

Spettrometro

Giovanni Laganà, Gioele Lo Presti, Gabriele Manzi

30 Marzo 2023

Indice

1	Apparato sperimentale	2
1.1	Messa a fuoco	3
1.2	Lampade ad arco	3
2	Analisi degli errori	4
3	Prisma	4
3.1	Determinazione delle caratteristiche del prisma	5
3.2	Determinazione del gas ignoto	7
4	Determinazione del passo del reticolo	9
5	Conclusioni	10
6	Appendice A (tabelle dati)	10
6.1	Prisma con lampada al mercurio	10
6.2	Prisma con gas incognito	11

Abstract

Lo scopo di questo esperimento è quello di studiare lo spettro di emissione di gas eccitati da scariche elettriche. Si sono utilizzati due metodi per scomporre lo spettro emesso da delle lampade a gas: un prisma ottico ed un reticolo. Si sono innanzitutto determinate le caratteristiche di prisma e reticolo, ovvero l'indice di rifrazione ed il passo del reticolo, utilizzando lampade contenenti un gas conosciuto e confrontando lo spettro ottenuto con quello tabulato dal NIST¹.

Si è poi utilizzato il prisma per studiare lo spettro di una lampada contenente un gas ignoto, determinando così l'elemento.

1 Apparato sperimentale

Si è adoperato un semplice spettrometro (Figura [2]) costituito da due cannocchiali, il primo preceduto da una fenditura per collimare e focalizzare il fascio di luce che si vuole analizzare, il secondo utilizzato per focalizzare il fascio nell'occhio dell'osservatore. Questi cannocchiali sono fissati su una piattaforma circolare e liberi di ruotarci intorno.

Inoltre nel secondo cannocchiale è presente un puntatore a croce che, una volta messo a fuoco, consente di posizionarsi accuratamente su uno dei fasci dello spettro per poter effettuare le misurazioni.

Nel mezzo della piattaforma si posizionano il prisma od il reticolo che permettono di scomporre il fascio di luce nel suo spettro.



Figura 1. Spettrometro: Dispositivo con due cannocchiali, uno dotato di una fenditura per collimare e focalizzare il fascio di luce in analisi, l'altro per concentrare il fascio verso l'osservatore. Un puntatore a croce consente il posizionamento accurato del telescopio d'osservazione sul fascio di interesse.

¹Le tabelle a cui si fa riferimento sono quelle delle "Strong Lines", una lista di tutti gli elementi si trova a: https://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/element_name.htm

1.1 Messa a fuoco

È fondamentale che le ottiche siano messe a fuoco, in modo da ottenere un'immagine nitida dello spettro. Per mettere a fuoco il cannocchiale di osservazione bisogna innanzitutto focalizzare e raddrizzare la croce, dopo di che mettendosi davanti ad una finestra si può focalizzare il cannocchiale all'infinito (ovvero mettendo a fuoco, ad esempio, un palazzo distante).

Bisogna poi mettere a fuoco la fenditura, per far ciò si posizionano i due cannocchiali parallelamente e guardando da quello di osservazione si mette a fuoco la fenditura. Inoltre bisogna far sì che questa sia la più piccola possibile in modo tale da massimizzare la risoluzione (senza però renderla troppo piccola altrimenti non passa abbastanza luce).

1.2 Lampade ad arco

Per produrre gli spettri si sono utilizzate delle lampade ad arco. Queste lampade sono costituite da tubi di quarzo (o vetro), provvisti di due elettrodi e contenenti un gas o i vapori di un metallo a bassa pressione. Applicando una corrente ai due elettrodi, si ionizzano ed eccitano gli atomi del gas o del vapore nel tubo, causando l'emissione di luce caratteristica.

Si sono usate due tipologie di lampade ad arco:

- **ad alta intensità:** producono luce più intensa. Necessitano di scaldarsi per poter funzionare al massimo dell'efficienza.
- **tubi di Plucker:** producono luce meno intensa ma esibiscono linee spettrali più strette.

Si noti che se surriscaldiate queste lampade producono linee spettrali allargate per via dell'effetto doppler termico.

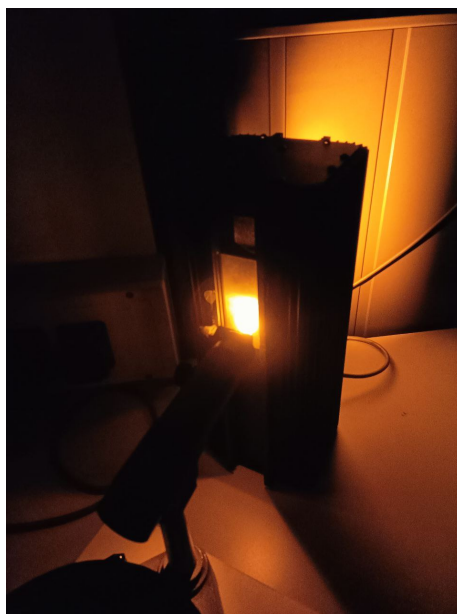


Figura 2. *Lampada al sodio: un esempio delle lampade utilizzate, in particolare questa è una lampada ad alta intensità al sodio.*

2 Analisi degli errori

Le uniche grandezze misurate in questo esperimento sono degli angoli. Gli angoli misurati in corrispondenza con le linee spettrali sono stati misurati con una scala di Vernier con una risoluzione di 30 secondi d'arco. Si è quindi associato a ciascuna di queste misure un errore di 15 secondi d'arco.

L'angolo del prisma è stato invece misurato con un goniometro, con un'incertezza strumentale di 0.5° . Tuttavia questa incertezza, molto più grande di quella sulle misure degli altri angoli, causava un errore propagato sulle lunghezze d'onda per il gas ignoto (si veda sezione 3.1) di un ordine di grandezza superiore del valore stesso di queste. Si è allora deciso di utilizzare un errore di 30 secondi d'arco in modo da rendere questo errore più simile a quello degli angoli delle linee spettrali; inoltre la metodologia alternativa di misura dell'angolo descritta di seguito porterebbe ad un errore di questo valore.

Sarebbe infatti opportuno ripetere la misura dell'angolo utilizzando una metodologia che permetta di ottenere un risultato più accurato, ad esempio utilizzando lo spettrometro stesso. Si potrebbe posizionare il prisma sulla piattaforma rotante e ruotare quest'ultima finché il fascio riflesso da una delle due superfici ottiche non scompare (ovvero quando l'angolo di incidenza è di 90°) e misurare così l'angolo del prisma, o meglio la metà di tale angolo, utilizzando la scala di Vernier.

Per quanto riguarda invece i valori delle lunghezze d'onda delle tabelle del NIST si sono assunti come valori veri e dunque non vi si è associato alcun errore.

3 Prisma

La luce che passa attraverso un prisma subisce quello che, macroscopicamente, è detto fenomeno di rifrazione. L'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza dell'onda elettromagnetica e dalle proprietà del materiale di cui è composto il prisma. In particolare sussiste una legge empirica, la legge di Cauchy, tra l'Indice di rifrazione e la lunghezza d'onda:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

di cui si sono considerati i termini solo fino al second'ordine in λ :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (1)$$

Utilizzando un prisma con due facce ottiche (ovvero ben lucidate, in modo da essere assimilabili a superfici perfettamente piane) si separa lo spettro di una fonte luminosa facendo incidere il fascio su una delle due facce del prisma; le varie componenti dello spettro verranno allora rifratte secondo indici di rifrazione diversi (Equazione (1)).

Se l'angolo di incidenza del fascio collimato è θ_i allora si osserverà una particolare riga del fascio uscire dalla seconda faccia del prisma con un angolo di deviazione δ , ovvero l'angolo formato tra la direzione del raggio incidente sulla prima faccia del prisma e quella del raggio emergente dalla seconda faccia (Figura [4]).

Modificando l'angolo di incidenza (ruotando il prisma), δ varia e presenta un minimo quando $\theta_i = \theta_e$. In corrispondenza di questo minimo vale la relazione:

$$\sin\left(\frac{\delta + \alpha}{2}\right) = n \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (2)$$

dove α è l'angolo del prisma formato dalle due facce ottiche, $\alpha = (60.000 \pm 0.0083)^\circ$.

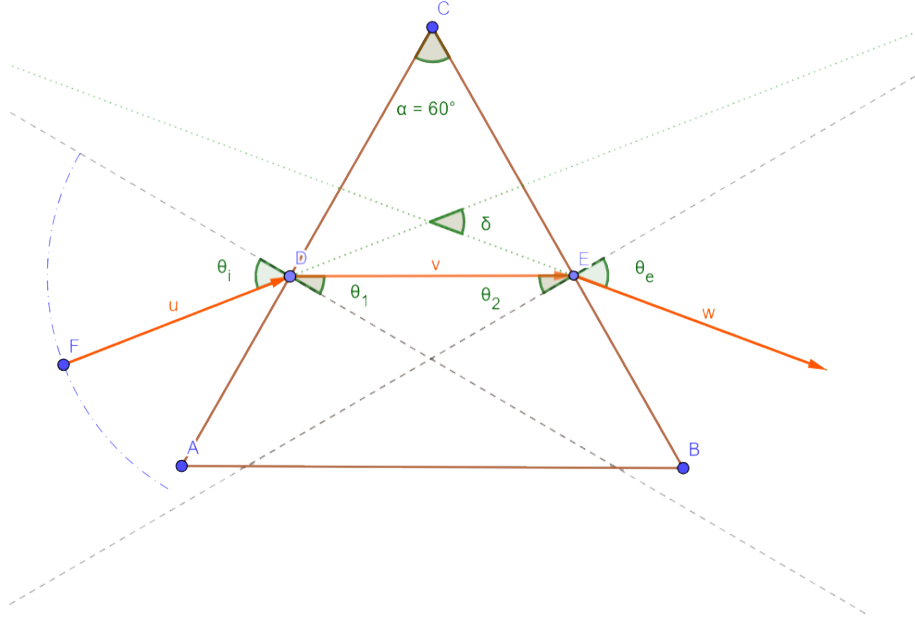


Figura 3. Schema prisma: in questo schema è rappresentato un singolo fascio di luce di una certa lunghezza d'onda che incide sul prisma e viene rifratto. in questo esempio $\theta_i = \theta_e$ e quindi δ è al suo minimo.

Combinando queste due equazioni possiamo scrivere una relazione tra l'angolo di deviazione δ e la lunghezza d'onda:

$$n(\delta) = \frac{\sin((\delta + \alpha)/2)}{\sin(\alpha/2)} \quad (3)$$

$$n(\delta) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (4)$$

3.1 Determinazione delle caratteristiche del prisma

Utilizzando una lampada contenente un gas noto, il mercurio, si sono determinati i coefficienti A e B caratteristici del prisma. Per far ciò si sono misurati gli angoli di deviazione minima per ciascuna riga dello spettro (Tabella [2]) puntando con la croce del cannocchiale d'osservazione il centro di ciascuna riga spettrale.

Per trovare il minimo dell'angolo di deviazione si è ruotata la piattaforma su cui era poggiato il prisma fino a raggiungere il punto di inversione del movimento dello spettro, ovvero il punto in cui ruotando in senso antiorario od in senso orario la basetta le linee dello spettro si muovono nella stessa direzione. Ci si può fare un'idea migliore del perché vi sia tale punto di minimo osservando la figura [4].

Si è poi associata a ciascuna riga osservata la lunghezza d'onda corrispondente, confrontando i valori riportati sulla tabella del nist per il mercurio. Ovvero si sono convertiti i valori tabellati delle lunghezze d'onda in colore (approssimativamente) e si sono confrontati quest'ultimi con i colori osservati.

Si noti che si sono considerate solo le linee di prima ionizzazione del mercurio in quanto le lampade

utilizzate non sono in grado di produrre le linee di seconda ionizzazione. Tuttavia dalla tabella [2] si può notare che abbiamo osservato più righe spettrali rispetto a quelle attese per la prima ionizzazione, questo è probabilmente dovuto ad impurità nella lampada; si sono ignorate queste righe spettrali aggiuntive.

Una volta ottenuti i dati dell'angolo di minima deviazione e lunghezza d'onda per ciascuna riga dello spettro si sono determinati i coefficienti A e B, prima ricavando n dalla (3) e scrivendolo in funzione di $1/\lambda^2$, per linearizzare la relazione, utilizzando (4) e poi fittando con ROOT. L'errore sul valore di n è stato ricavato propagando l'errore sul valore di δ come:

$$\sigma_n = \sqrt{\left(\frac{\cos\left(\frac{\delta+\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sigma_\delta\right)^2 + \left(\left(\frac{\cos\left(\frac{\delta+\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\delta+\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\sigma_\alpha\right)^2}$$

Si noti che in quanto gli errori propagati su n derivano dall'incertezza strumentale sulla misura degli angoli, si sarebbe dunque dovuto utilizzare per il fit $\sigma_n = \frac{\text{err}_n}{\sqrt{12}}$ (come approssimazione della sigma di una distribuzione gaussiana). Tuttavia così facendo gli errori risultavano essere sotto-stimati, mediamente pari allo 0.003% dei valori di n ; benché le misure siano state effettuate con una scala di Vernier è probabile che ci siano stati errori nel posizionare la croce nel centro delle righe spettrali e questo porta ad errori ben più grandi rispetto ai 15 secondi d'arco dell'incertezza strumentale. Si è allora deciso di utilizzare un errore del 0.05% dei valori di n per questo fit.

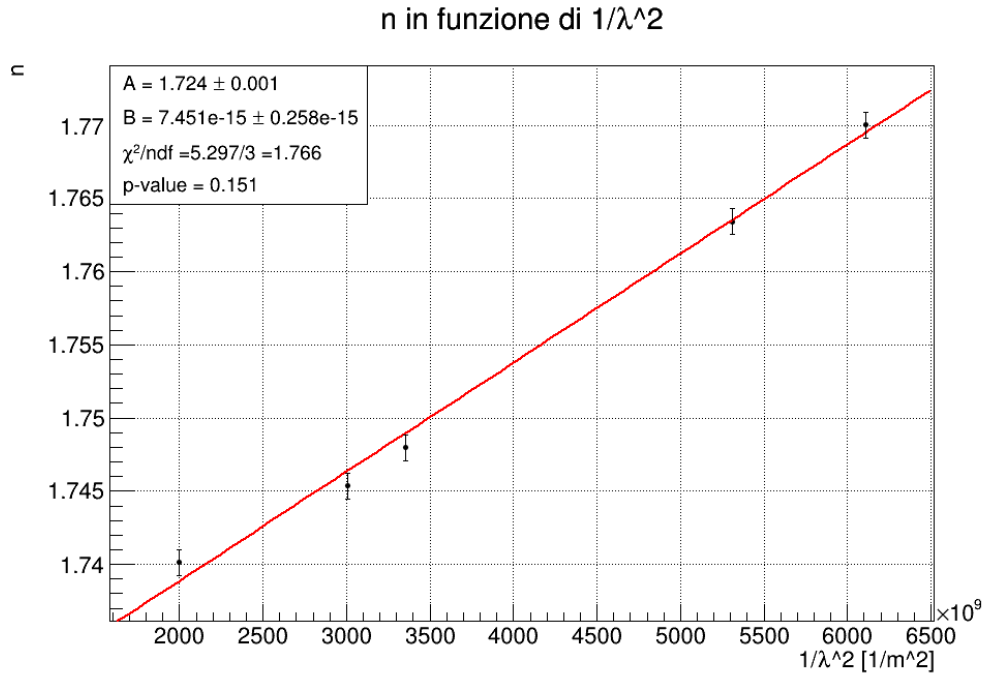


Figura 4. Fit legge di Cauchy linearizzata: si sono ricavati i valori di n a partire dall'angolo di minima deviazione usando la (3) e si sono espressi in funzione di $1/\lambda^2$. Il fit è stato eseguito 1000 e si è tenuto il risultato con il miglior χ^2 .

3.2 Determinazione del gas ignoto

Conoscendo i coefficienti della relazione di Cauchy e l'angolo di minima deviazione δ per ciascuna lunghezza d'onda dello spettro è possibile ricavare le lunghezze d'onda osservate e determinare il tipo di gas o vapore presente nella lampada che emette la luce analizzata.

Ancora una volta si determina $n(\delta)$ dalla (3) e si calcola quindi la lunghezza d'onda come:

$$\lambda = \sqrt{\frac{B}{n-A}} \quad (5)$$

e si associa ai valori di lambda così determinati l'errore:

$$\sigma_l = \sqrt{\left(\frac{1}{4} \frac{1}{B(n-A)} \sigma_B^2\right) + \left(\frac{1}{4} \frac{B}{(n-A)^3}\right) \cdot (\sigma_A^2 + \sigma_n^2)} + 2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{B(n-A)}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{(n-A)^3}} \sigma_{AB}$$

Si è quindi ricavato lo spettro della lampada a gas ignoto (Figura [5]) partendo dai dati dell'angolo di minima deviazione (Tabella [3]).

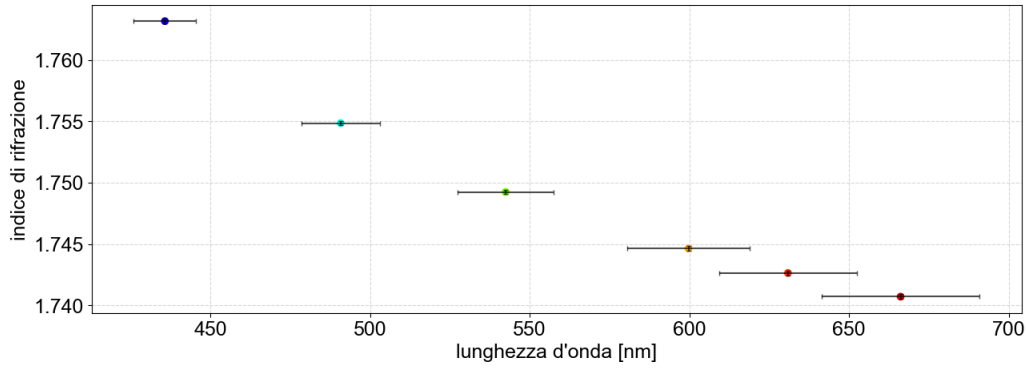


Figura 5. *Spettro gas ignoto, n in funzione di λ : sono mostrate le lunghezze d'onda in funzione dell'indice di rifrazione. Queste lunghezze d'onda sono state ricavate usando i coefficienti di Cauchy determinati nel punto precedente. I colori sono stati calcolati in modo approssimativo in base alla percezione umana dello spettro visibile.*

Per confrontare questo spettro con le tabelle del nist si è sviluppata una funzione in python che legge le tabelle del nist secondo una lista di elementi e calcola la distanza tra lo spettro di ciascuno di questi elementi e quello del gas ignoto. Questa distanza è calcolata come:

$$d = \sum_i \min_j \left(\frac{|\lambda_{si_i} - \lambda_{se_j}|}{\sigma_{\lambda_{si_i}}} \right) \quad (6)$$

ovvero la somma del modulo delle distanze tra ciascuna lunghezza d'onda dello spettro incognito (λ_{si_i}) e la più vicina di quelle dello spettro dell'elemento, il tutto diviso per l'errore propagato su λ_{si_i} al quadrato.

Si è calcolata questa distanza per vari elementi e utilizzando diversi threshold per l'intensità luminosa, ovvero scartando tutte quelle righe spettrali delle tabelle che sono state registrate con un'intensità sotto il threshold imposto.

Si noti inoltre che si sono considerate solo le linee spettrali di prima ionizzazione.

Come elementi da confrontare si sono scelti quelli che potevano essere all'interno della lampada incognita in questione, ovvero:

Mercurio	Sodio	Scandio	Tallio
Idrogeno	Elio	Neon	Argon
Xenon	Ossigeno		

Tabella 1. Elementi confrontati: una lista degli elementi di cui si è confrontato lo spettro con quello del gas ignoto nella lampada.

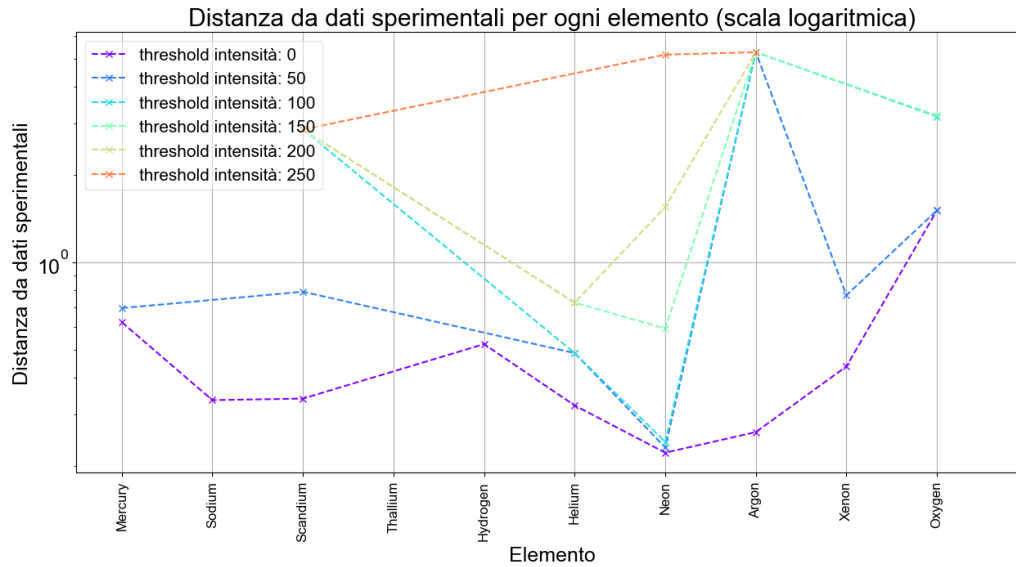


Figura 6. Distanza spettri elementi da spettro gas ignoto: si è calcolata la distanza tra lo spettro di ciascun elemento della Tabella [1] e quello del gas ignoto per diversi treshold di intensità delle righe spettrali. Si osserva che il miglior candidato è il Neon.

Si è quindi osservato che l'elemento più compatibile con lo spettro osservato della lampada ignota è il Neon; possiamo infatti vedere (Figura [6]) che per treshold di intensità sotto i 150 lo spettro del Neon è il più vicino a quello del gas ignoto.

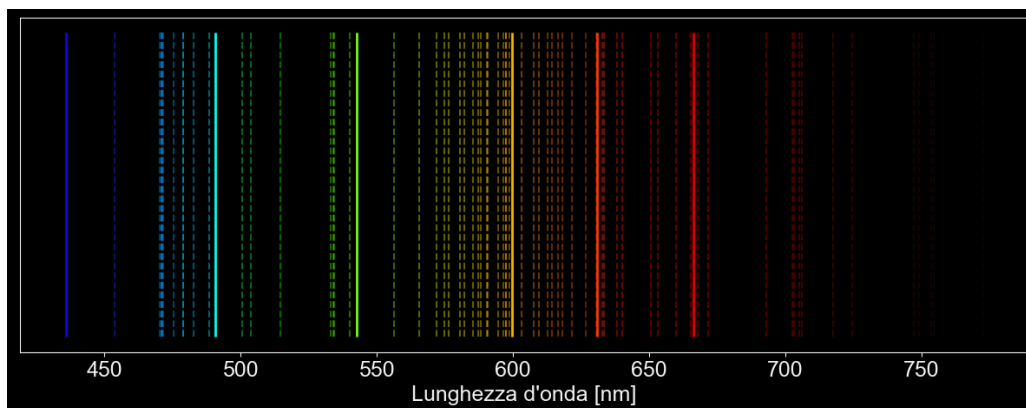


Figura 7. *Confronto spettro gas ignoto e spettro Neon: le righe solide e più spesse rappresentano lo spettro del gas ignoto mentre le righe tratteggiate quello del Neon*

4 Determinazione del passo del reticolo

Un reticolo di diffrazione è una struttura composta da una serie di fenditure equispaziate che interagisce con la luce provocando un fenomeno di interferenza. La distanza tra le fenditure d è detta passo del reticolo. Nel caso di questo esperimento il reticolo si trovava all'interno di una lastra di vetro.

Il reticolo è stato disposto perpendicolarmente alla luce emessa da una lampada al sodio. Quest'ultima emette luce con un doppio picco di emissione nell'arancione, fornendo un modello di interferenza ben definito.

Per verificare il corretto allineamento perpendicolare del fascio rispetto al reticolo si sono misurati gli angoli delle linee arancioni e verificato che fossero uguali (ovvero che le righe si trovassero in posizione simmetrica rispetto alla riga centrale).

Si noti che lo spettro del sodio presenta due righe spettrali arancioni molto vicine, si è dunque guardato il centro di queste due righe (in quanto non si riuscivano a distinguere a sufficienza da considerarle una soltanto)

Utilizzando la posizione angolare, $\theta = 29.97^\circ$ (con errore dello strumento di $15''$), di queste righe e la lunghezza d'onda della luce emessa dalla lampada al sodio, siamo stati in grado di calcolare il passo del reticolo utilizzando la relazione:

$$d = \frac{n\lambda}{\sin \theta}$$

dove n è l'ordine di diffrazione (del massimo di interferenza) e la lunghezza d'onda utilizzata si è presa come media tra le due lunghezze d'onda delle righe arancioni, con errore pari a $(\lambda_1 - \lambda_2)/2$; ovvero $\lambda = (615.7 \pm 0.3)nm$

Si è ottenuto:

$$d = (3.442 \pm 0.002) \mu m$$

5 Conclusioni

È stato possibile determinare la natura del gas sconosciuto attraverso l'analisi del suo spettro, una volta individuati i valori caratteristici di Cauchy associati al prisma utilizzato. Nonostante le impurità presenti nella lampada al mercurio, si sono potute isolare le righe di prima ionizzazione e associarvi il valore della lunghezza d'onda guardando la tabella del NIST. Si noti tuttavia che per alcuni colori erano presenti più lunghezze d'onda "compatibili" (qualitativamente) e si è quindi cercato di scegliere quella più adatta, tuttavia sarebbe opportuno trovare una procedura migliore per associare ai colori la lunghezza d'onda corrispondente.

Un'altra difficoltà incontrata in questo esperimento ha riguardato la stima dell'errore. In particolare, dato che la misurazione dell'angolo del prisma si è effettuata con un goniometro, si è riscontrato un errore notevolmente ampio rispetto a quello sulle misure degli angoli delle linee spettrali; di conseguenza, si è dovuto ipotizzare un errore ridotto. Si sarebbe quindi dovuto ripetere la misurazione dell'angolo del prisma seguendo la procedura indicata precedentemente (nella sezione 3.1).

Per quanto riguarda il reticolo di rifrazione, si potrebbe adottare un diverso approccio per garantire il corretto allineamento del fascio con la griglia del reticolo. Dal momento che il reticolo è incastonata nel vetro, si potrebbe sfruttare il fatto che, quando il fascio è allineato correttamente, l'angolo di rifrazione dovuto al vetro si annulla. Pertanto, la rimozione e la re-inserzione del reticolo non dovrebbero alterare l'angolo della linea principale (quella centrale).

6 Appendice A (tabelle dati)

6.1 Prisma con lampada al mercurio

colore linea	lunghezza d'onda [nm]	angolo δ [°]
rosso 1	–	150.666667
rosso 2	708.1900	150.933333
arancione	–	151.333333
giallo-arancio	576.9598	151.541667
verde	546.0735	151.850000
azzurro 1	–	152.566667
azzurro 2	–	152.683333
blu	433.9223	153.700000
viola1	404.6563	154.508333
viola2	–	154.616667

Tabella 2. Dati mercurio: le lunghezze d'onda sono state prese dalla tabella del nist in base al colore osservato, si sono utilizzati solo i dati di prima ionizzazione del mercurio. Le righe mancanti di lunghezza d'onda sono probabilmente dovute ad impurità presenti nella lampada. δ è l'angolo di minima deviazione, con un errore di $15''$ d'arco (convertito poi in gradi).

6.2 Prisma con gas incognito

colore	angolo
rosso	151°0'0"
arancione	151°13'30"
giallo	151°27'30"
verde	152°0'0"
azzurro	152°40'0"
viola	153°40'0"

Tabella 3. *Dati gas incognito:* Sono riportati i valori misurati dell'angolo di minima deviazione per ciascuna riga spettrale osservata ed il colore di tale linea. L'errore sugli angoli è di 15" d'arco.