

Circuiti 2

Giovanni Laganà, Gioele Lo Presti, Gabriele Manzi

30 Marzo 2023

Indice

1	Presa dati e discussione degli errori	2
1.1	Shift a zero	3
1.2	Errori sulle misure con il multimetro	3
2	Circuito RC	4
2.1	Circuito e raccolta dati	4
2.2	Analisi dati	6
3	Circuito RL	7
3.1	circuito e raccolta dati	7
3.2	Analisi dati	8
4	Circuito RLC	10
4.1	Circuito	10
4.2	Analisi dati	11
4.3	Sotto-smorzato	11
5	Conclusioni	12

Abstract

L'esperimento ha lo scopo di studiare le caratteristiche di circuiti RC, RL e RLC sollecitati da un segnale ad onda quadra. In particolare, si analizza l'andamento della differenza di potenziale ai capi di resistenza e capacità nel circuito RC, di resistenza e induttanza nel circuito RL e della capacità nel circuito RLC; per quest'ultimo si è considerato solo il caso di sotto-smorzamento. Per i circuiti RC ed RL si studiano sia la fase di carica che di scarica. I risultati mostrano che nel circuito RC la differenza di potenziale segue l'andamento di una funzione esponenziale, nel circuito RL si osserva un andamento simile e nel circuito RLC sotto-smorzato si osservano oscillazioni sinusoidali decrescenti. L'analisi dei dati sperimentali permette di determinare le costanti di tempo caratteristiche, che per il circuito RC si è confrontata con la previsione teorica, ossia il valore calcolato a partire dai valori di R e C misurati con un multimetro.

1 Presa dati e discussione degli errori

I dati dell'oscilloscopio, che mostrano la tensione nel tempo, sono stati registrati e salvati in un file csv ¹. Questi dati sono dunque privi di un errore e molto dispersi per via delle oscillazioni nello strumento, dovute alla sua finita sensibilità ed al rumore.

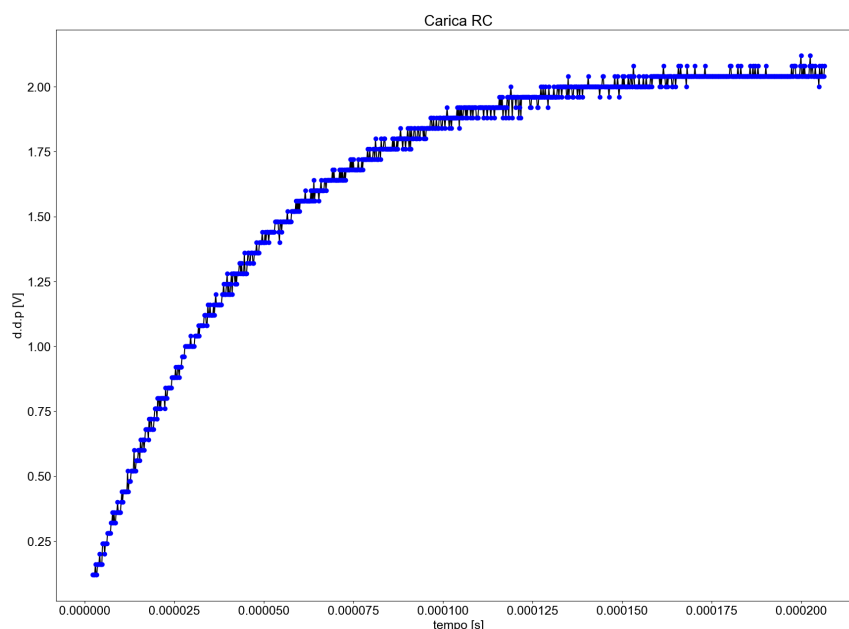


Figura 1. Esempio segnale oscilloscopio: dati presi dall'oscilloscopio. Le linee nere sono riportate per evidenziare la sequenza temporale con cui lo strumento ha raccolto i dati.

Si è dunque ideata la seguente metodologia per ottenere dei punti (tensione, tempo) con relativi errori associati.

Si è diviso l'asse temporale in bin contenenti un egual numero di punti per ogni intervallo, per ciascun bin si è identificato un punto, prendendo il valore del tempo come la media dei tempi nell'intervallo e la tensione come la media delle tensioni. L'errore è stato preso come la deviazione standard (sia sul tempo che sulla d.d.p)

¹Tutti i dati si possono trovare nei file csv nelle sottocartelle su Github: https://github.com/GiovanniLag/laboratorio_2/tree/main/circuiti_2/data

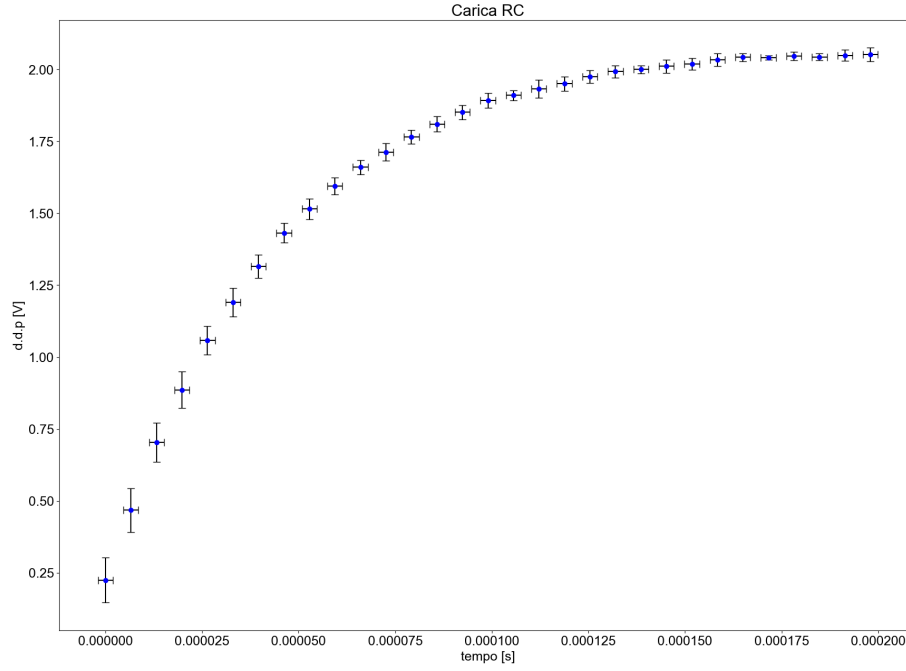


Figura 2. *Esempio di dati dopo il clustering: il segnale raw dell'oscilloscopio viene convertito in una serie di punti con errori associati sia sul valore temporale che su quello di tensione.*

Si noti che essendo gli errori le radici delle varianze di distribuzioni normali è possibile testare la bontà del fit mediante il test del chi quadro.

1.1 Shift a zero

Separando fase di carica e scarica si ottengono dati che non partono dal tempo $t_0 = 0$, tuttavia le funzioni utilizzate per i fit suppongono la condizione iniziale $t_0 = 0$. Si sono dunque traslati i dati sull'asse temporale sottraendo a ciascuno di essi il tempo del primo elemento del set (prima di effettuare il clustering).

1.2 Errori sulle misure con il multimetro

Alcune quantità, quali il valore delle resistenze e delle capacità dei condensatori, sono state misurate utilizzando un multimetro. A queste grandezze è stato associato come errore l'incertezza dello strumento, considerata come il range in cui i valori oscillavano durante la misura.

2 Circuito RC

In un circuito RC, la caduta di tensione sul condensatore segue un andamento esponenziale durante la fase di carica e di scarica. In particolare se assumiamo che sia la carica che la scarica vengano completate, ovvero che la caduta di tensione sul condensatore passi da 0 a V_g , dove V_g è la tensione del generatore, per la carica, e viceversa per la scarica, possiamo considerare le seguenti funzioni della d.d.p sul condensatore:

$$V_{C_{carica}}(t) = V_g \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \quad (1)$$

$$V_{C_{scarica}}(t) = V_g \cdot e^{-t/\tau} \quad (2)$$

con $\tau = RC$

2.1 Circuito e raccolta dati

Impostando quindi il generatore per produrre un onda quadra con un DC-offset tale che nella fase di tensione minima questa sia nulla è possibile simulare il comportamento di carica e scarica di un condensatore e verificare, mediante fit, che il comportamento sia quello atteso.

Inoltre si è scelta una frequenza del generatore tale per cui il condensatore si caricasse (o scaricasse) completamente durante un mezzo periodo.

Si è costruito un circuito con un condensatore, da $(47 \pm 1)nF$ ed una resistenza, da $(900 \pm 10)\Omega$, e vi si sono attaccate le probe per i due canali dell'oscilloscopio come illustrato nel seguente diagramma (Figura [7]).

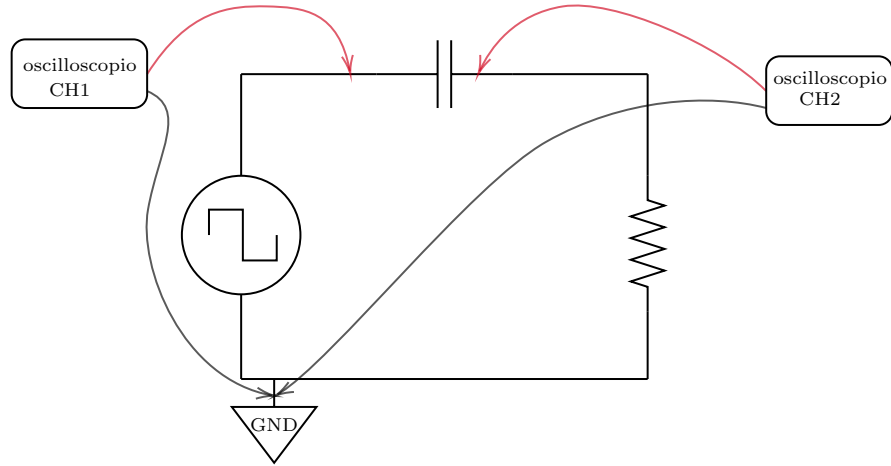


Figura 3. Diagramma circuito RC: nel diagramma è illustrato il circuito utilizzato ed i punti in cui sono state collegate le due probe dell'oscilloscopio. Le frecce rosse rappresentano i collegamenti dei cavi di segnale mentre quelle nere i cavi di ground.

Dunque per ricavare la d.d.p sul condensatore è sufficiente sottrarre la tensione misurata dal Canale 2 (CH2) a quella misurata dal Canale 1 (CH1), il segnale che si ottiene è rappresentato in Figura [4].

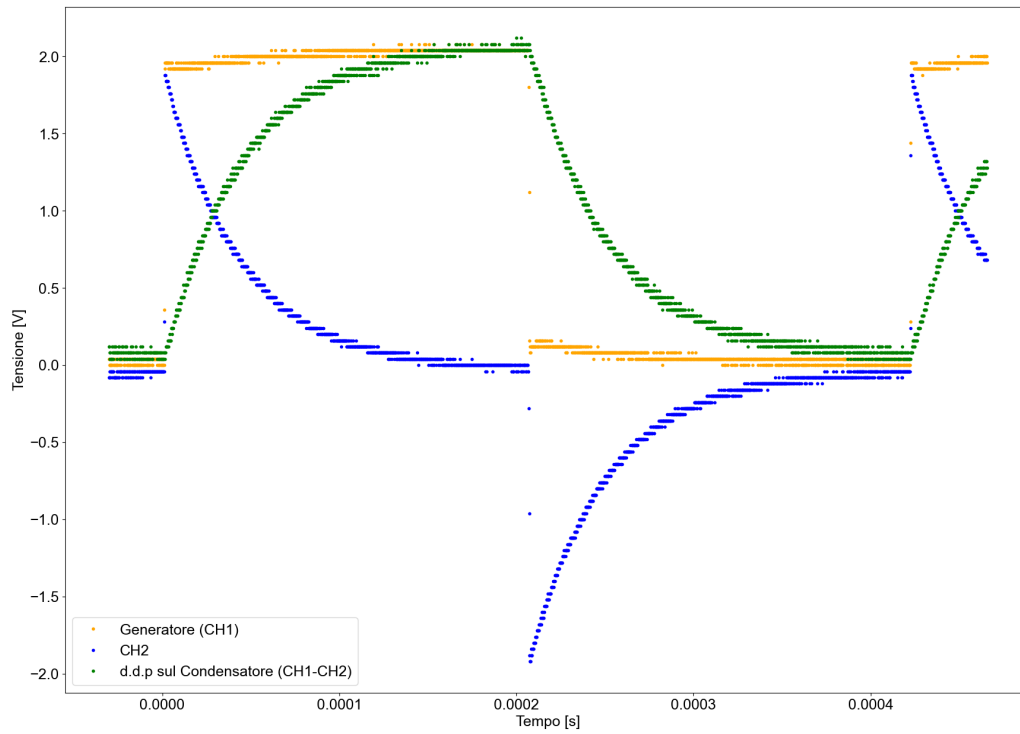


Figura 4. Segnale circuito RC: in arancione è rappresentato il segnale misurato dal CH1 ed in blu quanto misurato da CH2 (prima del clustering), mentre in verde è rappresentata la sottrazione dei due ($CH2 - CH1$), ovvero la d.d.p sul condensatore.

2.2 Analisi dati

A questo punto si sono quindi separati i dati della fase di carica da quelli della fase di scarica e, mediante ROOT, si è fatto il fit secondo l'equazione (1). Come valori iniziali per i parametri si sono utilizzati $V_g = 2.0V$, ovvero quanto impostato sul generatore, e $\tau = RC = 4.23 \cdot 10^{-5}$.

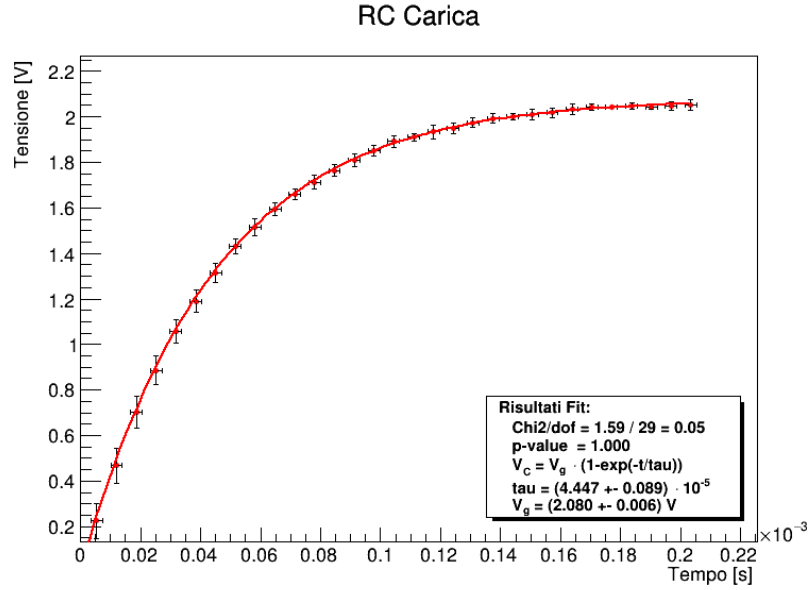


Figura 5. *Fit dati fase di carica circuito RC.*

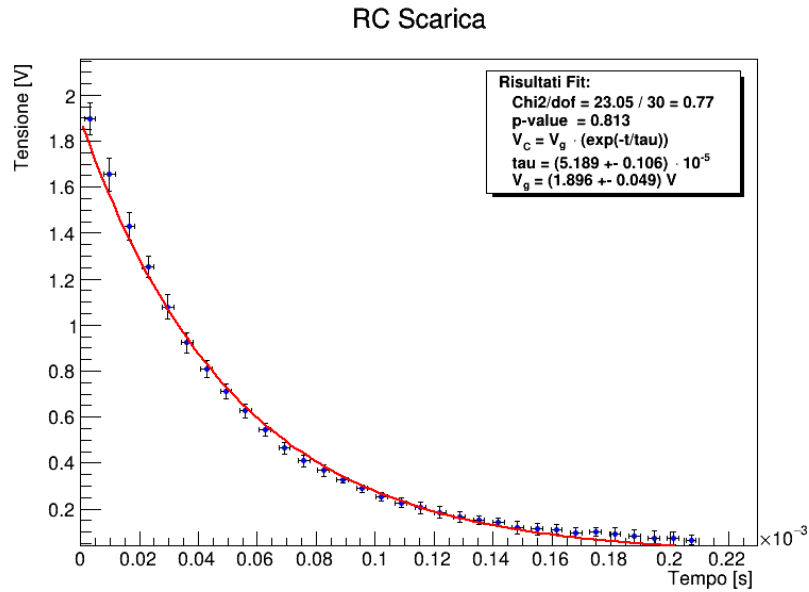


Figura 6. *Fit dati fase di scarica circuito RC.*

Si sono così trovati i seguenti valori:

- $\tau_{carica} = (4.45 \pm 0.09) \cdot 10^{-5} \Omega F$
- $V_{gcarica} = (2.080 \pm 0.006)V$
- $\tau_{scarica} = (5.20 \pm 0.12) \cdot 10^{-5} \Omega F$
- $V_{gscarica} = (1.90 \pm 0.05)V$

A questo punto si possono quindi confrontare i valori di τ ottenuti mediante il fit con quello calcolabile a partire dai valori di R e C - misurati con il multimetro:

$$\tau_0 = 900\Omega * 47nF = (4.23 \pm 0.10) \cdot 10^{-5} \Omega F$$

Dove l'errore su τ_0 viene ricavato come:

$$\sigma_{\tau_0} = \sqrt{(R\sigma_C)^2 + (C\sigma_R)^2} = 0.10 \cdot 10^{-5} \Omega F$$

I valori sono stati confrontati utilizzando lo z-test, nonostante non abbiamo due distribuzioni normali, questo test ci fornisce comunque un'indicazione, sebbene approssimativa, sulla compatibilità dei valori. Si noti che si è utilizzato il test *two tailed*.

Otteniamo per la carica:

$$t_1 = \frac{\tau_0 - \tau_c}{\sqrt{\sigma_{\tau_0}^2 + \sigma_{\tau_c}^2}} = 1.64$$

$$p = 0.12$$

Mentre per la scarica:

$$t_1 = \frac{\tau_0 - \tau_s}{\sqrt{\sigma_{\tau_0}^2 + \sigma_{\tau_s}^2}} = 6.86$$

$$p = 5.31 \cdot 10^{-10}$$

Si vede quindi che il valore ottenuto per la carica è compatibile con quello calcolato (con una soglia del 5%), mentre quello per la scarica non risulta compatibile, nemmeno con una soglia del 1%.

3 Circuito RL

Il circuito RL è analogo a quello RC e le funzioni della tensione nella fase di carica e di scarica sono le medesime, con tuttavia, $\tau = L/R$. Si sono quindi di nuovo fatti gli opportuni accorgimenti affinché la carica e la scarica fossero completati in un mezzo periodo dell'onda quadrata prodotta dal generatore.

3.1 circuito e raccolta dati

Si è utilizzato un circuito del tutto analogo a quello del caso precedente, sostituendo al condensatore un'induttanza L e tenendo $R = 900\Omega$.

In questo caso tuttavia i dati raccolti dall'oscilloscopio rappresentano già la d.d.p sull'induttanza, in quanto si è costruito il circuito mettendo prima la resistenza e poi l'induttanza, come da seguente immagine:

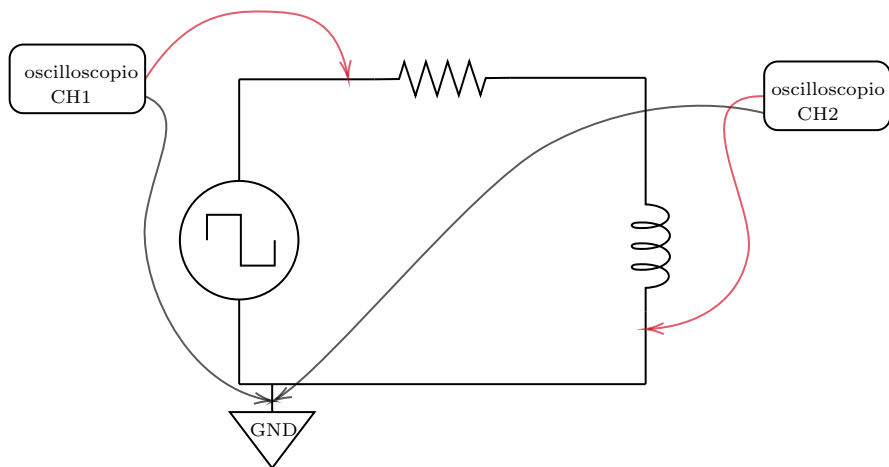


Figura 7. Diagramma circuito RL : nel diagramma è illustrato il circuito utilizzato ed i punti in cui sono state collegate le due probe dell'oscilloscopio. Le frecce rosse rappresentano i collegamenti dei cavi di segnale mentre quelle nere i cavi di ground.

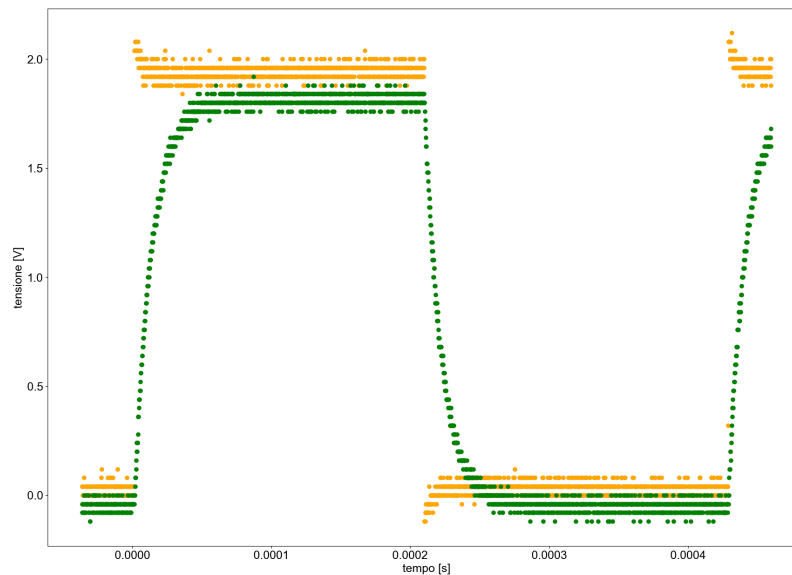


Figura 8. Segnale oscilloscopio: sono plottati i due segnali registrati rispettivamente nei due canali dell'oscilloscopio. In giallo il segnale del generatore ($CH1$) ed in verde il segnale del canale 2 ($CH2$).

3.2 Analisi dati

Anche per l'analisi dati si è proceduto in maniera analoga a quanto fatto per il circuito RC, eseguendo il fit mediante ROOT delle fasi di carica e di scarica. Di seguito i plot di tali fit con box statistica e valori ottenuti.

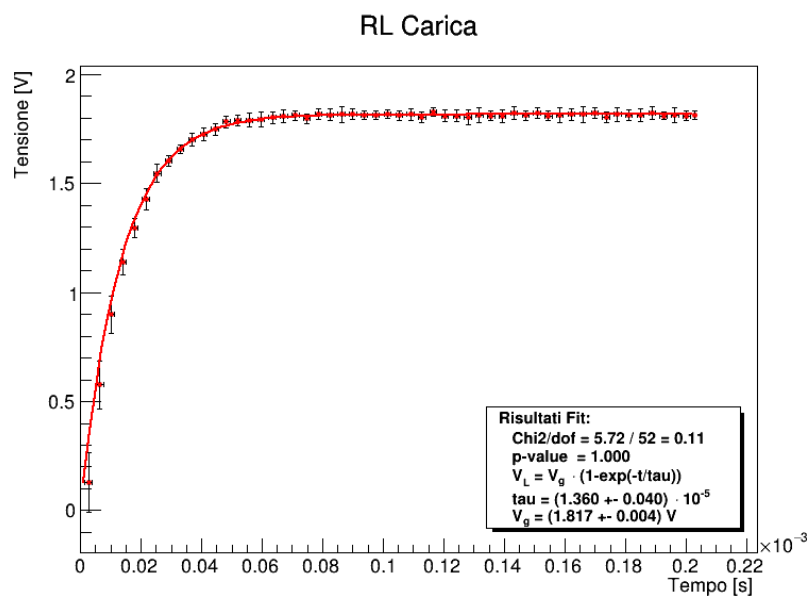


Figura 9. *Fit dati fase di carica circuito RL.*

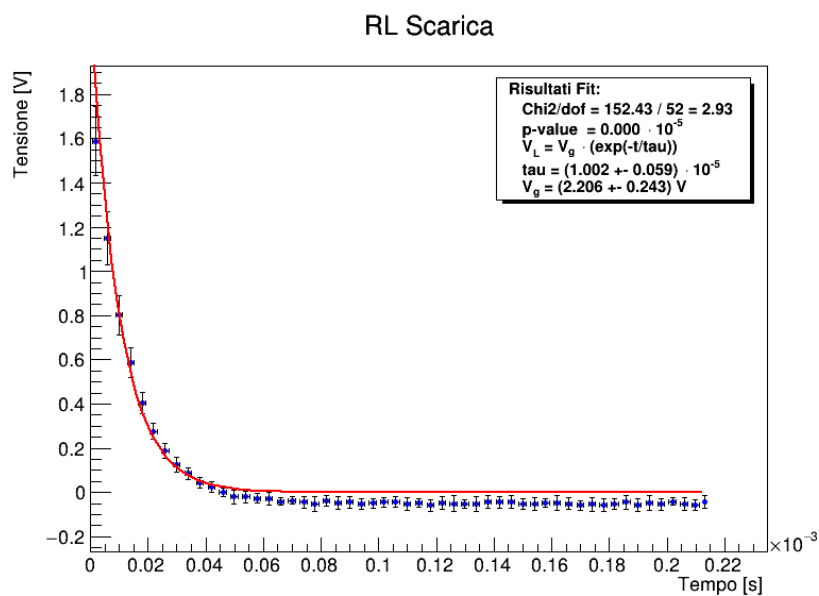


Figura 10. *Fit dati fase di scarica circuito RL.*

Si sono così trovati i seguenti valori:

- $\tau_{carica} = (1.36 \pm 0.04) \cdot 10^{-5} \Omega F$
- $V_{gcarica} = (1.817 \pm 0.004)V$
- $\tau_{scarica} = (1.00 \pm 0.06) \cdot 10^{-5} \Omega F$
- $V_{gscarica} = (2.21 \pm 0.24)V$

A differenza del caso precedente, con l'induttanza non è possibile calcolare il valore di τ a partire dai R ed L , in quanto non è possibile misurare quest'ultima con il multimetro.

Si osserva che il p-value nella fase di carica è notevolmente elevato, in netto contrasto con quello riscontrato nella fase di scarica, che è molto più basso. Questi risultati potrebbero dipendere dal modo in cui abbiamo processato il segnale grezzo proveniente dall'oscilloscopio. Questo punto sarà oggetto di una discussione più approfondita nelle conclusioni.

4 Circuito RLC

La tensione ai capi dell'ultimo elemento del circuito, nel caso di questo esperimento un condensatore (Figura [11]) oscilla secondo le leggi di un oscillatore armonico smorzato. I parametri di tale oscillazione dipendono dall'induttanza e dalla resistenza presenti nel circuito. Infatti possiamo impostare l'equazione del circuito:

$$V_R + V_L + V_C = V_g$$

da cui

$$R\dot{Q} + L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = V_g$$

che possiamo riscrivere come

$$\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2(Q - CV_g) = 0 \quad (3)$$

con $\gamma = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ($\dot{I} = \dot{Q}$)

La soluzione che si ottiene è quindi quella di un oscillatore armonico smorzato e $V(t)$ dipenderà dal valore di

$$\Delta = \gamma^2 - \omega^2$$

4.1 Circuito

Si è utilizzato un circuito come quello in figura, utilizzando il canale 1 (CH1) dell'oscilloscopio per misurare la tensione in uscita dal generatore ed il canale 2 (CH2) per misurare la tensione sull'ultimo componente del circuito.

Per quanto riguarda i valori delle componenti, si è utilizzato lo stesso induttore del circuito RL, un condensatore da $(47 \pm 1) nF$ ed una resistenza da $(100 \pm 5) \Omega$ per ottenere un regime di sotto-smorzamento. Il valore di questa resistenza si è stimato calcolando:

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_L RC}} = \frac{1}{\sqrt{1.22 \cdot 10^{-5} \frac{H}{\Omega} \cdot 900 \Omega \cdot 47 nF}} = 44020$$

da cui si trova il valore soglia di gamma affinché $\Delta = 0$, e moltiplicando per $2L$ troviamo la resistenza di soglia, quindi utilizzando una resistenza più piccola ci troviamo in regime sotto-smorzato.

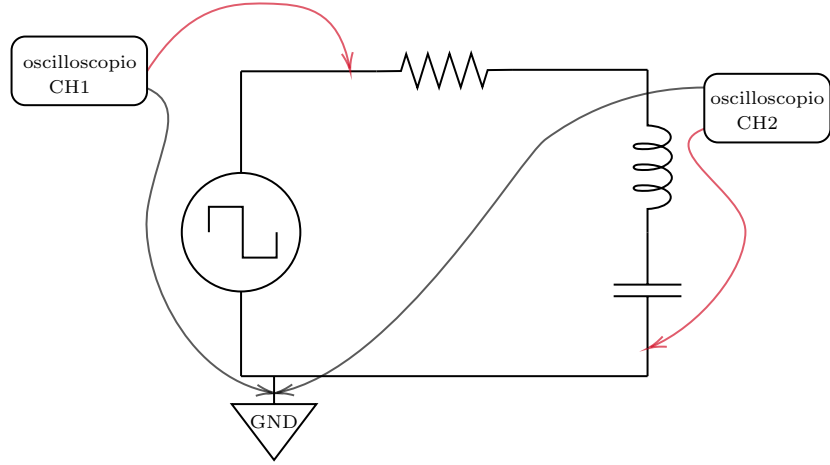


Figura 11. Diagramma circuito RLC: nel diagramma è illustrato il circuito utilizzato ed i punti in cui sono state collegate le due probe dell'oscilloscopio. Le frecce rosse rappresentano i collegamenti dei cavi di segnale mentre quelle nere i cavi di ground.

4.2 Analisi dati

Analogamente a quanto si è fatto nei due casi precedenti, si sono fittati con ROOT i dati secondo le leggi dei $V(t)$, dove V rappresenta la tensione sull'ultimo componente, il condensatore..

Come parametri iniziali per i fit si sono utilizzati $\gamma = \frac{R}{2L}$, con R misurata con il multimetro e $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, dove ω_0 è quello calcolato precedentemente.

4.3 Sotto-smorzato

Nel caso in cui $\Delta < 0$ abbiamo un oscillatore sotto-smorzato risolvendo la (3) otteniamo:

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-\gamma t} \cos(\beta t))$$

$$V(t) = RI = R\dot{Q} = RCV_g e^{-\gamma t} \cdot [\gamma \cos(\beta t) + \omega \sin(\beta t)]$$

$$V(t) = V_0 \cdot e^{-\gamma t} [\gamma \cos(\beta t) + \beta \sin(\beta t)] \quad (4)$$

con $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ e V_0 che possiamo scrivere come $V_0 = \frac{2V_g R}{L\beta}$.

Come già detto per ottenere un comportamento di questo tipo si è utilizzata una resistenza $R = (100 \pm 5) \Omega$.

Si sono dunque fittati i dati secondo la relazione (4). Tuttavia in questo caso si sono eseguite più iterazioni del fit con ROOT, facendo variare i parametri iniziali in un range del 10% e scegliendo poi quella con il χ^2 minore, in quanto il fit con una sola iterazione risultava problematico. I risultati ottenuti sono i seguenti:

- $V_0 = (4.6 \pm 0.03) \times 10^{-6}$
- $\gamma = (5660 \pm 50)$
- $\beta = (40900 \pm 42)$

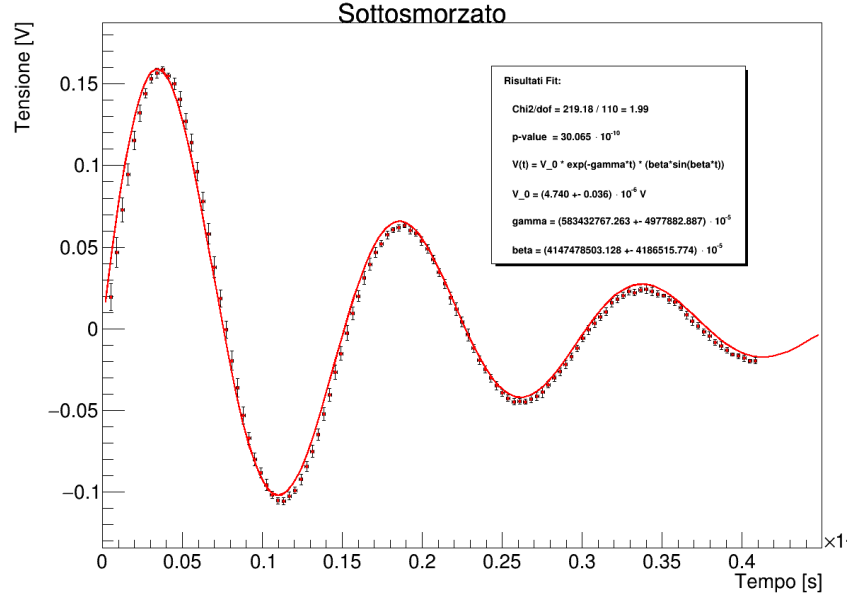


Figura 12. *Fit dati circuito RLC sotto-smorzato.*

5 Conclusioni

Si è verificata con un'ottima accettabilità (si vedano Figura [5] e Figura [6]) per i valori del p-value) la funzione della caduta di tensione del condensatore in un circuito RC nel tempo, sia per la fase di carica che per quella di scarica.

La costante $\tau = (4.45 \pm 0.09) \cdot 10^{-5} \Omega F$ di tempo caratteristico ricavata dai fit di carica (Figura [5]) risulta compatibile con una soglia del 5% con il valore calcolato come $\tau_0 = RC = (4.23 \pm 0.10) \cdot 10^{-5} \Omega F$, utilizzando i valori di R e di C misurati con il multimetro.

Lo stesso non si può dire del valore di $\tau = (5.20 \pm 0.12) \cdot 10^{-5} \Omega F$, ricavato dal fit di scarica (Figura [6]), infatti questi non risultano compatibili con il valore di τ_0 nemmeno con una soglia del 1%.

Per quanto riguarda invece il circuito RL si è ottenuto un buon accordo (Figura [9]) per la carica mentre non si è ottenuta una compatibilità accettabile (con soglia del 1%) per il fit della fase di scarica (Figura [10]).

Infine per il circuito RLC in regime sotto-smorzato il fit (Figura [12]) non risulta compatibile (sempre con soglia del 1%).

Questa incompatibilità è stata attribuita al fatto che si è utilizzato un periodo troppo piccolo per l'onda sinusoidale generata dal generatore, infatti è possibile osservare che alla fine del periodo (si guardi la stessa figura del fit) la tensione non è nulla ma sta ancora oscillando.

Un altro problema che si pensi possa spiegare la poca compatibilità dei fit di scarica del circuito RL, nonché i fin troppo elevati valori dei p-values degli altri fit, è legato al modo in cui abbiamo processato il segnale grezzo dell'oscilloscopio.

Infatti il metodo utilizzato porta ad avere errori molto maggiori nelle zone in cui il segnale varia rapidamente. Inoltre non tiene in considerazione la natura del rumore registrato dallo strumento.

Sarebbe opportuno sviluppare una diversa metodologia per la lavorazione del segnale grezzo che tenga in considerazione la natura del rumore dell'oscilloscopio.

Inoltre si potrebbero studiare anche gli altri due tipi di regime del circuito RC: sovra-smorzato e criticamente-smorzato.