

Sistemi

Giovanni Tosini

Indice

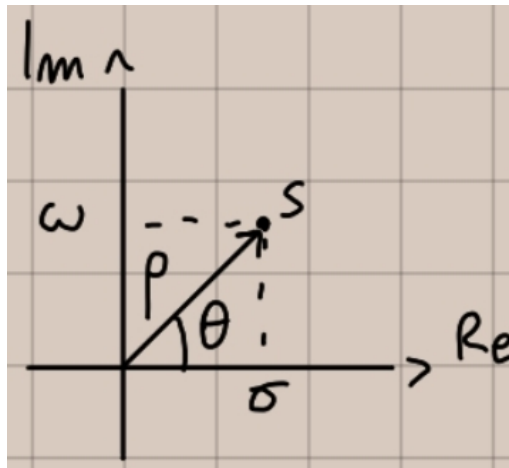
1	Numeri complessi	1
1.1	Formula di Eulero	1
1.2	Operazioni con i numero complessi	3
1.3	Teorema fondamentale dell'algebra	6
2	Segnali	9
2.1	Segnali elementari a tempo continuo	9
2.1.1	Segnale sinusoidale	9
2.1.2	Fasore	10
2.1.3	Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente	10
2.1.4	Segnale esponenziale complesso	11
2.1.5	Funzioni generalizzate	11
2.2	Segnali a tempo discreto	16
2.2.1	Impulso unitario discreto o delta di Kroneker	16
2.2.2	Gradino unitario discreto	16
2.2.3	Rampa discreta unitaria	17
2.2.4	Successione esponenziale discreta	17
2.2.5	Successione sinusoidale discreta	18
3	Sistema a tempo continuo	19
3.1	Sistemi descritti da equazioni differenziali	20
3.1.1	Soluzione di un sistema a tempo continuo descritto da un'equazione differenziale	22
3.1.2	Modi elementari	23

Capitolo 1

Numeri complessi

Un numero complesso $s = \sigma + j\omega$ con $j = \sqrt{-1}$ e $\sigma, \omega \in R$ in cui

- $\sigma = Re(s)$ parte reale
- $\omega = Im(s)$ parte immaginaria
- $C = st.c.s = \sigma + j\omega, \sigma, \omega \in R$ insieme dei numeri complessi



Forma polare dei numeri complessi, $s = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

- $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ il modulo di s con $\rho \in R^+$
- $\theta =$ argomento di s

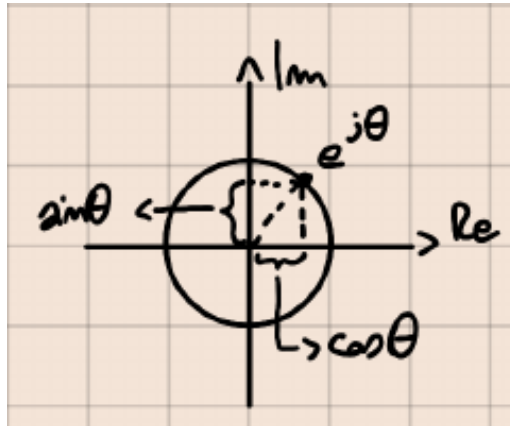
Osservazione 1 $Re(s) = \rho\cos\theta$ e $Im(s) = \rho\sin\theta$

Osservazione 2 L'argomento θ è determinato a meno di multipli interi di 2π . Imponendo $\theta \in [0, 2\pi)$ oppure $(-\pi, \pi]$ (deve essere un intervallo lungo 2π) si ottiene l'argomento principale θ che notiamo con $arg(s)$

1.1 Formula di Eulero

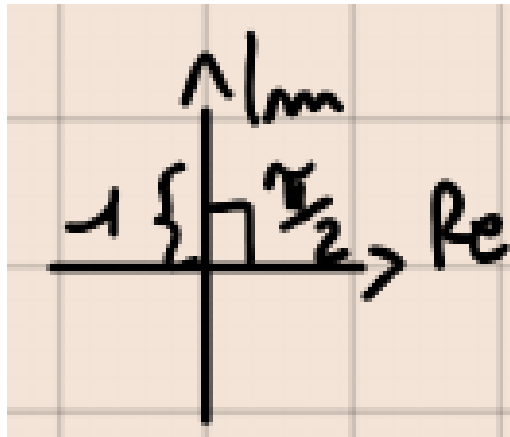
$\theta \in R, j = \sqrt{-1}$ abbiamo $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

Forma esponenziale $s = \rho e^{j\theta}$



$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

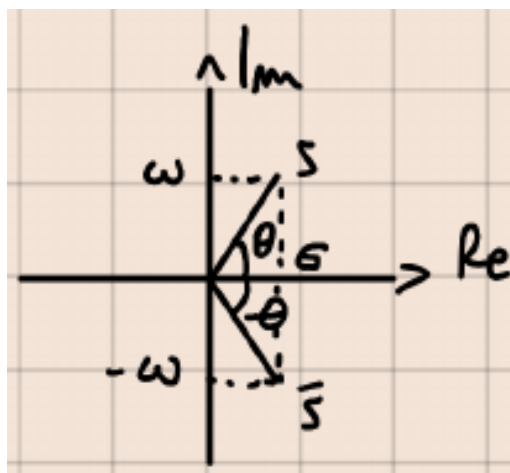
Esempio: $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$



$$s = 0 + 1j = j$$

Def: i numeri **immaginari puri** hanno la parte reale nulla

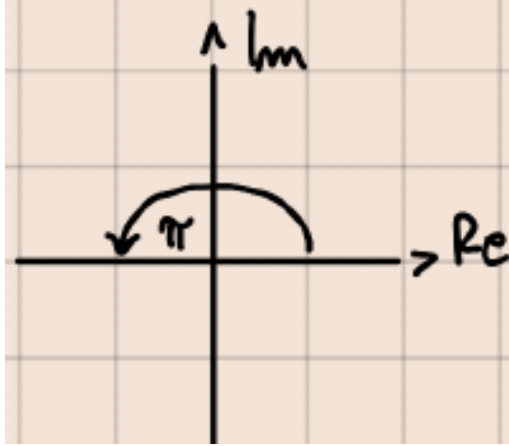
Def: dato $s : \sigma + j\omega \in C$ $\bar{s} : \sigma - j\omega$ coniugato complesso



La forma polare di \bar{s} sarà uguale a $\rho(\cos\theta - j\sin\theta)$

Osservazione $|s| = |\bar{s}|$ e $\arg(\bar{s}) = -\arg(s)$

Esempio: $e^{j\pi} = -1 = e^{j\pi} + 1 = 0$

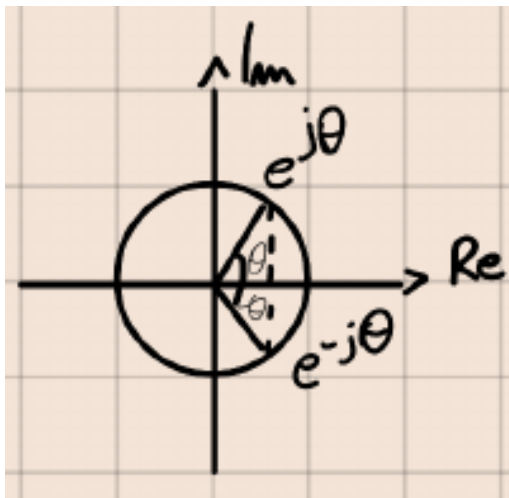


1.2 Operazioni con i numero complessi

- $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1, s_2 = \sigma_2 + j\omega_2 \in C$
- $s_1 + s_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + j(\omega_1 + \omega_2)$
- $s_1 - s_2 = \sigma_1 - \sigma_2 + j(\omega_1 - \omega_2)$

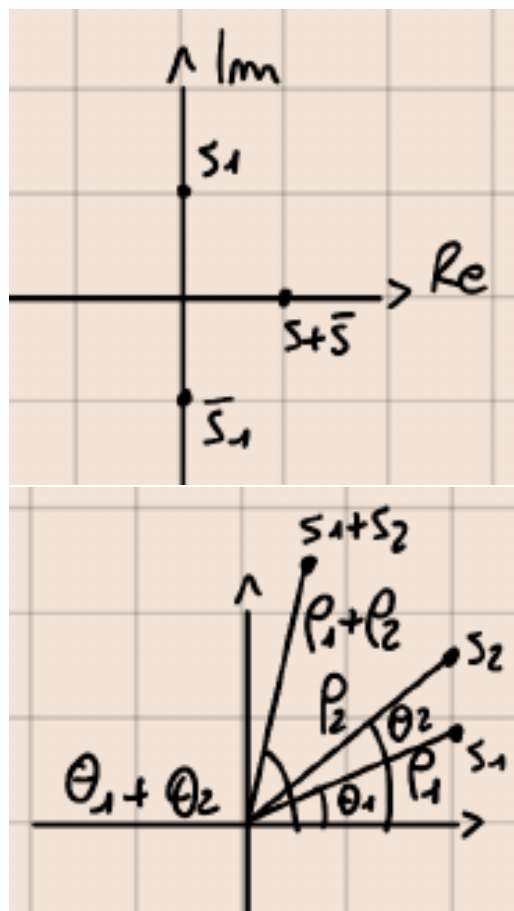
Osservazione: $Re(s) = \frac{s+\bar{s}}{2}$ e $Im(s) = \frac{s-\bar{s}}{2j}$

Per la formula di Eulero $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$



Osservazione: $2Re(s) = s + \bar{s}$ e $2jIm(s) = s - \bar{s}$

$s = \bar{s} \Rightarrow Im(s) = 0$ e $s = -\bar{s} \Rightarrow Re(s) = 0$



- $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$
- $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$
- $s_1 s_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2))$
- $s_1 s_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + j\cos\theta_1 \sin\theta_2 + j\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$
- $s_1 s_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + j(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2))$

N.B.: $\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ e $\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

Def: Dato $s \in \mathbb{C}$ il numero s^{-1} t.c. $ss^{-1} = 1$, $s^{-1} = \frac{\bar{s}}{|s|^2}$ reciproco (inverso) di s .

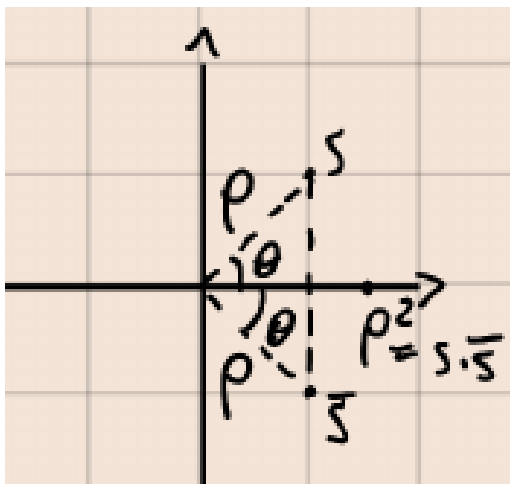
$$ss^{-1} = s \frac{\bar{s}}{|s|^2} = \frac{s\bar{s}}{|s|^2}$$

$$s\bar{s} = \rho^2(\cos(\theta - \theta) + j\sin(\theta - \theta)) = \rho^2 = |s|^2$$

Osservazione: l'argomento di un numero complesso si può chiamare anche fase.

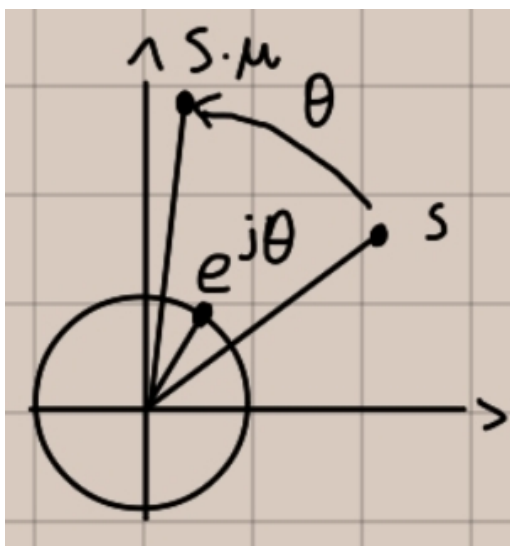
$$\frac{s_1}{s_2} = s_1 s_2^{-1} = s_1 \frac{\bar{s}_2}{|s_2|^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Osservazione: $s\bar{s} = \rho^2(\cos(\theta - \theta) + j\sin(\theta - \theta)) = \rho^2 \Rightarrow |s|^2 = s\bar{s}$



Def: $u \in C$ si dice complesso unitario se $|u| = 1$. In forma polare $u = \cos\theta + j\sin\theta$. In forma esponenziale $u = e^{j\theta}$ e $|e^{j\theta}| = 1$

Sia $u = \cos\alpha + j\sin\alpha$ con $s = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$ avremo che $su = \rho(\cos(\theta + \alpha) + j\sin(\theta + \alpha))$ (rotazione intorno all'origine)



$$s^n = \rho^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta))$$

Esempio:

$$(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$$

Radici complesse Ogni $s \in C$ ammette n distinte radici n -esime $\omega_1, \dots, \omega_{n-1} \in C$. Dobbiamo trovare $\omega \in C$ t.c. $\omega^n = s$.

$$\forall k \in [0, n-1], \omega_k \sqrt[n]{\rho}(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + j\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k))$$

Prova:

$$\begin{aligned} \omega_k^n &= (\sqrt[n]{\rho^n})(\cos(n(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)) + j\sin(n(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k))) = \\ &= \rho(\cos(\theta + 2\pi k) + j\sin(\theta + 2\pi k)) = \end{aligned}$$

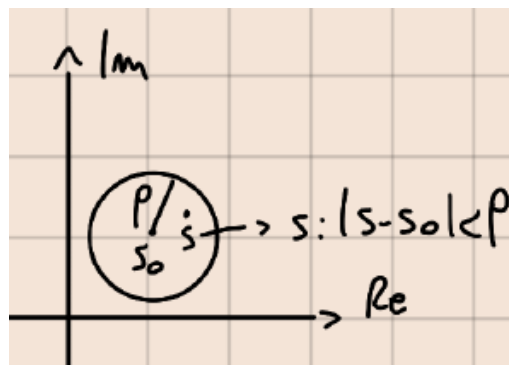
Notare che $\cos(\theta + 2\pi k)$ è equivalente a $\cos\theta$ e $\sin(\theta + 2\pi k)$ equivale a $\sin\theta$ questo $\forall k = 0, \dots, n-1$.

L'equazione: $s^4 = 1 + 2j$ ha 4 radici distinte nel campo C . Esempio: le radici complesse dell'unità

$$s^n = 1 \omega_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right) k = 0, \dots, n-1$$

Funzioni di variabile complessa Gli insieme su cui definiamo una funzione di variabile complessa f si scrivono $D(f)$, $D(f) \subseteq C$

Def: un punto $s_0 \in D(f) \subseteq C$ è interno a $D(f)$ se esiste un disco $B_\rho(s_0)$ di raggio ρ con $\rho \in R^+$ centrato in s_0 , t.c. $B_\rho(s_0) \subseteq D(f)$ dove $B_\rho(s_0) = \{s \in C.t.c. |s - s_0| < \rho\}$



Def: Un insieme $D(f) \subseteq C$ si dice aperto se tutti i suoi punti sono interni

Def: Una funzione $f : D(f) \rightarrow C$ con $D(f) \subseteq C$ aperto è una funzione complessa

Esempi di funzioni complesse con annesso dominio:

- $f(s) = s, D(f) = C$
- $f(s) = s^2, D(f) = C$
- $f(s) = \operatorname{Re}(s) + j\operatorname{Im}(s)^2, D(f) = C$
- $f(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, D(f) = C$
- funzione polinomiale, $f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ dove $P(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$ e funzione razionale $Q(s) = \sum_{k=0}^n b_k s^k$, $D = C - \lambda_1, \dots, \lambda_m$ dove λ_α è radice di $Q(s) = 0$ per $k = 1, \dots, m$

1.3 Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio $P(s)$ a coefficienti complessi di grado $n > 0$ ha n radici complesse e si può comporre come

$P(s) = a_n(s - \lambda_1)_{\mu_1}^{\mu_1}(s - \lambda_2)_{\mu_2}^{\mu_2} \dots (s - \lambda_r)_{\mu_r}^{\mu_r}$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono radici e μ_1, \dots, μ_r sono le **molteplicità** relative di ciascuna radice per cui $\mu_1 + \dots + \mu_r = n$

Osservazione Un numero λ è una radice di molteplicità μ per un polinomio $P(s)$ se e solo se $P(\lambda) = P'(\lambda) = P''(\lambda) = \dots = P^{\mu-1}(\lambda) = 0$ e $P^\mu(\lambda) \neq 0$

Capitolo 2

Segnali

Sono funzioni matematiche definite su un dominio, esistono nel dominio:

- continuo $\rightarrow R, C, \dots$;
- discreto $\rightarrow Z$.

2.1 Segnali elementari a tempo continuo

2.1.1 Segnale sinusoidale

Consiste di una funzione:

$$v : R \rightarrow R, v(t) = A \overbrace{\cos}^{[-1,1]}(\omega t + \phi) \text{ con } A, \omega, \phi \in R$$

- $A > 0$ è l'ampiezza;
- ω la pulsazione;
- ϕ la fase;
- v è periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$;
- la frequenza $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$.

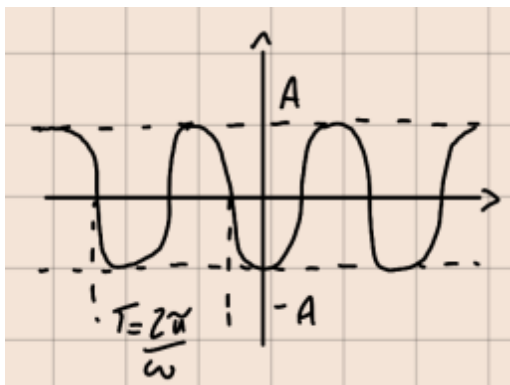


Figura 2.1: Funzione sinusoidale

2.1.2 Fasore

Una funzione:

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, v(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)} \text{ con } A, \omega, \phi \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza sarà uguale sempre ad A .

Osservazione: dalla formula di Eulero, possiamo esprimere un segnale sinusoidale

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \phi) &= A \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} = \\ &= \frac{A}{2} e^{j(\omega t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega t + \phi)} \end{aligned}$$



Figura 2.2: Fasore

2.1.3 Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.1}$$

$$v(t) = Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{2.2}$$

$$\text{con } \sigma, A, \omega, \phi \in \mathbb{R}, A > 0 \tag{2.3}$$

$$\tag{2.4}$$

non è periodico.

- per $\sigma > 0$ e $t \rightarrow \infty \Rightarrow v(t) = \infty$
- per $\sigma < 0$ e $t \rightarrow \infty \Rightarrow v(t) = 0$

¹ $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \rightarrow |e^{j\theta}| = 1$

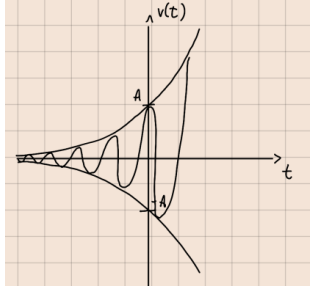


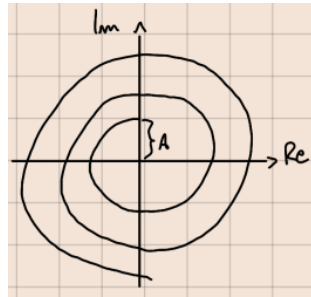
Figura 2.3: Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente

Osservazione: segnali sinusoidali, modulati esponenzialmente, si possono scrivere come combinazione lineare di fasori con una componente esponenziale:

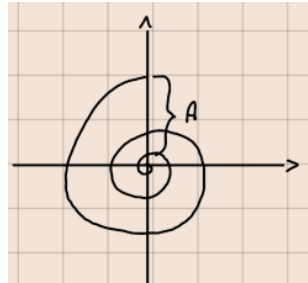
$$\begin{aligned}
 Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) &= Ae^{\sigma t} \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} = \\
 &= \frac{Ae^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}}{2} + \frac{Ae^{\sigma t} e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} = \\
 &= \underbrace{\frac{A}{2} e^{\sigma t} e^{j\omega t + j\phi} + \frac{A}{2} e^{\sigma t} e^{-j\omega t - j\phi}}_{\text{sono complessi coniugati}}
 \end{aligned}$$

2.1.4 Segnale esponenziale complesso

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, v(t) = Ae^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}$$



(a) **Per** $\sigma > 0$ **e** $t \rightarrow \infty$ $|v(t)| \rightarrow \infty$



(b) **Per** $\sigma < 0$ **e** $t \rightarrow \infty$ $|v(t)| \rightarrow 0$

2.1.5 Funzioni generalizzate

2.1.5.1 Segnali polinomiali

$$\delta_{-n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \delta_{-n} = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0; \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Da un certo istante ha un valore e quello sarà l'istante 0.

Osservazione:

$$\delta_{-n}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-(n-1)}(\Psi) d\Psi$$

Il segnale polinomiale n-esimo può essere ottenuto come integrale del segnale (n - 1)-esimo

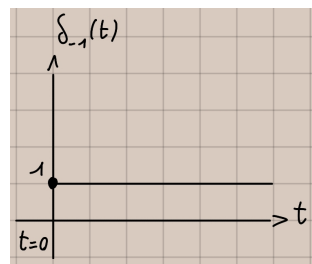
$$\delta_{-n}(t) = \frac{d\delta_{-(n+1)}^t}{dt}$$

Esempio per n = 1

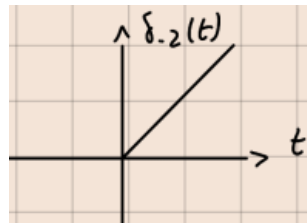
$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per n = 2

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$



(a) *Funzione gradino*



(b) *Rampa unitaria*

Osservazione: l'integrale del gradino è la rampa e viceversa la derivata della rampa è il gradino.

$$\int_{-\infty}^t \delta_{-1} d\alpha = \delta_{-2}(t) \frac{d\delta_{-2}(t)}{dt} = \delta_{-1}(t)$$

2.1.5.2 Finestra rettangolare unitaria

$$\Pi : R \rightarrow R \Pi(t) = \begin{cases} 1, -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

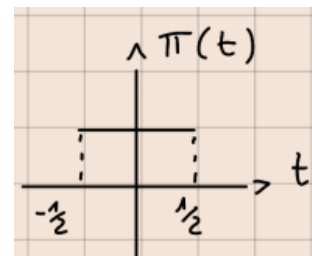


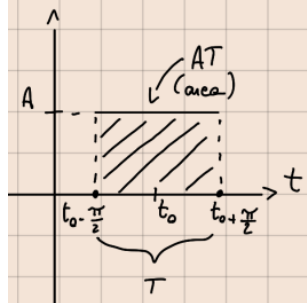
Figura 2.4: Finestra rettangolare unitaria, ampiezza = 1

Osservazione: La finestra rettangolare unitaria è una combinazione lineare di due gradini:

$$\Pi(t) = \delta_{-1}(t + \frac{1}{2}) - \delta_{-1}(t - \frac{1}{2})$$

2.1.5.3 Finestra rettangolare ad ampiezza A con diverso supporto

N.B.: il supporto è il sottoinsieme del dominio per cui la funzione è $\neq 0$



L'ampiezza A, centrata in t_0 , con supporto $(t_0 - \frac{\pi}{2}, t_0 + \frac{\pi}{2})$.

$$\text{AII}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \begin{cases} A, & t_0 - \frac{\pi}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.1.5.4 Finestre (o impulso) triangolare unitaria

$$\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

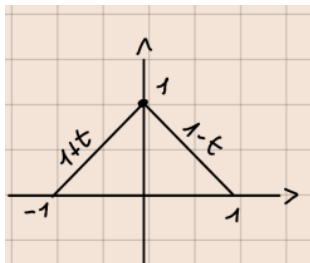
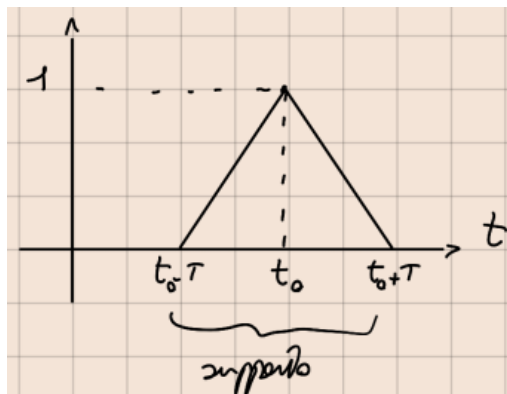


Figura 2.5: Impulso, supporto $[-1, 1]$, area = 1

2.1.5.5 Finestra triangolare ad ampiezza A con supporto 2T centrata in t_0



$$A\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \begin{cases} A - \frac{A}{T}|t-t_0|, & t_0 - T \leq t \leq t_0 + T \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

supporto $(t_0 - T, t_0 + T)$, area = AT

2.1.5.6 Impulso di Dirac o funzione $\delta(t)$

Osservazione: l'impulso è una funzione generalizzata che è definita come un limite di una successione di funzioni.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \Pi\left(\frac{t}{\frac{2}{n}}\right) \text{ dove} \\ f_n(t) &= \frac{n}{2} \Pi\left(\frac{t}{\frac{2}{n}}\right) = \\ &= \begin{cases} \frac{n}{2}, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

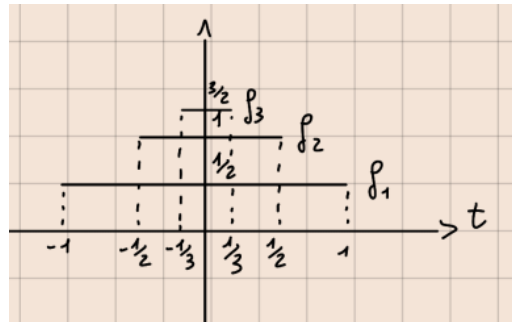


Figura 2.6: Impulso di Dirac, prosegue fino a ∞

$$\begin{aligned} \delta_t'' &= \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{f_n(t) dt}^{\text{ogni finestra ha area} = 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

2.1.5.7 Impulso di ampiezza A e centrato in t_0

$$A\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t-t_0) dt = A$$

Proprietà dell'impulso:

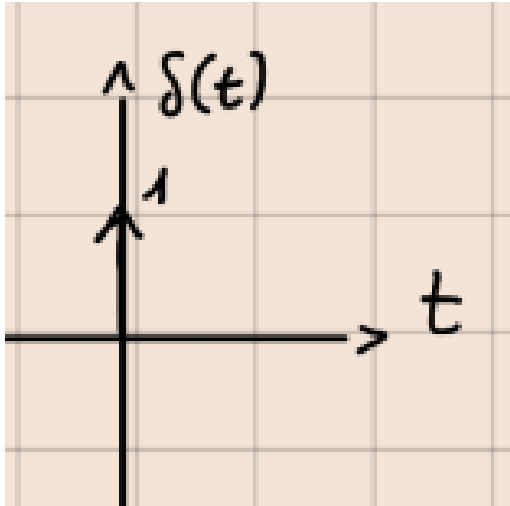


Figura 2.7: Rappresentazione grafica

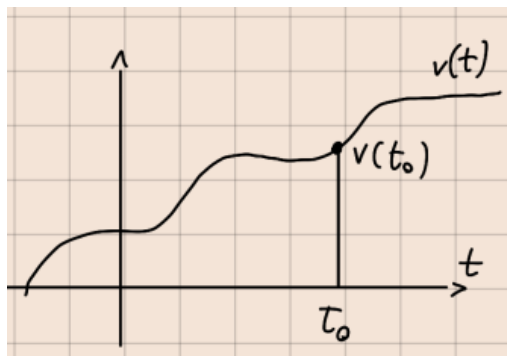
- L'impulso ideale centrato in origine è pari a:

$$\delta(-t) = \delta(t), t \in R$$

- Area unitaria

$$\begin{cases} \int_a^b \delta(t) dt = 1, & \text{se } 0 \in (a, b) \\ \int_a^b \delta(t) dt = 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Proprietà di campionamento



$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \delta(t - t_0) dt$$

Inoltre se v è continua sul dominio

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \delta(t - t) dt \text{ multiplico per } \delta(t - t_0)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 v(t_0) &= v(t) + v(t_0) - v(t) \\
 v(t_0)\delta(t - t_0) &= v(t)\delta(t - t_0) + [v(t_0) - v(t)]\delta(t - t_0) \\
 \int_{-\infty}^{\infty} v(t_0)\delta(t - t_0)dt &= \\
 \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\delta(t - t_0)dt + & \\
 + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\delta(t - t_0)}^{0 \text{ per } t \neq t_0} \overbrace{[v(t_0) - v(t)]}^{0 \text{ per } t = t_0} dt}_0 & \\
 \Rightarrow v(t_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt}_{1 \text{ perché l'impulso è unitario}} &= \\
 = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\delta(t - t_0)dt & \\
 v(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\delta(t - t_0)dt &
 \end{aligned}$$

Osservazione: si può scrivere anche come

$$v(t_0) = v(t)\delta(t - t_0)$$

2.2 Segnali a tempo discreto

2.2.1 Impulso unitario discreto o delta di Kroneker

$\delta : Z \rightarrow R$ è una successione

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{per } k = 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

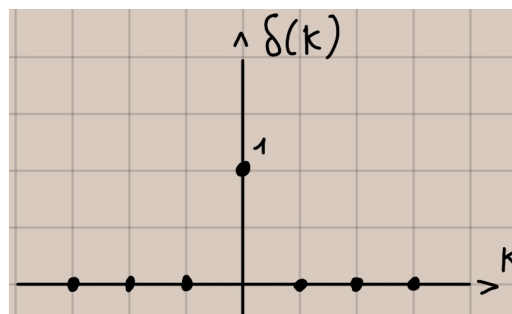


Figura 2.8: Delta di Kroneker

2.2.2 Gradino unitario discreto

$$\delta_{-1} : Z \rightarrow R \quad \delta_{-1} = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

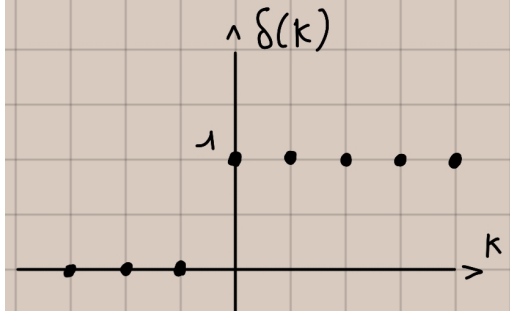


Figura 2.9: Gradino

2.2.3 Rampa discreta unitaria

$$\delta_{-2} : Z \rightarrow R : \quad \delta_{-2} = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

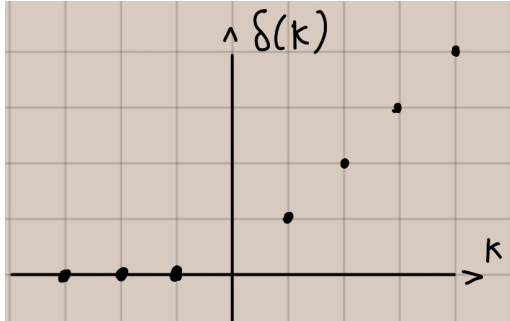


Figura 2.10: Rampa

Osservazione: abbiamo che l'integrale dell'impulso del gradino, come serie corrisponde a $\delta_{-1}(k) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i)$ praticamente se io sommo tutti tutti i valori dell'impulso avrò come risultato un qualsiasi valore $k \geq 0$, sommando tutti i valori dell'impulso ottengo il gradino e in modo analogo sommando tutti i valori del gradino fino a k ottengo la rampa $\delta_{-2} = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \delta_{-1}(i)$.

N.B.: la somma nel campo discreto corrisponde all'integrazione nel campo continuo.

$$\delta_{-2}(k) = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \sum_{j=-\infty}^i \delta(ij)$$

2.2.4 Successione esponenziale discreta

$$v : Z \rightarrow R, \quad v(k) = Ae^{j\phi} \lambda^k, \text{ dove } k \in Z, \phi \in R, \lambda \in C.$$

Osservazione: se scriviamo

$$\begin{aligned} \lambda &= \rho(\cos \theta + j \sin \theta) \\ v(k) &= Ar^{j\phi} \rho^k (\cos k\theta + j \sin k\theta) = \\ &= Ae^{j\phi} e^{k \log \rho} e^{jk\theta} = \\ &= Ae^{j\phi} e^{k(\log \rho + j\theta)} \end{aligned}$$

2.2.5 Successione sinusoidale discreta

$v : Z \rightarrow R, v(k) = A \cos(\omega k + \phi),$
con $k \in Z, \omega \in R, \phi \in R$
dove A ampiezza, ω pulsazione e ϕ fase.

Osservazione: $v(k)$ è periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se e solo se $\omega = 2\pi r$,
dove $r \in Q$ (ω è un multiplo razionale di 2π)

Capitolo 3

Sistema a tempo continuo

I sistemi possono essere a

- tempo continuo
- tempo discreto

Un sistema è un modello matematico che formalizza un fenomeno fisico o un processo che in modo deterministico trasforma certi input in determinati output. Esempio:

- Il pendolo, data una spinta inizierà a muoversi da una parte all'altra, l'input può essere l'impulso della forza applicata l'output può essere il movimento nel tempo lungo un asse designato;
- Una palla che scivola lungo una collina, l'input può essere simile a quello di prima, l'output sarà il movimento lungo il versante che formerà una specie di mezza parabola;

Proprietà:

1. Linearità, a una combinazione lineare degli input corrisponde una combinazione lineare degli output

$$au_1(t) + bu_2(t) \mapsto av_1(t) + bv_2(t)$$

2. Tempo invarianza, un sistema a tempo continuo è tempo invariante se e solo

$$u(t) \mapsto v(t) \Rightarrow u(t - \tau) \mapsto v(t - \tau) \forall \tau \in R$$

3. Causalità, un sistema è causale se e solo se l'uscita al momento τ dipende soltanto dall'ingresso per $t < \tau$ ($v(\tau)$ dipende soltanto da $u(t)$ per $t \leq \tau$) e non da valori successivi.

Osservazione: in un sistema causale, l'effetto (output) non può precedere la causa (input)

Osservazione: considereremo sistemi inizialmente a riposo

$$(u(t) = 0, t \leq \tau \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{sistemi causali}} \quad v(t) = 0, t \leq \tau)$$

Per convenzione $\tau = 0$ (origine del tempo, t_0)

Definizione: un sistema a tempo continuo per cui valgono le proprietà di linearità e tempo invarianza si chiama sistema LTI (**Linear time invariant**)

Proprietà di stabilità asintotica Un sistema è asintoticamente stabile se:

$$\exists \tau \in R, \text{ t.c. } u(t) = 0, \forall t \geq \tau \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

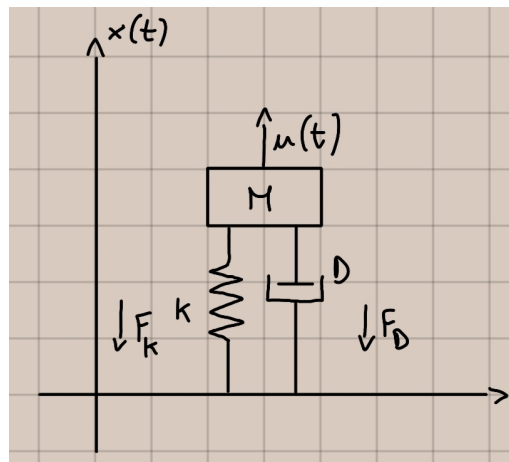
Significa che se l'ingresso non agisce più sul sistema, all'infinito l'uscita converge verso 0.

Bounded Input Bounded Output (BIBO) stabilità Ingresso limitato e output limitato, come una funzione sinusoidale. Un sistema è BIBO stabile se:

$$\begin{aligned} &\exists \tau \in R \text{ e } M_u > 0, M_u \in R \text{ t.c. se} \\ &|u(t)| < M_u, \forall t \geq \tau \Rightarrow \exists M_v > 0 : |v(t)| < M_v, \forall t \geq \tau \end{aligned}$$

3.1 Sistemi descritti da equazioni differenziali

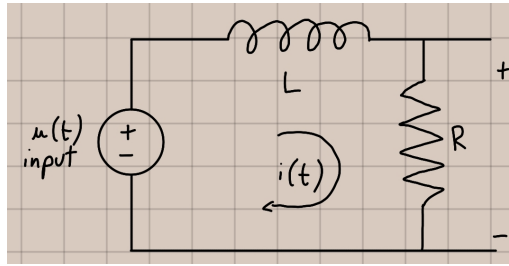
Esempio 1: Sistema massa-molla-smorzatore



Essendo che $F = ma$ e che $a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ avremo che:

$$\begin{aligned} Ma(t) &= u(t) - \underbrace{F_K}_{kx(t)} - \underbrace{D \frac{dx(t)}{dt}}_{F_D} \Rightarrow \\ &\overbrace{M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + D \frac{dx(t)}{dt} + kx(t)}^{\text{ingresso}} = \underbrace{u(t)}_{\text{uscita}} \end{aligned}$$

Esempio 2: Circuito elettrico



L'ingresso in questo caso è dato dalla tensione formata dalla somma delle tensioni sull'induttore e la resistenza, come output avremo la tensione ai capi dei resistori:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \underbrace{Ri(t)}_{v(t)}$$

$$\text{se } v(t) = Ri(t) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}v(t)$$

$$\frac{L}{R} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = u(t)$$

In generale sono una sommatoria delle derivate dell'input che saranno uguali alla sommatoria delle derivate dell'output, in generale ha la seguente forma:

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t)$$

dove $u(t)$ è l'ingresso, $v(t)$ è l'uscita e $a_n, b_n \neq 0$ è fondamentale che la derivata di ordine maggiore abbia coefficiente non nullo. L'equazione può essere riscritta in forma compatta con la sommatoria:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

n si chiama l'ordine dell'equazione differenziale, in generale $n \geq m$, su tutti i sistemi considerati il grado di derivazione dell'output sarà maggiore o uguale dell'input. Se $n \geq m$ il sistema è detto **strettamente proprio**, altrimenti il sistema è **proprio**.

Riprendendo gli esempi fatti sopra:

$$\underbrace{Mx''(t)}_{a_2} + \underbrace{Dx'(t)}_{a_1} + \underbrace{kx(t)}_{a_0} = \underbrace{u(t)}_{b_0}$$

Possiamo notare che il sistema è strettamente proprio siccome $n = 2$ e $m = 0$

Osservazione: il sistema descritto con l'equazione differenziale non ha soluzione unico, a patto che non vengano imposte n condizioni iniziali

3.1.1 Soluzione di un sistema a tempo continuo descritto da un'equazione differenziale

La soluzione equivale all'uscita v (reale o complessa) che si può scomporre in

$$v = \underbrace{v_l}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{v_f}_{\text{risposta forzata}}$$

La risposta libera è la parte che non dipende dall'ingresso, ma dalle condizioni iniziali, perché il sistema può anche non essere a riposo, mentre la risposta forzata dipende dall'ingresso u .

Evoluzione libera (oppure risposta libera) Per calcolare l'evoluzione libera associamo all'equazione differenziale iniziale l'equazione differenziale **omogenea**:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

quando una parte dell'equazione viene posta a 0 l'equazione si definisce **omogenea**, all'equazione qui sopra associamo il **polinomio caratteristico**

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

Devo risolvere l'equazione caratteristica $P(s) = 0$ applicando il teorema fondamentale dell'algebra $\rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono radici di $P(s) = 0$ con le molteplicità μ_1, \dots, μ_r con $\mu_1 + \dots + \mu_r = n$. La soluzione dell'equazione per il calcolo della risposta libera è:

$$v(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i|l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}$$

I coefficienti $c_{i|l}$ vengono determinati dalle condizioni iniziali. Esempio 1:

$$\begin{aligned} Mx'' + Dx' + kx &= 0 & M &= 1 & D &= 2 & k &= 1 \\ P(s) &= s^2 + 2s + 1 & \underbrace{\lambda_1 = -1}_{\text{valore che lo annulla}} & & \mu_1 &= 2 \text{ il grado} \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^1 \sum_{l=0}^1 c_{i|l} e^{-t} \frac{t^l}{l!} =$$

$$\sum_{l=0}^1 c_{i|l} e^{-t} \frac{t^l}{l!} =$$

$$c_{1,0} e^{-t} + c_{1,1} e^{-t} t$$

Notare che la prima sommatoria non c'è perché abbiamo una sola radice distinta.

Esempio 2:

$$\begin{aligned}v'''(t) + 3v''(t) + 3v'(t) + 1 &= 0 \\P(s) &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s + 1)^3 \\ \lambda_1 = 1 \quad \mu_1 &= 3 \\ v(t) &= c_{1,0}e^{-t} + c_{1,1}e^{-t}t + c_1, 2e^{-t}\frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

La prima sommatoria scompare pure in questo caso.

3.1.2 Modi elementari

$$m_i(t) = e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}$$

è detto **modo elementare** ($i = 1, \dots, r$)

Osservazione: $c_{i,l}$ verranno calcolati dalle condizioni iniziali.

Esempio: Trovare la risposta libera del sistema

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

con le condizioni iniziali

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 1$$

Come si risolve? Si scrive l'equazione omogenea:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 0$$

Ora si scrive il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}P(s) &= s^2 + 3s - 4 = (s - 1)(s + 4) \\ \lambda_1 = 1 \quad \mu_1 &= 1 \\ \lambda_2 = -4 \quad \mu_2 &= 1 \\ v_l(t) &= c_{1,0}e^t + c_{2,0}e^{-4t} \\ v_l(t) &= c_{1,0}e^t - 4c_{2,0}e^{-4t}\end{aligned}$$

$$v_l(0) = \begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 0 & \text{condizione iniziale} \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 & \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}c_{1,0} &= \frac{1}{5} \quad c_{2,0} = -\frac{1}{5} \\ v_l(t) &= \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-4t}\end{aligned}$$