato calcolato, propagandolo, come:

$$\sigma_{R_{amp}}^2 = \sigma_{R_{eq}}^2 + \sigma_{R_u}^2$$

### 3 Legge di Ohm

Misurando la caratteristica corrente-tensione di un circuito puramente resistivo è possibile verificare la legge di Ohm, infatti ci si aspetta che la relazione tra le due grandezze sia lineare ed in particolare che valga:  $V = RI$ .

Utilizzando una resistenza nota (misurata esternamente al circuito con un multimetro) si è potuto validare questa relazione. Il valore della resistenza, ottenuto mediante un fit lineare dei dati sperimentali, è stato confrontato con quello noto, confermando la linearità prevista dalla legge.

Analogamente è inoltre possibile verificare la legge di equivalenza dei componenti resistivi messi in parallelo ed in serie<sup>1</sup>. Ci aspettiamo che per due resistenze messe in parallelo la resistenza equivalente sia:

$$R_{eq} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (1)$$

Mentre per delle resistenze in serie ci aspettiamo:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (2)$$

Si sono quindi raccolti i dati ed eseguiti i fit per verificare la validità di queste relazioni. Si noti che in tutti e tre i casi gli errori associati ai valori di tensione e corrente sono incertezze strumentali e si sono quindi divise per  $\sqrt{12}$  prima di effettuare il fit.

#### 3.1 Resistenza singola

Si è utilizzata una resistenza da  $(4.991 \pm 0.002)k\Omega$  e quindi la configurazione del circuito (1a), in quanto la resistenza è piccola rispetto a quella interna del voltmetro.

Dall'interpolazione si è ottenuto un valore di  $R = (4.994 \pm 0.003)k\Omega$ . Possiamo confrontare i due valori tramite lo z-test (*one tailed*), nonostante gli errori sui valori non rappresentino delle deviazioni standard di una distribuzione normale, il test ci fornisce comunque un'indicazione approssimativa della compatibilità dei due valori. Si utilizzerà questo test per tutti i confronti in questo esperimento. Si ottiene allora:

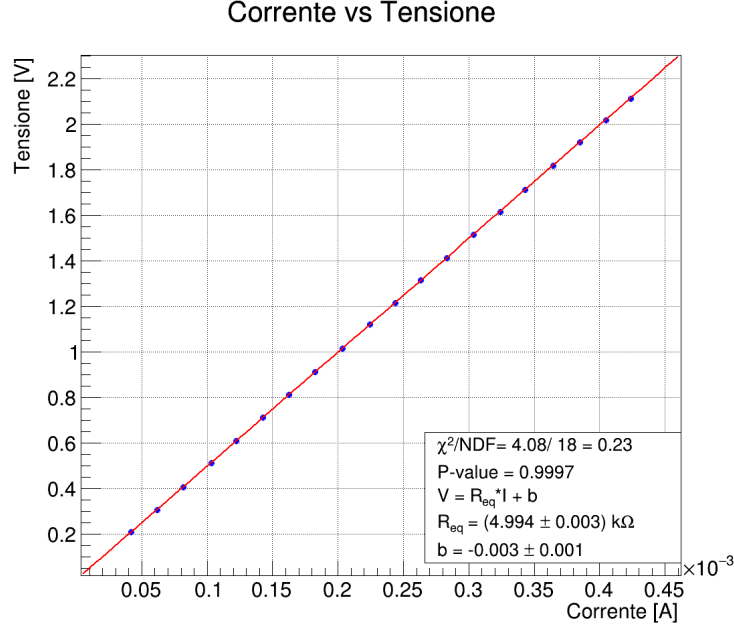
$$t = \frac{|R_f - R_m|}{\sqrt{\sigma_{R_f}^2 + \sigma_{R_m}^2}} = 0.832$$

p-value = 0.203

dove  $R_f$  è il valore ottenuto dal fit, mentre  $R_m$  è quello misurato con il multimetro. Si vede dunque che i valori sono in buon accordo tra loro, infatti sono compatibili con la soglia classica del 5% (p-value= 0.05).

---

<sup>1</sup>Si noti che le equazioni seguenti sono già state utilizzate nella prima parte di questo esperimento per ricavare il valore delle resistenze interne degli strumenti di misura



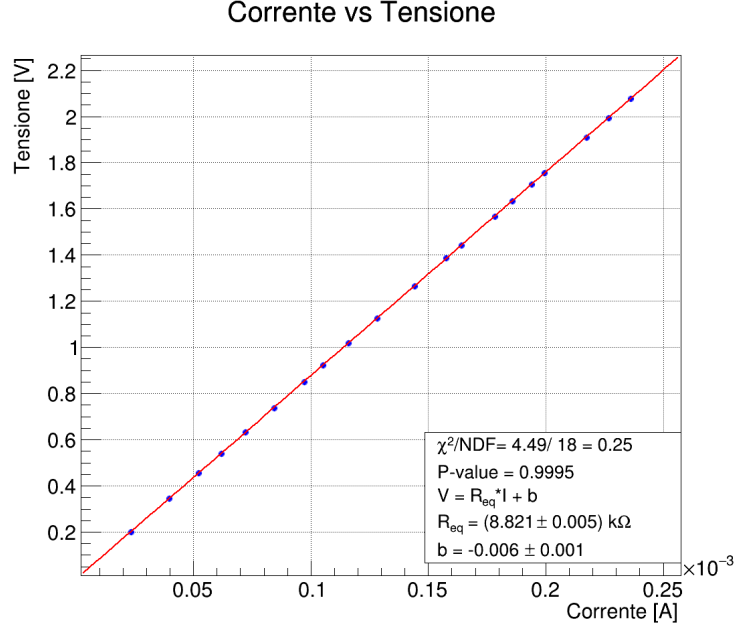
**Figura 3.** *Fit tensione-corrente resistenza singola: interpolazione lineare dei dati di tensione-corrente misurati per una resistenza singola nel circuito (1a). Le barre di errore sono molto piccole e quindi non visibili ad occhio.*

### 3.2 Resistenze in parallelo

Si sono utilizzate rispettivamente, una resistenza da  $(21.75 \pm 0.01) \text{ k}\Omega$  ed una da  $(14.81 \pm 0.01) \text{ k}\Omega$ , che dunque costituiscono una resistenza equivalente  $R_{eq} = (8.810 \pm 0.004) \text{ k}\Omega$ , calcolata tramite la (1) e con errore calcolato dalla propagazione come:

$$\sigma_{R_{eq}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_1}}{R_1^2(R_1^{-1} + R_2^{-1})^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_2}}{(R_1^{-1} + R_2^{-1})^2 R_2^2}\right)^2}$$

In questo caso, in quanto le resistenze utilizzate erano piccole (rispetto a quella del voltmetro), si è utilizzato il circuito (1a).



**Figura 4.** *Fit tensione-corrente resistenze in parallelo: interpolazione lineare dei dati di tensione-corrente misurati per due resistenze in parallelo nel circuito (1a). Le barre di errore sono molto piccole e quindi non visibili ad occhio.*

Confrontando il valore del fit con quello ottenuto dalla misurazione con il multimetro otteniamo:

$$t = \frac{|R_f - R_m|}{\sqrt{\sigma_{R_f}^2 + \sigma_{R_m}^2}} = 1.631$$

$$p\text{-value} = 0.051$$

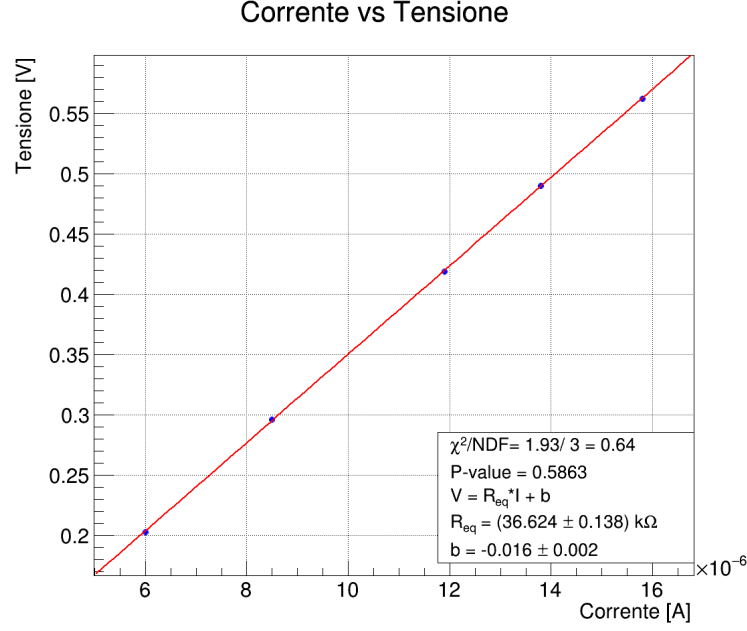
Dunque di nuovo i valori sono incompatibili secondo la soglia classica del 5%.

### 3.3 Resistenze in serie

Si sono riutilizzate le due resistenze del punto precedente ma messe in serie. Di nuovo dunque si è utilizzata la configurazione (1a). In questo caso il valore della resistenza equivalente si calcola dalla (2), ottenendo:

$$R_{eq} = (36.56 \pm 0.02) k\Omega$$

dove l'errore si calcola per propagazione come  $\sigma_{R_{eq}} = \sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2}$ .



**Figura 5.** *Fit tensione-corrente resistenze in serie: interpolazione lineare dei dati di tensione-corrente misurati per due resistenze in serie nel circuito (1a). Le barre di errore sono molto piccole e quindi non visibili ad occhio.*

Dall'interpolazione si è ottenuto un valore di  $R_{eq} = (36.62 \pm 0.14)k\Omega$ . Di nuovo possiamo confrontarlo, mediante lo z-test, con quello calcolato dai valori delle due resistenze misurati con il multimetro.  $R_{eq-atteso} = (36.56 \pm 0.02)k\Omega$ , dove l'errore è calcolato come:

$$\sigma_{R_{eqa}}^2 = \sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2$$

$$t = \frac{|R_f - R_m|}{\sqrt{\sigma_{R_f}^2 + \sigma_{R_m}^2}} = 2.910$$

$$p\text{-value} = 0.002$$

Quindi in questo caso i due valori non sono compatibili con la soglia del 5%; lo sono tuttavia se si utilizza una soglia del 1%.



## 4 Corrente-Tensione di un Diodo

Si vuole verificare la legge di Shockley, che descrive la relazione tra la corrente e la tensione in un diodo, e valutare la tensione di soglia del diodo, ovvero la tensione oltre la quale il diodo inizia a condurre una corrente significativa.

Per raggiungere questi obiettivi, si è sostituito un diodo alla resistenza nel circuito precedentemente utilizzato e si è variata la tensione di alimentazione del circuito, misurando la differenza di potenziale ai capi del diodo e la corrente che lo attraversa. È importante ricordare che un diodo è un componente non lineare di un circuito e la sua caratteristica corrente-tensione non è descritta da una relazione lineare, ma bensì dalla legge di Shockley.

$$I = I_0 \cdot \left( e^{\frac{q \cdot V}{k \cdot g \cdot T}} - 1 \right) \quad (3)$$

### 4.1 Presa dati

Dal momento che il diodo non ha un comportamento lineare la sua resistenza nel circuito dipende dalla corrente che lo attraversa. Per basse correnti la resistenza è alta e dunque conviene utilizzare un circuito di tipo (1a). Tuttavia per correnti più alte la resistenza è bassa e dunque bisogna utilizzare un circuito (1b).

Per questo motivo durante la raccolta dati si è dovuta cambiare la tipologia del circuito utilizzato per ottenere delle misurazioni accurate della relazione tra corrente e tensione del diodo in diverse condizioni di funzionamento.

### 4.2 Analisi dati

Prima di discutere dell'analisi dati, risulta necessaria una preliminare discussione sugli errori utilizzati in questa parte dell'esperimento.

A differenza di quanto fatto nei punti precedenti, dove l'errore sia sulla tensione che sulla corrente è stato preso uguale per ogni misura, in questo caso per via dell'andamento esponenziale si sono dovuti prendere errori diversi per ciascuna misura.

Infatti all'aumentare dei valori aumenta anche l'incertezza, in quanto gli strumenti di misura mostrano valori che "oscillano" su intervalli sempre più ampi. Come errore si è presa indicativamente la grandezza di questo intervallo di oscillazione (come spiegato nella sezione [1.1]).

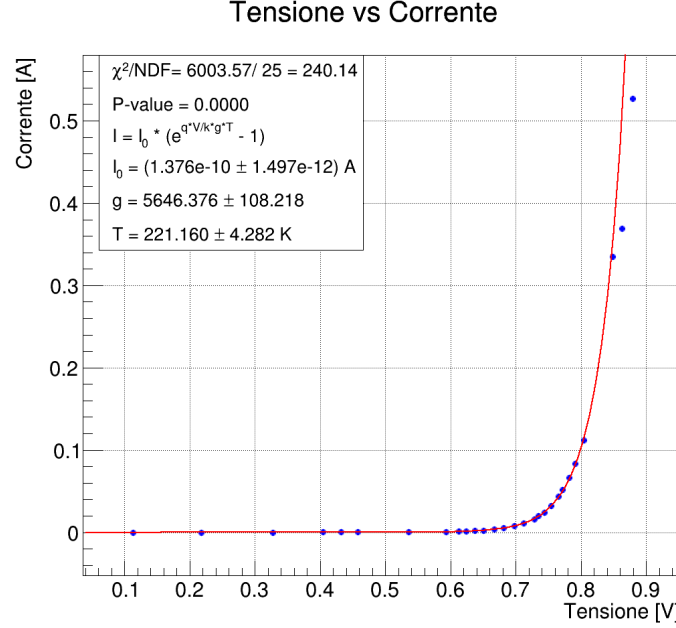
#### 4.2.1 Legge di Shockley

Similarmente a quanto fatto per la verifica della legge di Ohm si sono fittati i dati, stavolta con la legge di Shockley (3). I parametri da determinare sono  $T$ , ovvero la temperatura,  $g$ , il fattore di idealità e  $I_0$ , la corrente di saturazione inversa.

Il fit dei dati è tuttavia risultato problematico in quanto l'esponenziale risulta essere molto piccato e l'errore sulla corrente relativamente piccolo, questo portava il fit a convergere in minimi locali privi di significato fisico (ad esempio con  $T > 4000K$ ).

Si è allora utilizzato un fit parziale ipotizzando una temperatura di  $300k$ , in questo modo riduciamo la dimensione dello spazio dei parametri rendendo più facile una convergenza ad un minimo significativo.

Da questo primo fit si sono ricavati gli *initial-guess* per i parametri  $I_0$  e  $g$ . A questo punto è quindi stato possibile fittare con tutti e tre i parametri convergendo ad un minimo fisicamente sensato.



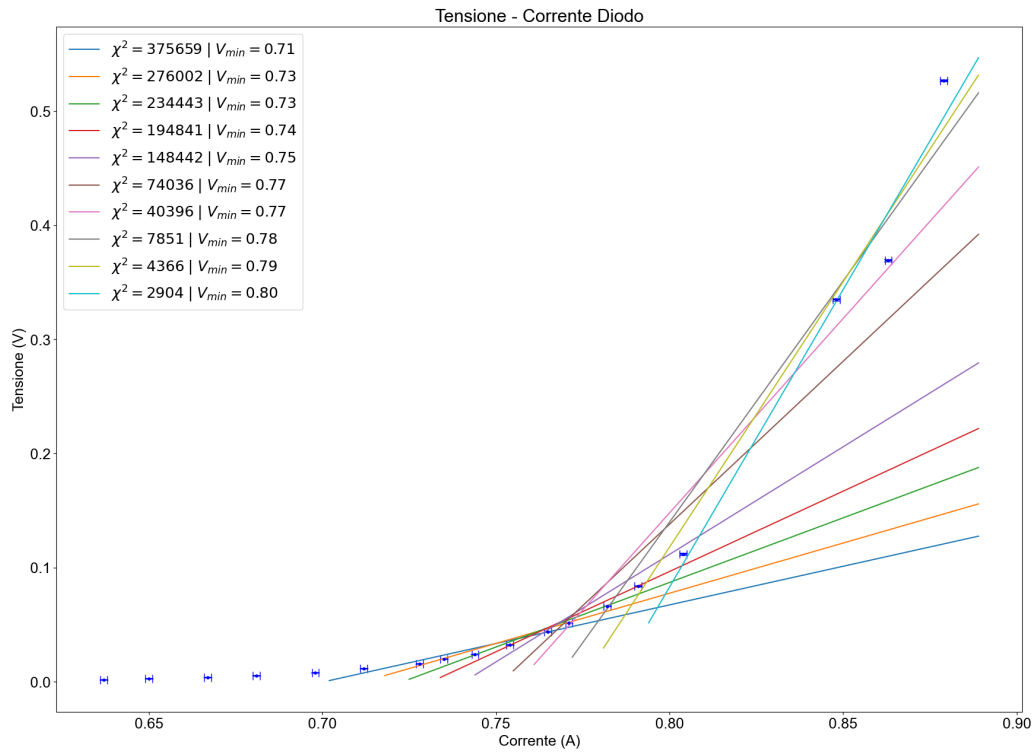
**Figura 6. Fit corrente-tensione diodo:** si è effettuato il fit secondo la legge di Shockley dei dati di corrente-tensione del diodo. Le barre di errore sono molto piccole e quindi non visibili ad occhio.

Utilizzando i parametri iniziali ricavati con il fit parziale si è riusciti a far convergere il fit ma purtroppo questo non è buono, infatti non è accettabile nemmeno con una soglia del 1%.

#### 4.2.2 Tensione di soglia

Dopo un certo valore della tensione, detta tensione di soglia, il comportamento del diodo può essere approssimato abbastanza bene con un comportamento lineare, come quello di una resistenza.

Si può quindi identificare la tensione di soglia fittando linearmente i dati solo per tensioni superiori ad una certa  $V_{test}$ . Partendo da una  $V_{test}$  alta e diminuendola è possibile identificare per quale tensione l'approssimazione lineare non è più accettabile, e quindi determinare in questo modo  $V_{soglia}$ . Questa si ottiene dall'intercetta della retta di fit con l'asse delle tensioni.



**Figura 7.** *Fit lineari per determinare la tensione di soglia*

Risulta evidente dai valori del  $\chi^2$  che in questo caso non si può determinare la tensione di soglia. Questi scarsi adattamenti ai fit sono dovuti al fatto che abbiamo solo pochi dati nella parte superiore dell'esponenziale. Inoltre, si ripresenta il problema degli errori minimi avuto durante il fit con la funzione di Shockley.

## 5 Conclusioni

I risultati ottenuti per le resistenze interne degli strumenti di misura rispettano quanto ci si poteva attendere. Infatti un voltmetro dovrebbe avere una grande resistenza, ed è stata calcolata di  $R_{voltmetro} = (5.2 \pm 0.4)M\Omega$ ; mentre l'amperometro una resistenza piccola e si è trovato  $R_{amp} = (5.6 \pm 0.3)\Omega$ .

Anche i risultati della verifica della legge di Ohm sono molto buoni e mostrano degli ottimi fit. I valori delle resistenze misurati e quelli ricavati dall'interpolazione risultano compatibili con una soglia del 5% per la resistenza singola e per quelle in parallelo, mentre non risultano compatibili con la stessa soglia per le resistenze in serie; tuttavia per queste i valori risultano compatibili con una soglia del 1%.

Infine dalla misura di corrente-tensione del diodo si ottiene un fit non soddisfacente (nemmeno con una soglia del 1%) per la legge di Shockley. Questo è probabilmente dovuto ai piccoli errori sui valori della corrente, i quali sono anche stati divisi per  $\sqrt{12}$  dato che sono l'incertezza dello strumento. Si potrebbe provare a eseguire nuovamente il fit con valori dell'errore per la corrente maggiori.

Inoltre si nota dalla Figura[6] che per valori di tensione più elevata i dati si adattano di meno alla curva di Shockley, infatti risultava più difficile prendere misure nella zona a tensioni più elevate, dato che una piccola variazione di questa portava ad una grande variazione della corrente.

Si osservi inoltre che il metodo utilizzato per far convergere il fit potrebbe aver introdotto un bias sulla temperatura, che infatti rimane molto vicina ai  $300K$ . Un possibile miglioramento alla procedura sarebbe quello di misurare la temperatura del diodo ed utilizzare quella.

Come già detto non è stato possibile definire la tensione di soglia, si potrebbe risolvere questo problema prendendo più dati tra le tensioni di  $0.80V$  e  $0.90V$ ; tuttavia per fare incrementi più piccoli è necessario uno strumento più preciso per quanto discusso sopra.