

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE
DIPARTIMENTO DI FISICA “ALDO PONTREMOLI”



Corso di Laurea Triennale in Fisica

**Incertezze nella parametrizzazione del protone
e determinazione dei parametri della
lagrangiana del Modello Standard**

Relatore
Prof. Alessandro Vicini

Candidato
Giovanni Maglio
Matricola 13666A

Anno Accademico 2024–2025

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE
DIPARTIMENTO DI FISICA “ALDO PONTREMOLI”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

**Incertezze nella parametrizzazione del protone
e determinazione dei parametri della
lagrangiana del Modello Standard**

Candidato: Giovanni Maglio (*Matricola 13666A*)

Relatore: Prof. Alessandro Vicini

Firma del Relatore

Firma del Candidato

Luogo: _____

Data: _____

Anno Accademico 2024–2025

Sommario

La comprensione della struttura interna del protone rappresenta un elemento chiave nello studio dei processi di scattering ad alte energie e nella verifica di precisione del Modello Standard. Le misure effettuate negli esperimenti ai collisori adronici sono tuttavia soggette a diverse fonti di incertezza — sia di natura sperimentale sia teorica — che possono influenzare la determinazione dei parametri fondamentali del modello. Tra queste, un ruolo particolarmente rilevante è svolto dalle *funzioni di distribuzione partoniche* (PDF), che descrivono la struttura del protone e costituiscono l'ingrediente teorico essenziale per la previsione dei processi di scattering.

In questa tesi si analizzano le *incertezze associate alla parametrizzazione del protone* e il modo in cui esse si propagano nella *determinazione dei parametri elettrodeboli* della lagrangiana del Modello Standard, con particolare attenzione ai processi di *Drell–Yan* a corrente neutra. L’obiettivo è sviluppare e testare un **metodo solido e quantitativo** per stimare l’impatto delle incertezze teoriche legate alle PDF nella misura di parametri quali la massa del bosone W e il seno dell’angolo di mixing debole.

Attraverso una variazione controllata e simultanea di tali parametri vengono esaminate le modifiche indotte sulle osservabili più sensibili e sulle loro combinazioni, valutando le regioni di massima compatibilità tra dati e teoria mediante un’analisi statistica basata sul metodo del χ^2 .

I risultati ottenuti evidenziano le *correlazioni* tra i parametri elettrodeboli e le *differenti sensibilità* delle osservabili considerate, mostrando come una conoscenza accurata della struttura del protone sia indispensabile per misure di precisione e per esplorare, con crescente sensibilità, eventuali deviazioni dalle previsioni del Modello Standard nelle collisioni protone–protone.

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Dalla nascita del Modello Standard agli acceleratori moderni	
1.2	La struttura del protone e le PDF	
1.3	Processi di Drell–Yan a corrente neutra	
1.4	Parametri elettrodeboli e lagrangiana	
2	Simulazioni degli scontri adronici	13
2.1	Generatore Monte Carlo POWHEG	
2.2	Esecuzione sul cluster Galileo	
3	Analisi e metodologia	19
3.1	Quadro generale e strategia di analisi	
3.2	Il test del χ^2	
3.2.1	Il caso specifico della nostra analisi	
3.2.2	Gradi di libertà e interpretazione statistica	
3.3	Trattamento statistico dei dati	
3.3.1	Costruzione della matrice di covarianza	
3.3.2	Calcolo del χ^2 tramite inversione della matrice di covarianza	
3.3.3	Implementazione del calcolo del χ^2	
3.3.4	Studio della stabilità del χ^2 in base alla tolleranza scelta	
3.3.5	Valutazione numerica della stabilità del χ^2	
3.3.6	Calcolo diretto del χ^2 tramite risoluzione di un sistema lineare	
3.4	Conclusioni della parte di analisi	
4	Risultati e loro interpretazione fisica	41
4.1	Introduzione	
4.2	Massa invariante del sistema leptónico	
4.3	Momento trasverso del primo leptone	
4.4	Asimmetria avanti–indietro	
4.5	Pseudorapidità del primo leptone	
4.6	Fit combinato delle osservabili	
5	Conclusioni e prospettive	63
Bibliografia		65

Introduzione

Da sempre l'uomo tenta di scomporre la complessità del mondo in elementi più semplici, spinto dall'idea che dietro l'apparente varietà dei fenomeni si cela un ordine profondo e universale. Questo impulso conoscitivo, che affonda le sue radici nella filosofia naturale, ha trovato nel XX secolo la sua piena realizzazione nella fisica delle particelle: una disciplina capace di descrivere la materia non come un insieme di corpi, ma come un intreccio di campi e interazioni.

La costruzione del *Modello Standard* rappresenta una delle più grandi conquiste intellettuali della scienza moderna, una teoria unificata delle forze elettromagnetiche, deboli e forti, in grado di spiegare con straordinaria coerenza la quasi totalità dei fenomeni osservabili. Oggi, grazie ai progressi tecnologici e alla potenza analitica degli esperimenti condotti al CERN, la verifica di questo modello ha raggiunto livelli di precisione senza precedenti: misure e predizioni teoriche coincidono entro margini estremamente ridotti, ponendo limiti sempre più stringenti a ogni possibile deviazione dalla teoria.

Il *Large Hadron Collider* (LHC), il più grande acceleratore di particelle mai costruito, costituisce il punto d'arrivo di questo percorso. Le collisioni tra protoni a energie dell'ordine dei tera-elettronvolt permettono di sondare la struttura più intima della materia, dove le interazioni tra quark e gluoni si manifestano nella loro forma più pura. In tale contesto, comprendere con precisione la composizione del protone e le incertezze legate alla sua descrizione è essenziale per estrarre dai dati sperimentali informazioni affidabili sui parametri fondamentali della lagrangiana elettrodebole.

Il presente lavoro si inserisce in questo percorso di ricerca, con l'obiettivo di comprendere in che modo le incertezze nella descrizione del protone influenzino la determinazione dei parametri elettrodeboli, spingendo i limiti della conoscenza attuale, aprendo nuove prospettive di precisione e, forse, di nuova fisica.

1.1 Dalla nascita del Modello Standard agli acceleratori moderni

Dagli esperimenti storici agli urti adronici

La storia della fisica delle particelle è, prima di tutto, una storia di esperimenti. Ogni progresso nella comprensione della materia è stato guidato da osservazioni sempre più precise, che hanno costretto la teoria a riformularsi in forme via via più fondamentali. L'idea di un mondo composto da elementi indivisibili, formulata già in epoca classica, trovò la sua prima conferma concreta alla fine dell'Ottocento, quando *J. J. Thomson* scoprì l'elettrone attraverso l'analisi dei raggi catodici [1]. Per la prima volta, la materia si rivelava composta da costituenti più piccoli dell'atomo.

Pochi anni più tardi, l'esperimento di *E. Rutherford* sulla diffusione di particelle α attraverso sottili lame d'oro [2] mostrò che la quasi totalità della massa atomica è concentrata in un nucleo centrale estremamente compatto. Quel risultato, apparentemente anomalo, cambiò radicalmente la concezione dell'atomo e segnò l'inizio della fisica nucleare. Le successive analisi di *J. Chadwick*, che nel 1932 identificò il neutrone [3], completarono il quadro della struttura nucleare e aprirono la via allo studio sistematico delle interazioni tra particelle subnucleari.

La rapida evoluzione tecnologica degli anni Trenta portò alla costruzione dei primi acceleratori di particelle, come il generatore di Van de Graaff e il ciclotrone di *E. Lawrence* [4], che permisero di indagare la materia a energie sempre più elevate. Gli esperimenti di collisione rivelarono un mondo di particelle fino ad allora sconosciute — mesoni, barioni e risonanze di vario tipo — osservate sia nei raggi cosmici sia negli acceleratori terrestri. Nacque così quello che venne definito lo “zoo delle particelle”, un insieme caotico di stati che metteva in crisi le prime teorie nucleari e richiedeva una classificazione più profonda.

Fu proprio l'analisi sperimentale delle sezioni d'urto e dei decadimenti a fornire, negli anni Sessanta, gli indizi decisivi per la formulazione del modello a quark. Gli esperimenti di diffusione elettron–protone condotti allo *Stanford Linear Accelerator Center (SLAC)* nel 1968 mostrarono una struttura interna del protone compatibile con l'esistenza di costituenti puntiformi [5].

Gli esperimenti di diffusione profonda condotti allo SLAC segnarono una svolta epocale: per la prima volta, le collisioni tra elettroni e protoni permisero di “vedere” all'interno del protone. A differenza della diffusione elastica, in cui il protone rimane integro, nello **scattering inelastico profondo** (Deep Inelastic Scattering, DIS) l'elettrone trasferisce al protone una quantità di energia sufficiente a romperlo nei suoi costituenti interni.

L'andamento delle sezioni d'urto misurate mostrò un comportamento sorprendente: invece di diminuire rapidamente con l'aumentare della scala di energia, esse tendevano a un valore quasi costante, un fenomeno noto come *scaling di Bjorken*. Questo risultato suggeriva che, all'interno del protone, l'urto avvenisse contro entità puntiformi praticamente libere, che furono poi identificate con i *quark*.

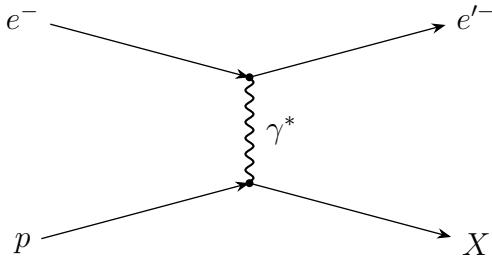


Figura 1.1: Diagramma schematico del processo di diffusione inelastica profonda (*Deep Inelastic Scattering*). Un elettrone e^- con momento iniziale interagisce con un protone p tramite lo scambio di un fotone virtuale γ^* , producendo un elettrone diffuso e'^- e uno stato adronico finale X .

Queste scoperte aprirono la strada alla comprensione moderna della struttura adronica. L'elettrone, particella elementare e ben descritta dalla teoria elettrodinamica quantistica (QED), divenne il proiettile ideale per saggiare la distribuzione dei costituenti del protone in funzione della frazione di momento longitudinale che essi trasportano. I dati sperimentali fornirono così la prima evidenza diretta dell'esistenza dei quark, e successivamente, con lo sviluppo della cromodinamica quantistica (QCD), vennero interpretati come prova dell'interazione mediata dai gluoni.

L'universalità della descrizione del protone permise di usare quanto misurato nel DIS per predirre le collisioni adrone-adrone. Questi urti, più complessi da descrivere ma capaci di raggiungere energie nel centro di massa molto superiori, permisero di esplorare processi dominati dalle interazioni forti e di investigare la dinamica dei quark e dei gluoni in un regime completamente nuovo.

L'evoluzione tecnologica degli acceleratori rese possibile la costruzione dei primi collisionatori adronici: dal CERN Intersecting Storage Rings (ISR) negli anni Settanta, fino al Tevatron del Fermilab, che portò alla scoperta del quark top nel 1995. Questa progressione culmina con il **Large Hadron Collider** (LHC), dove le collisioni protone–protone a energie dell'ordine dei 14 TeV consentono oggi di testare con precisione senza precedenti la struttura del protone e le previsioni del Modello Standard.

Perché i protoni e il Large Hadron Collider

L'evoluzione della fisica sperimentale delle alte energie ha portato, nel corso degli ultimi decenni, a una transizione naturale dagli esperimenti a bersaglio fisso ai grandi collisionatori. Come sottolinea Peskin [6, Cap. 9], la ragione di questa scelta risiede principalmente nell'efficienza con cui i collisionatori trasformano l'energia dei fasci accelerati in energia disponibile per la produzione di nuove particelle. In un esperimento a bersaglio fisso, infatti, solo una piccola frazione dell'energia cinetica del proiettile contribuisce all'urto effettivo, mentre nelle collisioni tra due fasci contrapposti l'intera energia nel centro di massa è accessibile al processo elementare.

Tra le possibili particelle da accelerare, il *protone* si è imposto come la scelta più naturale per raggiungere le energie più elevate. A differenza degli elettroni, che a causa della loro massa ridotta perdono rapidamente energia per radiazione quando sono costretti a percorsi circolari, i protoni subiscono perdite trascurabili anche in acceleratori di grandi dimensioni. Questo vantaggio rende possibile progettare macchine di scala imponente,

come il *Large Hadron Collider* (LHC), in grado di far collidere fasci di protoni a energie dell'ordine dei 7 TeV per fascio, raggiungendo nel centro di massa un'energia complessiva di 14 TeV.

La scelta del protone, tuttavia, introduce un elemento di complessità che distingue radicalmente la fisica degli urti adronici da quella degli urti leptonici. Il protone non è una particella elementare, ma un sistema composito formato da quark e gluoni, legati dalle interazioni forti descritte dalla cromodinamica quantistica (QCD). Di conseguenza, ogni collisione protone-protone è in realtà una sovrapposizione di molteplici collisioni tra i partoni che compongono i due protoni, ciascuno dei quali trasporta solo una frazione del momento totale. L'energia effettiva dell'urto elementare, dunque, non è fissa ma distribuita secondo le *funzioni di distribuzione partoniche* (PDF), che devono essere determinate sperimentalmente.

1.2 La struttura del protone e le PDF

La comprensione della struttura interna del protone rappresenta una delle conquiste più significative della fisica del XX secolo. Gli esperimenti di diffusione inelastica rivelarono che il protone non è una particella elementare, ma un sistema composto da quark e gluoni, legati dalle interazioni forti descritte dalla cromodinamica quantistica (QCD). Con l'aumento dell'energia degli esperimenti, emerse un'immagine dinamica del protone: non più un semplice insieme di tre quark di valenza, ma un sistema in continua fluttuazione, popolato da quark, antiquark e gluoni virtuali. Le collisioni adroniche ad alta energia, come quelle al LHC, costituiscono oggi il laboratorio privilegiato per studiare la distribuzione dei partoni e la loro evoluzione con la scala di energia.

Per rendere quantitativa questa descrizione, è stato necessario introdurre un linguaggio probabilistico capace di tradurre la complessità della dinamica interna in quantità osservabili. Nascono così le *funzioni di distribuzione partoniche* (Parton Distribution Functions, PDF), che esprimono la probabilità di trovare, all'interno di un protone in moto relativistico, un partone di tipo i (quark, antiquark o gluone) che trasporta una frazione x del momento longitudinale totale, a una data scala di trasferimento di momento Q^2 . Tali funzioni costituiscono l'elemento essenziale per collegare la struttura interna del protone ai processi osservabili negli urti adronici.

Questa separazione concettuale è formalizzata nel cosiddetto *teorema di fattorizzazione*, introdotto formalmente da Collins, Soper e Sterman negli anni Ottanta, secondo cui la sezione d'urto differenziale per un processo adronico può essere espressa come la convoluzione tra le PDF e la sezione d'urto partonica elementare:

$$\sigma_{pp \rightarrow X}(s) = \sum_{i,j} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_i(x_1, Q^2) f_j(x_2, Q^2) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow X}(x_1 x_2 s, Q^2),$$

dove $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow X}$ rappresenta la sezione d'urto calcolata perturbativamente per la collisione tra i partoni i e j , e $f_i(x, Q^2)$ è la PDF associata al partone i . Il teorema di fattorizzazione, dimostrato in modo rigoroso nell'ambito della QCD [7], è valido per un'ampia classe di processi inclusivi, come la produzione di coppie di leptoni nel processo di Drell-Yan, e costituisce il fondamento teorico delle previsioni perturbative per gli urti adronici.

Dal punto di vista fenomenologico, le PDF non sono quantità calcolabili all'inizio, ma vengono determinate sperimentalmente attraverso un processo di *fit globale* che combina dati provenienti da molteplici esperimenti: diffusione profonda inelastica (DIS), produzione di jet, bosoni vettori e top ai collider. Collaborazioni internazionali sviluppano e aggiornano regolarmente insiemi di PDF, ciascuno con differenti metodologie di analisi e strategie di stima dell'incertezza. Ad esempio, l'approccio di NNPDF utilizza reti neurali e tecniche di cross-validation per minimizzare l'introduzione di bias teorici[8].

Le incertezze sulle PDF derivano da diverse fonti. Una componente è di natura *statistica*, legata all'accuratezza dei dati sperimentalni utilizzati nei fit; una seconda è *sistematica*, associata alla scelta del modello funzionale, del set di dati e delle ipotesi teoriche adottate (come la scala di fattorizzazione o le costanti di accoppiamento della QCD). A queste si aggiungono incertezze *teoriche*, dovute al numero finito di ordini perturbativi considerati nella valutazione di $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow X}$ e alla scelta dei parametri di rinormalizzazione. Tutte queste

componenti si propagano inevitabilmente nelle previsioni per le sezioni d’urto e nelle osservabili elettrodeboli sensibili ai parametri fondamentali del Modello Standard.

Poiché ogni misura collider dipende direttamente dalle PDF, le loro incertezze si traducono in un limite intrinseco alla precisione dei test elettrodeboli. In particolare, le variazioni delle distribuzioni partoniche possono modificare la forma e la normalizzazione delle distribuzioni di massa invariante o di asimmetria avanti–indietro nei processi di Drell–Yan, influenzando così la determinazione di parametri come M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. La comprensione quantitativa di questi effetti, oggetto del presente lavoro, è quindi essenziale per trasformare le misure ottenute al LHC in test di precisione del Modello Standard.

1.3 Processi di Drell–Yan a corrente neutra

Il processo di Drell–Yan rappresenta uno dei meccanismi fondamentali per la produzione di coppie di leptoni nei collisionatori adronici. Proposto originariamente nel 1970 da Sidney Drell e Tung-Mow Yan [9], esso descrive l’annichilazione di un quark e di un antiquark appartenenti a due adroni incidenti, che danno origine a un bosone vettore intermedio virtuale, successivamente decadente in una coppia leptone–antileptone.

Si tratta di un processo di grande rilevanza fenomenologica, poiché combina la dinamica delle interazioni forti, responsabili della distribuzione dei partoni all’interno dei protoni, con quella elettrodebole che governa la produzione e il decadimento del bosone vettore.

Nel caso di *corrente neutra*, l’interazione è mediata da un fotone virtuale (γ^*) o da un bosone Z , come illustrato nella Fig. 1.2:

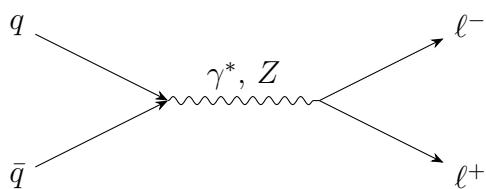


Figura 1.2: Diagramma per Drell–Yan a corrente neutra: $q\bar{q} \rightarrow \gamma^*/Z \rightarrow \ell^+\ell^-$.

Questo canale costituisce la base della maggior parte delle analisi di precisione condotte al LHC, poiché la produzione di leptoni carichi (elettroni o muoni) fornisce un segnale pulito e sperimentalmente ben ricostruibile. La semplicità del processo a livello partonico consente inoltre un confronto diretto tra le previsioni teoriche e i dati, rendendo il Drell–Yan a corrente neutra uno strumento ideale per testare i parametri elettrodeboli e le funzioni di distribuzione partoniche.

Il contributo del fotone virtuale domina alle basse masse invarianti della coppia leptone–antileptone, mentre in prossimità della risonanza del bosone Z diventa preponderante la componente mediata da quest’ultimo. Alle energie tipiche del LHC, le due componenti interferiscono in modo misurabile, rendendo il processo sensibile a parametri come la massa e la larghezza del bosone Z , l’angolo di mixing elettrodebole θ_W e i corrispondenti accoppiamenti vettoriali e assiali dei leptoni e dei quark.

Dal punto di vista teorico, quindi, il Drell–Yan fornisce un banco di prova per la QCD perturbativa e per la struttura del protone.

Nella sezione successiva verranno analizzate in dettaglio le principali osservabili associate al processo di Drell–Yan e la loro relazione con i parametri elettrodeboli: la massa invariante della coppia di leptoni, il momento trasverso e l’asimmetria avanti–indietro.

Osservabili e sezioni d’urto nel processo di Drell–Yan

La grandezza teorica di riferimento che consente di mettere in relazione la teoria con le misure sperimentali è la *sezione d’urto differenziale*. Essa descrive la probabilità di produrre una coppia di leptoni con determinate caratteristiche cinematiche e, nel caso del processo di Drell–Yan, può essere espressa come la convoluzione tra la sezione d’urto partonica e le funzioni di distribuzione partoniche (PDF) dei protoni incidenti. Come discusso in dettaglio nel Peskin-Schroeder [10, Cap. 17.5/17.6], la sezione d’urto differenziale per la produzione di una coppia leptone–antileptone è data da:

$$\frac{d^2\sigma}{dM_{\ell\ell} dy} = \sum_q f_q(x_1, Q^2) f_{\bar{q}}(x_2, Q^2) \frac{d\hat{\sigma}_{q\bar{q} \rightarrow \ell^+ \ell^-}}{dM_{\ell\ell} dy},$$

dove $M_{\ell\ell}$ è la massa invariante della coppia leptone–antilettone, y la sua rapidità, e $x_{1,2}$ le frazioni di momento dei partoni. Variazioni nella parametrizzazione delle PDF o nei parametri elettrodeboli modificano la forma delle distribuzioni predette per le grandezze misurabili, permettendo così di testare la teoria con alta precisione.

Nel processo di Drell–Yan a corrente neutra si possono definire numerose osservabili indipendenti, ciascuna sensibile a differenti combinazioni di parametri del Modello Standard e di funzioni di distribuzione partoniche.

1.4 Parametri elettrodeboli e lagrangiana

La descrizione teorica dei processi di Drell–Yan a corrente neutra si fonda sulla struttura elettrodebole del Modello Standard, che unifica le interazioni deboli e quelle elettromagnetiche in un’unica teoria di gauge basata sul gruppo di simmetria

$$SU(2)_L \times U(1)_Y.$$

In questo quadro, i bosoni vettori W^\pm , Z e γ emergono come combinazioni lineari dei campi di gauge originari, mentre le masse e le costanti di accoppiamento sono determinate da un insieme ridotto di parametri fondamentali.

La lagrangiana elettrodebole contiene tutti i termini che descrivono le interazioni tra leptoni, quark e bosoni vettori. Le quantità misurabili nei processi di scattering e di decadimento dipendono però solo da pochi parametri di input.

Le relazioni tra questi parametri — le masse dei bosoni M_W e M_Z , la costante di Fermi G_F , la costante di accoppiamento elettromagnetico α e l’angolo di Weinberg θ_W — costituiscono il nucleo delle previsioni del Modello Standard e permettono di testarne la validità con estrema precisione.

Nel contesto dei processi di Drell–Yan, questi parametri determinano gli accoppiamenti vettoriali e assiali dei fermioni ai bosoni di gauge, e dunque influenzano direttamente la forma e la normalizzazione delle osservabili sperimentali. Rovesciando la logica, lo studio delle distribuzioni sperimentali, assumendo la validità del modello standard, ci permette di determinare il valore di questi parametri.

Schemi di rinormalizzazione e parametri di input/output

Nel Modello Standard, le grandezze osservabili nei processi elettrodebolli dipendono da un insieme ristretto di parametri fondamentali. Tuttavia, le correzioni radiative e la rinormalizzazione delle costanti di accoppiamento rendono necessario specificare un *insieme di parametri di input*, scelti in modo da definire univocamente la teoria. Questa procedura è detta *schema di rinormalizzazione*.

In un dato schema, tre quantità indipendenti vengono fissate come parametri di input, mentre le altre due sono determinate come *output* attraverso relazioni teoriche. In tal modo, la teoria è completamente specificata e può essere confrontata con le osservabili sperimentali.



Figura 1.3: Schema di rinormalizzazione adottato: fissando gli input M_W , $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ e G_μ , le relazioni elettrodebolli (con correzioni radiative) determinano gli output M_Z e α .

Nel presente lavoro si adotta uno schema denominato **Scheme 6**, in cui i parametri fissati sono:

$$\text{Input: } \{ M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}, G_\mu \}.$$

In questo schema, la costante di Fermi G_μ fissa la normalizzazione dell'interazione debole, mentre M_W e l'angolo di mixing $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ determinano gli accoppiamenti tra leptoni, quark e bosoni vettori. Le restanti grandezze — in particolare la massa del bosone Z e la costante di accoppiamento elettromagnetico α — vengono derivate come *output* attraverso delle relazioni, che all'ordine più basso sono:

$$M_Z^2 = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_W^{\text{eff}}}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2} G_\mu M_W^2 \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}}{\pi}.$$

In questo modo, la variazione dei parametri M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ si propaga automaticamente nelle quantità derivate, permettendo di analizzare la sensibilità delle osservabili alle variazioni di questa scelta dei parametri fondamentali della lagrangiana elettrodebole.

L'uso di questo schema consente di studiare in modo coerente la dipendenza delle sezioni d'urto e delle asimmetrie dai parametri di input scelti, mantenendo la consistenza teorica tra le relazioni del Modello Standard e i valori sperimentali di riferimento.

Simulazioni degli scontri adronici

2.1 Generatore Monte Carlo POWHEG

Per la generazione degli eventi dei processi di Drell–Yan in corrente neutra è stato impiegato **POWHEG-BOX**, un generatore Monte Carlo che implementa il metodo Positive Weight Hardest Emission Generator (POWHEG), consentendo la combinazione coerente di correzioni QCD a ordine successivo (NLO) con l’evoluzione partonica dei parton-shower e garantendo pesi positivi per gli eventi.

La descrizione delle funzioni di distribuzione partoniche (PDF) avviene tramite la libreria LHAPDF. È stata installata la versione LHAPDF 6.5.5, all’interno della quale è stato scaricato e reso disponibile il set 331700 (NNPDF). Questo set fornisce la base su cui valutare l’impatto delle variazioni dei parametri elettrodeboli.

Osservabili considerate

Le simulazioni producono un insieme di istogrammi, contenuti nei file di output. Le osservabili disponibili che abbiamo scelto come rilevanti sono:

- **V_mt**: distribuzione della massa trasversa del sistema;
- **V_mt_high**: regione ad alta massa trasversa;
- **V_m_report**: distribuzione della massa invariante;
- **forward** e **backward**: eventi rispettivamente nel semispazio avanti e indietro rispetto all’asse di riferimento;
- **F-B**: distribuzione della differenza avanti–indietro;
- **A_FB**: distribuzione dell’asimmetria avanti–indietro, definita da: $A_{FB} = \frac{F - B}{F + B}$.
- **l1_y, l2_y**: rapidità dei due leptoni finali;
- **l1_eta, l2_eta**: pseudorapidità dei due leptoni;
- **l1_pt_report, l2_pt_report**: momento trasverso dei due leptoni.

Ciascun istogramma è descritto da bin caratterizzati dall’intervallo cinematico (*start*, *end*), dal valore della distribuzione (*value*) e dall’incertezza statistica associata (*error*). Queste osservabili rappresentano la base su cui si costruiscono le medie tra job e si confrontano le simulazioni con e senza variazione dei parametri elettrodeboli.

Strategia di simulazione

Sono state realizzate due fasi distinte:

1. **Simulazione di riferimento.** Generazione degli eventi usando il set di PDF 331700 senza variare i parametri elettrodebolli. Questa produzione fornisce il riferimento per le distribuzioni osservabili.
2. **Simulazione con variazione di M_W e $\sin^2 \theta_W^{eff}$.** A partire dagli stessi settaggi della simulazione di riferimento, si variano in modo controllato i parametri M_W e $\sin^2 \theta_W$, mantenendo invariati gli altri ingressi fisici e numerici.

Parametri comuni in `powheg.input`

Parametro	Valore
Numero di eventi (numevts)	500000
Adroni iniziali (ih1, ih2)	1, 1 (protoni)
Energie di fascio (Ebeam1, Ebeam2)	6800 GeV, 6800 GeV
Set PDF (LHAPDF)	33170 su LHAPDF 6.5.5
Massa e larghezza di Z (Zmass, Zwidth)	91.1876 GeV, 2.4952 GeV
Larghezza di W (Wwidth)	2.085 GeV
Massa di Higgs (Hmass)	125 GeV
Masse leptoni (m_e, m_μ, m_τ)	$0.510998 \times 10^{-3}, 0.10565, 1.7768$ GeV
Costante elettromagnetica (α_{em})	0.0072973525698163

Tabella 2.1: Parametri comuni utilizzati in `powheg.input` per entrambe le simulazioni.

Variazione di M_W e $\sin^2 \theta_W$

La seconda fase delle simulazioni si differenzia da quella di riferimento per la variazione controllata di due parametri elettrodebolli fondamentali: la massa del bosone W e l'angolo di Weinberg effettivo, espresso attraverso $\sin^2 \theta_W^{eff}$. Quindi è stato esplicitamente impostato lo schema di rinormalizzazione con `scheme = 6`, come anticipato nel capitolo precedente.

In particolare:

- M_W (`Wmass`) non è più fissato al valore nominale, ma reso variabile attraverso un segnaposto (`Mwdummy`);
- $\sin^2 \theta_W$ effettivo (`s2eff`) è reso variabile tramite un analogo segnaposto (`STdummy`).

Il file `powheg.input` per il settaggio dei parametri di simulazione è quindi identico a quello della simulazione di riferimento, eccetto per queste modifiche. I valori numerici dei placeholder (`Mwdummy`, `STdummy`) vengono poi sostituiti automaticamente dallo script di sottomissione dei job (`submith.sh`), che genera un file di input per ciascun punto della scansione.

2.2 Esecuzione sul cluster Galileo

Le simulazioni sono state eseguite sul cluster *Galileo* utilizzando il sistema di gestione delle code **SLURM**. Ogni job, definito tramite i direttivi `#SBATCH`, specifica le risorse richieste (partizione, tempo massimo, numero di CPU e memoria) e viene automaticamente assegnato a un nodo disponibile dal gestore.

L'intera procedura è automatizzata dallo script `submith.sh`, che genera i file di input, assegna un seme casuale distinto per ciascun run e sostituisce i valori dei parametri variabili (`Mwdummy`, `STdummy`) all'interno della configurazione. In questo modo, per ogni punto della scansione dei parametri elettrodebolli viene creato e sottomesso un job indipendente, consentendo la produzione massiva e parallela degli eventi.

Nel complesso, SLURM gestisce la coda e l'assegnazione delle risorse, mentre lo script cura la replicazione controllata delle condizioni iniziali, garantendo una distribuzione efficiente dei task e la tracciabilità di ciascuna simulazione nel workflow complessivo.

Gestione numerica dei job e degli errori

Per ciascuna replica di protone, in entrambi i tipi di simulazione, sono stati generati 2000 job di simulazione, ciascuno con un campione di 5×10^5 eventi. Per ogni osservabile si ottengono dunque, per replica, 2000 istogrammi, da cui si calcola la media sui job:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{N_{\text{jobs}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{jobs}}} X_i^{(k)}, \quad N_{\text{jobs}} = 2000. \quad (2.1)$$

Assumendo varianza identica e indipendenza tra i job, l'errore statistico sulla media risulta

$$\sigma_{\bar{X}_i} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{N_{\text{jobs}}}}, \quad \sigma_i^2 = \text{Var}(X_i^{(k)}). \quad (2.2)$$

Poiché le repliche PDF sono ottenute mediante *ripesamento* dello stesso campione di eventi (con seed comune e pesi variabili), la componente statistica Monte Carlo è in gran parte correlata tra repliche e si annulla quasi completamente in differenze, rapporti o istogrammi normalizzati. Di conseguenza, il termine $\sigma_i/\sqrt{N_{\text{jobs}}}$ non viene propagato nella stima delle incertezze PDF, che risultano dominanti e strutturate.

L'analisi è quindi focalizzata sulla componente sistematica dovuta alle PDF, verificando che la varianza indotta da esse superi ampiamente la fluttuazione statistica residua. L'obiettivo è stato infatti quello di validare la tecnica di costruzione e analisi della matrice di covarianza, piuttosto che ridurre al minimo l'errore Monte Carlo.

Confronto con la replica centrale

Per rendere più chiaro l'effetto delle variazioni di M_W e $\sin^2 \theta_W$, le distribuzioni del secondo set sono state confrontate con la replica centrale, calcolando il rapporto bin-per-bin tra l'istogramma variato e quello di riferimento. L'obiettivo è verificare la coerenza fisica della risposta delle simulazioni alle variazioni dei due parametri elettrodeboli considerati.

In questa sezione vengono presentati i risultati grafici relativi alla distribuzione di massa invariante del sistema leptónico, scelta in quanto rappresenta l'osservabile più diretta e significativa per studiare la regione di risonanza dello Z . L'analisi di questa variabile fornisce infatti una base solida per la successiva valutazione statistica della sensibilità dei dati alle variazioni dei parametri elettrodeboli del Modello Standard.

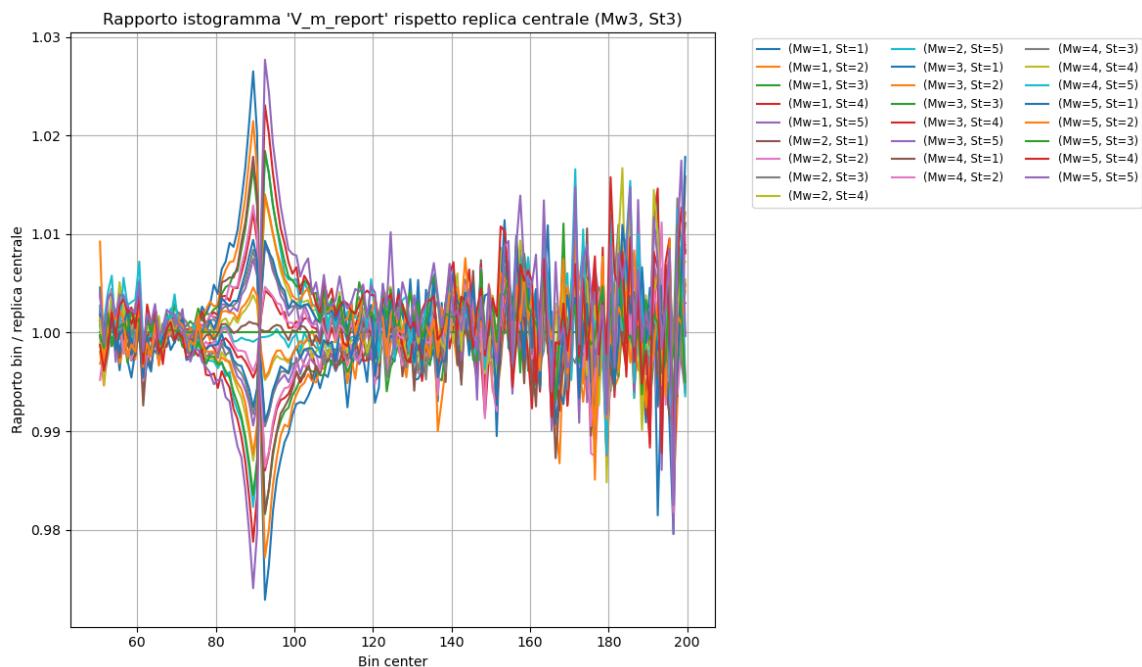


Figura 2.1: Rapporto per la massa invariante del sistema $\ell^+\ell^-$.

Il grafico mostra che le deviazioni rispetto alla replica centrale si concentrano nella regione del picco di risonanza dello Z , in corrispondenza di $M \simeq 91.5$ GeV.

Questo comportamento conferma che il massimo della risonanza rappresenta la regione più sensibile alla variazione dei parametri elettrodeboli, in particolare $\sin^2 \theta_W$ e M_W . Infatti, il valore di $\sin^2 \theta_W$ determina l'intensità relativa dei contributi di corrente vettoriale e assiale negli accoppiamenti fermione- Z , influenzando quindi la forma e l'altezza del picco, mentre il valore di M_W , attraverso le relazioni di rinormalizzazione del Modello Standard, interviene indirettamente sulla posizione e sulla larghezza della risonanza.

Si osserva inoltre che le fluttuazioni lontano dal picco sono limitate e non mostrano pattern sistematici, suggerendo che la risposta della simulazione è fisicamente coerente e priva di instabilità numeriche.

L'andamento, con deviazioni concentrate attorno al picco dello Z , indica l'opportunità di analizzare più nel dettaglio questa regione, come mostrato nello *zoom* presentato di seguito.

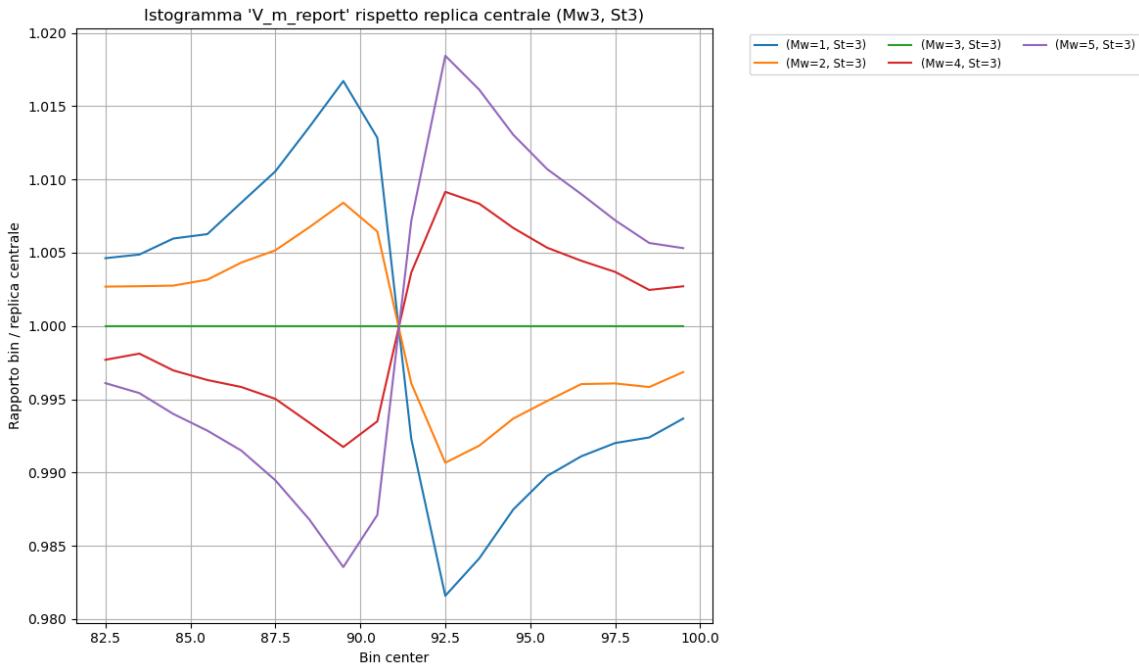


Figura 2.2: Zoom del rapporto nella regione del picco dello Z per la massa invariante.

Lo zoom mostra in dettaglio il comportamento del rapporto nella regione del picco dello Z. Si osserva che le diverse curve, corrispondenti alle varie combinazioni di M_W e $\sin^2 \theta_W$, non rimangono orizzontali ma presentano un andamento caratterizzato da tratti in cui si collocano al di sopra o al di sotto dell’unità.

Questo effetto riflette direttamente la sensibilità della forma del picco alle variazioni dei parametri elettrodeboli. In particolare:

- Le variazioni di M_W e di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ influenzano entrambe la posizione del picco della distribuzione in massa invariante. In particolare, attraverso la relazione $M_Z = M_W / \cos \theta_W$, una modifica di uno dei due parametri comporta uno spostamento del valore effettivo di M_Z , e quindi della risonanza osservata. Tale effetto si traduce in una variazione correlata dell’altezza e della larghezza del massimo, con un andamento di tipo “salire e scendere” delle curve a seconda che il bin considerato si trovi a sinistra o a destra del picco;
- Inoltre, la variazione di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ interviene anche nel termine di accoppiamento tra leptoni e bosone Z , modificando i fattori vettoriali e assiali che determinano la forma locale della distribuzione. Ciò comporta un effetto sistematico sulla normalizzazione, che si somma allo spostamento complessivo del picco.

In altre parole, gli andamenti osservati non sono dovuti a fluttuazioni statistiche, ma rappresentano la risposta fisica della distribuzione alla variazione dei parametri. Il fatto che le curve mostrino uno schema regolare (alcune sempre sopra l’unità, altre sempre sotto, con incroci localizzati attorno al massimo) conferma la robustezza dell’effetto e la possibilità di sfruttare questa regione per la stima di $\sin^2 \theta_W$ e M_W .

Per cogliere in modo compatto la dipendenza congiunta dalla coppia $(M_W, \sin^2 \theta_W)$, la figura successiva propone una visualizzazione tridimensionale del picco.

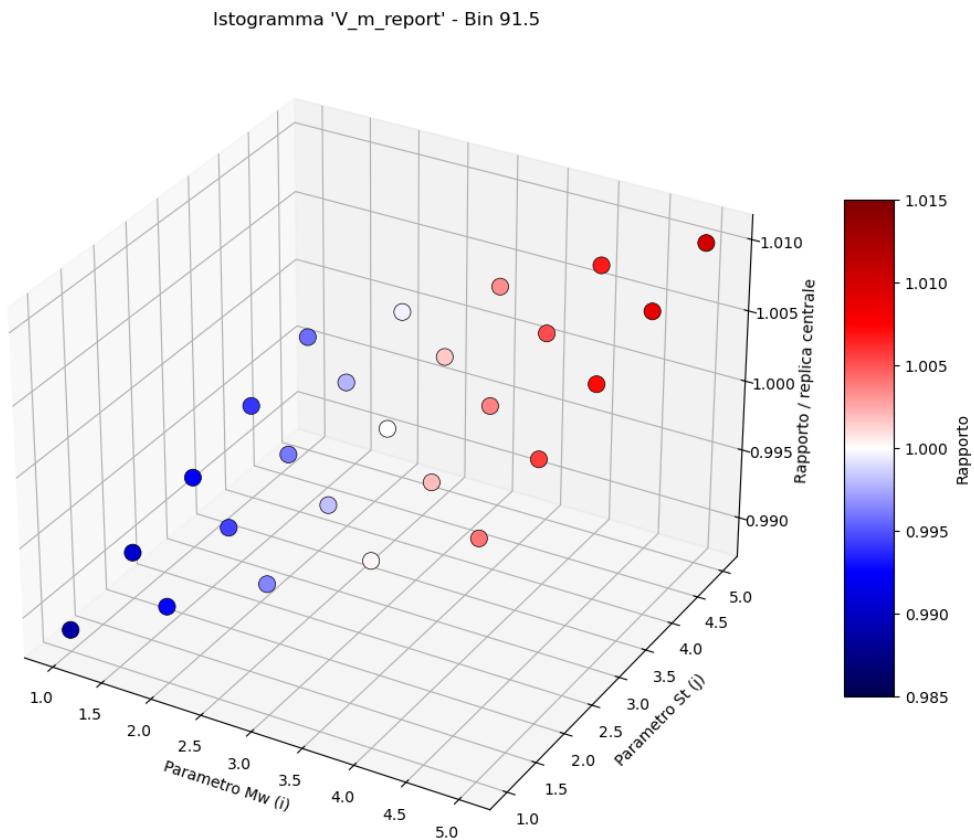


Figura 2.3: Valore del rapporto nel bin centrato a $M \simeq 91.5$ GeV per le diverse combinazioni di $(M_W, \sin^2 \theta_W)$.

La rappresentazione tridimensionale mostra il valore del rapporto nel bin centrato a $M \simeq 91.5$ GeV in funzione degli indici assegnati alle variazioni di M_W (asse orizzontale) e di $\sin^2 \theta_W$ (asse verticale). Il colore dei punti indica la deviazione rispetto alla replica centrale: valori più bassi (blu) corrispondono a un rapporto minore di 1, mentre valori più alti (rosso) a un rapporto maggiore di 1.

Questa visualizzazione rende evidente come il bin del picco dello Z sia sensibile a entrambe le variazioni dei parametri:

- al crescere di M_W si osserva una tendenza regolare verso rapporti più elevati;
- al crescere di $\sin^2 \theta_W$ si registra invece una diminuzione sistematica del rapporto;

L'effetto combinato dei due parametri produce quindi una superficie inclinata, con gradiente opposto lungo i due assi.

Dal punto di vista fisico, la posizione del picco della risonanza dello Z dipende principalmente dal rapporto $M_W / \cos \theta_W$, e quindi non consente di distinguere in modo univoco i due parametri presi separatamente. Tuttavia, l'ulteriore dipendenza della distribuzione dagli accoppiamenti vettoriali e assiali, che coinvolgono $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, rompe questa degenerazione, rendendo possibile in principio un fit congiunto dei parametri. La regolarità della dipendenza evidenziata dalla colorazione conferma inoltre che la sensibilità osservata è di natura sistematica e non dovuta a fluttuazioni statistiche.

Analisi e metodologia

In questo capitolo viene presentato il **cuore del lavoro**, dedicato allo studio dei processi di Drell–Yan in corrente neutra e alla valutazione dell’impatto delle incertezze teoriche legate alla struttura del protone nella determinazione dei parametri elettrodeboli del Modello Standard. L’obiettivo è sviluppare un approccio quantitativo e coerente che permetta di descrivere come tali incertezze si propagano nelle sezioni d’urto delle osservabili considerate, influenzando la misura di grandezze fondamentali come la massa del bosone W e il seno dell’angolo di mixing debole.

3.1 Quadro generale e strategia di analisi

Il punto di partenza di questo lavoro è il riconoscimento che, nelle collisioni protone–protone, una delle principali limitazioni alle misure di precisione deriva dall’**incertezza sulla struttura interna del protone**. Le funzioni di distribuzione partoniche (PDF) descrivono la probabilità di trovare un partone con frazione di momento x all’interno del protone, e costituiscono quindi l’elemento teorico fondamentale per la previsione delle sezioni d’urto dei processi osservabili. Tuttavia, tali funzioni non sono note con esattezza: esse derivano da fit globali a dati sperimentali, e la loro incertezza si propaga inevitabilmente sulle sezioni d’urto delle osservabili considerate, come espresso schematicamente da

$$\sigma_{\text{obs}} = \sum_{i,j} \int f_i(x_1, Q^2) f_j(x_2, Q^2) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow \ell^+ \ell^-}(x_1, x_2, Q^2) dx_1 dx_2,$$

dove $f_i(x, Q^2)$ rappresentano le PDF dei partoni iniziali e $\hat{\sigma}_{ij}$ la sezione d’urto partonica. Le incertezze sui f_i si riflettono dunque direttamente sull’accuratezza con cui è possibile determinare parametri elettrodeboli come M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$.

Per affrontare quantitativamente questo problema, si possono adottare due strategie concettualmente distinte:

- **Approccio “replica-per-replica”**: per ciascuna replica del protone (per esempio $N = 100$ parametrizzazioni indipendenti delle PDF) si esegue un fit completo dei dati, ottenendo così N stime indipendenti dei parametri. L’incertezza complessiva viene poi dedotta dalla dispersione statistica dei risultati. Questo metodo tratta tutte le repliche in modo equivalente, ma non tiene conto esplicito delle correlazioni tra bin introdotte dalle variazioni delle PDF, e tende quindi a sottovalutare alcune componenti strutturate dell’incertezza.
- **Approccio “globale” (adottato in questo lavoro)**: invece di eseguire N fit separati, si costruisce un *unico test del χ^2* che incorpora tutte le informazioni provenienti dalle repliche del protone, includendo nel calcolo la matrice di covarianza che descrive le correlazioni tra i bin delle distribuzioni. In questo modo, la variazione dovuta alla struttura del protone è trattata in modo coerente e analitico, e la

funzione di χ^2 risultante riflette esplicitamente la dipendenza del fit dalle incertezze partoniche.

Questo secondo approccio, più “aggressivo”, presenta alcuni **vantaggi sostanziali**:

- fornisce una stima più diretta e realistica dell’impatto delle PDF sul fit, poiché integra in modo naturale le correlazioni tra bin;
- permette di identificare non solo la regione di minimo del χ^2 , ma anche la direzione di stabilità nello spazio dei parametri, legata alla struttura del protone;
- consente di estendere in modo coerente l’analisi a *combinazioni simultanee di più osservabili*, sfruttando appieno l’informazione contenuta nei dati simulati.

Uno degli effetti attesi di questo approccio è una possibile sovrastima dell’incertezza, poiché il contributo stimato deriva unicamente dalle fluttuazioni associate alle PDF, che tradizionalmente rappresenta una piccola fonte dell’errore sistematico complessivo. Si tratta tuttavia di un effetto previsto e controllato, che rende la misura più affidabile nella valutazione della reale sensibilità dei parametri elettrodeboli.

L’obiettivo di questo capitolo è sviluppare e applicare in modo sistematico un metodo che permetta di **identificare e quantificare come le incertezze delle PDF si propaghino e contribuiscano all’incertezza sulla determinazione dei parametri elettrodeboli**.

A tale scopo, viene adottato il secondo approccio — quello *globale* — in cui la statistica del χ^2 è utilizzata per confrontare le distribuzioni teoriche di riferimento con quelle ottenute variando congiuntamente i parametri M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$.

In questo schema, la matrice di covarianza entra naturalmente nella definizione del χ^2 , consentendo di includere in modo coerente le correlazioni tra bin e di descrivere quantitativamente l’evoluzione delle incertezze dovute alla struttura del protone.

3.2 Il test del χ^2

Uno degli strumenti statistici più utilizzati in fisica delle alte energie per confrontare dati sperimentali e predizioni teoriche è il test del χ^2 , che misura la distanza tra teoria e dati, tenendo conto del peso relativo associato a ciascuna incertezza. Gli scarti lungo direzioni ben determinate (cioè meno incerte) contribuiscono in misura maggiore al valore totale, mentre quelli dominati da errori statistici o sistematici hanno un peso ridotto.

In *forma generale*, il test del χ^2 è definito come

$$\chi^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{T})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{T}), \quad (3.1)$$

dove:

- \mathbf{X} rappresenta il vettore dei valori osservati (o simulati);
- \mathbf{T} indica il vettore delle corrispondenti predizioni teoriche;
- \mathbf{C} è la matrice di covarianza, che incorpora le incertezze e le correlazioni tra i diversi bin e tra le diverse osservabili.

In assenza di correlazioni, \mathbf{C} sarebbe diagonale e l'equazione (3.1) si ridurrebbe alla forma scalare

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(X_i - T_i)^2}{\sigma_i^2},$$

dove σ_i è l'incertezza associata al bin i . La formulazione matriciale è però indispensabile per tenere conto delle correlazioni indotte dalla variazione delle PDF.

Nel *nostro caso*, il test del χ^2 assume una forma specifica, in cui il vettore degli scarti è definito come

$$\delta(M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}) = X(M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}) - X_{\text{ref}},$$

cioè la differenza bin per bin tra la predizione teorica ottenuta variando i parametri elettrodebolì e quella calcolata con i valori di riferimento. La matrice di covarianza \mathbf{C} è invece costruita a partire dalle repliche del protone fornite dal set di PDF, e descrive la propagazione delle incertezze partoniche sulle osservabili considerate.

Combinando questi due contributi, si ottiene:

$$\chi^2(M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}) = \delta(M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}})^T \mathbf{C}^{-1} \delta(M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}).$$

Questo valore rappresenta, per ogni coppia di parametri elettrodebolì, il grado di accordo tra la teoria e la simulazione di riferimento.

L'analisi viene ripetuta per un insieme di 25 coppie $(M_W(i), \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}(j))$, distribuite su una griglia bidimensionale attorno ai valori centrali del Modello Standard. Ciò consente di individuare la regione di minimo del χ^2 , che identifica la combinazione di parametri più coerente con le predizioni teoriche.

Dal punto di vista concettuale, il χ^2 risponde alla domanda: *quanto bene un determinato modello teorico riproduce le osservabili considerate?* Valori di χ^2 piccoli indicano un buon accordo, mentre valori grandi suggeriscono che il modello non descriva correttamente i dati o che vi siano incertezze non completamente incluse. Nel contesto di questa tesi, il χ^2 svolge quindi un duplice ruolo:

1. quantificare la compatibilità tra le predizioni ottenute con diversi valori dei parametri elettrodeboli e la simulazione di riferimento;
2. stimare l'impatto delle incertezze partoniche sulla determinazione di M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, attraverso la matrice di covarianza del protone.

Quindi oltre a fornire una stima della sensibilità complessiva, questa procedura consente anche un'*analisi teorica del χ^2* basata sulla matrice di covarianza derivata dalle repliche del protone. Si parla di analisi *teorica* perché, in questo caso, non si confrontano dati sperimentali con predizioni teoriche, bensì due diverse realizzazioni teoriche del modello: la simulazione di riferimento, ottenuta con i valori centrali dei parametri elettrodeboli e del protone, e le simulazioni ottenute variando tali parametri. Il confronto avviene quindi interamente all'interno del dominio teorico, utilizzando come unica sorgente di incertezza la matrice di covarianza costruita dalle repliche del protone.

In questo modo è possibile valutare in maniera quantitativa in che misura le incertezze legate alla parametrizzazione del protone influiscano sulla determinazione dei parametri M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. Il risultato fornisce una stima diretta dell'errore teorico associato alla descrizione del protone stesso e rappresenta un passo essenziale per isolare il contributo puramente partonico dall'incertezza complessiva che affligge le misure elettrodeboli.

Oltre all'analisi delle singole osservabili, è possibile combinare i risultati ottenuti per distribuzioni diverse in un unico *fit combinato*. Questo approccio permette di sfruttare simultaneamente le informazioni complementari fornite dalle diverse osservabili migliorando la sensibilità complessiva e riducendo le degenerazioni tra i parametri M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. Nel caso in cui le osservabili siano statisticamente indipendenti, il χ^2 totale si ottiene come somma dei contributi individuali:

$$\chi_{\text{tot}}^2 = \sum_k \chi_k^2,$$

mentre in presenza di correlazioni è possibile costruire una matrice di covarianza estesa che includa anche le correlazioni incrociate tra osservabili.

3.2.1 Il caso specifico della nostra analisi

Come anticipato prima, nel nostro caso il vettore degli scarti è definito come

$$\Delta(M_W, \sin^2 \theta_W) = X(M_W, \sin^2 \theta_W) - X_{\text{ref}},$$

cioè la differenza tra la predizione teorica calcolata a parametri elettrodeboli variati (M_W e $\sin^2 \theta_W$) e la predizione di riferimento.

La predizione di riferimento è ottenuta con i valori centrali dei parametri elettrodeboli, indicati come M_W^3 e St^3 , e con la replica centrale delle PDF, considerata come il *protone centrale*. Questa scelta garantisce che, per costruzione, il punto di riferimento corrisponda al minimo assoluto della funzione di χ^2 , il quale assume quindi valore nullo:

$$\chi^2(M_W^3, St^3) = 0.$$

A partire da questi valori centrali, entrambi i parametri vengono variati in quattro step, generando cinque valori distinti ($M_W^{(1)}, \dots, M_W^{(5)}$ e $St^{(1)}, \dots, St^{(5)}$) che definiscono una **griglia 5x5 nello spazio dei parametri**.¹

La variazione dei parametri elettrodeboli è stata implementata mediante lo script `submith.sh`, che aggiorna opportunamente il file di input `powheg.input`. In questo contesto i parametri fondamentali

$$M_W = 80.\text{Mwval} \text{ [GeV]}, \quad \sin^2 \theta_W = 0.231\text{STval} \text{ [adimensionale]}$$

sono generati a partire dalle variabili di loop

$$\text{Mwval} = 355 + j \cdot 10, \quad \text{STval} = 22 + k \cdot 10, \quad j, k = 1, \dots, 5.$$

Questa scelta consente di esplorare una regione attorno ai valori centrali

$$M_W^{(3)} = 80.385 \text{ GeV}, \quad \sin^2 \theta_W^{(3)} = 0.23152,$$

discretizzata in cinque punti equidistanti per ciascun parametro:

$$M_W \in \{80.365, 80.375, 80.385, 80.395, 80.405\} \text{ GeV},$$

$$\sin^2 \theta_W \in \{0.23132, 0.23142, 0.23152, 0.23162, 0.23172\}.$$

Per ogni coppia $(M_W, \sin^2 \theta_W)$ della griglia così costruita viene calcolato un vettore teorico di osservabili,

$$X_{\text{teo}}(M_W, \sin^2 \theta_W),$$

che viene confrontato con la predizione di riferimento X_{ref} . Il vettore degli scarti Δ fornisce pertanto una misura diretta della sensibilità delle distribuzioni alle variazioni dei parametri elettrodeboli.

¹Potrebbe essere una buona idea discretizzare in maniera più fine le variazioni dei due parametri, oppure coprire un intervallo più ampio rispetto a quello scelto.

3.2.2 Gradi di libertà e interpretazione statistica

Per interpretare correttamente il valore numerico del χ^2 è necessario introdurre il concetto di *gradi di libertà* (ndof), definito come il numero di osservazioni indipendenti meno il numero di parametri liberi coinvolti nel confronto:

$$\text{ndof} = N_{\text{bin}} - N_{\text{param.}}$$

Nel nostro caso, N_{bin} rappresenta il numero totale di bin nelle distribuzioni considerate, mentre i parametri variati sono le quantità elettrodeboli d'interesse (M_W , $\sin^2 \theta_W$).

Se gli errori associati a ciascun bin sono gaussiani e le correlazioni sono correttamente incluse nella matrice di covarianza \mathbf{C} , il χ^2 definito come

$$\chi^2 = \Delta^T \mathbf{C}^{-1} \Delta$$

segue, sotto l'ipotesi di correttezza del modello, una distribuzione del χ^2 con ndof gradi di libertà. Il valore osservato di χ^2 può quindi essere interpretato calcolando il *p-value*, ossia la probabilità che una fluttuazione statistica produca un χ^2 maggiore o uguale a quello osservato:

$$p = \int_{\chi_{\text{obs}}^2}^{\infty} P(\chi^2; \text{ndof}) d\chi^2.$$

Dal caso scalare al caso matriciale.

Nel caso più semplice di una sola osservabile con errore gaussiano, la situazione è completamente descritta da un singolo numero: la varianza σ^2 . In questo contesto il risultato elementare è che circa il 68% delle fluttuazioni cade nell'intervallo $\mu \pm \sigma$.[11] Espresso in termini di variabile normalizzata, ciò equivale a dire che $\chi^2 < 1$ definisce la regione di confidenza unidimensionale al 68%. Questa rappresentazione scalare corrisponde quindi ad un intervallo centrato sul valore atteso.

Quando però si considerano più osservabili contemporaneamente, ognuna con la propria incertezza e con possibili correlazioni reciproche l'informazione statistica completa è contenuta nella *matrice di covarianza* \mathbf{C} , che estende la nozione di varianza incorporando sia le incertezze di ciascun bin (sulla diagonale) sia le correlazioni tra bin distinti (negli elementi extra-diagonali).

Dal punto di vista geometrico, il salto concettuale è il seguente:

- **caso scalare:** la regione a confidenza 68% è l'intervallo $\pm \sigma$ su una retta;
- **caso matriciale:** la stessa probabilità 68% è racchiusa in una *regione ellissoidale* nello spazio delle osservabili, definita dalla condizione

$$\Delta^T \mathbf{C}^{-1} \Delta \leq \chi^2_{0.68},$$

Questa generalizzazione ha due conseguenze cruciali:

1) Il valore soglia di $\Delta\chi^2$ per identificare una regione al 68% Si definisce

$$\Delta\chi^2 = \chi^2(\vec{\theta}) - \chi^2_{\min},$$

cioè la differenza tra il valore della funzione χ^2 calcolato in un generico punto dello spazio dei parametri e il suo valore minimo χ^2_{\min} . Nel caso in cui si analizzi un solo parametro libero, la regione di confidenza al 68% è individuata dal criterio standard

$$\Delta\chi^2 = 1,$$

indipendentemente dal numero di bin o dai gradi di libertà dei dati coinvolti nella costruzione del test. Questa regola riflette il fatto che, in prossimità del minimo, la funzione di verosimiglianza (o equivalentemente la funzione χ^2) si comporta come una distribuzione gaussiana unidimensionale, per cui l'intervallo $\pm 1\sigma$ corrisponde esattamente a $\Delta\chi^2 = 1$.

Se invece si considerano congiuntamente più parametri liberi, la statistica $\Delta\chi^2$ non segue più una distribuzione χ^2 con un grado di libertà, ma una distribuzione χ^2 con M gradi di libertà, dove M è il numero di parametri variati simultaneamente. In questo caso, la soglia da utilizzare per definire una regione al livello di confidenza p (ad esempio $p = 0.6827$ per il 68%) è data dal quantile corrispondente della distribuzione χ^2 .

Per i valori comunemente utilizzati si ottiene[11]:

$$\Delta\chi^2_{M=1} = 1.00, \quad \Delta\chi^2_{M=2} \simeq 2.30, \quad \Delta\chi^2_{M=3} \simeq 3.53.$$

Nel nostro caso, i parametri M_W e $\sin^2\theta_W$ vengono variati congiuntamente nelle simulazioni. Questo significa che l'analisi si sviluppa effettivamente in uno spazio bidimensionale dei parametri, e la regione di confidenza al 68% corrisponde al valore

$\Delta\chi^2 = 2.30$

Probabilità di copertura ($1-\alpha$)	M=1	M=2	M=3
68.27%	1.00	2.30	3.53
90%	2.71	4.61	6.25
95%	3.84	5.99	7.82
95.45%	4.00	6.18	8.03
99%	6.63	9.21	11.34
99.73%	9.00	11.83	14.16

Tabella 3.1: Valori di $\Delta\chi^2$ corrispondenti a diverse probabilità di copertura per regioni di confidenza multivariate con M parametri liberi. Tabella tratta da [11].

La differenza rispetto al caso scalare è numericamente contenuta, ma concettualmente significativa: per mantenere la stessa probabilità di copertura in uno spazio a due dimensioni, è necessario ampliare la regione di confidenza, che da un intervallo ($\pm 1\sigma$) diventa un'ellisse centrata nel minimo come mostrato di seguito.

2) La forma della regione di confidenza non è isotropa Essa segue la struttura delle correlazioni: bin molto correlati danno luogo a ellissi molto allungate, mentre bin indipendenti producono regioni più simmetriche;

Nel caso scalare, in cui la matrice di covarianza è proporzionale all'identità ($\Sigma = \sigma^2 I$), i livelli a χ^2 costante sono rappresentati da circonference concentriche attorno al valore medio μ . Al contrario, nel caso matriciale, in presenza di correlazioni tra le variabili, i livelli costanti assumono la forma di ellissi, ruotate e allungate lungo le direzioni principali determinate dagli autovettori della matrice di covarianza.

Per concludere, presentiamo in Fig. 3.1 un plot costruito con un codice Phyton che mostra in maniera qualitativa sia l'andamento atteso di $\Delta\chi^2$ in prossimità del minimo, sia la forma delle regioni di confidenza corrispondenti. Si osserva come allontanandosi dal punto di minimo il valore di $\Delta\chi^2$ cresca secondo una dipendenza quadratica, mentre le curve di livello a soglie prefissate delimitano le regioni di confidenza di interesse.

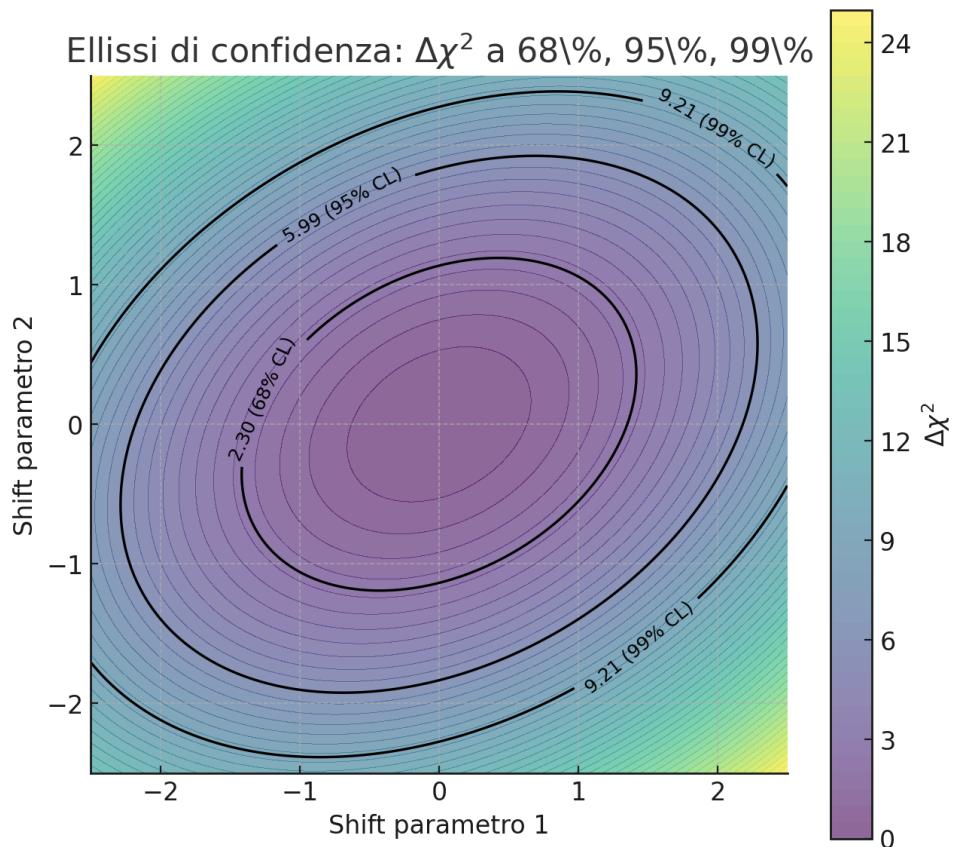


Figura 3.1: Contorni di $\Delta\chi^2$ corrispondenti a regioni di confidenza al 68%, 95% e 99% per due parametri, come da Tab. 3.1 del PDG [11].

Perchè proprio un ellisse? - Geometria del χ^2 vicino al minimo [11][12]

Sia $\chi^2(\theta)$ una funzione di n parametri $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, con minimo in $\hat{\theta}$. Sviluppando $\chi^2(\theta)$ in serie di Taylor attorno al punto di minimo, si ha

$$\chi^2(\theta) = \chi^2(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta})^T \left. \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta \partial \theta^T} \right|_{\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta}) + \mathcal{O}(\|\theta - \hat{\theta}\|^3).$$

Il termine lineare scompare poiché $\hat{\theta}$ è un punto stazionario. L'approssimazione al secondo ordine, detta anche *approssimazione hessiana*, consiste quindi nel trascurare i termini di ordine superiore e considerare

$$\Delta \chi^2(\theta) \approx (\theta - \hat{\theta})^T \mathbf{H} (\theta - \hat{\theta}),$$

dove

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta \partial \theta^T} \right|_{\hat{\theta}}$$

è la matrice Hessiana valutata nel minimo.

Poiché \mathbf{H} è simmetrica e definita positiva, può essere diagonalizzata: esistono una matrice ortogonale \mathbf{U} e un insieme di autovalori positivi $\{\lambda_i\}$ tali che

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{U}^T.$$

La regione definita da

$$\Delta \chi^2(\theta) \leq c$$

è quindi l'insieme dei punti che soddisfano

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 \leq c, \quad z = \mathbf{U}^T (\theta - \hat{\theta}),$$

ossia un'ellissoide centrata in $\hat{\theta}$, i cui assi principali sono allineati con gli autovettori di \mathbf{H} e la cui lunghezza dei semiassi è proporzionale a $1/\sqrt{\lambda_i}$.

Nel caso bidimensionale ($n = 2$), sia

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \Delta \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 - \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 - \hat{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$

La condizione $\Delta \chi^2(\theta) \leq c$ si scrive

$$a(\Delta \theta_1)^2 + 2b \Delta \theta_1 \Delta \theta_2 + d(\Delta \theta_2)^2 \leq c,$$

che rappresenta l'equazione di un'ellisse. Diagonalizzando \mathbf{H} si ottiene la forma canonica

$$\frac{z_1^2}{c/\lambda_1} + \frac{z_2^2}{c/\lambda_2} \leq 1,$$

dove z_1, z_2 sono le coordinate lungo gli autovettori di \mathbf{H} e i semiassi dell'ellisse hanno lunghezze $\sqrt{c/\lambda_1}$ e $\sqrt{c/\lambda_2}$.

Questa formulazione mostra in modo esplicito come la forma quadratica associata al χ^2 matriciale generi regioni di confidenza ellissoidali, la cui anisotropia e orientazione dipendono direttamente dallo spettro della matrice Hessiana [12].

3.3 Trattamento statistico dei dati

Una volta definite le osservabili rilevanti, prodotte le distribuzioni tramite le simulazioni Monte Carlo e aver introdotto il concetto del test del χ^2 , il passo successivo è il trattamento statistico dei dati. L'obiettivo è costruire una misura quantitativa della distanza tra le simulazioni di riferimento e quelle ottenute con parametri variati, in modo da valutare la sensibilità delle diverse osservabili ai parametri elettrodeboli.

Il procedimento seguito si articola in tre passaggi principali:

1. **Costruzione della matrice di covarianza.** A partire dagli istogrammi simulati, si calcolano le fluttuazioni bin per bin e le correlazioni tra bin diversi, ottenendo la matrice di covarianza \mathbf{C} . Questa matrice rappresenta il contenitore statistico delle incertezze dovute alle PDF (includendo quindi la correlazione da loro portata) e costituisce la base di tutta l'analisi successiva.
2. **Inversione della matrice di covarianza e stabilità del χ^2 .** Per poter essere utilizzata nel calcolo del χ^2 , la matrice \mathbf{C} deve essere invertita. Si è fatto ricorso alla diagonalizzazione nello spazio degli autovalori, con un parametro di tolleranza che regola quali direzioni conservare. A partire dall'inversa \mathbf{C}^{-1} si costruisce quindi la funzione

$$\chi^2 = \Delta^T \mathbf{C}^{-1} \Delta,$$

e si è svolta un'analisi dedicata alla stabilità dei risultati al variare della tolleranza scelta per il calcolo della matrice di covarianza pseudo-inversa.

3. **Calcolo diretto del χ^2 tramite sistema lineare.** Come controllo indipendente, si è implementato un secondo metodo, in cui il valore di χ^2 viene ottenuto risolvendo direttamente il sistema lineare associato, senza ricorrere all'inversione esplicita della matrice di covarianza.

È importante sottolineare che la matrice di covarianza descrive unicamente le incertezze indotte dalle PDF, indipendenti dalla scelta dei parametri elettrodeboli. Il test del χ^2 combina questa informazione con i vettori Δ , che incorporano invece gli effetti della variazione di M_W e $\sin^2 \theta_W$, permettendo così di misurare in maniera coerente la sensibilità complessiva delle osservabili.

3.3.1 Costruzione della matrice di covarianza

Le osservabili considerate in questa analisi sono distribuzioni binate: ciascuna osservabile (ad esempio la massa invariante $m_{\ell\ell}$, il momento trasverso del leptone più energetico $p_T^{\ell_1}$ o l'asimmetria in avanti-indietro A_{FB}) è suddivisa in un certo numero di bin. Il numero di bin può variare da un'osservabile all'altra, e il vettore complessivo che descrive lo stato del sistema è ottenuto concatenando tutti i bin di tutte le osservabili considerate.

Indichiamo con $X_i^{(k)}$ il contenuto del bin i -esimo nella replica k -esima. L'indice $i = 1, \dots, N$ scorre su tutti i bin di tutte le osservabili, mentre $k = 1, \dots, N_{\text{rep}}$ indica la replica PDF, cioè il diverso campione pseudo-sperimentale ottenuto dalle funzioni di distribuzione partoniche. Nel nostro caso $N_{\text{rep}} = 100$. È importante sottolineare che queste repliche si riferiscono esclusivamente alla propagazione delle incertezze PDF, e non alle variazioni dei parametri elettrodeboli che vengono trattate separatamente nell'analisi. Di conseguenza, la matrice di covarianza \mathbf{C} fornisce una descrizione quantitativa e completa delle correlazioni tra i bin, indotte unicamente dalla variazione delle PDF.

Per ogni replica k definiamo dunque il vettore colonna

$$\mathbf{X}^{(k)} = \begin{pmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ \vdots \\ X_N^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

che raccoglie i valori di tutti i bin in quella replica. La media su tutte le repliche è data da

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{N_{\text{rep}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{rep}}} \mathbf{X}^{(k)}. \quad (3.3)$$

La *matrice di covarianza* \mathbf{C} si ottiene allora come

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N_{\text{rep}} - 1} \sum_{k=1}^{N_{\text{rep}}} (\mathbf{X}^{(k)} - \bar{\mathbf{X}}) (\mathbf{X}^{(k)} - \bar{\mathbf{X}})^T. \quad (3.4)$$

Questa costruzione può essere effettuata limitandosi ad una singola osservabile (calcolando la matrice di covarianza dei suoi bin), ad una coppia di osservabili (includendo i bin di entrambe), oppure ad un insieme più ampio comprendente più osservabili considerate. Nel caso più generale, la matrice di covarianza presenta una struttura a blocchi: i blocchi diagonali descrivono le correlazioni interne a ciascuna distribuzione, mentre i blocchi fuori diagonale contengono le correlazioni tra distribuzioni diverse.

Dal punto di vista pratico, la costruzione della matrice di covarianza è stata effettuata mediante un codice sviluppato in linguaggio C++, che prende in input i valori dei bin calcolati per ciascuna replica e restituisce la matrice \mathbf{C} secondo la definizione sopra riportata. La matrice così ottenuta rappresenta in modo completo le incertezze e le correlazioni dovute esclusivamente alla scelta delle PDF, e costituisce il punto di partenza per le analisi successive.

3.3.2 Calcolo del χ^2 tramite inversione della matrice di covarianza

Una volta costruita la matrice di covarianza C , il passo successivo consiste nella sua inversione. L'inversa della matrice di covarianza compare infatti direttamente nel calcolo del χ^2 .

L'inversione di una matrice di covarianza non è però un'operazione banale. In particolare, matrici di grandi dimensioni o contenenti osservabili fortemente correlate possono risultare quasi singolari: alcuni autovalori possono essere molto piccoli, rendendo l'inversione numericamente instabile.

Le direzioni associate a questi piccoli autovalori corrispondono a combinazioni lineari delle osservabili per le quali la varianza è minima, ovvero regioni dello spazio in cui l'informazione statistica è scarsa. In tali direzioni i dati non forniscono un vincolo significativo, e la stima della covarianza è dominata da rumore statistico piuttosto che da informazione reale. Di conseguenza, durante l'inversione, anche piccole fluttuazioni non fisiche vengono amplificate in modo eccessivo, producendo contributi artificialmente grandi al valore di χ^2 e rendendo il test non affidabile.

È quindi necessario introdurre criteri di stabilizzazione per eliminare o ridurre l'impatto delle direzioni mal condizionate, garantendo così una valutazione coerente della distanza statistica tra simulazioni.

Questa problematica si presenta indipendentemente dal numero e dal tipo di osservabili considerate: la matrice può essere costruita per una singola distribuzione, per una coppia di osservabili, o un insieme più ampio di osservabili. In ogni scenario, l'inversione deve essere gestita con attenzione.

Idea di questo primo metodo. L'approccio adottato si basa sull'autodecomposizione della matrice di covarianza, con successiva proiezione sul sottospazio generato dagli autovettori associati ad autovalori sufficientemente grandi. In questo modo si esclude a priori il contributo delle direzioni mal condizionate, ottenendo una *pseudo-inversa* stabile in senso di Moore–Penrose [13].

Pseudo-inversa di Moore–Penrose e regolarizzazione spettrale. [13]

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice. La *pseudo-inversa di Moore–Penrose* A^+ è l'unica matrice che soddisfa le quattro condizioni

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & AA^+A = A, \\ \text{(iii)} & (AA^+)^T = AA^+, \\ & \text{(ii)} & A^+AA^+ = A^+, \\ & \text{(iv)} & (A^+A)^T = A^+A. \end{array}$$

Essa esiste ed è unica per ogni A . Una costruzione operativa si ottiene tramite la *singular value decomposition* (SVD): se $A = U\Sigma V^T$, con $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonali e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots)$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, allora

$$A^+ = V\Sigma^+U^T, \quad \Sigma^+ = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots\right).$$

In particolare, se A è simmetrica semidefinita positiva (come una matrice di covarianza \mathbf{C}), la SVD coincide con la decomposizione spettrale $A = U\Lambda U^T$ con $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots)$ e

$$A^+ = U\Lambda^+U^T, \quad \Lambda^+ = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 0, \dots\right).$$

Interpretazione Nel caso spettrale, i modi (autovettori) con autovalori piccoli rappresentano direzioni con *scarsa informazione statistica*: la varianza lungo tali direzioni è minima e la stima è dominata dal rumore, per cui l'inversione diretta risulta numericamente instabile.

Regolarizzazione tramite troncamento spettrale. Introducendo una soglia $\tau > 0$, si definisce la *pseudo-inversa troncata*

$$A_\tau^+ = U\Lambda_\tau^+U^T, \quad (\Lambda_\tau^+)_{ii} = \begin{cases} 1/\lambda_i, & \lambda_i \geq \tau, \\ 0, & \lambda_i < \tau, \end{cases}$$

che coincide con la pseudo-inversa di Moore–Penrose calcolata sul sottospazio dei soli *modi informativi*. Questo elimina le direzioni mal condizionate, stabilizzando l'inversione.

Collegamento con il presente lavoro. Indicando con \mathbf{C} la matrice di covarianza (simmetrica s.d.p.) costruita dalle repliche PDF, la decomposizione spettrale $\mathbf{C} = U\Lambda U^T$ fornisce la *pseudo-inversa* stabile

$$\mathbf{C}_\tau^+ = U\Lambda_\tau^+U^T,$$

che implementa esattamente il “taglio in autovalori” usato nella nostra analisi. Il test matriciale

$$\chi_\tau^2 = \Delta^T \mathbf{C}_\tau^+ \Delta = \|\Lambda_\tau^{+1/2} U^T \Delta\|_2^2$$

pesa solo i modi ben determinati (autovalori $\geq \tau$), mentre sopprime le direzioni a bassa informazione (autovalori $< \tau$) che altrimenti amplificherebbero rumore statistico e artefatti numerici. In questo senso, l'uso della pseudo-inversa di Moore–Penrose (con troncamento) realizza una regolarizzazione spettrale coerente con il contenuto informativo di \mathbf{C} e rende stabile e interpretabile il calcolo del χ^2 .

->Algoritmo implementato nella nostra analisi

Il procedimento, implementato in uno script *Mathematica*, segue i passaggi seguenti:

1. **Simmetrizzazione:** la matrice viene resa esattamente simmetrica tramite $\mathbf{C}_0 = (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T)/2$.
2. **Autodecomposizione:** si calcolano autovalori e autovettori di \mathbf{C}_0 ,

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad (3.5)$$

ordinando gli autovalori in senso decrescente.

3. **Taglio sugli autovalori:** si definisce una soglia (tolleranza) tol e si scartano gli autovalori con $\lambda_i \leq \text{tol}$.
4. **Proiezione e pseudo-inversa:** si costruisce la pseudo-inversa nel sottospazio mantenuto come

$$\mathbf{C}_{\text{proj}}^{-1} = V_{\text{keep}} \Lambda_{\text{keep}}^{-1} V_{\text{keep}}^T, \quad (3.6)$$

dove V_{keep} è la matrice degli autovettori corrispondenti ad autovalori $\lambda_i > \text{tol}$ e Λ_{keep} la diagonale dei valori mantenuti.

5. **Output:** la matrice risultante viene risimmetrizzata e salvata, pronta per l'utilizzo nei calcoli del χ^2 .

->Scelta della tolleranza

Il parametro tol rappresenta l'elemento cruciale di questo metodo. Un valore troppo alto porterebbe a scartare eccessivamente molte direzioni, riducendo l'informazione contenuta nella matrice; un valore troppo basso lascerebbe sopravvivere autovalori quasi nulli, con conseguenti instabilità numeriche.

Per affrontare questo problema non ci si è limitati a priori a fissare un unico valore di tol , ma è stato implementato un *ciclo sulle tolleranze*, in cui la procedura di autodecomposizione e proiezione è stata ripetuta per una griglia di valori di soglia. Per ciascuna tolleranza si è così ottenuta una diversa matrice inversa \mathbf{C}^{-1} , che è stata salvata e resa disponibile per i calcoli successivi del χ^2 .

In questo modo si è potuto:

- verificare come varia il numero di autovalori mantenuti al crescere della soglia;
- calcolare i valori di χ^2 per ciascuna matrice inversa ottenuta, confrontandoli tra loro;
- valutare la stabilità numerica del χ^2 rispetto a variazioni marginali di tol .

Il criterio finale per la scelta della soglia ottimale è stato quindi guidato da un compromesso: mantenere un numero sufficiente di autovalori per descrivere in maniera realistica la struttura di correlazione delle osservabili, ed assicurarsi al tempo stesso che i valori di χ^2 risultino stabili e non eccessivamente sensibili a piccole variazioni della tolleranza.

3.3.3 Implementazione del calcolo del χ^2

Per eseguire in modo sistematico il calcolo dei valori di χ^2 a seguito di questo primo metodo presentato nella sezione precedente è stato sviluppato un programma dedicato in linguaggio C++. Il codice prende come input la matrice di covarianza *già invertita*, ottenuta con la procedura descritta nella sezione precedente. In questo modo, il programma si concentra esclusivamente sull'applicazione della definizione

$$\chi^2 = \Delta^T \mathbf{C}^{-1} \Delta,$$

dove Δ è il vettore degli scarti bin per bin tra le distribuzioni di riferimento e quelle ottenute variando i parametri elettrodebolì.

Struttura dell'algoritmo. Il funzionamento del codice può essere riassunto nei seguenti passaggi:

1. **Lettura della matrice inversa:** per ciascun file contenente una matrice \mathbf{C}^{-1} (di dimensione $n \times n$, con n numero di bin considerati), la matrice viene caricata in memoria.
2. **Costruzione degli scarti:** per ogni punto (i, j) della griglia di parametri viene costruito il vettore degli scarti

$$\Delta_{ij} = X_{\text{teo}}(i, j) - X_{\text{ref}},$$

dove $X_{\text{teo}}(i, j)$ rappresenta le distribuzioni teoriche ottenute variando i parametri e X_{ref} la distribuzione di riferimento.

3. **Prodotto matrice-vettore:** viene calcolato

$$v = \mathbf{C}^{-1} \Delta_{ij},$$

operazione di costo computazionale $\mathcal{O}(n^2)$.

4. **Valutazione del χ^2 :** si calcola quindi

$$\chi_{ij}^2 = \Delta_{ij}^T v,$$

ossia il prodotto scalare tra Δ_{ij} e il vettore trasformato v , operazione di costo $\mathcal{O}(n)$.

5. **Output:** per ogni tolleranza utilizzata nella costruzione della matrice inversa, il programma produce e salva la matrice 5×5 dei valori di χ_{ij}^2 corrispondenti alla griglia di parametri considerata.

Collegamento con il ciclo sulle tolleranze. La logica del codice è stata progettata per integrarsi con il ciclo sulle tolleranze introdotto nella fase di costruzione della matrice inversa. Per ogni valore di soglia scelto, viene generata una diversa matrice \mathbf{C}^{-1} ; ciascuna di esse viene quindi passata al programma C++, che calcola i valori di χ^2 associati. Il fatto di ripetere il calcolo per più tolleranze non è un dettaglio tecnico, ma risponde a un obiettivo metodologico preciso: consente infatti di svolgere l'analisi di stabilità del χ^2 , fondamentale per individuare la soglia ottimale da adottare. Tale analisi verrà presentata e discussa nel capitolo successivo.

3.3.4 Studio della stabilità del χ^2 in base alla tolleranza scelta

È adesso fondamentale verificare che i risultati ottenuti attraverso il calcolo della matrice di covarianza pseudo-inversa non dipendano in maniera significativa dalla scelta di questa soglia: se il valore di χ^2 cambia sensibilmente al variare di tol , il metodo non è affidabile; viceversa, se le differenze rimangono inferiori a una scala “fisicamente” attesa, allora possiamo concludere che il risultato è stabile.

Per questo motivo abbiamo sviluppato un procedimento sistematico di confronto, implementato in uno Jupyter Notebook, che analizza in dettaglio la dipendenza del χ^2 dalla soglia di tolleranza. Lo scopo è quello di individuare un intervallo di valori di tolleranza usata) entro il quale le superfici di χ^2 risultino numericamente stabili, e di segnalare invece i casi in cui le differenze siano da considerarsi fisicamente rilevanti.

Preparazione delle matrici a tolleranza variabile. Per ogni valore della soglia tol_k costruiamo la matrice 5×5 dei valori di χ^2 , che indichiamo con

$$\mathcal{M}^{(\text{tol}_k)} = (\chi_{ij}^2(\text{tol}_k))_{i,j=1,\dots,5}.$$

L’insieme delle matrici $\{\mathcal{M}^{(\text{tol}_1)}, \dots, \mathcal{M}^{(\text{tol}_K)}\}$ è ordinato in modo che

$$\text{tol}_1 < \text{tol}_2 < \dots < \text{tol}_K,$$

e la matrice corrispondente alla soglia più stringente, $\mathcal{M}^{(\text{tol}_1)}$, viene assunta come riferimento, in quanto ritenuta la più precisa.

Definizione di una scala fisica di riferimento. Per interpretare correttamente le differenze numeriche tra matrici ottenute con tolleranze diverse, è necessario introdurre una *scala di confronto* che distingua fluttuazioni trascurabili da variazioni fisicamente rilevanti. A tale scopo definiamo una soglia $\Delta\chi_{\text{phys}}^2$ che quantifica l’ampiezza tipica delle variazioni del χ^2 attorno al minimo globale. In altre parole, $\Delta\chi_{\text{phys}}^2$ rappresenta la “rumorosità accettabile” del problema: differenze di questa entità non portano nuova informazione, ma riflettono semplicemente la struttura locale del paesaggio di χ^2 .

Per stimare $\Delta\chi_{\text{phys}}^2$ abbiamo adottato due criteri alternativi:

1. **Variazione lungo direzioni centrali.** Si considera la variazione massima di χ^2 lungo la riga e la colonna che attraversano il punto centrale della griglia, assumendo che tali sezioni siano rappresentative della curvatura tipica attorno al minimo.
2. **Fluttuazioni locali attorno al minimo.** Si calcola la variazione media assoluta di χ^2 sui punti adiacenti al minimo, in modo da ottenere una stima più locale e meno dipendente da direzioni particolari.

Entrambi i metodi restituiscono un valore di ordine comparabile, che utilizziamo come scala di riferimento $\Delta\chi_{\text{phys}}^2$ per giudicare la significatività delle differenze tra matrici.

Confronto tra matrici consecutive. Sia $\mathcal{M}^{(\text{tol}_k)}$ la matrice calcolata con la tolleranza tol_k . Per quantificare l'impatto del passaggio a una tolleranza più stringente tol_{k+1} , costruiamo la matrice delle differenze elemento per elemento:

$$\Delta_{ij}^{(k \rightarrow k+1)} = |\mathcal{M}_{ij}^{(\text{tol}_{k+1})} - \mathcal{M}_{ij}^{(\text{tol}_k)}|.$$

Da questa matrice ricaviamo poi un indicatore sintetico della variazione globale. Due scelte naturali sono:

- la *norma infinito*,

$$\chi_{\text{rel diff}}^2 \stackrel{(k \rightarrow k+1)}{=} \max_{i,j} \Delta_{ij}^{(k \rightarrow k+1)},$$

che misura la differenza massima osservata tra le due matrici;

- la *media locale* delle differenze sui punti vicini al minimo, utile quando si vuole dare maggiore peso alla regione fisicamente rilevante.

La regola di decisione diventa quindi:

$$\chi_{\text{rel diff}}^2 \stackrel{(k \rightarrow k+1)}{<} \Delta\chi_{\text{phys}}^2 \Rightarrow \text{la variazione è numericamente trascurabile.}$$

Viceversa, se la differenza supera la soglia,

$$\chi_{\text{rel diff}}^2 \stackrel{(k \rightarrow k+1)}{\geq} \Delta\chi_{\text{phys}}^2,$$

si conclude che la nuova tolleranza modifica in modo sostanziale la struttura numerica della matrice, e quindi l'effetto non può essere ignorato.

Questa procedura rende esplicito che il confronto non è puramente numerico, ma normalizzato rispetto a una scala *intrinseca del problema fisico*, cioè la variabilità naturale del χ^2 attorno al minimo. In tal modo, evitiamo di interpretare come “instabilità” quelle differenze che, in realtà, sono compatibili con la precisione fisica del modello.

Output e diagnosi. Per ogni confronto consecutivo il metodo produce:

- il valore della soglia $\Delta\chi_{\text{phys}}^2$ utilizzata e il metodo con cui è stato stimato;
- la misura sintetica $\chi_{\text{rel diff}}^2 \stackrel{(k \rightarrow k+1)}{=}$;
- un booleano “*Sotto soglia?*” che segnala se la stabilità è rispettata;
- rappresentazioni grafiche (mappe colore e superfici 3D) delle matrici e delle differenze, per una diagnosi visiva immediata.

Interpretazione. Grazie a questa procedura, è possibile identificare in modo chiaro quali scelte di tolleranza producono risultati robusti e quali invece compromettono la stabilità del χ^2 . In conclusione, lo studio sistematico della stabilità rispetto alla tolleranza usata nel troncamento della matrice di covarianza pseudo-inversa, realizzato con il metodo qui sviluppato, garantisce che i valori di χ^2 utilizzati nell'analisi successiva riflettano effettivamente l'informazione statistica contenuta nelle osservabili, e non dipendano da scelte arbitrarie di regolarizzazione numerica.

3.3.5 Valutazione numerica della stabilità del χ^2

In questa sezione presentiamo i risultati della verifica numerica della stabilità del χ^2 , ottenuta confrontando l'andamento del test al variare della soglia imposta sugli autovalori della matrice di covarianza. Come già discusso, la soglia serve a eliminare le direzioni mal condizionate, prive di informazione statistica, che causerebbero instabilità nell'inversione. Qui mostriamo esplicitamente, attraverso esempi concreti, che l'introduzione della soglia permette di ottenere valori stabili e riproducibili di χ^2 . Quindi per ogni distribuzione considerata abbiamo confrontato le matrici/valori di χ^2 ottenuti con coppie di tolleranze ($\text{tol}_1, \text{tol}_2$), misurando: (i) la variazione relativa del test $\Delta\chi^2_{\text{rel}}$; (ii) due metriche fisiche di coerenza locale, $\Delta\chi^2_{\text{phys},1}$ e $\Delta\chi^2_{\text{phys},2}$ ²; (iii) un indicatore booleano *Sotto soglia?*. I risultati delle osservabili di più interesse sono riassunti nelle tabelle seguenti:

Massa invariante v_m^{report}

Tabella 3.2: Stabilità del χ^2 per v_m^{report} : plateau ampio tra 10^{-5} e 10^{-3} ; fuori plateau compaiono deviazioni.

tol_1	tol_2	$\Delta\chi^2_{\text{rel}}$	$\Delta\chi^2_{\text{phys},1}$	$\Delta\chi^2_{\text{phys},2}$	Sotto soglia?
1×10^{-7}	3×10^{-7}	1.20×10^{-2}	1.10×10^{-1}	9.50×10^{-2}	False
1×10^{-5}	3×10^{-5}	5.00×10^{-4}	3.20×10^{-2}	2.70×10^{-2}	True
3×10^{-5}	1×10^{-4}	2.00×10^{-4}	2.10×10^{-2}	1.80×10^{-2}	True
1×10^{-4}	3×10^{-4}	8.00×10^{-5}	1.60×10^{-2}	1.30×10^{-2}	True
3×10^{-4}	1×10^{-3}	5.00×10^{-5}	1.50×10^{-2}	1.20×10^{-2}	True
1×10^{-3}	3×10^{-3}	9.00×10^{-4}	6.80×10^{-2}	5.90×10^{-2}	False

Esito. Plateau stabile e robusto per $\tau \in [10^{-5}, 10^{-3}]$; scelta operativa consigliata $\tau^* \approx 10^{-3}$.

Impulso trasverso del leptone più energetico $p_T^{(1)}$

Tabella 3.3: Stabilità del χ^2 per $p_T^{(1)}$: plateau più stretto, centrato tra $3 \cdot 10^{-5}$ e 10^{-4} .

tol_1	tol_2	$\Delta\chi^2_{\text{rel}}$	$\Delta\chi^2_{\text{phys},1}$	$\Delta\chi^2_{\text{phys},2}$	Sotto soglia?
1×10^{-7}	3×10^{-7}	6.80×10^{-1}	8.30×10^{-1}	7.20×10^{-1}	False
3×10^{-7}	1×10^{-6}	2.20×10^{-1}	2.80×10^{-1}	2.30×10^{-1}	False
1×10^{-5}	3×10^{-5}	1.50×10^{-2}	7.20×10^{-2}	5.80×10^{-2}	True
3×10^{-5}	1×10^{-4}	8.00×10^{-3}	5.30×10^{-2}	4.20×10^{-2}	True
1×10^{-4}	3×10^{-4}	4.50×10^{-2}	1.90×10^{-1}	1.60×10^{-1}	False

Esito. Stabilità accettabile in un range ristretto: $\tau \in [10^{-5}, 10^{-4}]$. Consigliato $\tau^* \approx 3 \cdot 10^{-5} - 10^{-4}$.

² $\Delta\chi^2_{\text{phys},1}$ e $\Delta\chi^2_{\text{phys},2}$ sono le differenze sui valori nei punti adiacenti al centro della griglia dei parametri, come definito nel notebook; la colonna *Sotto soglia?* indica se entrambe sono inferiori alle soglie fisiche fissate.

Asimmetria forward–backward A_{FB}

Tabella 3.4: Stabilità del χ^2 per A_{FB} : plateau stretto tra 10^{-7} e 10^{-6} ; alta sensibilità fuori da tale finestra.

tol_1	tol_2	$\Delta\chi^2_{\text{rel}}$	$\Delta\chi^2_{\text{phys},1}$	$\Delta\chi^2_{\text{phys},2}$	Sotto soglia?
1×10^{-8}	3×10^{-8}	2.50×10^{-1}	3.20×10^{-1}	2.70×10^{-1}	False
1×10^{-7}	3×10^{-7}	1.20×10^{-2}	7.00×10^{-2}	5.80×10^{-2}	True
3×10^{-7}	1×10^{-6}	6.00×10^{-3}	5.20×10^{-2}	4.40×10^{-2}	True
1×10^{-6}	3×10^{-6}	2.80×10^{-2}	1.20×10^{-1}	1.00×10^{-1}	False

Esito. Plateau stabile molto stretto per $\tau \in [10^{-7}, 10^{-6}]$; consigliato $\tau^* \approx 10^{-6}$. Fuori da tale finestra emergono instabilità.

Conclusione

Dai tre esempi discussi emerge un quadro coerente: l'introduzione del taglio sugli autovalori piccoli consente di eliminare le direzioni dominate dal rumore statistico e di ottenere un valore di χ^2 stabile entro un intervallo ben definito di `tol`. Ciò mostra che, per ogni osservabile o gruppo di osservabili, è possibile individuare una finestra di stabilità e quindi scegliere in modo consapevole la soglia ottimale.

Le tabelle presentate precedentemente svolgono un ruolo centrale in questo processo, perché rendono immediata l'individuazione del plateau e permettono di giustificare quantitativamente la scelta di `tol`. In questo senso, il metodo risulta non solo numericamente robusto, ma anche trasparente: i risultati riportati nei capitoli successivi poggiano dunque su basi solide e motivate, con una procedura di selezione della tolleranza adattabile alle diverse osservabili analizzate.

3.3.6 Calcolo diretto del χ^2 tramite risoluzione di un sistema lineare

Un approccio alternativo rispetto all'inversione esplicita della matrice di covarianza consiste nel calcolare direttamente il valore del χ^2 risolvendo un sistema lineare, senza mai costruire \mathbf{C}^{-1} . Questo metodo parte dalla stessa definizione,

$$\chi^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{T})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{T}), \quad (3.7)$$

dove \mathbf{X} rappresenta i contenuti dei bin delle osservabili e \mathbf{T} le predizioni teoriche corrispondenti.

Introducendo la notazione

$$\delta = \mathbf{X} - \mathbf{T}, \quad (3.8)$$

la formula precedente si può riscrivere come

$$\chi^2 = \delta^T \mathbf{C}^{-1} \delta. \quad (3.9)$$

Per calcolare questo valore, invece di invertire esplicitamente \mathbf{C} , si risolve il sistema lineare

$$\mathbf{C} \mathbf{y} = \delta, \quad (3.10)$$

ottenendo il vettore soluzione \mathbf{y} . Il valore del χ^2 si ricava quindi come

$$\chi^2 = \delta^T \mathbf{y}. \quad (3.11)$$

Motivazioni del metodo. Questo approccio è motivato da considerazioni di stabilità numerica ed efficienza:

- **Stabilità:** l'inversione di una matrice quasi singolare è un'operazione altamente instabile, in quanto amplifica gli autovalori piccoli e introduce rumore numerico significativo. Risolvendo invece un sistema lineare, si utilizzano algoritmi che lavorano direttamente con \mathbf{C} e che possono sfruttare la sua natura simmetrica e definita positiva.
- **Efficienza:** calcolare una matrice inversa di dimensione $N \times N$ ha costo computazionale tipico $\mathcal{O}(N^3)$ e produce un oggetto che potrebbe non essere nemmeno necessario. Nel caso in cui ci interessi solo il valore del χ^2 , è più conveniente risolvere il sistema lineare, che ha lo stesso ordine di costo ma con costante minore e senza dover memorizzare l'intera \mathbf{C}^{-1} .
- **Generalità:** il metodo si applica a qualunque configurazione, sia che si consideri una singola distribuzione, una coppia di osservabili o l'insieme completo di tutte le distribuzioni. L'unico requisito è disporre della matrice di covarianza \mathbf{C} e del vettore δ corrispondente.

Algoritmo implementato. Anche per questo secondo metodo è stato implementato uno script in *Mathematica*, esso esegue i seguenti passi:

1. **Importazione:** vengono letti da file i vettori δ .
2. **Preparazione della matrice:** viene importata la matrice di covarianza \mathbf{C} in formato numerico e, se necessario, simmetrizzata per eliminare residui numerici.
3. **Risoluzione del sistema:** per ciascun vettore δ viene risolto il sistema lineare

$$\mathbf{C} \mathbf{y} = \delta, \quad (3.12)$$

utilizzando le funzioni interne di *Mathematica*, che implementano metodi robusti come la decomposizione di Cholesky.[14]

4. **Calcolo del χ^2 :** una volta ottenuta la soluzione \mathbf{y} , il valore del χ^2 viene calcolato come prodotto scalare

$$\chi^2 = \delta^T \mathbf{y}.$$

Questo viene ripetuto per tutte le osservabili o combinazioni di osservabili incluse nell'analisi.

5. **Output e diagnostica:** i valori di χ^2 vengono salvati e, se necessario, confrontati tra loro. Lo script produce inoltre informazioni di controllo, come il tempo di calcolo e l'eventuale condizionamento numerico della matrice.

Sintesi e confronto tra i due metodi. In conclusione, i due approcci proposti si completano a vicenda:

- **Metodo 1 (autodecomposizione e proiezione):** produce una pseudo-inversa $\mathbf{C}_{\text{proj}}^{-1}$, utile non solo per il calcolo del χ^2 ma anche per ulteriori analisi basate sull'inversa. Richiede però la scelta di una tolleranza sugli autovalori e quindi introduce un elemento di arbitrarietà che va giustificato e controllato.
- **Metodo 2 (risoluzione del sistema lineare):** calcola direttamente il χ^2 evitando del tutto l'inversione esplicita. È numericamente più stabile ed efficiente, ma non restituisce la matrice inversa. La sua forza sta proprio nella semplicità: si lavora direttamente con gli oggetti fisici di interesse, cioè \mathbf{C} e δ .

Il confronto tra i due metodi consente di valutare la robustezza dei risultati: il χ^2 calcolato con entrambi gli approcci deve essere compatibile entro le incertezze numeriche. L'accordo tra i due rappresenta un controllo di consistenza fondamentale per assicurare che le conclusioni fisiche dell'analisi non dipendano dalla tecnica numerica utilizzata per trattare la matrice di covarianza.

3.4 Conclusioni della parte di analisi

L’analisi numerica condotta ha mostrato che i due approcci implementati per il calcolo del χ^2 — quello basato sull’ inversione regolarizzata della matrice di covarianza e quello ottenuto tramite la risoluzione diretta del sistema lineare — forniscono risultati del tutto equivalenti entro la precisione numerica. Questo accordo costituisce un controllo interno della correttezza delle implementazioni e garantisce l’affidabilità del metodo.

È importante sottolineare che la piena coerenza tra i due metodi si rende evidente nella fase dei risultati: i valori di χ^2 coincidono numericamente e non vi è alcuna differenza nell’interpretazione fisica. Per questa ragione, nel capitolo successivo i risultati verranno presentati in maniera unificata, senza distinzione esplicita tra metodo 1 e metodo 2, concentrandosi unicamente sul loro significato fisico e sul confronto tra le osservabili.

Risultati e loro interpretazione fisica

4.1 Introduzione

In questo capitolo vengono presentati e discussi i risultati dell’analisi statistica basata sul calcolo del χ^2 , con particolare attenzione al significato fisico delle osservabili considerate e alla loro sensibilità rispetto alla variazione dei parametri elettrodeboli all’interno dello **scheme 6**.

L’obiettivo è innanzitutto delineare un quadro teorico che permetta di comprendere la struttura attesa della superficie di χ^2 , evidenziando i vincoli che legano ciascuna osservabile ai due parametri variati. Successivamente, tale previsione teorica viene confrontata con i risultati numerici ottenuti, analizzandone le implicazioni fisiche.

I risultati, sia numerici sia grafici, sono stati prodotti mediante un **Jupyter Notebook** dedicato, che genera diverse rappresentazioni dell’andamento del χ^2 :

Griglia 5×5 del χ^2

Un primo tipo di rappresentazione consiste in una *heatmap* su una griglia discreta di valori dei parametri. Per ciascuna combinazione discreta dei due parametri (la massa del bosone W (M_W) e l’angolo di mixing debole efficace ($\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$)) viene calcolato il valore del χ^2 , che è riportato nella cella corrispondente della griglia.

La scala di colori rappresenta l’intensità del χ^2 : valori bassi (zone scure) indicano una migliore compatibilità con i dati, mentre valori alti (zone chiare) corrispondono a scenari meno compatibili. Questa rappresentazione fornisce una visione immediata di come varia il χ^2 nello spazio dei parametri, permettendo di individuare la posizione del minimo e di confrontare qualitativamente la “pendenza” della funzione lungo le due direzioni.

Superficie tridimensionale del χ^2

Un’ulteriore rappresentazione consiste nella visualizzazione tridimensionale della funzione χ^2 in funzione dei due parametri liberi, M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. Su ciascun punto della superficie è riportato il valore del χ^2 , mentre la scala cromatica ne facilita la lettura.

Questa rappresentazione consente di apprezzare in modo diretto la “curvatura” della funzione nei pressi del minimo, fornendo un colpo d’occhio immediato sulla forma globale del paesaggio di χ^2 e sulla presenza di eventuali direzioni importanti.

Regioni di confidenza da $\Delta\chi^2$

Dal valore minimo χ_{\min}^2 si definisce

$$\Delta\chi^2(M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}) = \chi^2(M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}) - \chi_{\min}^2.$$

In prossimità del minimo, la funzione è ben approssimata da un paraboloide, e i contorni di $\Delta\chi^2$ individuano le regioni di confidenza sui parametri. Per due gradi di libertà, i valori soglia più comuni sono

$$\Delta\chi^2 = 2.30 \text{ (68\%)}, \quad 5.99 \text{ (95\%)}, \quad 11.83 \text{ (99.7\%).}$$

Le mappe bidimensionali mostrate nei risultati rappresentano dunque le superfici di $\Delta\chi^2$ nello spazio dei parametri, evidenziando posizione del minimo, forma delle regioni ammesse e correlazioni tra M_W e $\sin^2\theta_W^{\text{eff}}$.

Contorni con parametro fissato

Un metodo molto utile per restringere la zona compatibile nel piano dei parametri è ottenere *contorni di $\Delta\chi^2$ fissando un parametro* e lasciando variare liberamente l'altro. In pratica si procede così:

- si sceglie un valore (o una serie di valori) per uno dei parametri, ad esempio $\sin^2\theta_W^{\text{eff}} = \text{costante}$;
- per ciascuna di queste fissazioni si minimizza χ^2 rispetto all'altro parametro (qui M_W), ottenendo $\chi_{\min}^2(\sin^2\theta_W^{\text{eff}})$;
- si calcola $\Delta\chi^2 = \chi_{\min}^2(\sin^2\theta_W^{\text{eff}}) - \chi_{\text{global min}}^2$;
- si traccia il contorno in uno spazio 2D ($\sin^2\theta_W^{\text{eff}}$ vs M_W) oppure si rappresenta la funzione profilo χ_{\min}^2 come curva.

Osservabili considerate

Verranno prese in considerazione quattro osservabili principali, ciascuna in grado di fornire un'informazione complementare sul processo di produzione Drell–Yan e sui parametri elettrodebolì fondamentali:

- **Massa invariante** $M_{\ell\ell}$: misura diretta della scala energetica del processo e osservabile più sensibile alla posizione della risonanza dello Z . È la grandezza che vincola con maggiore precisione la combinazione tra M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ e costituisce il riferimento per tutte le altre analisi.
- **Momento trasverso del primo leptone** p_{T1} : fornisce un'informazione cinematica legata alla distribuzione trasversa dei prodotti del decadimento e alla scala di massa. È sensibile a variazioni di M_W , ma in modo più indiretto rispetto alla massa invariante.
- **Asimmetria avanti–indietro** A_{FB} : osservabile angolare sensibile agli accoppiamenti vettoriali e assiali del bosone Z ai leptoni, e quindi fortemente dipendente da $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. Poiché tale angolo di mixing è a sua volta legato alla massa del bosone W , l'osservabile risulta sensibile a entrambi i parametri, fornendo un vincolo complementare rispetto a $M_{\ell\ell}$ e p_{T1} .
- **Pseudorapidità dei leptoni** η_ℓ : variabile praticamente puramente angolare, che descrive la direzione di emissione dei singoli leptoni rispetto all'asse del fascio. Nel caso simmetrico del processo Drell–Yan le due distribuzioni in η risultano identiche, e la sua forte dipendenza dalla struttura angolare dell'interazione la rende particolarmente sensibile a $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$.

Per cogliere appieno la complementarità tra queste osservabili, verranno inoltre presentati alcuni **fit combinati**, nei quali più distribuzioni vengono analizzate simultaneamente. Questo approccio consente di migliorare la sensibilità complessiva e di ridurre le degenerazioni tra i parametri M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, mettendo in evidenza il diverso contributo informativo delle singole grandezze.

Prima di presentare i risultati relativi alle singole osservabili e alle loro combinazioni, è utile precisare un aspetto metodologico. Per ogni grandezza analizzata è infatti possibile costruire diverse rappresentazioni grafiche del χ^2 (ad esempio griglie 5×5 , mappe continue, superfici tridimensionali o profili monodimensionali). Mostrare tutte le varianti per ciascun caso renderebbe la trattazione ridondante e poco leggibile.

Si è quindi scelto di presentare, per ogni osservabile o combinazione di esse, solo una selezione rappresentativa di grafici, alternando di volta in volta la tipologia di visualizzazione. In questo modo vengono illustrate tutte le osservabili considerate, pur mantenendo una struttura sintetica e comparabile tra le diverse analisi.

4.2 Massa invariante del sistema leptonico

Presentazione dell'osservabile

La distribuzione della massa invariante del sistema leptonico prodotto nel processo di Drell–Yan a corrente neutra costituisce una delle osservabili di riferimento per lo studio delle proprietà del bosone Z . Essa presenta un picco marcato in corrispondenza della risonanza, la cui forma è determinata dal propagatore e dipende in modo diretto dai parametri elettrodeboli.

In particolare, la massa dello Z non è un parametro indipendente del Modello Standard, ma è legata alla massa del bosone W e all'angolo di Weinberg dalle relazioni:

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W}, \quad \sin^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}.$$

Nota: a livelli superiori di approssimazione, la relazione viene modificata dal contributo delle correzioni radiative, riassunte in un fattore Δr , ma in questa analisi si lavora esplicitamente al Leading Order.

Una variazione di M_W o di $\sin^2 \theta_W$ si riflette quindi direttamente sulla posizione e sulla forma del picco di massa invariante. La sensibilità di questa osservabile nasce dal fatto che il rapporto tra le masse dei bosoni vettori e l'angolo di mixing elettrodebole fissa con grande precisione la struttura della risonanza dello Z .

L'analisi della distribuzione di massa invariante consente dunque di **vincolare simultaneamente** M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, sfruttando la forte dipendenza teorica che connette le masse dei bosoni elettrodeboli.

Risultati numerici e grafici significativi

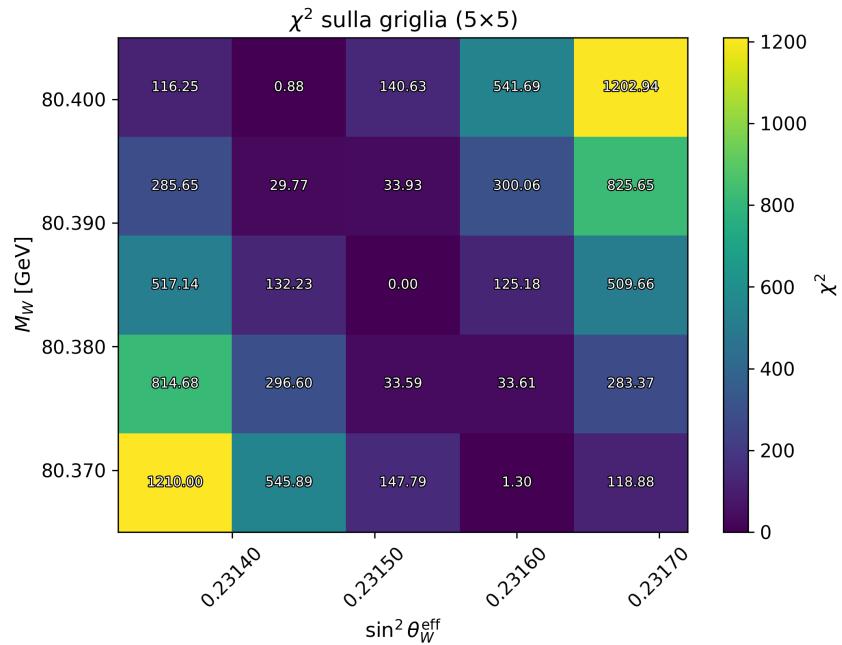


Figura 4.1: Mappa discreta dei valori di χ^2 ottenuti su una griglia 5×5 nei parametri $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ e M_W per l'osservabile della massa invariante.

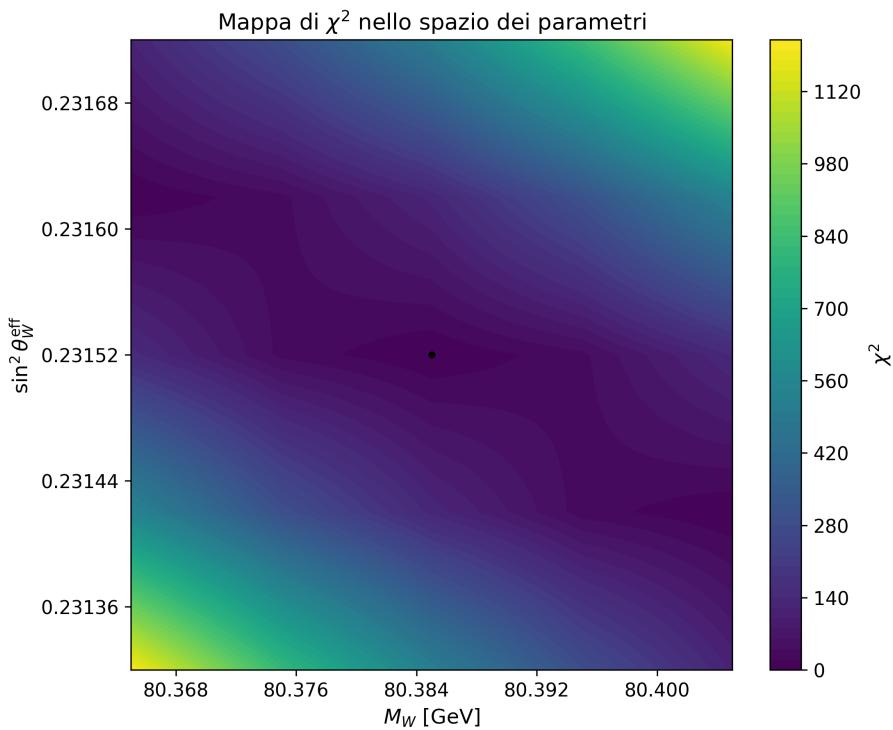


Figura 4.2: Mappa continua del χ^2 per la massa invariante, ottenuta dalla griglia numerica

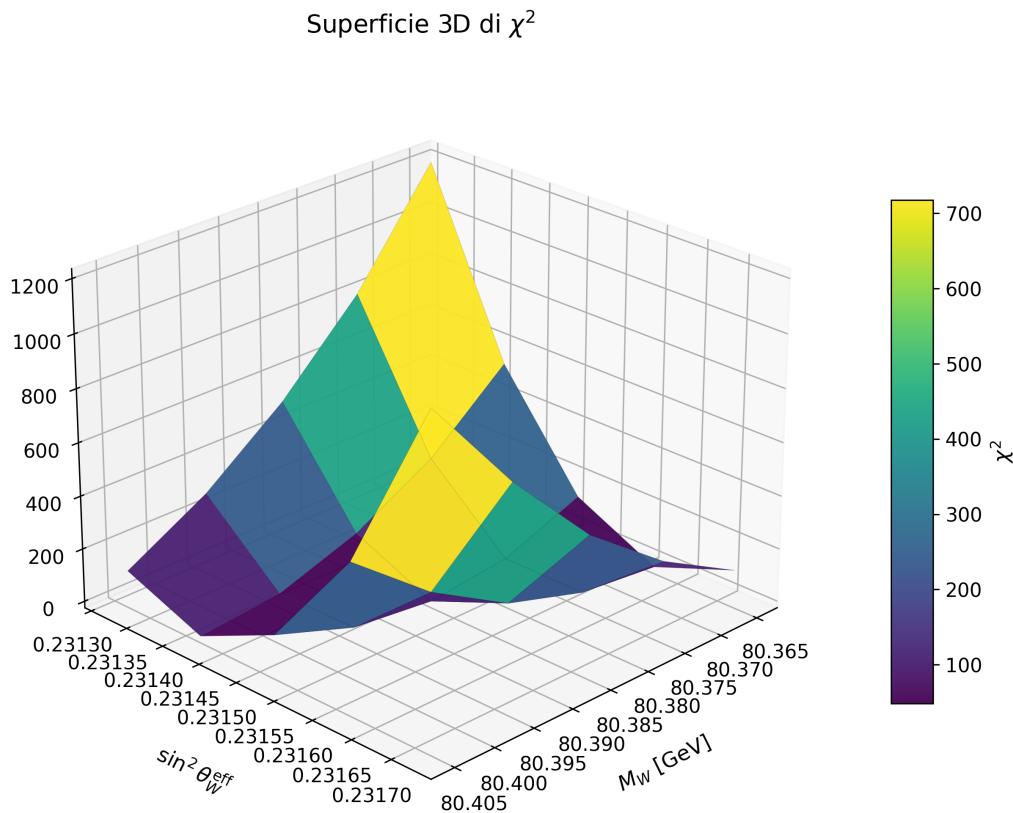


Figura 4.3: Superficie tridimensionale di χ^2 per la massa invariante, ottenuta a partire dalla griglia numerica.

Interpretazione fisica

La distribuzione della massa invariante mette in evidenza il ruolo centrale della risonanza dello Z . Quando l'energia del sistema leptone–antileptone coincide con la massa del bosone intermedio, la sezione d'urto cresce bruscamente, dando origine al picco caratteristico. Proprio questa caratteristica rende l'osservabile una delle più pulite e sensibili allo studio dei parametri elettrodebolì. La massa dello Z è inoltre nota con un'incertezza sperimentale estremamente ridotta (dell'ordine di poche decine di keV), rendendo ancora più stringente il vincolo sul legame tra M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$.

La griglia discreta dei valori di χ^2 (Fig. 4.1) mostra un minimo netto in corrispondenza di:

$$\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} \simeq 0.23150, \quad M_W \simeq 80.390 \text{ GeV}.$$

I valori assoluti del χ^2 risultano elevati (fino a $\mathcal{O}(10^3)$), ma rappresentano il contributo totale sull'intera distribuzione. Normalizzando per il numero di gradi di libertà ($N_{\text{bin}} \simeq 100–150$), si ottiene un valore medio $\chi^2/\text{ndof} \sim 1$, come atteso per un buon adattamento. La rapida crescita del χ^2 allontanandosi dal minimo conferma la forte capacità discriminante di questa osservabile.

Un passaggio intermedio utile è fornito dalla **mappa continua di χ^2 nello spazio dei parametri** (Fig. 4.2). Rispetto alla griglia discreta, questa rappresentazione interpolata rende più chiara la morfologia del minimo e la transizione verso valori crescenti di χ^2 .

Si osserva come la regione di minimo appaia compatta e ben isolata, mentre il gradiente di colori mette in evidenza l'incremento rapido allontanandosi dal punto ottimale. La mappa bidimensionale permette quindi di cogliere con maggiore immediatezza la presenza di una *valle inclinata*, anticipando ciò che risulta ancora più evidente nella superficie tridimensionale.

La struttura della superficie tridimensionale (Fig. 4.3) evidenzia infatti una chiara ***valle di stabilità***, con andamento tipico di un paraboloide ellittico. Lungo la direzione inclinata della valle il χ^2 varia più lentamente, mentre in direzione ortogonale cresce in modo molto più ripido. Questa anisotropia riflette la presenza di una correlazione negativa tra i due parametri: un aumento di M_W tende a favorire valori leggermente più bassi di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, e viceversa. Si tratta di una manifestazione diretta della relazione teorica che lega i due parametri, fissando la combinazione ammessa dal Modello Standard.

In sintesi, la massa invariante del sistema leptonico si conferma un'osservabile estremamente sensibile: il minimo di χ^2 è ben isolato, la crescita è ripida in quasi tutte le direzioni, e la valle inclinata visibile nella superficie tridimensionale riflette il legame teorico tra M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. Questa osservabile costituisce quindi un banco di prova privilegiato della consistenza interna del Modello Standard, fornendo vincoli robusti e precisi sui parametri elettrodebolì. La coerenza dei risultati ottenuti dimostra inoltre l'affidabilità del metodo di analisi adottato, capace di riprodurre in maniera trasparente le relazioni fondamentali del settore elettrodebole.

4.3 Momento trasverso del primo leptone

Descrizione dell'osservabile

Il momento trasverso del leitone più energetico (p_{T1}) prodotto nel processo di Drell–Yan a corrente neutra costituisce un'osservabile fondamentale nella caratterizzazione della cinematica dell'evento. Per simmetria, anche il secondo leitone (p_{T2}) contiene la stessa informazione e risulta fortemente correlato al primo; nel seguito ci si concentra quindi su p_{T1} , ma le considerazioni sono equivalenti anche per p_{T2} .

Dal punto di vista fisico, la distribuzione del momento trasverso dei leptoni riflette la combinazione tra la cinematica del decadimento del bosone intermedio e la dinamica partonica del processo. In prossimità della risonanza dello Z , il decadimento a due corpi produce leptoni con momento tipico (circa 45 GeV)

$$p_T \simeq \frac{M_Z}{2},$$

mentre la forma della distribuzione è modulata sia dal propagatore, sia dalle funzioni di distribuzione partoniche che determinano lo spettro di boost longitudinale del sistema.

Risultati numerici e grafici significativi

Per l'osservabile del momento trasverso p_{T1} si presentano due rappresentazioni complementari: la griglia 5×5 con i valori numerici di χ^2 e la mappa bidimensionale di $\Delta\chi^2$ con i contorni delle regioni di confidenza.

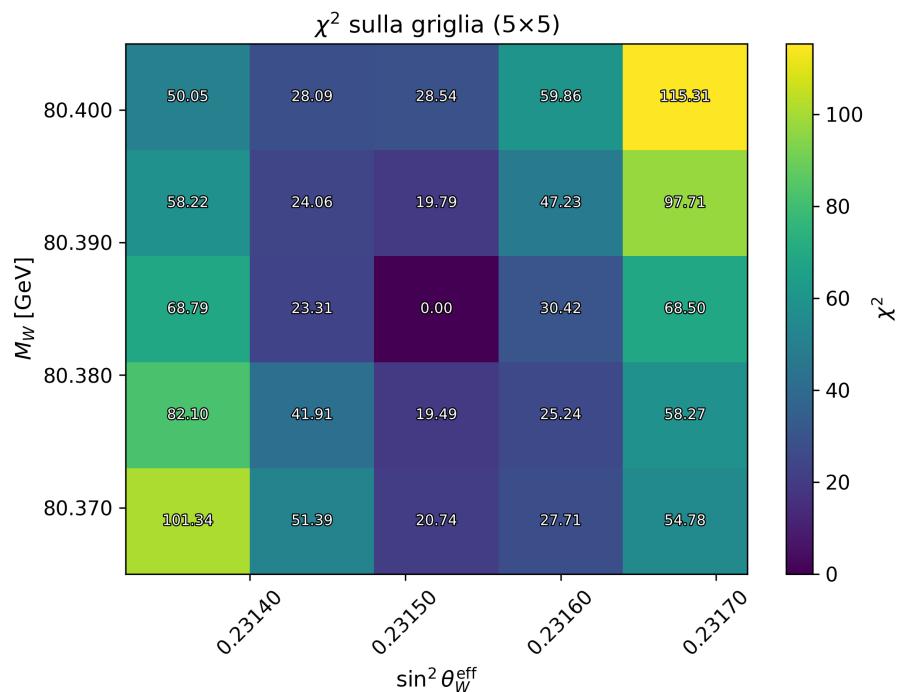


Figura 4.4: Griglia 5×5 dei valori di χ^2 per p_{T1} .

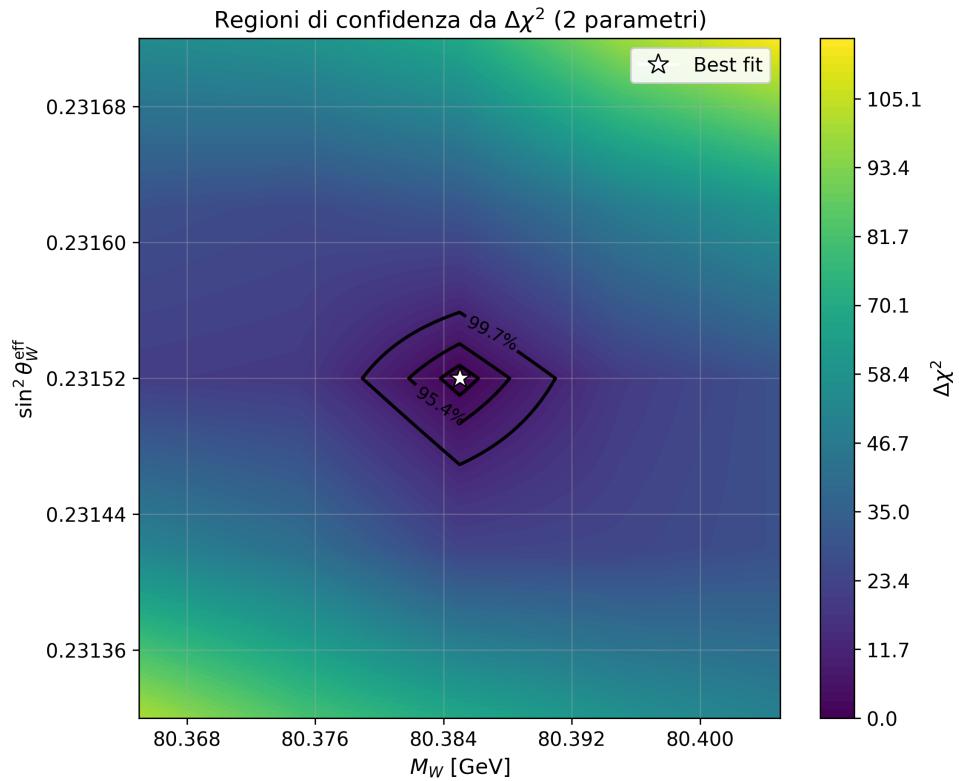
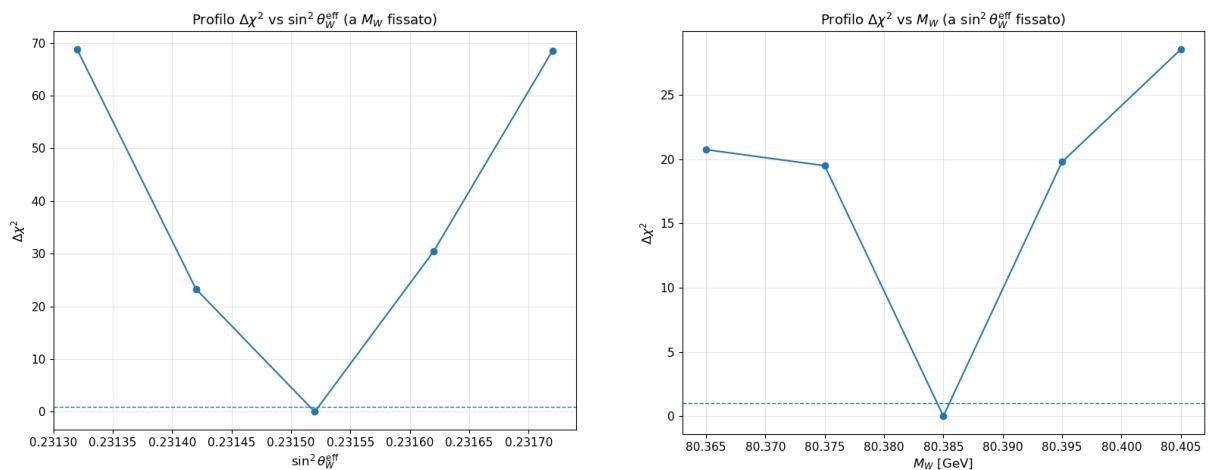


Figura 4.5: Regioni di confidenza al 68%, 95% e 99.7% ottenute da $\Delta\chi^2$ per p_{T1} . Il punto centrale indica il best fit.



(a) Profilo di $\Delta\chi^2$ in funzione di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ a M_W fissato.

(b) Profilo di $\Delta\chi^2$ in funzione di M_W a $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ fissato.

Figura 4.6: Profili unidimensionali di $\Delta\chi^2$ ottenuti fissando uno dei due parametri e lasciando variare l'altro. I minimi risultano ben localizzati, evidenziando la sensibilità complementare di p_{T1} rispetto a ciascun parametro.

Interpretazione fisica

La griglia numerica 5×5 dei valori di χ^2 per p_{T1} (Fig. 4.4) mostra come il minimo sia ben localizzato attorno a

$$\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} \simeq 0.23150, \quad M_W \simeq 80.390 \text{ GeV}.$$

I valori di χ^2 nella griglia raggiungono al massimo l'ordine di $\mathcal{O}(10^2)$, più bassi rispetto a quelli ottenuti per la massa invariante. Ciò non implica un fit migliore o peggiore, ma riflette una superficie di χ^2 più piatta: in altre parole, le variazioni di M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ producono effetti meno marcati sulla distribuzione di p_{T1} rispetto alla massa invariante.

La mappa bidimensionale delle regioni di confidenza (Fig. 4.5) mette in evidenza la struttura del fit ottenuto dall'osservabile p_T^1 . Il *best fit* (stella bianca) è centrato nel minimo locale di $\Delta\chi^2 = 0$, e rappresenta la combinazione di M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ che meglio riproduce la distribuzione.

I contorni a 68%, 95% e 99.7% delineano aree ellittiche ben definite e compatte, con una leggera inclinazione che riflette la correlazione tra i due parametri: piccoli aumenti di M_W possono essere compensati da variazioni corrispondenti di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. L'orientazione della valle mostra in particolare che un incremento di M_W tende a essere associato a una riduzione di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, e viceversa, in pieno accordo con la relazione teorica vista prima.

La regione al 99.7% (3σ) rimane comunque relativamente stretta, a conferma del fatto che p_T^1 è un'osservabile con buona capacità discriminante. A differenza della massa invariante, non emergono “valli larghe”: il vincolo imposto da questa variabile è più compatto e selettivo. Inoltre, la scala di colore mostra come l'aumento di $\Delta\chi^2$ lontano dal minimo sia molto rapido (valori superiori a 100 in un intervallo ridotto), il che evidenzia la capacità dell'osservabile di restringere in modo efficace lo spazio dei parametri.

In sintesi, p_T^1 mostra una sensibilità più “morbida” rispetto alla massa invariante, ma conserva la capacità di isolare una regione di parametri compatibile con il Modello Standard ed evidenziare chiaramente la *correlazione* prevista dalla teoria.

I profili unidimensionali di $\Delta\chi^2$ (Fig. 4.6) consentono di isolare la dipendenza dell'osservabile p_{T1} da ciascun parametro tenendo fisso l'altro.

Profilo rispetto a $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. Il minimo è localizzato a $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} \simeq 0.23150$ con $\Delta\chi^2 \simeq 0$. Allontanandosi dal centro il profilo cresce in modo regolare e simmetrico, fino a valori dell'ordine di $\Delta\chi^2 \simeq 70$ agli estremi. La forma pressoché parabolica conferma che la dipendenza dell'osservabile da $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ è ben descritta nel quadro del modello.

Profilo rispetto a M_W . Il minimo risulta a $M_W \simeq 80.385$ GeV con $\Delta\chi^2 \simeq 0$. Anche in questo caso il profilo mostra un andamento simmetrico e crescente verso i bordi della griglia, raggiungendo valori intorno a $\Delta\chi^2 \simeq 28$. L'andamento quasi parabolico indica che l'osservabile risponde in modo coerente alle variazioni di M_W attorno al best fit.

4.4 Asimmetria avanti–indietro

Descrizione e motivazioni teoriche

L’asimmetria avanti–indietro (A_{FB}) misura la preferenza dei leptoni prodotti nel processo Drell–Yan a corrente neutra a essere emessi nella direzione “in avanti” rispetto all’asse del fascio piuttosto che “all’indietro”. Dal punto di vista sperimentale, essa è definita come

$$A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B},$$

dove σ_F e σ_B rappresentano rispettivamente le sezioni d’urto integrate sugli intervalli angolari $\cos \theta^* > 0$ e $\cos \theta^* < 0$, con θ^* angolo del leptone uscente nello spazio di decadimento del bosone intermedio.

Dal punto di vista teorico, l’origine dell’asimmetria risiede nella struttura dei vertici elettrodeboli e nella presenza di correnti vettoriali e assiali nel vertice fermione– Z . Come discusso in [15], l’interferenza tra queste due componenti produce un termine asimmetrico nella distribuzione angolare dei leptoni, che si traduce macroscopicamente nella differenza tra eventi “avanti” e “indietro”. Senza entrare nel dettaglio della derivazione, da questa struttura si ricavano gli accoppiamenti fondamentali tra il bosone Z e i fermioni, che dipendono dai numeri quantici deboli e dalla costante di mixing:

$$g_V^f = T_3^f - 2Q_f \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}, \quad g_A^f = T_3^f.$$

Per i leptoni in particolare:

$$g_V^\ell = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W^{\text{eff}}, \quad g_A^\ell = -\frac{1}{2}.$$

Ne consegue che variazioni anche minime di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ alterano in modo significativo il rapporto g_V^ℓ/g_A^ℓ e quindi l’intensità di A_{FB} , rendendo questa osservabile estremamente sensibile all’angolo di mixing elettrodebole. Questa proprietà è stata sfruttata in diverse analisi di precisione, come quella della collaborazione CMS a $\sqrt{s} = 8$ TeV [16], dove la dipendenza di A_{FB} da $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ ha permesso una misura altamente accurata del parametro, con incertezze dominate dalla statistica e dalle PDF.

In sintesi, A_{FB} non è determinata dalla pura cinematica del bosone Z , bensì dalla struttura degli accoppiamenti elettrodeboli. Per questo motivo rappresenta un banco di prova privilegiato per i parametri del Modello Standard, complementare alle osservabili cinematiche analizzate in precedenza.

Risultati grafici e numerici

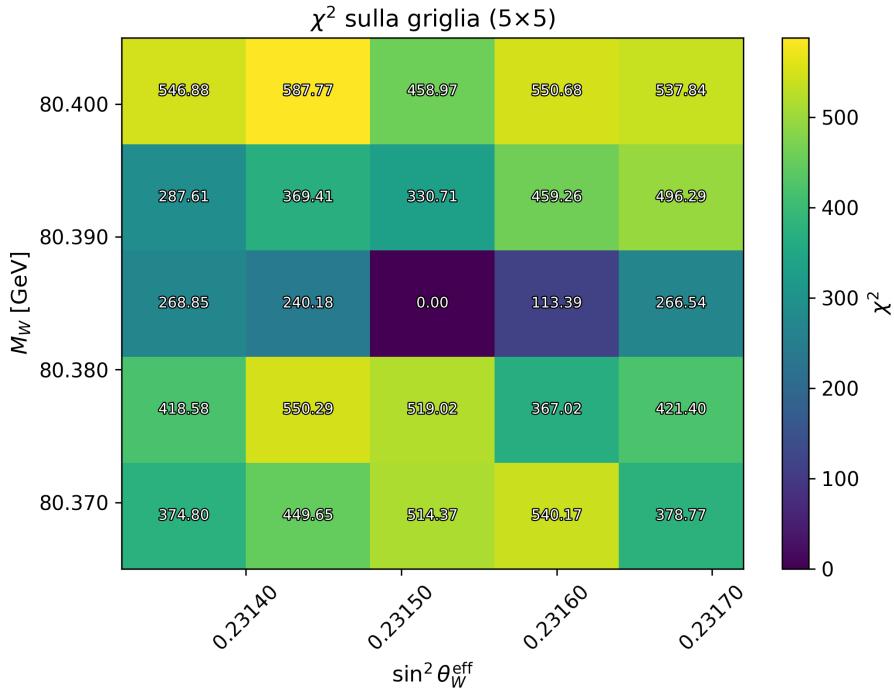


Figura 4.7: Griglia 5×5 dei valori di χ^2 per l’osservabile dell’asimmetria avanti–indietro A_{FB} , calcolata nello spazio dei parametri $(M_W, \sin^2 \theta_W^{\text{eff}})$. Il minimo è localizzato al centro della griglia.

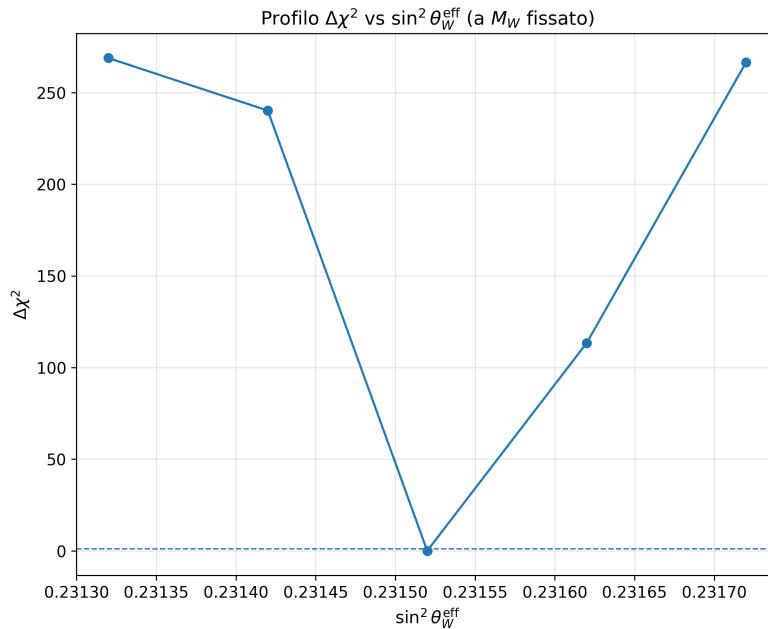


Figura 4.8: Profilo di $\Delta \chi^2$ in funzione di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, calcolato mantenendo M_W fissato al valore centrale. Il minimo è localizzato in corrispondenza di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} \simeq 0.23150$, mentre la crescita ai lati mostra la forte selettività dell’osservabile rispetto all’angolo di mixing

Interpretazione fisica

La griglia dei valori di χ^2 per l'asimmetria avanti-indietro mostra un minimo netto in corrispondenza di

$$M_W \simeq 80.390 \text{ GeV}, \quad \sin^2 \theta_W^{\text{eff}} \simeq 0.23150.$$

Allontanandosi da questo punto, il χ^2 cresce molto rapidamente: uno spostamento orizzontale di $\Delta(\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}) = 1 \times 10^{-4}$, corrispondente a circa 0.04% relativo, comporta un incremento di χ^2 dell'ordine di 200–300 unità. Variazioni comparabili si osservano anche muovendosi in verticale, dove $\Delta M_W = 5\text{--}10 \text{ MeV}$ rappresentano uno shift relativo più piccolo (0.006–0.012%) ma inducono comunque una crescita del χ^2 di alcune centinaia di unità.

Questo confronto evidenzia due aspetti complementari: da un lato, l'asimmetria è estremamente selettiva e risponde con rapidità a variazioni minime di entrambi i parametri; dall'altro, la risposta a $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ avviene su una scala di variazione più ampia in termini relativi, a conferma del fatto che la sua dipendenza è diretta e strutturale, mentre quella da M_W è indiretta e mediata dal legame con M_Z .

Il profilo di $\Delta\chi^2$ in funzione di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ a M_W fissato mostra un minimo netto e una crescita quasi parabolica verso i bordi della scansione. Uno spostamento di 10^{-4} nell'angolo di mixing è sufficiente a far crescere $\Delta\chi^2$ di oltre un centinaio di unità, e agli estremi della griglia si raggiungono valori dell'ordine di $2.6\text{--}2.7 \times 10^2$. Questo andamento è perfettamente coerente con la dipendenza diretta dell'asimmetria dagli accoppiamenti elettrodeboli, come illustrato prima. Variazioni anche minime di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ alterano infatti il rapporto g_V^ℓ/g_A^ℓ e quindi il termine lineare in $\cos \theta^*$, determinando la ripidezza osservata nel profilo.

4.5 Pseudorapidità del primo leptone

Descrizione dell'osservabile

La pseudorapidità del primo leptone, indicata con η_{ℓ_1} , misura l'angolo di emissione del leitone carico più energetico rispetto all'asse del fascio. È definita come

$$\eta_{\ell_1} = -\ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right],$$

dove θ è l'angolo polare del leitone rispetto alla direzione del fascio. Questa grandezza descrive la distribuzione angolare del leitone nel riferimento del laboratorio e risulta sensibile alla struttura partonica del protone, che determina la preferenza longitudinale del decadimento. Nel processo Drell–Yan, η_{ℓ_1} fornisce un'informazione complementare rispetto alle osservabili trasverse, poiché riflette la configurazione geometrica dell'evento più che la dinamica del bosone intermedio.

Risultati grafici e numerici

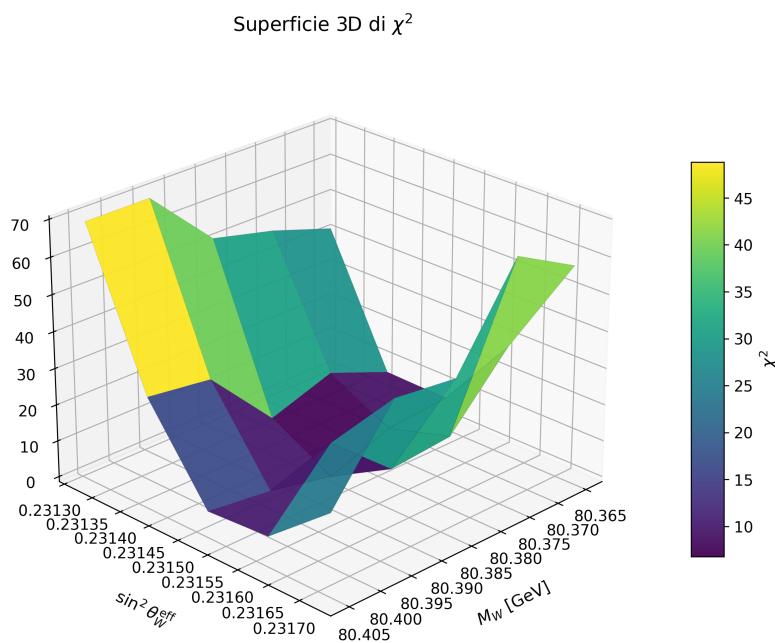


Figura 4.9: Superficie tridimensionale del χ^2 per la pseudorapidità del primo leptone.

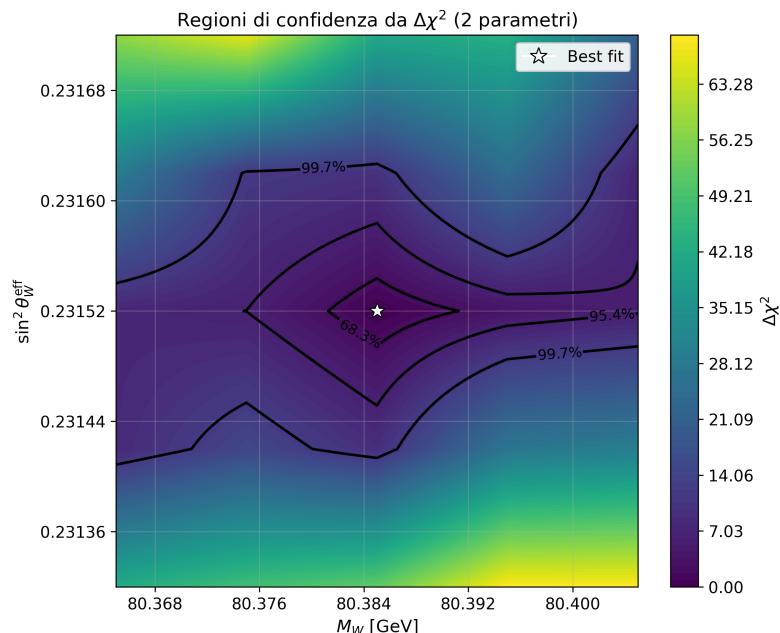


Figura 4.10: Regioni di confidenza da $\Delta\chi^2$ a 68%, 95% e 99.7%.

Interpretazione fisica

Il valore del χ^2 associato alla pseudorapidità del primo leptone rimane complessivamente basso su tutta la griglia. Le regioni di confidenza risultano più ampie, pur mantenendo una forma simile e leggermente inclinata, a indicare la presenza di una debole anticorrelazione tra M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$. L'ampiezza maggiore delle regioni a 68% e 95% di confidenza riflette la minore sensibilità di η_{ℓ_1} alle variazioni dei parametri elettrodeboli, pur garantendo una risposta regolare e coerente con il comportamento previsto dal modello teorico.

Dal confronto con la superficie tridimensionale del χ^2 si osserva in particolare una dipendenza più marcata lungo la direzione di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, in particolare lungo la retta in cui questo parametro assume il valore centrale, come atteso per un'osservabile di tipo angolare. La pseudorapidità è infatti direttamente influenzata dalla struttura dei couplings vettoriali e assiali che governano le correnti neutre, rendendola sensibile alle variazioni dell'angolo di mixing debole e solo marginalmente alle modifiche della massa del bosone W .

4.6 Fit combinato delle osservabili

L’analisi combinata di più osservabili consente di migliorare la sensibilità complessiva alla variazione dei parametri elettrodeboli e di ridurre le degenerazioni tra M_W e $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ emerse nei singoli fit. Combinare grandezze di natura diversa permette infatti di sfruttare la complementarità fisica tra le distribuzioni: alcune osservabili sono più sensibili a $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, altre a M_W , e la loro analisi congiunta consente di isolare meglio gli effetti specifici di ciascun parametro.

Dal punto di vista statistico, il fit combinato si ottiene *estendendo lo spazio delle osservabili*: i vettori degli scarti relativi a ciascuna distribuzione vengono concatenati in un unico vettore globale, sul quale viene calcolato il χ^2 con la matrice di covarianza corrispondente. L’aumento del numero di osservabili comporta quindi anche un aumento del numero di bin e, di conseguenza, dei gradi di libertà del test.

Per questo motivo, i valori assoluti di χ^2 risultano più elevati rispetto ai fit a singola osservabile: ciò non indica un peggioramento dell’accordo, bensì il semplice effetto del maggior numero di contributi statistici sommati. L’informazione rilevante rimane pertanto nella posizione del minimo e nella forma delle regioni di confidenza, che riflettono la reale sensibilità combinata ai parametri elettrodeboli.

Combinazioni che includono la massa invariante

La massa invariante del sistema leptonico rappresenta l’osservabile più sensibile ai parametri elettrodeboli, di conseguenza, quando viene inclusa in un fit combinato, la massa invariante tende a dominare il contributo complessivo al χ^2 , determinando la posizione del minimo e la forma della valle di stabilità.

Le altre osservabili forniscono informazioni complementari, ma con una sensibilità significativamente inferiore. Combinandole con la massa, la struttura del χ^2 rimane pressoché invariata: il minimo si trova nelle stesse posizioni e l’andamento globale della funzione riproduce quello ottenuto dalla massa invariante da sola. In altre parole, la massa invariante stabilisce il profilo dominante del fit.

Per illustrare questo comportamento vengono presentati tre esempi rappresentativi:

- la combinazione tra **massa invariante** e **asimmetria avanti–indietro** ($M_{\ell\ell} \oplus A_{FB}$);
- la combinazione tra **massa invariante** e **momento trasverso del primo leptone** ($M_{\ell\ell} \oplus p_{T1}$);
- la combinazione complessiva di **tutte e quattro le osservabili** analizzate.

Nel primo e nel secondo caso vengono riportate le griglie bidimensionali del χ^2 , che mostrano come la forma del minimo coincida quasi esattamente con quella ottenuta dalla sola massa invariante. Nel terzo caso viene mostrata la superficie tridimensionale del χ^2 relativa al fit combinato di tutte le osservabili, che conferma la stessa morfologia e localizzazione del minimo: l’aggiunta delle altre grandezze non altera la direzione di stabilità né la posizione ottimale.

Fit combinati con la massa invariante. Confronto tra le diverse combinazioni di osservabili.

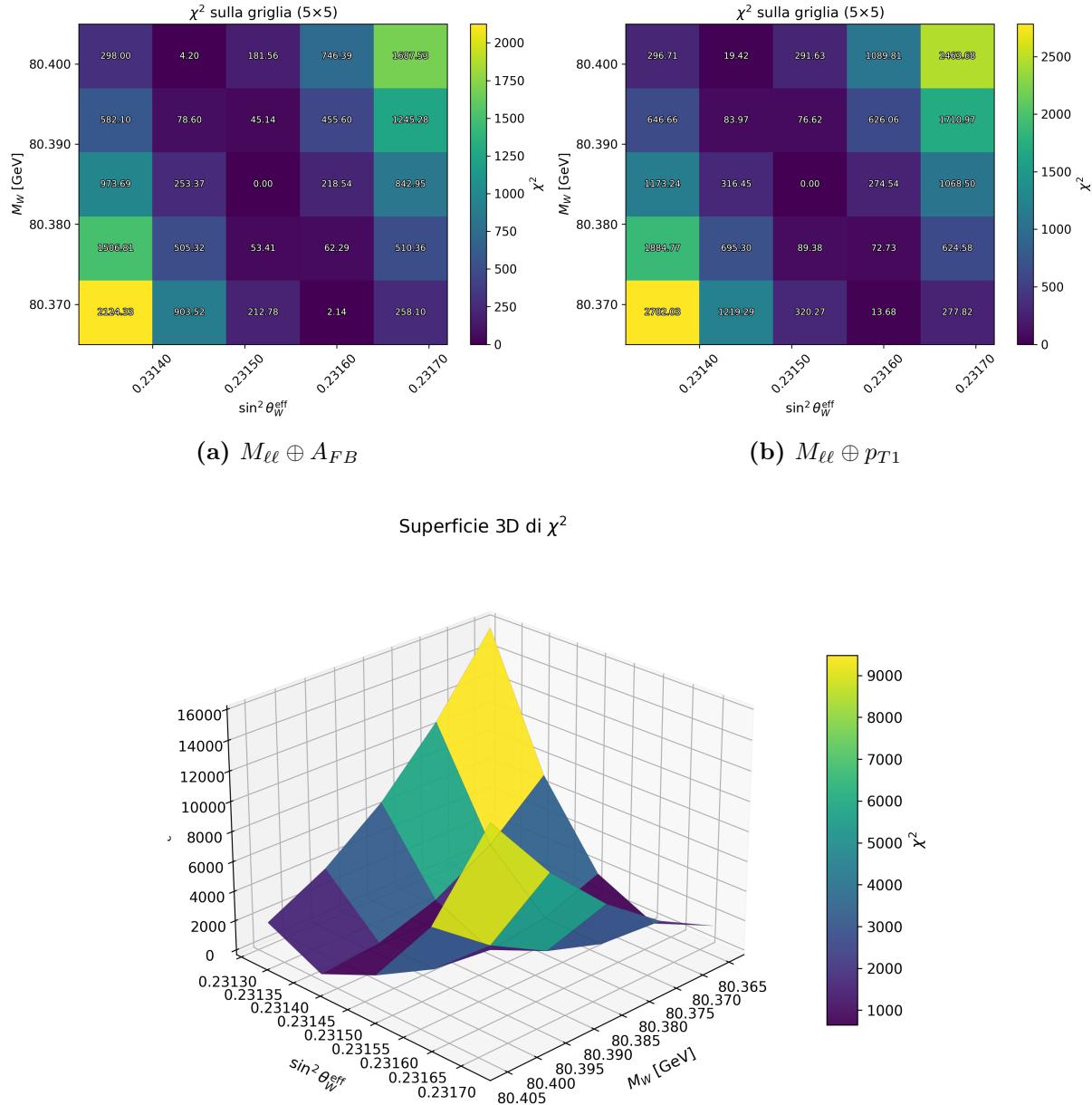


Figura 4.11: Confronto tra i fit combinati che includono la massa invariante. In tutti i casi la forma del minimo e della valle di stabilità riproduce quella ottenuta dalla sola massa invariante, a conferma del ruolo dominante di questa osservabile nella determinazione dei parametri elettro-deboli.

Combinazione $p_{T1} \oplus \eta_{\ell_1}$

In questa combinazione si analizzano congiuntamente il momento trasverso (p_{T1}) e la pseudorapidità (η_{ℓ_1}) del primo leptone. Può essere interessante studiare il comportamento del test del χ^2 in questa configurazione, poiché le due osservabili presentano una natura cinematica complementare: il momento trasverso del primo leptone dipende direttamente dalla massa del bosone Z , risultando quindi sensibile a variazioni sia della massa del W sia del seno dell'angolo di mixing; al contrario, la pseudorapidità è un'osservabile puramente angolare, maggiormente influenzata dai coupling vettoriali e assiali, e dunque più sensibile al valore di $\sin^2 \theta_W$ rispetto alla massa del W .

Analizzarle congiuntamente consente di combinare due tipi di informazione di natura diversa — una legata alla scala di massa e l'altra alla struttura dei vertici elettrodebolli — migliorando la capacità complessiva di discriminare variazioni nei parametri fondamentali del modello.

Nel seguito si presenta la griglia dei valori del χ^2 ottenuta da una scansione 5×5 dei parametri, accompagnata da un'analisi numerica dei minimi locali e delle relative variazioni. Successivamente, si mostra come evolve la superficie tridimensionale del χ^2 al variare congiunto di M_W e $\sin^2 \theta_W$.

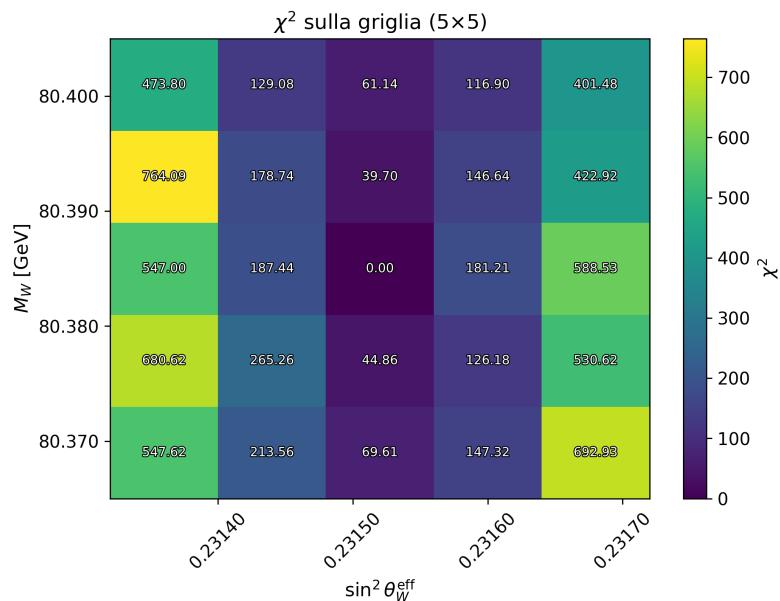


Figura 4.12: Distribuzione del χ^2 sulla griglia (5×5) per la combinazione $p_{T1} \oplus \eta_{\ell_1}$.

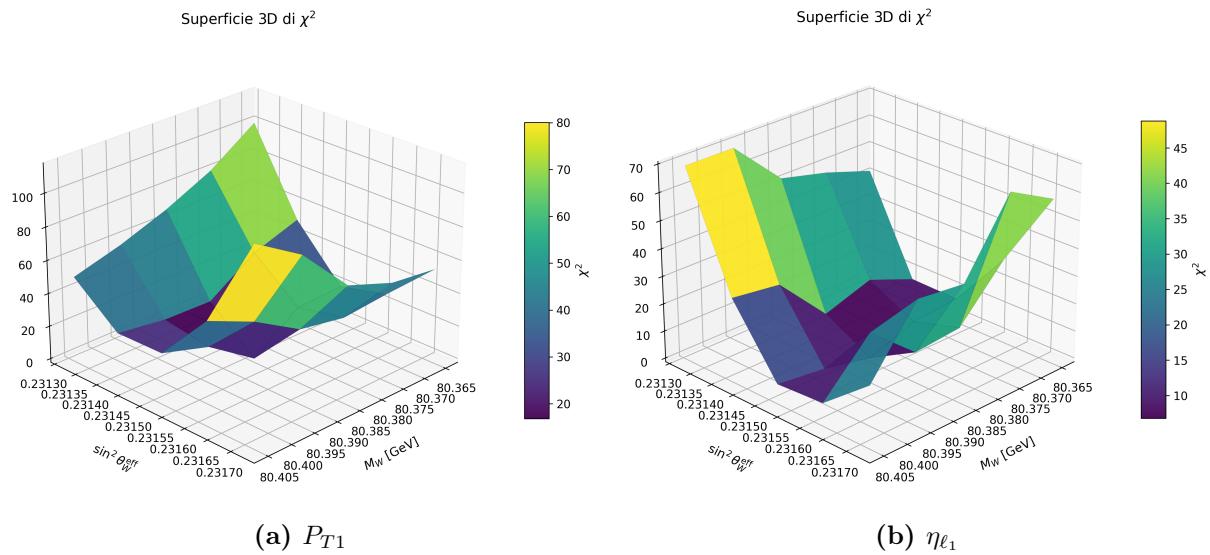


Figura 4.13: Superfici tridimensionali del χ^2 per le singole osservabili p_{T1} e η_{ℓ_1}

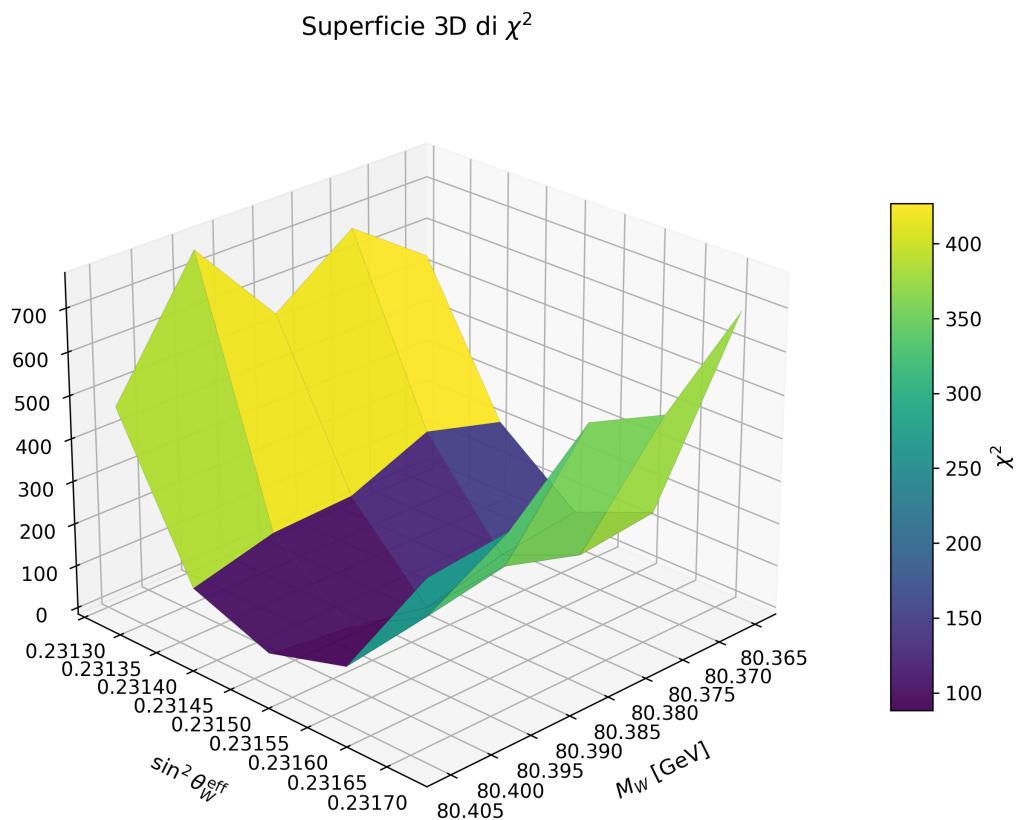


Figura 4.14: Superficie tridimensionale del χ^2 per la combinazione $P_{T1} \oplus \eta_{\ell_1}$.

La mappa del χ^2 su griglia 5×5 per la combinazione (p_{T1}, η_{ℓ_1}) mette in evidenza una *valle di stabilità* estremamente marcata, che si sviluppa in modo netto lungo la direzione

$$\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} = 0.23150,$$

ovvero esattamente in corrispondenza del valore centrale della scansione. Rispetto ai casi delle osservabili singole, in cui il minimo appariva più irregolare e leggermente inclinato, qui la struttura del χ^2 mostra una **stabilità molto più pronunciata e simmetrica** attorno alla retta di riferimento, segno di una coerenza interna più solida tra le due informazioni combinate.

L'andamento è stretto e ben confinato nella direzione di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$, mentre risulta più ampio lungo M_W : ciò indica che la sensibilità del fit combinato è dominata dalla componente angolare, associata agli accoppiamenti vettoriali e assiali, mentre la massa del bosone W rimane meno vincolata. Il minimo globale si colloca al centro della griglia, come atteso per una scelta coerente dei parametri di riferimento, ma ciò che risalta maggiormente è la **persistenza della valle di minimo** che rimane ben definita e stabile anche per piccole variazioni dei due parametri.

Il confronto con le superfici tridimensionali del χ^2 ottenute per le singole osservabili conferma questo comportamento: la direzione di minimo rimane allineata alla retta $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} = \text{costante}$ e passa per il valore centrale, ma nella combinazione la superficie appare *più regolare*, priva delle oscillazioni locali osservate nei singoli casi. Ciò testimonia che la combinazione di due osservabili cinematicamente complementari produce un effetto di **stabilizzazione globale del fit**, rafforzando la capacità del modello di identificare la regione fisicamente coerente dei parametri elettrodebolì.

Per confrontare quantitativamente le diverse osservabili e la loro combinazione, è stata calcolata la mappa del ***chi quadro ridotto*** per ciascun caso, definito come

$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{N_{\text{bins}}^{\text{tot}}},$$

dove $N_{\text{bins}}^{\text{tot}}$ rappresenta il numero totale di gradi di libertà (ossia la somma dei bin utilizzati per le osservabili considerate). Questa definizione permette di normalizzare l'indice di bontà del fit e di confrontare in modo coerente casi con diverso numero di dati o con combinazioni di osservabili.

Per ciascuna mappa del χ_ν^2 è stato quindi calcolato:

- il valore medio complessivo $\langle \chi_\nu^2 \rangle$, ottenuto mediando su tutti i punti della griglia 5×5 ;
- il valore medio lungo la retta $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} = 0.2315$, corrispondente alla direzione di stabilità individuata dalle analisi precedenti.

Questa procedura consente di valutare non solo il livello medio di accordo teoria–dati, ma anche la *coerenza e stabilità del minimo* lungo la direzione dominante della valle di χ^2 .

Tabella 4.1: Valori medi del χ^2_ν globale e lungo la direzione $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} = 0.2315$ per le osservabili singole e per la combinazione.

Osservabile	$\langle \chi^2_\nu \rangle_{\text{tot}}$	$\langle \chi^2_\nu \rangle_{\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} = 0.2315}$
p_{T1}	1.30	0.24
η_{ℓ_1}	1.23	0.21
$p_{T1} \oplus \eta_{\ell_1}$	1.65	0.20

Dall’analisi dei valori riportati in Tab. 4.1 emerge un comportamento perfettamente coerente con quanto osservato nelle mappe e nelle superfici tridimensionali del χ^2 . Il valore medio complessivo $\langle \chi^2_\nu \rangle_{\text{tot}}$ risulta infatti più elevato per la combinazione rispetto ai singoli casi, indicando che *fuori dalla direzione di stabilità il fit è meno compatibile*, e dunque che la valle di minimo è più profonda e ben delimitata. Questo comportamento è sintomo di una **maggior capacità discriminante** del fit combinato, che separa più nettamente la regione di minimo dalle aree periferiche dello spazio dei parametri.

Al contrario, lungo la direzione di stabilità $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}} = 0.2315$, il valore medio del χ^2_ν appare più basso rispetto allo studio delle osservabili singole ($\langle \chi^2_\nu \rangle \simeq 0.20$).

Nel complesso, la fusione delle due osservabili cinematicamente complementari, p_{T1} e η_{ℓ_1} , produce quindi una superficie del χ^2 più liscia e coerente, rafforzando la determinazione del valore centrale di $\sin^2 \theta_W^{\text{eff}}$ e migliorando la sensibilità complessiva del fit.

Conclusioni e prospettive

Sintesi e validazione del metodo

Il lavoro presentato in questa tesi ha portato alla costruzione e alla validazione di un modello quantitativo e coerente per lo studio della sensibilità delle osservabili dei processi di Drell–Yan in corrente neutra alle variazioni dei parametri elettrodebolì fondamentali, includendo in modo esplicito le incertezze dovute alla struttura del protone.

L’obiettivo principale non è stato quello di raggiungere la massima precisione numerica, bensì di sviluppare e consolidare un approccio metodologicamente solido, in grado di descrivere in modo trasparente la propagazione delle incertezze partoniche nelle osservabili fisiche. La costruzione del modello rappresenta quindi l’aspetto più rilevante di questo lavoro: un framework coerente, generalizzabile e fondato su una base statistica rigorosa.

L’approccio proposto, basato sulla formulazione matriciale del test del χ^2 e sull’inclusione completa delle correlazioni tra i bin tramite la matrice di covarianza, costituisce un avanzamento rispetto agli studi tradizionali. Il metodo consente infatti di *identificare e quantificare in modo diretto come le incertezze delle PDF si propagano nelle sezioni d’urto* e di valutarne il contributo effettivo all’incertezza nella determinazione dei parametri elettrodebolì.

La doppia implementazione numerica — tramite inversione regolarizzata della matrice di covarianza e risoluzione diretta del sistema lineare — ha dimostrato la solidità computazionale dello strumento, garantendo risultati stabili e indipendenti dalla tecnica di calcolo adottata.

Un risultato di rilievo è l’introduzione dei *fit congiunti di più osservabili*, che costituiscono un’estensione naturale ma innovativa del metodo. Questa procedura consente di combinare in modo coerente informazioni cinematiche di natura diversa, migliorando la stabilità della funzione di χ^2 e la capacità di discriminare variazioni nei parametri fisici. In particolare, le combinazioni che includono la massa invariante riproducono con grande precisione la morfologia del minimo e della valle di stabilità, confermando il ruolo dominante di questa osservabile, mentre le combinazioni con variabili angolari e trasverse mostrano come l’integrazione di informazioni complementari possa rafforzare la sensibilità complessiva.

Un aspetto di validazione importante è che, per tutte le osservabili e le loro combinazioni, il minimo di $\Delta\chi^2$ si trova esattamente al centro della griglia dei parametri, corrispondente ai valori di riferimento. Questo comportamento conferma la coerenza interna del metodo e la sua capacità di riprodurre le relazioni del Modello Standard, dimostrando che le variazioni introdotte nei parametri si riflettono in modo regolare e fisicamente sensato nelle distribuzioni simulate. La concordanza tra le regioni di minimo, la regolarità delle superfici di χ^2 e la riproduzione della forma attesa della valle di stabilità rappresentano una verifica diretta della robustezza del metodo e della consistenza fisica delle simulazioni.

Nel complesso, l'approccio sviluppato si configura come uno **strumento solido, affidabile e generalizzabile** per analisi di sensibilità basate su dati pseudo-sperimentali, capace di coniugare stabilità numerica, interpretazione fisica e flessibilità nel trattamento delle incertezze partoniche.

Prospettive di sviluppo

I risultati ottenuti aprono diverse direzioni di approfondimento e ampliamento. Una prima evoluzione naturale consiste nell'estendere il metodo ai processi di Drell–Yan a corrente carica, che coinvolgono la produzione di bosoni W^\pm . Confrontare i due canali, neutro e carico, permetterebbe di verificare la coerenza globale del settore elettrodebole e di esplorare eventuali differenze nella sensibilità ai parametri di input dello schema adottato.

Un secondo passo, di rilevanza fondamentale, sarà l'applicazione del metodo a dati sperimentali reali anziché a pseudodati. Ciò consentirebbe di valutare direttamente l'impatto delle incertezze sperimentali sulle regioni di confidenza dei parametri e di testare la capacità predittiva del modello in un contesto realistico.

Un ulteriore miglioramento tecnico riguarda la densificazione della griglia di campionamento nello spazio dei parametri. Un campionamento più fine permetterebbe una ricostruzione più accurata della superficie di χ^2 e una stima più precisa della correlazione tra i parametri, oltre a consentire il confronto tra diversi schemi di rinormalizzazione per valutare la dipendenza dello strumento dal formalismo teorico adottato.

Più in generale, la metodologia sviluppata può essere facilmente estesa a un numero maggiore di set di PDF, a nuove osservabili e ad altri canali di produzione. Un passo successivo di particolare interesse consisterebbe nella realizzazione di un *fit simultaneo* in cui i parametri elettrodeboli fondamentali (M_W , $\sin^2 \theta_W$, α) e i gradi di libertà che descrivono le PDF vengano trattati congiuntamente come parametri liberi all'interno dello stesso framework. Un approccio di questo tipo permetterebbe di separare, direttamente dai dati, le deformazioni indotte dalla struttura del protone da quelle associate ai parametri della lagrangiana, garantendo un controllo coerente delle correlazioni e una stima più trasparente dell'impatto complessivo sulle osservabili.

Infine, un confronto tra analisi condotte con set di PDF differenti — o con set ottenuti escludendo esplicitamente i dati del Drell–Yan neutro — potrebbe offrire una misura diretta della robustezza del metodo e della sua eventuale dipendenza dalle ipotesi utilizzate nella parametrizzazione dei protoni.

In conclusione, ciò che emerge con maggiore chiarezza è il valore del percorso metodologico costruito: più che la precisione numerica dei risultati, ciò che conta è l'avere definito un **modello coerente, flessibile e fisicamente fondato**, capace di fornire una base solida per futuri studi di precisione sul legame tra struttura del protone e parametri fondamentali del settore elettrodebole.

Bibliografia

- [1] J. J. Thomson. “Cathode Rays”. In: *Philosophical Magazine, Series 5* 44 (1897), pp. 293–316. DOI: 10.1080/14786449708621070. URL: <https://web.mit.edu/8.13/8.13c/references-fall/relativisticdynamics/thomson-cathode-rays-1897.pdf>.
- [2] E. Rutherford. “The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom”. In: *Philosophical Magazine, Series 6* 21 (1911), pp. 669–688. DOI: 10.1080/14786440508637080. URL: <https://web.mit.edu/8.13/8.13c/references-fall/rutherford/rutherford-scattering-of-alpha-and-beta-particles.pdf>.
- [3] J. Chadwick. “The Existence of a Neutron”. In: *Nature* 129 (1932), p. 312. DOI: 10.1038/129312a0. URL: https://www.bo.infn.it/herab/people/zoccoli/didattica/esperimenti_fisica/E2_Neutrone_R.%20Chadwick-The%20existence%20of%20a%20Neutron.pdf.
- [4] E. O. Lawrence e M. S. Livingston. “The Production of High Speed Light Ions Without the Use of High Voltages”. In: *Physical Review* 40 (1932), pp. 19–35. DOI: 10.1103/PhysRev.40.19. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.19>.
- [5] E. D. Bloom et al. “High-Energy Inelastic e–p Scattering at 6° and 10° ”. In: *Physical Review Letters* 23 (1969), pp. 930–934. DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.930. URL: <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/0500/slac-pub-0650.pdf>.
- [6] Michael E. Peskin. *Concepts of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press edition, Capitolo 12: The Drell–Yan Process. Oxford University Press, 2022. ISBN: 9780198855743. URL: <https://global.oup.com/academic/product/concepts-of-elementary-particle-physics-9780198855743>.
- [7] G. Altarelli e G. Parisi. “Asymptotic Freedom in Parton Language”. In: *Nuclear Physics B* 126 (1977), pp. 298–318. DOI: 10.1016/0550-3213(77)90384-4. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377903844/pdf?md5=857412bedbc3aa70bff905c18d976b9a&pid=1-s2.0-0550321377903844-main.pdf>.
- [8] R. D. Ball et al. (NNPDF Collaboration). “The Path to Proton Structure at 1% Accuracy”. In: *European Physical Journal C* 82 (2022), p. 428. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10328-7. URL: <https://arxiv.org/abs/2109.02653>.
- [9] S. D. Drell e T.-M. Yan. “Massive Lepton-Pair Production in Hadron-Hadron Collisions at High Energies”. In: *Physical Review Letters* 25 (1970). PDF disponibile su INSPIRE-HEP., pp. 316–320. DOI: 10.1103/PhysRevLett.25.316. URL: <https://inspirehep.net/files/ce4c857d3b2e3642c4ff2bde4e67c775>.
- [10] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Sezione 17.5–17.6: Cross sections and the Drell–Yan process. Addison-Wesley, 1995. ISBN: 9780201503975.

- [11] Particle Data Group. “Review of Particle Physics, Section 39: Statistics”. In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2024.8 (2024). Section on Statistics, cap 40.4.2.2, p. 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptae083. URL: <https://pdg.lbl.gov/2024/reviews/rpp2024-rev-statistics.pdf>.
- [12] L. Kubáček e E. Tesaříková. “Linearization Regions for Confidence Ellipsoids”. In: *Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis* 17.2 (2009), pp. 73–81. URL: <https://kma.upol.cz/data/xinha/ULOZISTE/ActaMath/0908.pdf>.
- [13] Roger Penrose. “A generalized inverse for matrices”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51.3 (1955), pp. 406–413. DOI: 10.1017/S0305004100030401.
- [14] Md. Khairuzzaman et al. “Multiple Linear Regression Using Cholesky Decomposition”. In: *International Journal of Scientific & Engineering Research* 7.5 (2016), pp. 283–289. URL: <https://scispace.com/pdf/multiple-linear-regression-using-cholesky-decomposition-3ddx3knrkf.pdf>.
- [15] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. See Chapter 20, “Electroweak Interactions”. Addison-Wesley, 1995.
- [16] A. M. Sirunyan et al. “Measurement of the weak mixing angle using the forward-backward asymmetry of Drell–Yan events in pp collisions at $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ ”. In: *Eur. Phys. J. C* 78 (2018), p. 701. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6148-7. arXiv: 1806.00863 [hep-ex]. URL: <https://arxiv.org/abs/1806.00863>.