

Circuiti 3

Giovanni Laganà, Gioele Lo Presti, Gabriele Manzi

30 Marzo 2023

Indice

1	Introduzione	2
2	Apparato e metodologia	2
2.1	Errori multimetro e frequenza	3
3	Presa dati	3
3.1	Ampiezze	5
3.2	Fase	5
3.2.1	Metodo dei fit	6
3.2.2	Metodo Hilbert cross correlation	7
4	Analisi dati	7
4.1	RC	7
4.1.1	Discussione risultati dei fit	11
4.2	RL	13
4.2.1	Discussione risultati dei fit	15
4.3	RLC	16
4.3.1	Ultimo componente R	16
4.3.2	Ultimo componente C	18
4.3.3	Ultimo componente L	19
4.3.4	Discussione risultati	21
5	Conclusioni	21

Abstract

L'esperimento ha lo scopo di studiare le caratteristiche di circuiti RC, RL e RLC in corrente alternata. In particolare si vuole studiare la funzione di trasferimento $H(\omega)$. Per far ciò si misurano tensione e differenza di fase dei segnali presi al generatore e nel punto del circuito per cui si vuole trovare la funzione di trasferimento. In questo modo è stato possibile ricavare il modulo e l'argomento della funzione.

Si sono studiate diverse funzioni di trasferimento sui diversi circuiti, tuttavia un problema con le probe dell'oscilloscopio ha portato ad ottenere risultati diversi da quelli aspettati.

1 Introduzione

In questo esperimento, ci concentriamo sullo studio di circuiti elettrici contenenti resistenze (R), condensatori (C) e induttori (L), in particolare sui circuiti RC, RL e RLC.

Un aspetto chiave di questi circuiti è la loro risposta in frequenza, che descrive come il circuito risponde ad un segnale di ingresso di una certa frequenza. Questa risposta in frequenza è spesso descritta in termini di una funzione di trasferimento.

La funzione di trasferimento di un circuito è una funzione complessa di frequenza che descrive il rapporto tra l'ampiezza (e la fase) del segnale di uscita e l'ampiezza (e la fase) del segnale di ingresso. In altre parole, ci dice come il circuito "trasforma" il segnale di ingresso nel segnale di uscita.

Nel contesto dei circuiti RC, RL e RLC, la funzione di trasferimento può essere derivata dalle leggi di Kirchhoff e dalle proprietà dei componenti del circuito. Ad esempio, in un circuito RC, la funzione di trasferimento è determinata dalla resistenza e dalla capacità del circuito, e descrive come il circuito attenua i segnali ad alta frequenza mentre lascia passare i segnali a bassa frequenza.

Nel corso dell'esperimento, misuriamo la tensione e la differenza di fase dei segnali in vari punti del circuito, permettendoci di calcolare il modulo e l'argomento della funzione di trasferimento. Questi dati ci permettono di analizzare in dettaglio le proprietà dei circuiti e di confrontare i risultati sperimentali con le previsioni teoriche.

2 Apparato e metodologia

L'apparato consiste di un circuito RC, RL o RLC, alimentato da un generatore a corrente alternata e da un oscilloscopio con due canali.

La probe del canale 1 (CH1) dell'oscilloscopio viene collegata al circuito subito dopo il generatore e prima di tutti gli altri componenti. La probe del canale 2 (CH2), viene invece collegata subito dopo l'elemento Z che di interesse (capacità, induttanza o resistenza).

Le probe sono costituite da un morsetto principale, quello appunto collegato nel punto di interesse del circuito, ed un altro morsetto, quello collegato allo schermo del cavo coassiale; quest'ultimo morsetto viene collegato al ground del circuito.

Si è inoltre utilizzato il canale MTH, che permette di registrare operazioni semplici tra CH1 e CH2; nel nostro caso si è utilizzato come differenza CH1-CH2.

In questo modo si sono potute determinare le funzioni di trasferimento $V_g \rightarrow V_z$ e $V_g \rightarrow V_{g-z}$, dove V_g è la tensione nel tempo misurata da CH1, mentre V_z è la d.d.p sul componente Z di interesse, che è misurata dal canale *MTH*, infine V_{g-z} viene misurata dal canale *CH2*.

Per poter ricavare le funzioni di trasferimento si sono misurati:

- Le ampiezze delle tensioni in funzione del tempo V_g , V_z , V_{g-z}
- Le differenze di fase $\Delta\phi' = \phi_{MTH} - \phi_{CH1}$ e $\Delta\phi'' = \phi_{CH1} - \phi_{CH2}$

infatti modulo ed argomento delle funzioni di trasferimento di interesse si calcolano come:

$$\begin{aligned} |(H_1(\omega))| &= |V_z/V_g| \\ \arg[H_1(\omega)] &= \Delta\phi' \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |(H_2(\omega))| &= |V_{g-z}/V_g| \\ \arg[H_2(\omega)] &= \Delta\phi'' \end{aligned} \quad (2)$$

2.1 Errori multimetro e frequenza

Per quanto riguarda i valori di resistenza e capacità delle componenti, questi sono stati misurati con un multimetro; come errore a queste grandezze si è associato l'intervallo di oscillazione dei valori letti sullo strumento. Nel caso in cui il valore risultava stabile si è utilizzata invece l'incertezza dello strumento come valore per l'errore.

In maniera analoga l'errore sulla frequenza impostata sul generatore è stato preso come l'intervallo di oscillazione del valore visualizzato.

3 Presa dati

Si sono registrati i dati dell'oscilloscopio (tutti e tre i canali)¹. La funzionalità di salvataggio non fornisce errori sui punti, i quali sono inoltre molto dispersi per via della natura discreta dello strumento e per la sua soggezione al rumore nel segnale (Figura [1]).

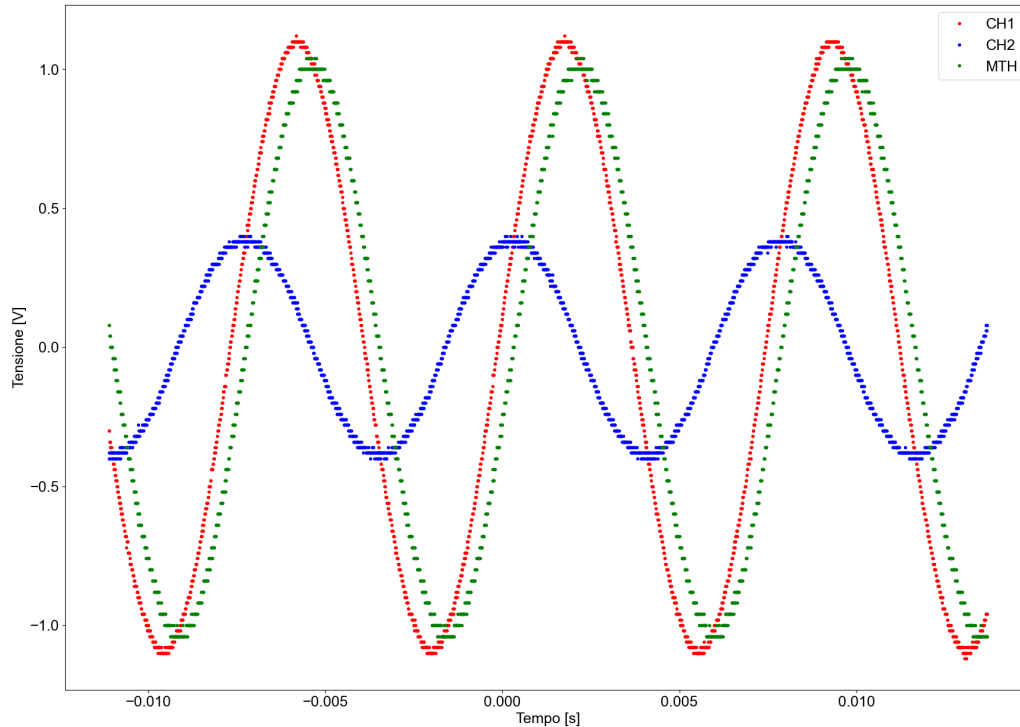


Figura 1. *Esempio di dati presi dall'oscilloscopio: i dati grezzi salvati dallo strumento presentano rumore ed inoltre non hanno un errore associato.*

¹Tutti i dati si possono trovare su Github: https://github.com/GiovanniLag/laboratorio_2/tree/main/circuiti_3/data

Si è dunque ideata una metodologia appropriata per ottenere dati più uniformi con errori associati (Figura [2]).

Si è diviso l'asse temporale in bin contenenti un egual numero di punti per ogni intervallo, per ciascun bin si è identificato un punto, prendendo il valore del tempo come la media dei tempi nell'intervallo e la tensione come la media delle tensioni. L'errore è stato preso come la deviazione standard (sia sul tempo che sulla d.d.p).

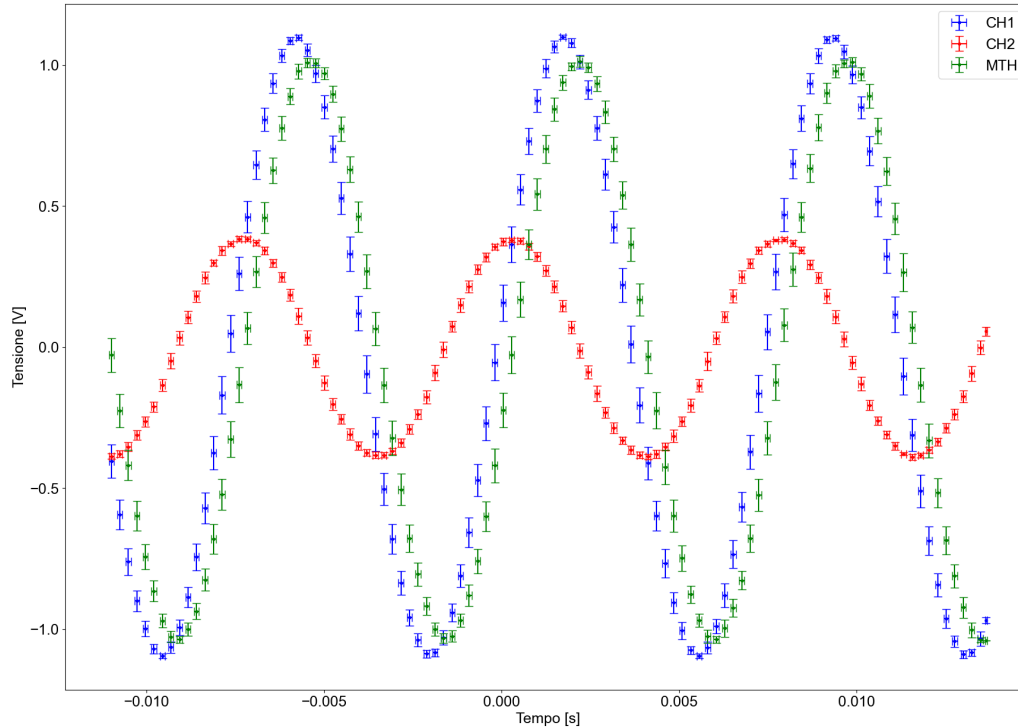


Figura 2. *Esempio di dati lavorati: i dati grezzi vengono divisi in "cluster" di cui si prendono valore medio e come errore la deviazione standard.*

NOTA: essendo gli errori le radici delle varianze di distribuzioni normali è possibile testare la bontà del fit mediante il test del chi quadro.

3.1 Ampiezze

Per ricavare le ampiezze si sono presi i valori assoluti della tensione ai massimi e minimi del segnale dopo il clustering e si è fatta una media. L'errore è stato preso come la deviazione standard.

Per ottenere i punti di massimo e minimo si è utilizzato il seguente algoritmo:

```
 $M_i \leftarrow$  indice massimo globale
if  $t_{M_i} - t_{-1} < T/4$  then
    start-index =  $M_i + T/4$ 
else
    start-index =  $M_i - T/4$ 
end if
Dividi segnale in  $T/2$  a destra (right-cuts)
Dividi segnale in  $T/2$  a sinistra (left-cuts)
Unisci i cuts  $\rightarrow$  cuts
maxes = []
mins = []
for c in cuts do
    max  $\leftarrow$  massimo nel cut c
    min  $\leftarrow$  minimo nel cut c
    if  $|max| > |min|$  then
        Aggiungi max a maxes
    else
        Aggiungi min a mins
    end if
end for
abs-peaks  $\leftarrow$  unione maxes e mins
A = media(abs-peaks)
 $\sigma_A$  = std(abs-peaks)
```

3.2 Fase

Per misurare le differenze di fase si sono pensati due approcci:

- Fittare i segnali con una funzione del tipo $A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ e trovare dunque la fase ϕ .
- Trasformare i segnali mediante trasformata di Hilbert e ricavare la fase come $\text{angolo}\{H_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot [(H_1 \cdot \bar{H}_1)(H_2 \cdot \bar{H}_2)]^{-1/2}\}$. Con H_1, H_2 i segnali trasformati.

3.2.1 Metodo dei fit

Questo primo metodo è piuttosto semplice. Si esegue il fit dei dati (dopo il clustering) da cui si ricava la fase, con relativo errore (errore sul parametro); dopo di che si computa la differenza delle fasi. Per eseguire il fit si sono utilizzati come parametri iniziali: $\omega = 2\pi\nu$, dove ν è la frequenza, $A = \frac{1}{2} \cdot \max(V) - \min(V)$, con V tensione registrata e per ϕ si è campionato lo spazio tra 0 e π .

Infatti per ottenere un fit migliore si sono eseguiti più fit, variando di volta in volta il valore iniziale di ϕ . Si è poi scelto il fit con il minor χ^2 .

Benché semplice questo metodo presenta alcuni problemi. Innanzitutto la lentezza di esecuzione, in quanto per ottenere un buon risultato occorre eseguire il fit molte volte (≈ 5000) e nonostante l'elevato numero di iterazioni non si è ottenuto un buon fit per alcuni dati.²

Inoltre, per segnali che dovrebbero avere fasi vicine π (visibile dal grafico) sembrerebbe che lì converga invece più facilmente (cioè con un miglior χ^2) a valori di ϕ negativi.

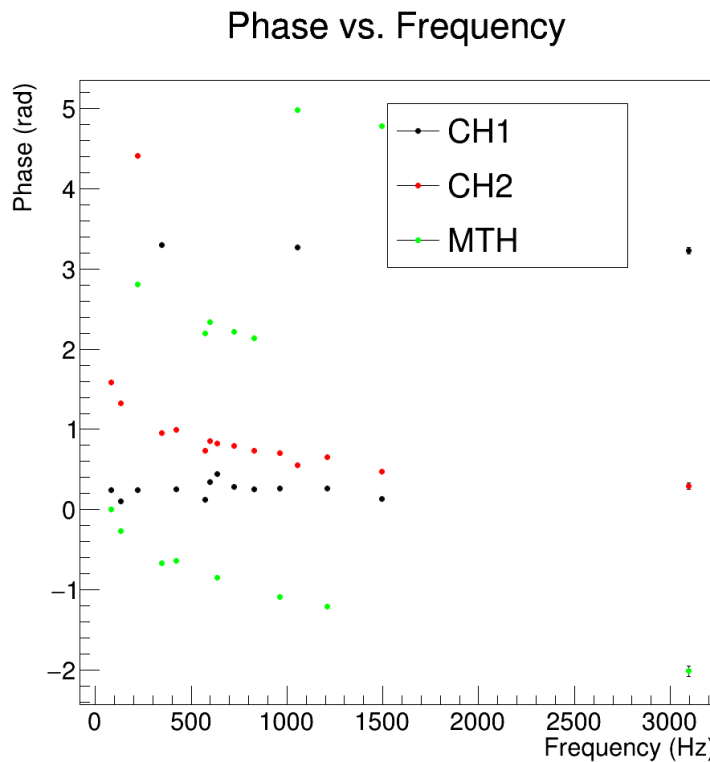


Figura 3. Fasi ottenute con i fit: si sono fittati i segnali sinusoidali (elaborati) per trovarne la fase. L'idea era quella di ottenere le fasi per ciascun canale e poi farne la differenza.

²È molto probabile che con un metodo migliore per fare ipotesi iniziali sui parametri, i fit convergerebbero molto meglio e con meno iterazioni. Tuttavia si è preferito utilizzare il secondo metodo, dunque non si è indagato ulteriormente sui fit.

3.2.2 Metodo Hilbert cross correlation

Questo metodo consiste nella computazione del cross correlation coefficient, c , delle trasformate di hilbert dei due segnali dei quali si vuole trovare la differenza di fase. C si calcola come:

$$c = \frac{H_1 \cdot \bar{H}_2}{\sqrt{(H_1 \cdot \bar{H}_1)(H_2 \cdot \bar{H}_2)}}$$

Dopo di che da c si trova la differenza di fase semplicemente come l'angolo che lo identifica sulla circonferenza unitaria nel piano complesso.

Questo metodo risulta computazionalmente più efficiente ed accurato (ad un analisi qualitativa). Tuttavia ha uno svantaggio, ovvero che l'errore non è facilmente ottenibile. Infatti, il calcolo della propagazione dell'errore sul coefficiente di correlazione si rivela essere un compito non facile.

Si è optato dunque per stimare l'errore tramite il metodo monte carlo. Si sono generati diversi possibili segnali (a partire dal segnale elaborato, ovvero dopo il "clustering"), ciascuno con diversi possibili valori di ciascun punto, campionati secondo una distribuzione normale con $\mu = V_i$ e $\sigma = \sigma_{V_i}$ (dove V_i rappresenta il valore della tensione del i -esimo punto del segnale); si è poi calcolata la differenza di fase per ciascuna coppia di segnali. Infine si è studiata la distribuzione dei risultati prendendo il nostro valore come media \pm deviazione standard di tale distribuzione.

4 Analisi dati

Una volta ottenuti i dati necessari per calcolare il modulo e l'argomento della funzione di trasferimento, ovvero le tensioni di picco e le differenze di fase, abbiamo calcolato tali valori per ogni caso (RC, RL, RLC) e abbiamo fittato tali set di dati con le funzioni appropriate.

I fit sono stati eseguiti con ROOT e si è utilizzato un algoritmo che ripete il fit 100 volte partendo con parametri in un range del 10% dei parametri iniziali impostati e sceglie il fit con il miglior χ^2 .

4.1 RC

Per il circuito RC si è utilizzata una resistenza $R = (9.9 \pm 0.1)\Omega$ e una capacità $C = (47 \pm 1)nF$. Si sono esplorate frequenze nel range $50Hz - 3000Hz$, con un errore sulla frequenza di $10Hz$.

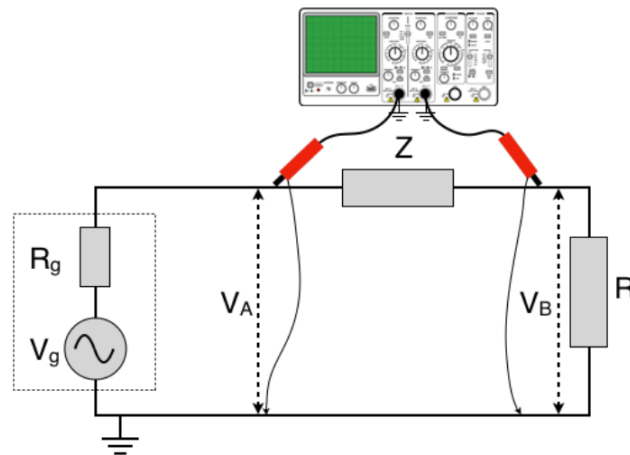


Figura 4. Struttura circuito RC ed RL: la componente Z , che rappresenta appunto C o L , è messa in serie con una resistenza R .

Modulo e argomento della funzione di trasferimento risultano:

$$|H_1(\omega)| = |V_C/V_g| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \nu^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \nu^2 \tau^2}}$$

$$\arg(H_1) = \Delta\phi' = \arctan(2\pi\nu RC) = \arctan(2\pi\nu\tau)$$

$$|H_2(\omega)| = |V_{g-C}/V_g| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{2\pi\nu RC}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \nu^2 R^2 C^2}} = \frac{2\pi\nu\tau}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \nu^2 \tau^2}}$$

$$\arg(H_2) = \Delta\phi'' = \frac{\pi}{2} - \arctan(2\pi\nu RC) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2\pi\nu\tau)$$

Di seguito i risultati dei fit, dove si è utilizzato come parametro iniziale $\tau = RC$, dove R e C sono stati misurati con il multimetro:

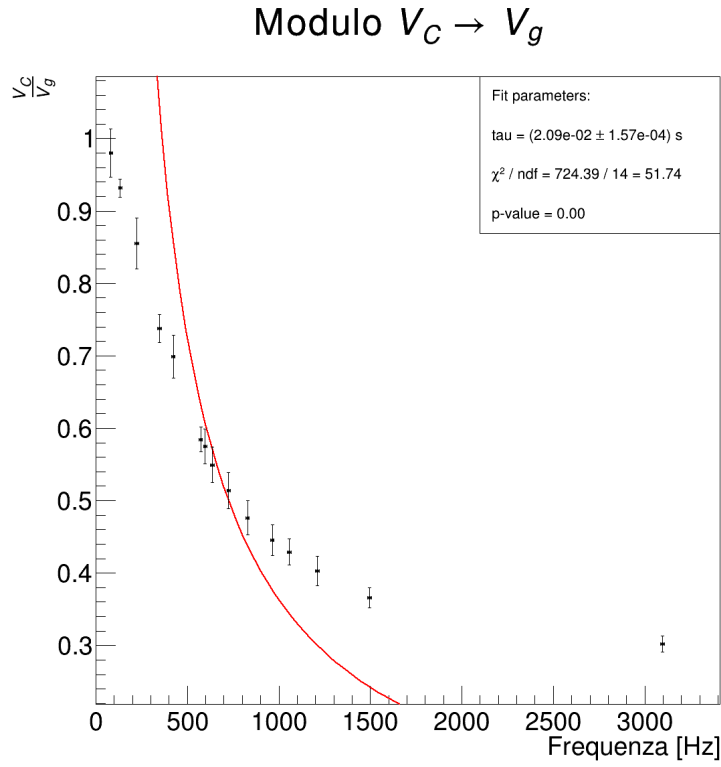


Figura 5. *Fit* $|H_1(\nu)|$

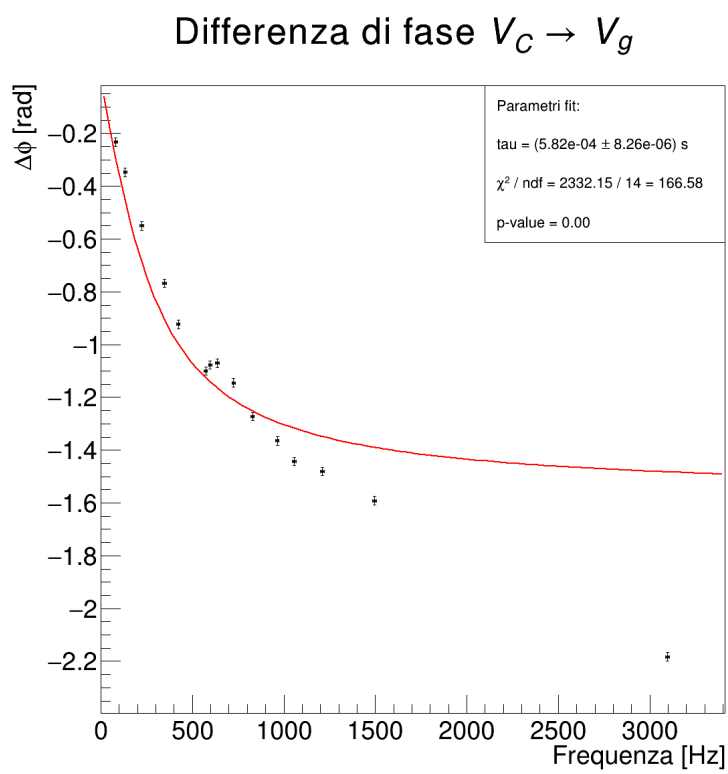


Figura 6. *Fit* $\arg(H_1(\nu))$

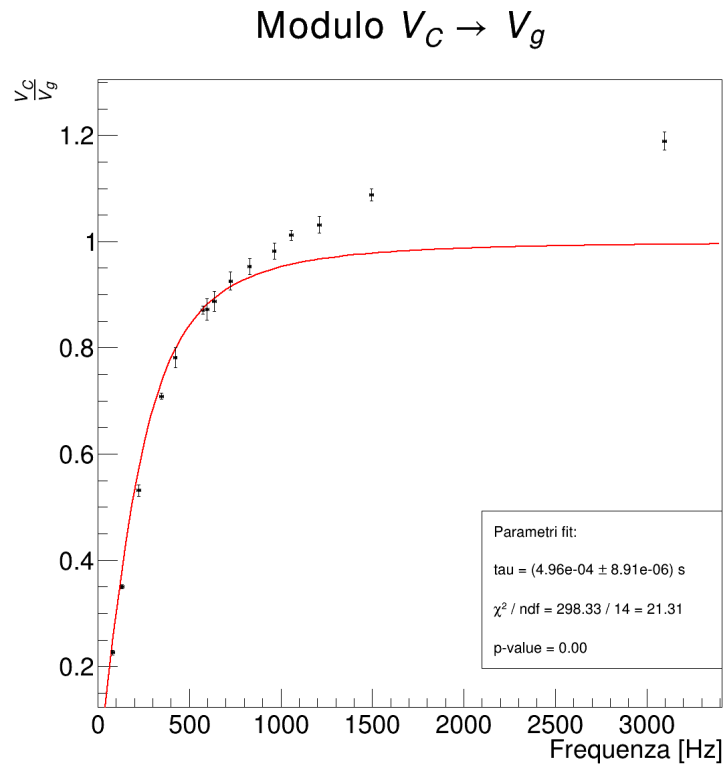


Figura 7. *Fit* $|H_2(\nu)|$

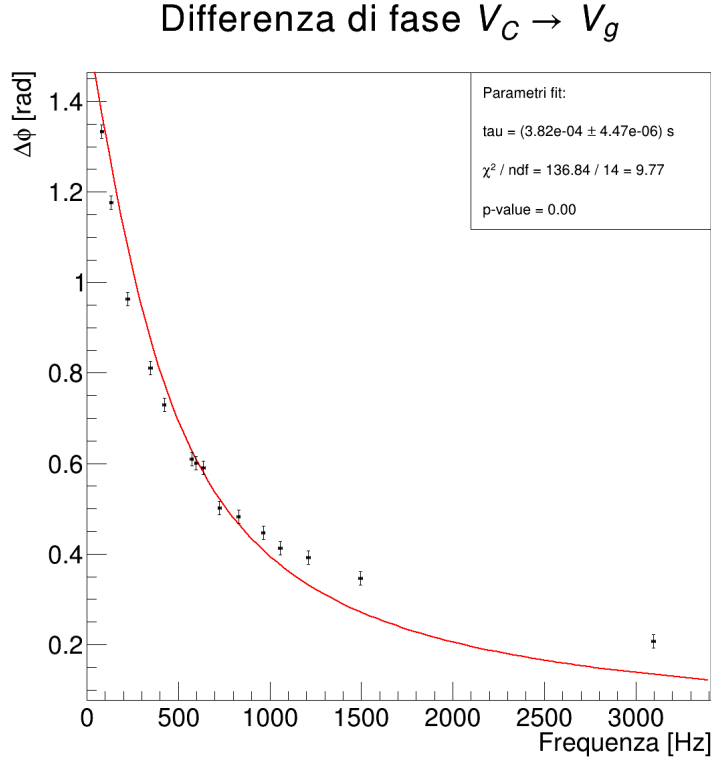


Figura 8. *Fit* $\arg(H_2(\nu))$

4.1.1 Discussione risultati dei fit

È evidente che l'adattamento non sia buono, ma era atteso poiché possiamo vedere (soprattutto in Figura [6]) che le differenze di fase vanno oltre $\pi/2$, cioè superano l'asintoto orizzontale della funzione teorica.

Si noti che il fatto che R e C convergano a valori negativi implica semplicemente che l'algoritmo di fit ha raggiunto un punto di convergenza nell'asse negativo per entrambi i parametri, che dovrebbe essere simmetrico rispetto al positivo poiché nella funzione R e C si trovano sempre moltiplicati l'uno per l'altro.

Inoltre i parametri ricavati sono molto lontani da quelli calcolati a partire dai valori misurati con il multimetro, si sono allora plottate le funzioni teoriche usando i valori del multimetro (Figure [9] e [10]) e si nota che i dati sperimentali si scostano dalle funzioni teoriche, in particolare per valori con frequenze che superano la frequenza di cutoff ($1/(2\pi\nu RC)$), come si può osservare anche in Figura [9] ed in Figura [10]).

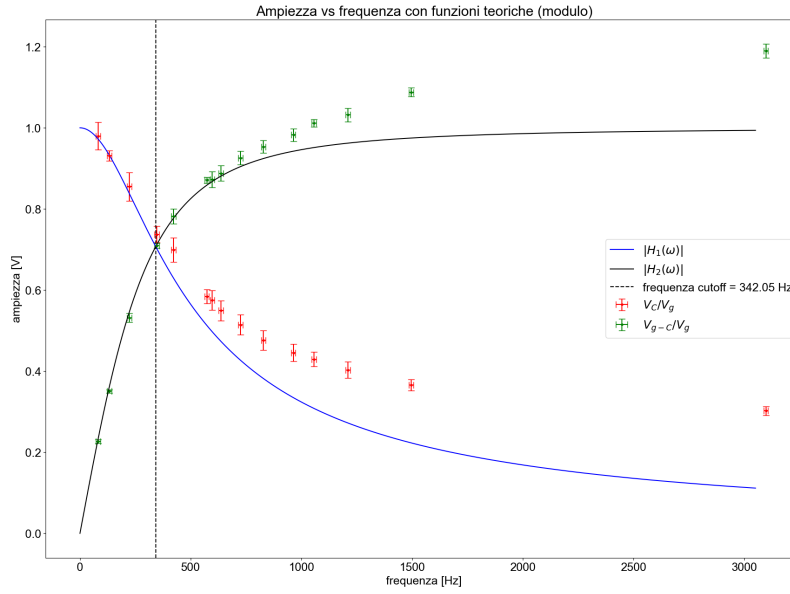


Figura 9. *Confronto con funzioni teoriche modulo di H_1 e H_2 : si sono confrontati qualitativamente i dati sperimentali con i moduli delle funzioni di trasferimento teoriche, ovvero ricavate con i valori di R e C misurati con il multimetro.*

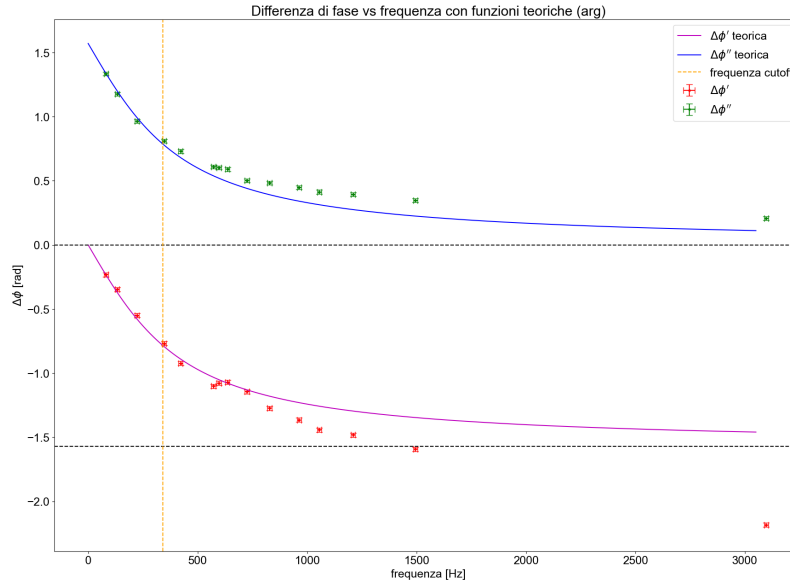


Figura 10. *Confronto con funzioni teoriche argomento di H_1 e H_2 : si sono confrontati qualitativamente i dati sperimentali con gli argomenti delle funzioni di trasferimento teoriche, ovvero ricavate con i valori di R e C misurati con il multimetro.*

4.2 RL

Per il circuito RL si è utilizzato un circuito del tutto analogo a quello del caso RC (Figura [4]), ma con un induttanza al posto del condensatore. Si sono utilizzate una resistenza $R = (9.9 \pm 0.1)\Omega$ e una induttanza di cui non si conosce il valore. Si sono esplorate frequenze nel range $10kHz - 80kHz$, con un errore sulla frequenza di $100Hz$.

Modulo e argomento della funzione di trasferimento risultano:

$$|H_1(\omega)| = |V_L/V_g| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{2\pi\nu L}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}} = \frac{2\pi\nu}{\sqrt{\tau^{-2} + 4\pi^2\nu^2}}$$

$$\arg(H_1) = \Delta\phi' = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2\pi\nu L}{R}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2\pi\nu\tau)$$

$$|H_2(\omega)| = |V_{g-L}/V_g| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}} = \frac{\tau^{-1}}{\sqrt{\tau^{-2} + 4\pi^2\nu^2}}$$

$$\arg(H_2) = \Delta\phi'' = \arctan\left(\frac{2\pi\nu L}{R}\right) = \arctan(2\pi\nu\tau)$$

Di seguito i risultati dei fit, dove si è utilizzato come parametro iniziale $\tau = \frac{L}{R}$; per ricavare un valore iniziale di questo parametro si è sottoposto il circuito ad una corrente a onde quadrate e si è registrata la fase di carica dell'induttore, fittandola con la legge della carica di tale tipologia di circuito, si è potuto ottenere un valore iniziale di $\tau = 6.17 \cdot 10^{-6}$:

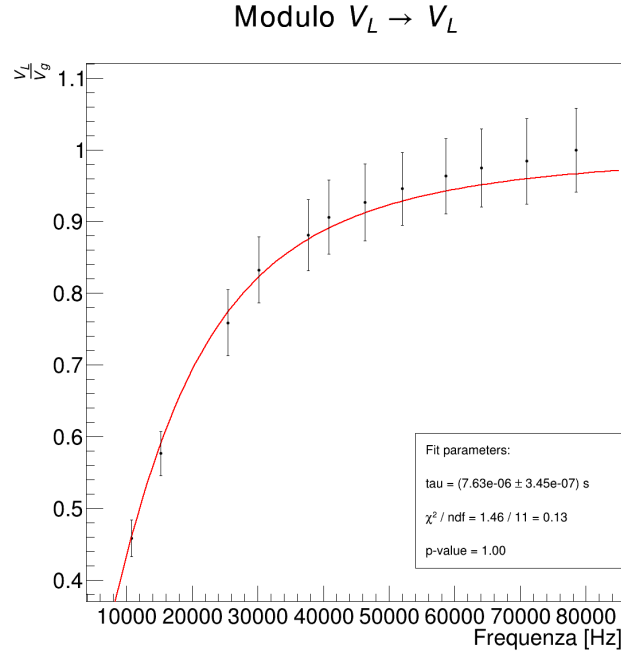


Figura 11. *Fit $|H_1(\nu)|$*

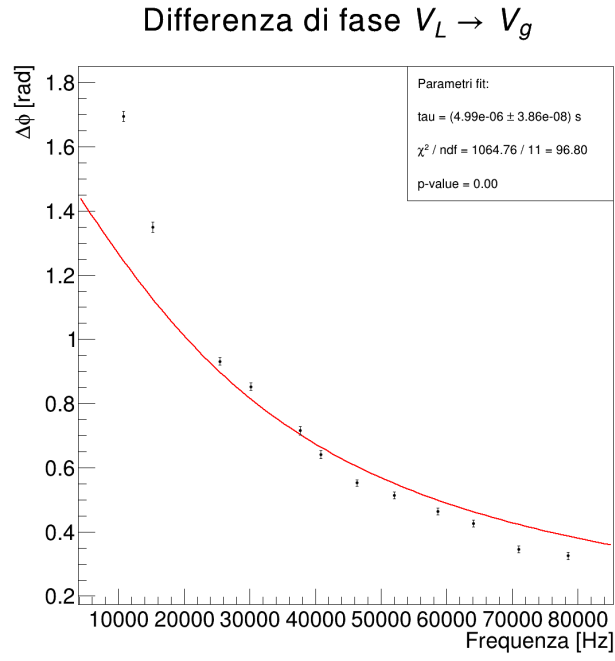


Figura 12. $Fit \arg(H_1(\nu))$

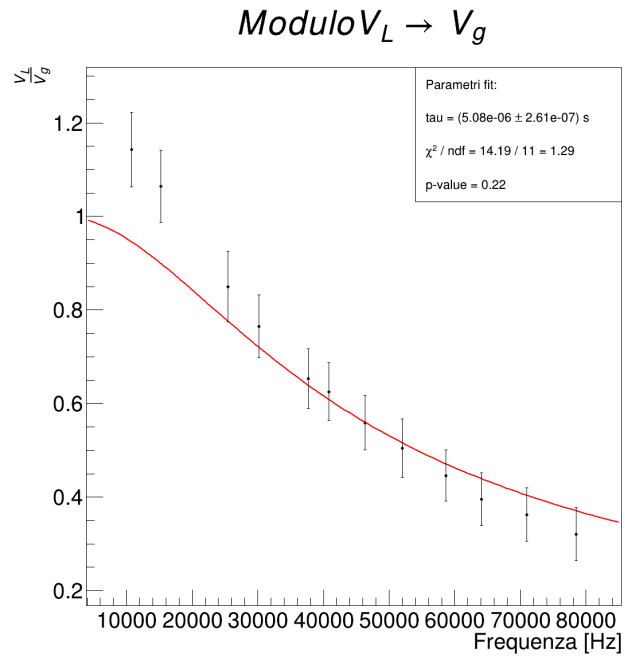


Figura 13. $Fit |H_2(\nu)|$

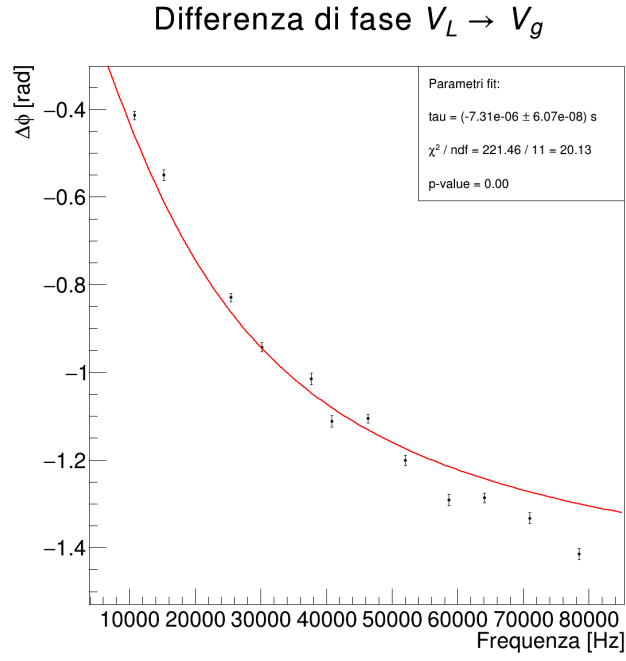


Figura 14. *Fit $\arg(H_2(\nu))$*

4.2.1 Discussione risultati dei fit

In questo caso si ottengono dei fit migliori, tuttavia non risultano lo stesso accettabili (con una soglia del 1%) per i fit sugli argomenti delle funzioni di trasferimento (Figure [12] e [14]). Mentre risultano accettabili, anche con una soglia del 5%, per i fit sui moduli (Figure [11] e [13]).

Si può osservare comunque qualitativamente il trend dei dati a deviare dalla funzione di trasferimento.

4.3 RLC

Per il circuito RLC si sono utilizzati gli stessi componenti dei due punti precedenti ($R = (9.9 \pm 0.1)k\Omega$ e $C = (47 \pm 1)nF$).

Si sono costruite tre differenti configurazioni del circuito, cambiando ogni volta l'ultimo componente, ovvero quello su cui si misura la tensione sul canale 2 dell'oscilloscopio.

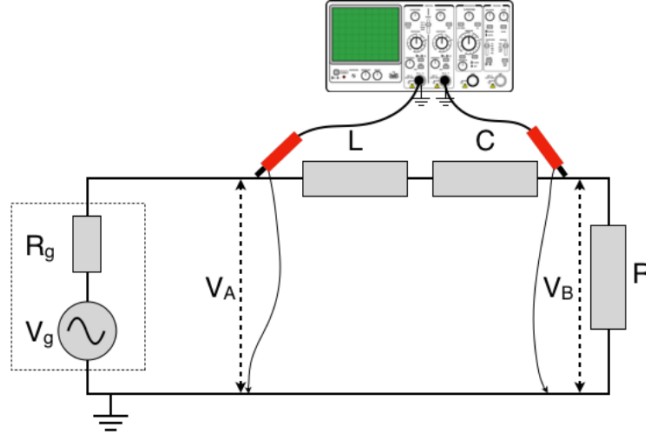


Figura 15. *Struttura circuito RLC*

Si è quindi ricavata la funzione di trasferimento per ciascun caso e si sono effettuati i fit come in precedenza. In questo caso si è guardata solo la funzione di trasferimento $V_g \rightarrow V_Z$; quindi si è guardato solamente il canale MTH.

Si noti che il range di frequenze esplorate varia di caso in caso.

I dati sono stati fittati utilizzando come parametri iniziali i valori di R e C misurati con il multimetro, mentre per il valore di L è stato stimato utilizzando un circuito RL (stessa resistenza utilizzata nel circuito RLC di interesse) sottoposto ad una corrente ad onda quadra e ricavando il valore dell'induttanza dal fit della fase di carica con la curva esponenziale caratteristica.

Si noti inoltre che nelle relazioni seguenti si utilizza ω ma le misure effettuate sono sulla frequenza, si sono quindi calcolati i valori di $\omega = 2\pi\nu$ prima di effettuare il fit. Infine nonostante le funzioni siano plottate su tutto l'asse delle ascisse l'unica parte di interesse è quella per $\nu > 0$.

4.3.1 Ultimo componente R

Le equazioni per modulo ed argomento della funzione di trasferimento sono:

$$|H_R(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\arg(H_R(\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Risultati del fit, per le frequenze si è utilizzato un errore di 500 Hz :

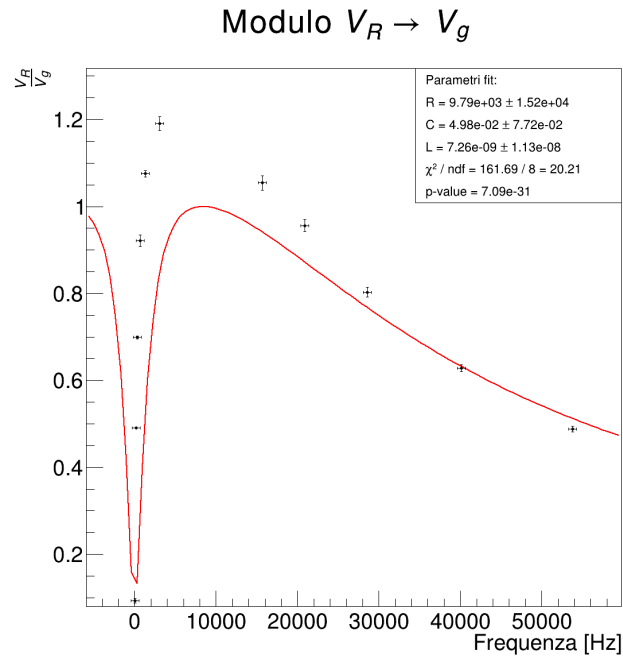


Figura 16. *Fit modulo della funzione di trasferimento con ultimo componente R.*

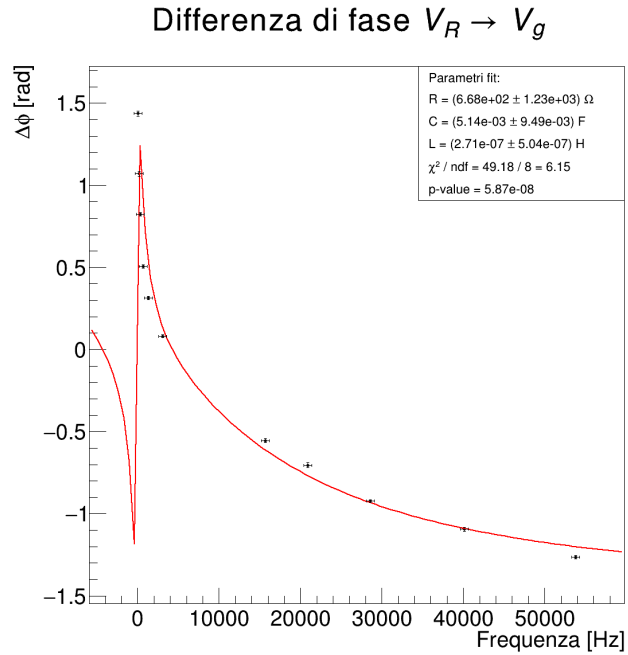


Figura 17. *Fit argomento della funzione di trasferimento con ultimo componente R.*

4.3.2 Ultimo componente C

Le equazioni per modulo ed argomento della funzione di trasferimento sono:

$$|H_C(\omega)| = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\arg(H_C(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right)$$

Risultati del fit, per le frequenze si è utilizzato un errore di 100 Hz:

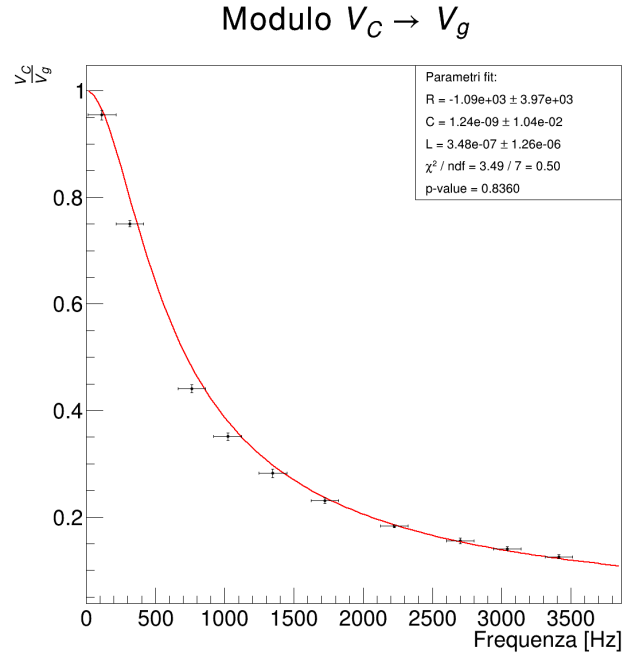


Figura 18. *Fit modulo della funzione di trasferimento con ultimo componente C.*

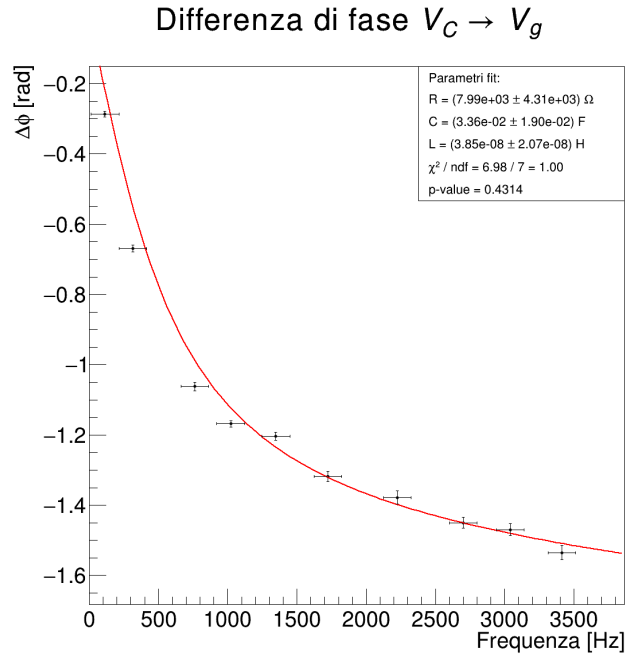


Figura 19. *Fit argomento della funzione di trasferimento con ultimo componente C.*

4.3.3 Ultimo componente L

Le equazioni per modulo ed argomento della funzione di trasferimento sono:

$$|H_L(\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\arg(H_L(\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right)$$

Risultati del fit, per le frequenze si è utilizzato un errore di 100 Hz:

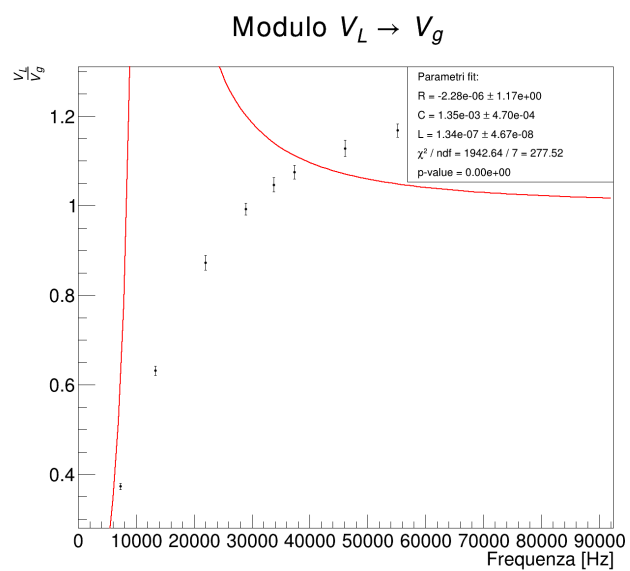


Figura 20. *Fit modulo della funzione di trasferimento con ultimo componente L .*

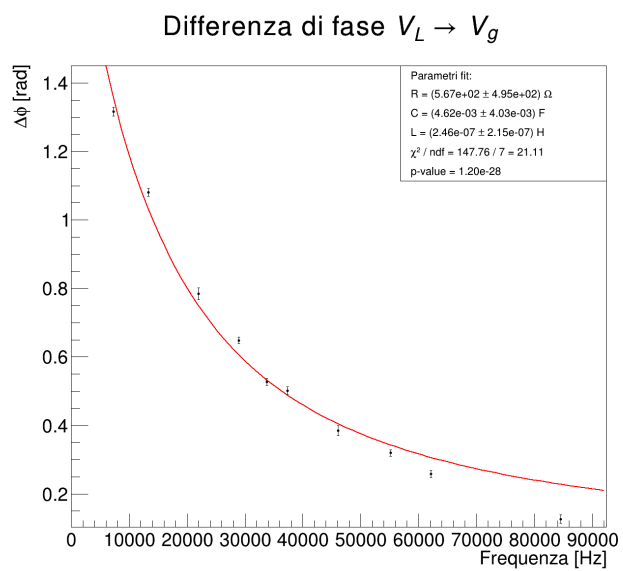


Figura 21. *Fit argomento della funzione di trasferimento con ultimo componente L .*

4.3.4 Discussione risultati

Nonostante alcuni dei fit sembrino buoni dal valore dei p-value ottenuti (Figure [19 - 18]) si osserva che i valori dei parametri trovati sono completamente diversi da quelli misurati con il multimetro, nonché associati ad un errore dello stesso ordine di grandezza o addirittura superiore del valore stesso.

Inoltre ci si aspetterebbero delle risposte in ampiezza rispetto alla frequenza completamente diverse da quelle osservate, ciò è evidente soprattutto per i moduli delle funzioni di trasferimento. Di seguito sono rappresentate in un grafico le funzioni attese utilizzando come valori per R, L e C quelli utilizzati come parametri iniziali per i fit.

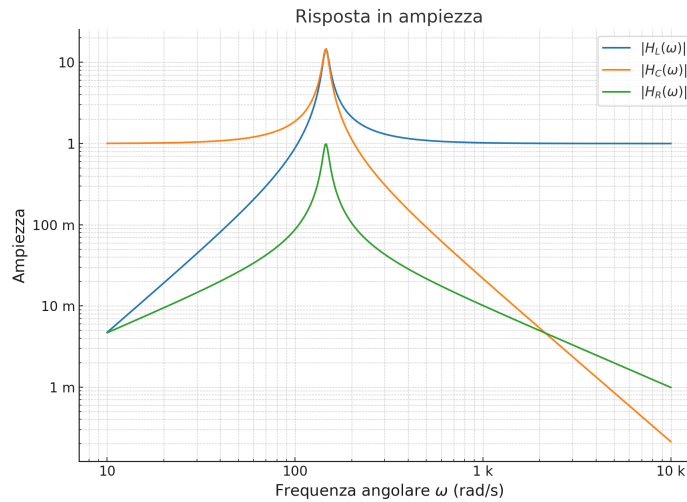


Figura 22. *Risposta in ampiezza rispetto alla frequenza: sono plot-tati i moduli delle tre funzioni di trasferimento attese per il circuito RLC in funzione della frequenza angolare.*

5 Conclusioni

Purtroppo tutto l'esperimento è affetto da una discrepanza tra i dati sperimentali e le funzioni teoriche. Questo è probabilmente spiegabile dal fatto che le probe utilizzate non fossero compatibili con l'oscilloscopio in uso, aggiungendo così un elemento non trascurabile al circuito. Questa particolarità si evidenzia soprattutto nei circuiti RC ed RL (Figure [9 - 10 - 11]), dove i dati misurati non solo non seguono gli asintoti delle funzioni teoriche, ma li superano significativamente, indicando chiaramente l'influenza di questo "elemento extra" nel sistema.

Inoltre per il circuito RLC si sono ottenute delle risposte in ampiezza rispetto alla frequenza che sono completamente diverse da quanto atteso (Figura [22]) e provando a fittare si sono trovati valori insensati per le componenti R, L e C.

I risultati dei fit non forniscono quindi alcuna informazione significativa se non appunto quella di indirizzarci a pensare che le probe costituiscano un'altra componente del circuito non trascurabile. Si potrebbe provare a formulare delle ipotesi su questa componente e provare a ricavare le funzioni di trasferimento tenendo conto di questa.