CAPITOLO 1

Sistemi di equazioni lineari

Gli oggetti che studieremo nel corso sono *le equazioni lineari*, ossia equazioni del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

per $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. (Il simbolo $\mathbf{R}$ indica l'insieme dei numeri reali, che verranno propriamente definiti nel corso di analisi, e $\mathbf{N}$ indica l'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ dei numeri naturali.)

Per esempio

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4$$

è una equazione lineare. Ma anche

$$0 = 2 \text{ e } x_1 = 3$$

sono equazioni lineari.

Nelle prime lezioni ci concentreremo sullo studio dei sistemi di equazioni lineari. Come vedrete spesso durante la vostra carriera accademica, una strategia molto efficace per la risoluzione di un problema fisico/matematico complicato è quella di tradurlo nel linguaggio dell'algebra lineare. Questo è uno dei principali motivi per cui studiare questi sistemi di equazioni in dettaglio è molto importante.

Definizione 1.1. Un sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è un numero finito di equazioni lineari

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Esempio 1.2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 7 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 1 \end{cases}$$

è un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite.

Per motivi pratici preferiremo scrivere solamente i numeri a_{ij} e b_k associati a tale sistema. Li ordiniamo a formare una tabella di numeri disposti in righe e colonne, cioè una *matrice*.

Definizione 1.3. La *matrice dei coefficienti* associata al sistema (1) è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La *matrice completa* del sistema (1) è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Esempio 1.4. La matrice completa associata al sistema dell'Esempio 1.2 è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Il nostro primo obiettivo sarà quello di individuare tecniche di risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Per adesso daremo semplicemente la seguente definizione.

Definizione 1.5. Sia $(A \mid b)$ la matrice completa di un sistema di equazioni lineari. Allora *l'insieme di soluzioni di* $(A|b)$ è

$$\mathrm{Sol}(A,b) := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\},$$

dove $\mathbf{R}^n$ è l'insieme i cui elementi sono le sequenze ordinate di n numeri reali.

Osservazione 1.6. Di solito scriveremo gli elementi di $\mathbf{R}^n$ come righe $(a_1, \dots, a_n)$ o come colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ con $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$.

Il prossimo obiettivo sarà quello di descrivere un procedimento per cui, dato $(A|b)$, si riesca a determinare l'insieme $\mathrm{Sol}(A,b)$. L'idea è di modificare il sistema in modo da determinare un sistema equivalente che sia più facile da risolvere. 'Equivalente' per noi significa che durante i vari passaggi non vogliamo cambiare l'insieme delle soluzioni.

Più precisamente:

Definizione 1.7. Diciamo che una matrice $A := (a_{i,j})$ con m righe ed n colonne è in *forma a scala*, o *a gradini*, se esiste un intero r tale che

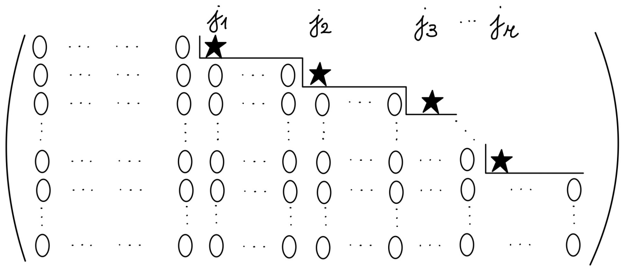
(1) $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \in \{r+1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.
(2) Per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$ esiste un intero j tale che $a_{i,j} \neq 0$.
(3) Per $i = 1, \dots, r$ sia $j_i := \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$. Allora

$$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots < j_r.$$

Se inoltre si verifica che per ogni $k \in \{1, \dots, r\}$ ed ogni $i \in \{1, \dots, k-1\}$ vale $a_{i,j_k} = 0$ allora diremo che A è in *forma a scala ridotta*.

Gli elementi a_{i,j_i} verranno chiamati *pivot*.

Esplicitamente, vogliamo che ognuna delle prime r righe sia non nulla, che le altre righe siano nulle e che ogni riga non nulla abbia il primo elemento non zero in una posizione più a destra rispetto al primo elemento non zero della riga precedente. Graficamente:



In particolare, le prime $j_1 - 1$ colonne a sinistra e le ultime $n - r$ righe in basso contengono solo zeri.

Esempio 1.8. La matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

è in forma a scala. Se si considera questa matrice come matrice completa di un sistema di equazioni lineari, allora il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ \quad 2x_2 + 4x_3 & = & 6 \\ \quad -x_3 & = & 1 \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema è $x_1 = -6, x_2 = 5, x_3 = -1$.

Quindi i sistemi di equazioni lineari tali che loro matrici completa è in forma a scala sono facili da risolvere (in maniera ricorsiva, a partire dall'ultima equazione). Adesso mostreremo che ogni sistema di equazioni lineari si può trasformare in un sistema in forma a scala senza cambiare l'insieme delle solkuzioni.

Definizione 1.9. Sia A una matrice. Allora chiamiamo le seguenti tre operazioni:

(1) scambiare due righe di A;
(2) moltiplicare una riga di A con un numero λ non zero;
(3) sommare λ volte la riga i di A alla riga k di A (con $i \neq k$);

operazioni elementari sulle righe di A.

Le operazioni elementari hanno molte applicazioni in vari contesti. Per adesso le utilizzeremo per risolvere sistemi di equazioni lineari.

Proposizione 1.10. *Sia $(A|b)$ una matrice completa di un sistema lineare, e sia $(A'|b')$ la matrice ottenuta da $(A|b)$ applicando una qualsiasi operazione elementare. Allora*

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \mathrm{Sol}(A', b')$$

DIMOSTRAZIONE. Scambiare due righe in $(A|b)$ corrisponde a scambiare due equazioni nel sistema. È chiaro che l'ordine delle equazioni non influisce l'insieme delle soluzioni, così per questa operazione abbiamo facilmente che $\mathrm{Sol}(A, b) = \mathrm{Sol}(A', b')$.

Sia ora $(x_1, \ldots, x_n)$ una soluzione del sistema $(A|b)$. Adesso moltiplichiamo un'equazione con un numero λ, determinando un nuovo sistema $(A'|b')$. Anche in questo caso è ovvio che $(x_1, \ldots, x_n)$ è anche una soluzione del sistema (A', b'). Similmente, sommando un multiplo di un'equazione ad altre equazioni troviamo che le soluzioni del vecchio sistema sono anche soluzioni del nuovo sistema. In altre parole, abbiamo sempre che

$$\mathrm{Sol}(A, b) \subset \mathrm{Sol}(A', b').$$

Se (A', b') è ottenuta da (A, b) moltiplicando la i-esima riga con λ, allora, usando che $\lambda \neq 0$ possiamo definire $(A''|b'')$ come la matrice ottenuta da (A', b') moltiplicando la $i-$esima riga con $\frac{1}{\lambda}$. Se A' è ottenuta da A sommando λ volte riga i su riga k, allora possiamo definire $(A''|b'')$ come la matrice ottenuta da (A', b') sommando $-\lambda$ volte riga i su riga k. In ambedue i casi troviamo

$$\mathrm{Sol}(A', b') \subset \mathrm{Sol}(A'', b'').$$

Abbiamo costruito $(A''|b'')$ tale che $(A''|b'') = (A|b)$. In particolare

$$\mathrm{Sol}(A, b) \subset \mathrm{Sol}(A', b') \subset \mathrm{Sol}(A, b)$$

e quindi $\mathrm{Sol}(A', b') = \mathrm{Sol}(A, b)$. □

OSSERVAZIONE 1.11. Il significato del simbolo $\subset$ non è lo stesso in tutti i testi di matematica. In queste dispense, come nella maggior parte dei testi, useremo la notazione $A \subset B$ per indicare che ogni elemento di A à anche un elemento di B. Altri autori utilizzano $\subseteq$ per indicare questa proprietà.

Per indicare che ogni elemento di A è anche un elemento di B, ma A e B non sono uguali, scriveremo $A \subsetneq B$.

Possiamo usare questo risultato per risolvere il sistema dell'Esempio 1.2:

ESEMPIO 1.12. Cominciamo con la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Sottraiamo la prima riga dalla seconda riga e troviamo

$$\mathrm{II} - \mathrm{I} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Sottraiamo la prima riga dalla terza riga e troviamo

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Sottraiamo cinque volte la seconda riga dalla terza riga e troviamo

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III} - 5\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -22 \end{array}\right)$$

Adesso dividiamo la terza riga per -22:

$$\mathrm{III}/(-22) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Adesso abbiamo trovato la forma a scala e possiamo risolvere il sistema come visto nell'esempio sopra. In alternativa possiamo trovare la forma a scala ridotta. Per fare questo, sottraiamo 4 volte la terza riga dalla seconda, e sottraiamo la terza riga dalla prima riga:

$$\mathrm{II} - 4\mathrm{III} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Adesso sottraiamo due volte la seconda riga dalla prima riga:

$$\mathrm{I} - 2\mathrm{II} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ora il sistema corrispondente è $x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = 1$ e

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La procedura utilizzata nell'esempio si chiama *eliminazione di Gauß*. Questa procedura viene descritta nella dimostrazione della seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1.13. *Sia A una matrice, allora utilizzando una serie di operazioni elementari su A si può trasformare A in una matrice in forma a scala, e volendo anche in forma a scala ridotta.*

DIMOSTRAZIONE. Se A fosse tale che $a_{ij} = 0$ per ogni i, j, cioè se fosse la matrice nulla, allora A sarebbe già in forma a scala (con $r = 0$). Altrimenti, sia j_1 il numero della colonna più a sinistra di A che contiene un coefficiente diverso da zero.

Sia i_1 il numero della riga più in alto tale che il coefficiente nella colonna j_1 è diverso da 0. Se $i_1 > 1$ allora si scambi la riga 1 con la riga i_1. A questo punto abbiamo che $a_{1j_1} \neq 0$. Adesso sia $\tilde{A}$ ottenuta da A sommando

$$-\frac{a_{ij_1}}{a_{1,j_1}}$$

volte la prima riga alla riga i per $i = 2, \ldots, m$. Questo significa che si ha

$$\tilde{a}_{i,j} := a_{i,j} - \frac{a_{ij_1}}{a_{1,j_1}} a_{1,j}.$$

Per $j < j_1$ gli elementi $a_{i,j}$ e $a_{1,j}$ sono zero e quindi $\tilde{a}_{i,j} = 0$. Per $j = j_1$ e $i > 1$ troviamo che

$$\tilde{a}_{i,j_1} = a_{i,j_1} - \frac{a_{ij_1}}{a_{1,j_1}} a_{1,j_1} = 0.$$

Cioè le prime $j_1 - 1$ colonne sono composte da soli zeri, e nella colonna j_1 c'è un unico coefficiente non zero che troviamo nella prima riga.

Adesso si applica la stessa procedura alla matrice formata dalle righe 2 fino a n di $\tilde{A}$. In quella matrice l'intera colonna j_1 è zero. Se indichiamo con j_2 l'indice della prima colonna a sinistra che contiene un coefficiente diverso da zero, si trova $j_1 < j_2$.

Ragionando ricorsivamente, per trovare la forma ridotta dobbiamo ogni volta sottrarre $\frac{a_{i,j_k}}{a_{k,j_k}}$ volte la riga k dalla riga i per $i = 1, \dots, k-1$ e $k = 2, \dots, r$. $\square$

Esempio 1.14. Consideriamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right)$$

Per trovare la forma a scala si comincia con lo scambiare le prime due righe.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right)$$

Adesso si somma la prima riga alla terza e si sottrae la prima riga dall'ultima riga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Adesso si sottrae due volte la seconda riga dalla terza e si somma la seconda riga alla quarta.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Sommando adesso la terza riga alla quarta si determina la forma a scala:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per trovare la forma ridotta si divide la terza riga per 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Adesso si somma la terza alla seconda, e si sottrae 4 volta la terza riga alla prima:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 14 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si moltiplica la prima riga per 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e si sottrae 3 volte la seconda riga dalla prima

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 31 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = -31/2x_4 - 2; x_2 = \frac{1}{2}x_4, x_3 = 3x_4$

Adesso che abbiamo stabilito che ogni matrice può essere trasformata in forma a scala, vogliamo dedurre come individuare le soluzioni del sistema, se esistono, da questa forma semplificata. Sia $(A|b)$ in forma a scala.

Risolubilità: Iniziamo considerando il caso $j_r = n + 1$. In questo caso l'ultima riga che non è identicamente zero è della forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_r \end{array}\right)$$

con $b_r \neq 0$. L'equazione corrispondente è del tipo

$$0 = b_r$$

che non ha soluzione. Quindi anche il sistema non ha soluzioni.

Soluzioni: Adesso supponiamo che valga $j_r < n + 1$. Per $i = 1, \ldots r$ troviamo che l'equazione corrispondente alla riga i è

$$a_{i,j_i}x_{j_i} + a_{i,j_i+1}x_{j_i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

con $a_{i,j_i} \neq 0$. Possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} x_{j_1} &= \frac{1}{a_{1,j_1}}(b_1 - a_{1,j_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + a_{1,n}x_n) \\ x_{j_2} &= \frac{1}{a_{2,j_2}}(b_2 - a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2,n}x_n) \\ &\vdots \\ x_{j_r} &= \frac{1}{a_{r,j_r}}(b_r - a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{r,n}x_n) \end{cases}$$

Quindi possiamo scegliere $x_{j_r+1}, \ldots, x_n$ come vogliamo e questi determinano x_{j_r}. Dopo possiamo scegliere $x_{j_{r-1}+1}, \ldots, x_{j_r-1}$ come vogliamo e questi determinano x_{j_r-1} e continuiamo.

Ricapitolando, i valori di $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ sono completamente determinati una volta che abbiamo scelto i valori per le altre variabili. Chiameremo le incognite corrispondenti alle colonne che contengono i pivot *incognite determinate*. Chiameremo le altre incognite *incognite libere*.

Unicità: La forma a scala non è unica. Aggiungendo la condizione che tutti i pivot siano 1, allora la forma a scala ridotta sarà invece unica.

PROPOSIZIONE 1.15. *Sia A una matrice $m \times n$, b una matrice $m \times 1$. Allora per* $\mathrm{Sol}(A, b)$ *ci sono tre possibilità. Può essere vuoto, consistere di un unico elemento o essere un insieme infinito.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathrm{Sol}(A, b)$ non sia vuoto. Allora se non ci sono incognite libere, la soluzione è unica e troviamo un unico elemento in $\mathrm{Sol}(A, b)$. Se c'è almeno un'incognita libera, diciamo x_i, allora l'i-esima coordinata può avere qualsiasi valore e quindi $\mathrm{Sol}(A, b)$ è infinito. $\square$

Esempio 1.16. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - 2x_7 &= 0 \\ x_3 + 6x_7 &= 2 \\ x_5 + x_7 &= 0 \end{cases}$$

in $x_1, \ldots, x_7$. Allora x_2, x_3, x_5 sono le incognite determinate, x_1, x_4, x_6, x_7 sono le incognite libere e

$$\mathrm{Sol}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ -2t_2 + 2t_4 \\ 2 - 6t_4 \\ t_2 \\ -t_4 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbf{R} \right\}$$

Dove abbiamo prima imposto $x_1 = t_1, x_4 = t_2, x_6 = t_3, x_7 = t_4$, poi risolto per x_2, x_3, x_5.