

# Sistemi

Giovanni Tosini



# Indice

<b>1</b>	<b>Numeri complessi</b>	<b>1</b>
1.1	Formula di Eulero . . . . .	1
1.2	Operazioni con i numero complessi . . . . .	3
1.3	Teorema fondamentale dell'algebra . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Segnali</b>	<b>9</b>
2.1	Segnali elementari a tempo continuo . . . . .	9
2.1.1	Segnale sinusoidale . . . . .	9
2.1.2	Fasore . . . . .	10
2.1.3	Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente . . . . .	10
2.1.4	Segnale esponenziale complesso . . . . .	11
2.1.5	Funzioni generalizzate . . . . .	11
2.2	Segnali a tempo discreto . . . . .	16
2.2.1	Impulso unitario discreto o delta di Kroneker . . . . .	16
2.2.2	Gradino unitario discreto . . . . .	16
2.2.3	Rampa discreta unitaria . . . . .	17
2.2.4	Successione esponenziale discreta . . . . .	17
2.2.5	Successione sinusoidale discreta . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Sistema a tempo continuo</b>	<b>19</b>
3.1	Sistemi descritti da equazioni differenziali . . . . .	20
3.1.1	Soluzione di un sistema a tempo continuo descritto da un'equazione differenziale . . . . .	22
3.1.2	Modi elementari . . . . .	23
3.1.3	Convergenza dei modi elementari . . . . .	24
3.1.4	Risposta impulsiva ed evoluzione forzata . . . . .	26
3.1.5	Stabilità di un sistema continuo definito dalla risposta impulsiva . . . . .	29
3.1.6	Risposta in frequenza . . . . .	30
3.1.7	La trasformata di Laplace . . . . .	33
3.1.8	RdC della trasformata di Laplace unilatera di una combinazione lineare di funzioni esponenziali . . . . .	34
3.1.9	Proprietà della trasformata di Laplace . . . . .	34

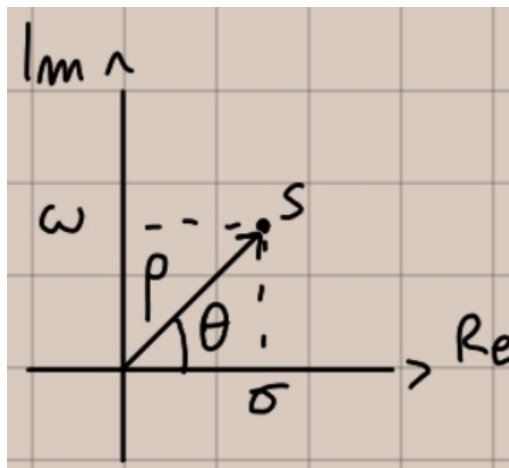


# Capitolo 1

## Numeri complessi

Un numero complesso  $s = \sigma + j\omega$  con  $j = \sqrt{-1}$  e  $\sigma, \omega \in R$  in cui

- $\sigma = Re(s)$  parte reale
- $\omega = Im(s)$  parte immaginaria
- $C = st.c.s = \sigma + j\omega, \sigma, \omega \in R$  insieme dei numeri complessi



Forma polare dei numeri complessi,  $s = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

- $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$  il modulo di  $s$  con  $\rho \in R^+$
- $\theta =$  argomento di  $s$

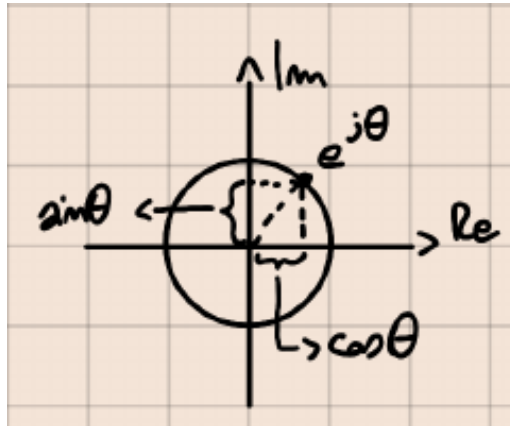
**Osservazione 1**  $Re(s) = \rho\cos\theta$  e  $Im(s) = \rho\sin\theta$

**Osservazione 2** L'argomento  $\theta$  è determinato a meno di multipli interi di  $2\pi$ . Imponendo  $\theta \in [0, 2\pi)$  oppure  $(-\pi, \pi]$  (deve essere un intervallo lungo  $2\pi$ ) si ottiene l'argomento principale  $\theta$  che notiamo con  $arg(s)$

### 1.1 Formula di Eulero

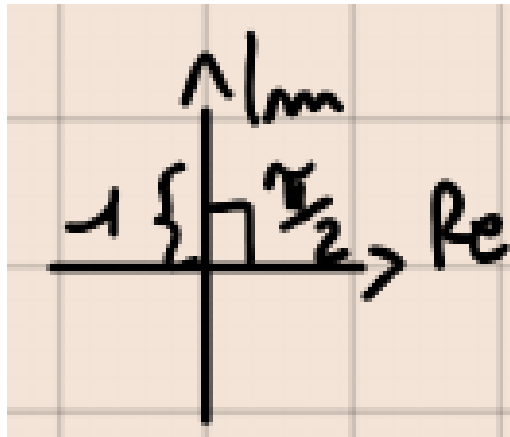
$\theta \in R, j = \sqrt{-1}$  abbiamo  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

Forma esponenziale  $s = \rho e^{j\theta}$



$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

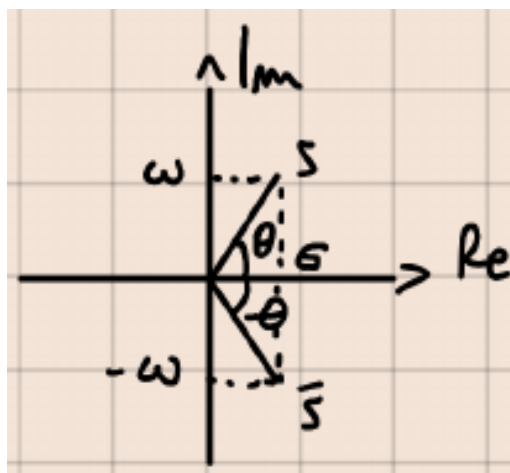
Esempio:  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$



$$s = 0 + 1j = j$$

**Def:** i numeri **immaginari puri** hanno la parte reale nulla

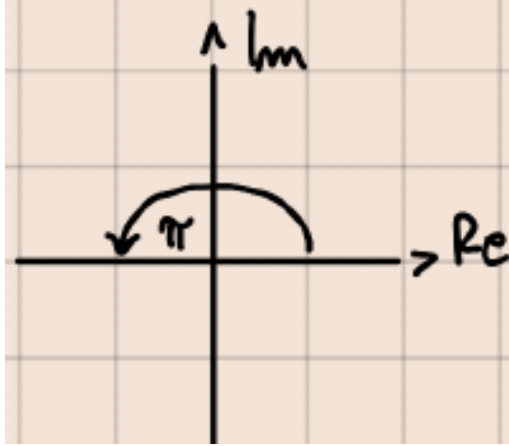
**Def:** dato  $s : \sigma + j\omega \in C$   $\bar{s} : \sigma - j\omega$  coniugato complesso



La forma polare di  $\bar{s}$  sarà uguale a  $\rho(\cos\theta - j\sin\theta)$

**Osservazione**  $|s| = |\bar{s}|$  e  $\arg(\bar{s}) = -\arg(s)$

Esempio:  $e^{j\pi} = -1 = e^{j\pi} + 1 = 0$

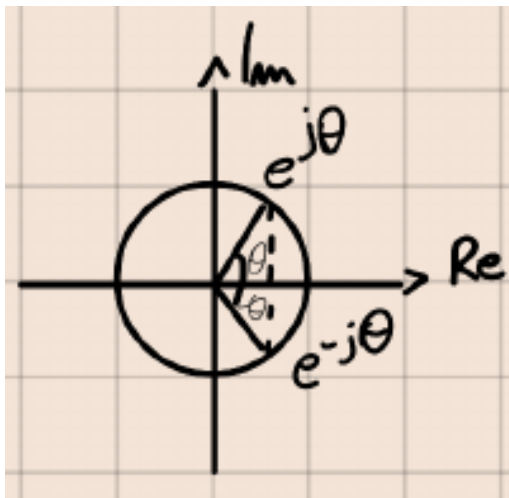


## 1.2 Operazioni con i numero complessi

- $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1, s_2 = \sigma_2 + j\omega_2 \in C$
- $s_1 + s_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + j(\omega_1 + \omega_2)$
- $s_1 - s_2 = \sigma_1 - \sigma_2 + j(\omega_1 - \omega_2)$

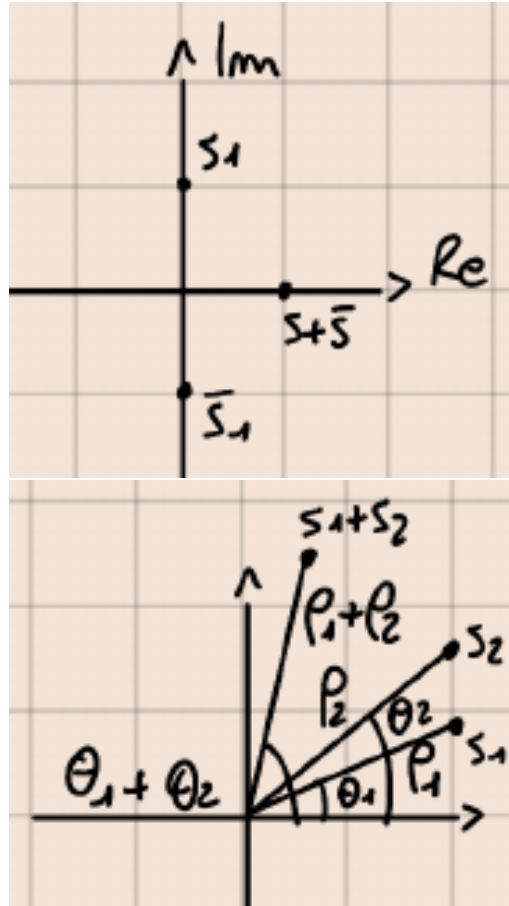
**Osservazione:**  $Re(s) = \frac{s+\bar{s}}{2}$  e  $Im(s) = \frac{s-\bar{s}}{2j}$

Per la formula di Eulero  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$  e  $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$



**Osservazione:**  $2Re(s) = s + \bar{s}$  e  $2jIm(s) = s - \bar{s}$

$s = \bar{s} \Rightarrow Im(s) = 0$  e  $s = -\bar{s} \Rightarrow Re(s) = 0$



- $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$
- $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$
- $s_1 s_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2))$
- $s_1 s_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + j\cos\theta_1 \sin\theta_2 + j\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$
- $s_1 s_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + j(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2))$

**N.B.:**  $\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$  e  $\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

**Def:** Dato  $s \in \mathbb{C}$  il numero  $s^{-1}$  t.c.  $ss^{-1} = 1$ ,  $s^{-1} = \frac{\bar{s}}{|s|^2}$  reciproco (inverso) di  $s$ .

$$ss^{-1} = s \frac{\bar{s}}{|s|^2} = \frac{s\bar{s}}{|s|^2}$$

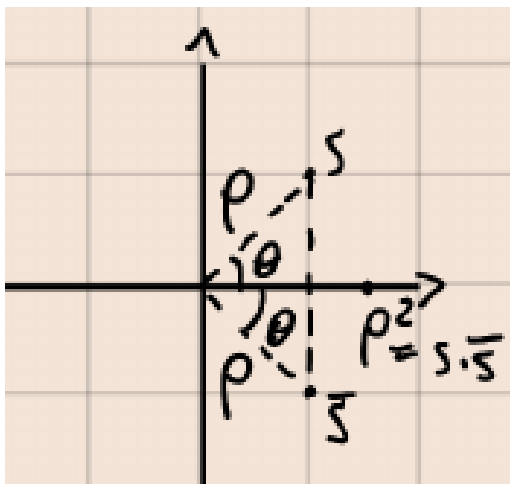
$$s\bar{s} = \rho^2(\cos(\theta - \theta) + j\sin(\theta - \theta)) = \rho^2 = |s|^2$$

**Osservazione:** l'argomento di un numero complesso si può chiamare anche fase.

$$\frac{s_1}{s_2} = s_1 s_2^{-1} = s_1 \frac{\bar{s}_2}{|s_2|^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

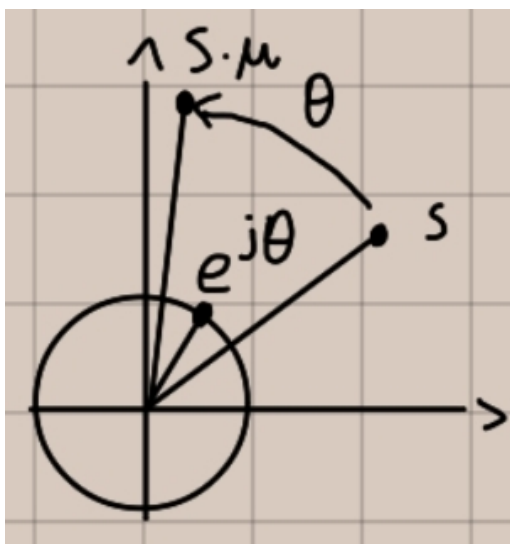
**Osservazione:**  $s\bar{s} = \rho^2(\cos(\theta - \theta) + j\sin(\theta - \theta)) = \rho^2 \Rightarrow |s|^2 = s\bar{s}$





**Def:**  $u \in \mathbb{C}$  si dice complesso unitario se  $|u| = 1$ . In forma polare  $u = \cos\theta + j\sin\theta$ . In forma esponenziale  $u = e^{j\theta}$  e  $|e^{j\theta}| = 1$

Sia  $u = \cos\alpha + j\sin\alpha$  con  $s = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$  avremo che  $su = \rho(\cos(\theta + \alpha) + j\sin(\theta + \alpha))$  (rotazione intorno all'origine)



$$s^n = \rho^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta))$$

Esempio:

$$(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$$

**Radici complesse** Ogni  $s \in \mathbb{C}$  ammette  $n$  distinte radici  $n$ -esime  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Dobbiamo trovare  $\omega \in \mathbb{C}$  t.c.  $\omega^n = s$ .

$$\forall k \in [0, n-1], \omega_k \sqrt[n]{\rho}(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + j\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k))$$

Prova:

$$\begin{aligned} \omega_k^n &= (\sqrt[n]{\rho^n})(\cos(n(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)) + j\sin(n(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k))) = \\ &= \rho(\cos(\theta + 2\pi k) + j\sin(\theta + 2\pi k)) = \end{aligned}$$

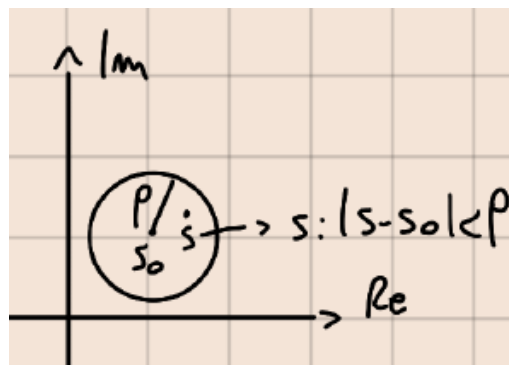
Notare che  $\cos(\theta + 2\pi k)$  è equivalente a  $\cos\theta$  e  $\sin(\theta + 2\pi k)$  equivale a  $\sin\theta$  questo  $\forall k = 0, \dots, n-1$ .

L'equazione:  $s^4 = 1 + 2j$  ha 4 radici distinte nel campo  $C$ . Esempio: le radici complesse dell'unità

$$s^n = 1 \omega_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right) k = 0, \dots, n-1$$

**Funzioni di variabile complessa** Gli insieme su cui definiamo una funzione di variabile complessa  $f$  si scrivono  $D(f)$ ,  $D(f) \subseteq C$

**Def:** un punto  $s_0 \in D(f) \subseteq C$  è interno a  $D(f)$  se esiste un disco  $B_\rho(s_0)$  di raggio  $\rho$  con  $\rho \in R^+$  centrato in  $s_0$ , t.c.  $B_\rho(s_0) \subseteq D(f)$  dove  $B_\rho(s_0) = \{s \in C.t.c. |s - s_0| < \rho\}$



**Def:** Un insieme  $D(f) \subseteq C$  si dice aperto se tutti i suoi punti sono interni

**Def:** Una funzione  $f : D(f) \rightarrow C$  con  $D(f) \subseteq C$  aperto è una funzione complessa

Esempi di funzioni complesse con annesso dominio:

- $f(s) = s, D(f) = C$
- $f(s) = s^2, D(f) = C$
- $f(s) = \operatorname{Re}(s) + j\operatorname{Im}(s)^2, D(f) = C$
- $f(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, D(f) = C$
- funzione polinomiale,  $f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  dove  $P(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$  e funzione razionale  $Q(s) = \sum_{k=0}^n b_k s^k$ ,  $D = C - \lambda_1, \dots, \lambda_m$  dove  $\lambda_\alpha$  è radice di  $Q(s) = 0$  per  $k = 1, \dots, m$

### 1.3 Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio  $P(s)$  a coefficienti complessi di grado  $n > 0$  ha  $n$  radici complesse e si può comporre come

$P(s) = a_n(s - \lambda_1)^{\mu_1}(s - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (s - \lambda_r)^{\mu_r}$  dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sono radici e  $\mu_1, \dots, \mu_r$  sono le **molteplicità** relative di ciascuna radice per cui  $\mu_1 + \dots + \mu_r = n$

**Osservazione** Un numero  $\lambda$  è una radice di molteplicità  $\mu$  per un polinomio  $P(s)$  se e solo se  $P(\lambda) = P'(\lambda) = P''(\lambda) = \dots = P^{\mu-1}(\lambda) = 0$  e  $P^\mu(\lambda) \neq 0$



# Capitolo 2

## Segnali

Sono funzioni matematiche definite su un dominio, esistono nel dominio:

- continuo  $\rightarrow R, C, \dots$ ;
- discreto  $\rightarrow Z$ .

### 2.1 Segnali elementari a tempo continuo

#### 2.1.1 Segnale sinusoidale

Consiste di una funzione:

$$v : R \rightarrow R, v(t) = A \overbrace{\cos}^{[-1,1]}(\omega t + \phi) \text{ con } A, \omega, \phi \in R$$

- $A > 0$  è l'ampiezza;
- $\omega$  la pulsazione;
- $\phi$  la fase;
- $v$  è periodico di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ;
- la frequenza  $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$ .

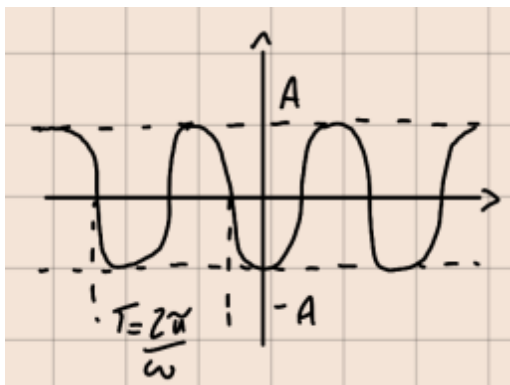


Figura 2.1: Funzione sinusoidale

## 2.1.2 Fasore

Una funzione:

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, v(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)} \text{ con } A, \omega, \phi \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza sarà uguale sempre ad  $A$ .

**Osservazione:** dalla formula di Eulero, possiamo esprimere un segnale sinusoidale

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \phi) &= A \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} = \\ &= \frac{A}{2} e^{j(\omega t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega t + \phi)} \end{aligned}$$



Figura 2.2: Fasore

## 2.1.3 Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.1}$$

$$v(t) = Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{2.2}$$

$$\text{con } \sigma, A, \omega, \phi \in \mathbb{R}, A > 0 \tag{2.3}$$

$$\tag{2.4}$$

**non** è periodico.

- per  $\sigma > 0$  e  $t \rightarrow \infty \Rightarrow v(t) = \infty$
- per  $\sigma < 0$  e  $t \rightarrow \infty \Rightarrow v(t) = 0$

---

<sup>1</sup> $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \rightarrow |e^{j\theta}| = 1$

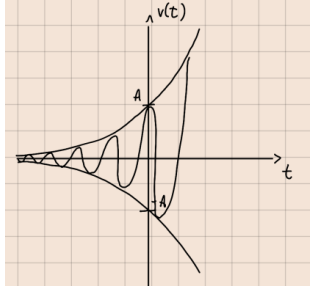


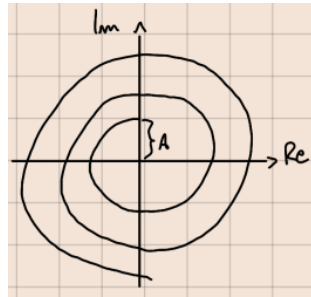
Figura 2.3: Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente

**Osservazione:** segnali sinusoidali, modulati esponenzialmente, si possono scrivere come combinazione lineare di fasori con una componente esponenziale:

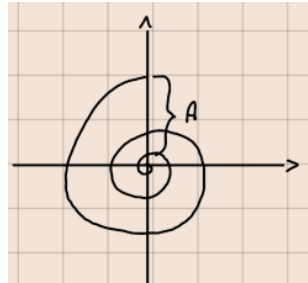
$$\begin{aligned}
 Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) &= Ae^{\sigma t} \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} = \\
 &= \frac{Ae^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}}{2} + \frac{Ae^{\sigma t} e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} = \\
 &= \underbrace{\frac{A}{2} e^{\sigma t} e^{j\omega t + j\phi} + \frac{A}{2} e^{\sigma t} e^{-j\omega t - j\phi}}_{\text{sono complessi coniugati}}
 \end{aligned}$$

## 2.1.4 Segnale esponenziale complesso

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, v(t) = Ae^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}$$



(a) **Per**  $\sigma > 0$  e  $t \rightarrow \infty$   $|v(t)| \rightarrow \infty$



(b) **Per**  $\sigma < 0$  e  $t \rightarrow \infty$   $|v(t)| \rightarrow 0$

## 2.1.5 Funzioni generalizzate

### 2.1.5.1 Segnali polinomiali

$$\delta_{-n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \delta_{-n} = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0; \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Da un certo istante ha un valore e quello sarà l'istante 0.

**Osservazione:**

$$\delta_{-n}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{-(n-1)}(\Psi) d\Psi$$

Il segnale polinomiale n-esimo può essere ottenuto come integrale del segnale (n - 1)-esimo

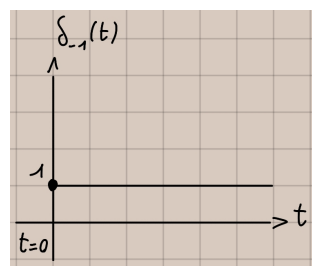
$$\delta_{-n}(t) = \frac{d\delta_{-(n+1)}^t}{dt}$$

Esempio per n = 1

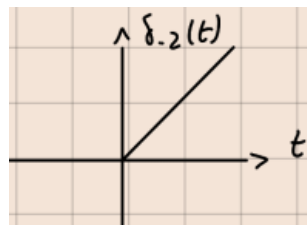
$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per n = 2

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$



(a) *Funzione gradino*



(b) *Rampa unitaria*

**Osservazione:** l'integrale del gradino è la rampa e viceversa la derivata della rampa è il gradino.

$$\int_{-\infty}^t \delta_{-1} d\alpha = \delta_{-2}(t) \frac{d\delta_{-2}(t)}{dt} = \delta_{-1}(t)$$

#### 2.1.5.2 Finestra rettangolare unitaria

$$\Pi : R \rightarrow R \Pi(t) = \begin{cases} 1, -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

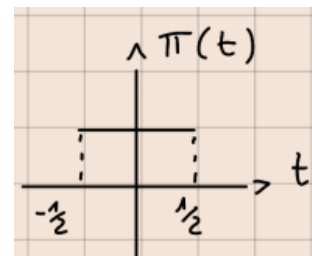


Figura 2.4: Finestra rettangolare unitaria, ampiezza = 1

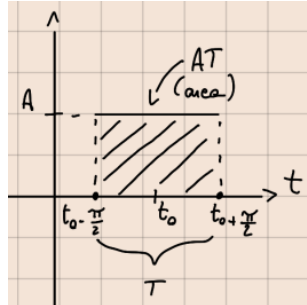
**Osservazione:** La finestra rettangolare unitaria è una combinazione lineare di due gradini:

$$\Pi(t) = \delta_{-1}(t + \frac{1}{2}) - \delta_{-1}(t - \frac{1}{2})$$



### 2.1.5.3 Finestra rettangolare ad ampiezza A con diverso supporto

**N.B.:** il supporto è il sottoinsieme del dominio per cui la funzione è  $\neq 0$



L'ampiezza A, centrata in  $t_0$ , con supporto  $(t_0 - \frac{\pi}{2}, t_0 + \frac{\pi}{2})$ .

$$\text{AII}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \begin{cases} A, & t_0 - \frac{\pi}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### 2.1.5.4 Finestre (o impulso) triangolare unitaria

$$\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

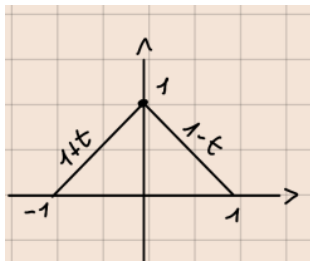
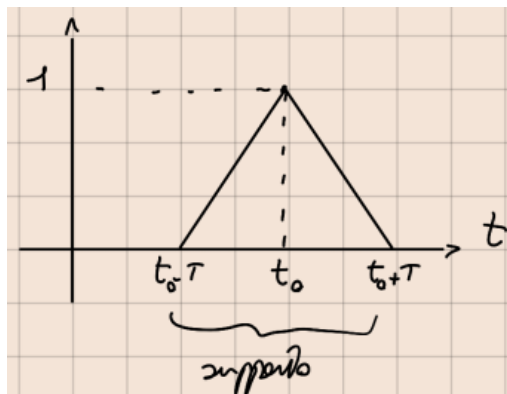


Figura 2.5: Impulso, supporto  $[-1, 1]$ , area = 1

### 2.1.5.5 Finestra triangolare ad ampiezza A con supporto 2T centrata in $t_0$



$$A\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \begin{cases} A - \frac{A}{T}|t-t_0|, & t_0 - T \leq t \leq t_0 + T \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

supporto  $(t_0 - T, t_0 + T)$ , area =  $AT$

#### 2.1.5.6 Impulso di Dirac o funzione $\delta(t)$

**Osservazione:** l'impulso è una funzione generalizzata che è definita come un limite di una successione di funzioni.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \Pi\left(\frac{t}{\frac{2}{n}}\right) \text{ dove} \\ f_n(t) &= \frac{n}{2} \Pi\left(\frac{t}{\frac{2}{n}}\right) = \\ &= \begin{cases} \frac{n}{2}, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

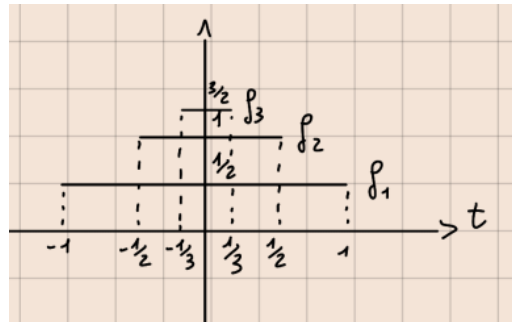


Figura 2.6: Impulso di Dirac, prosegue fino a  $\infty$

$$\begin{aligned} \delta_t'' &= '' \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{f_n(t) dt}^{\text{ogni finestra ha area} = 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

#### 2.1.5.7 Impulso di ampiezza $A$ e centrato in $t_0$

$$A\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t-t_0) dt = A$$

Proprietà dell'impulso:

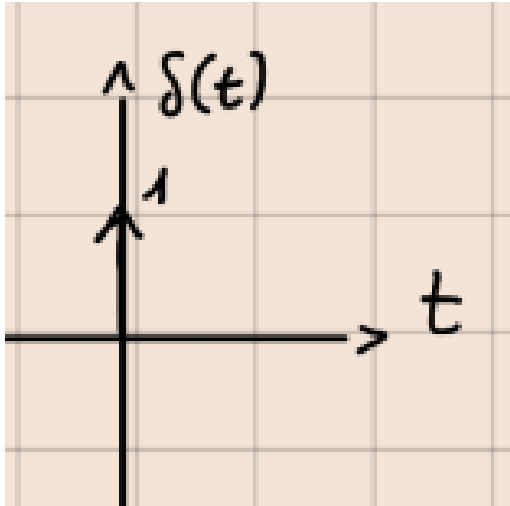


Figura 2.7: Rappresentazione grafica

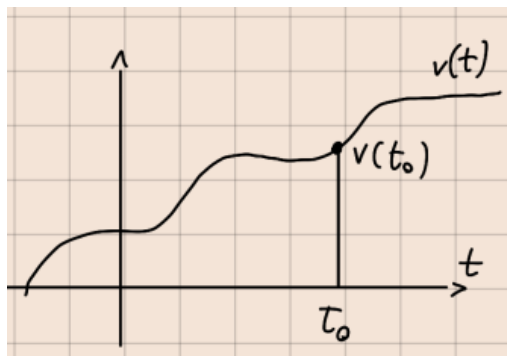
- L'impulso ideale centrato in origine è pari a:

$$\delta(-t) = \delta(t), t \in \mathbb{R}$$

- Area unitaria

$$\begin{cases} \int_a^b \delta(t) dt = 1, & \text{se } 0 \in (a, b) \\ \int_a^b \delta(t) dt = 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Proprietà di campionamento



$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \delta(t - t_0) dt$$

Inoltre se  $v$  è continua sul dominio

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \delta(t - t) dt \text{ moltiplico per } \delta(t - t_0)$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}
 v(t_0) &= v(t) + v(t_0) - v(t) \\
 v(t_0)\delta(t - t_0) &= v(t)\delta(t - t_0) + [v(t_0) - v(t)]\delta(t - t_0) \\
 \int_{-\infty}^{\infty} v(t_0)\delta(t - t_0)dt &= \\
 \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\delta(t - t_0)dt + & \\
 + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\delta(t - t_0)}^{0 \text{ per } t \neq t_0} \overbrace{[v(t_0) - v(t)]}^{0 \text{ per } t = t_0} dt}_0 & \\
 \Rightarrow v(t_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt}_{1 \text{ perché l'impulso è unitario}} &= \\
 = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\delta(t - t_0)dt & \\
 v(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\delta(t - t_0)dt &
 \end{aligned}$$

**Osservazione:** si può scrivere anche come

$$v(t_0) = v(t)\delta(t - t_0)$$

## 2.2 Segnali a tempo discreto

### 2.2.1 Impulso unitario discreto o delta di Kroneker

$\delta : Z \rightarrow R$  è una successione

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{per } k = 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

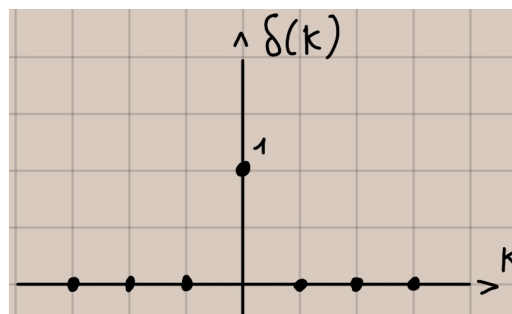


Figura 2.8: Delta di Kroneker

### 2.2.2 Gradino unitario discreto

$$\delta_{-1} : Z \rightarrow R \quad \delta_{-1} = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

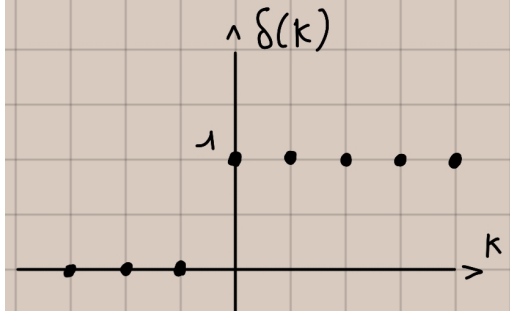


Figura 2.9: Gradino

### 2.2.3 Rampa discreta unitaria

$$\delta_{-2} : Z \rightarrow R : \quad \delta_{-2} = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

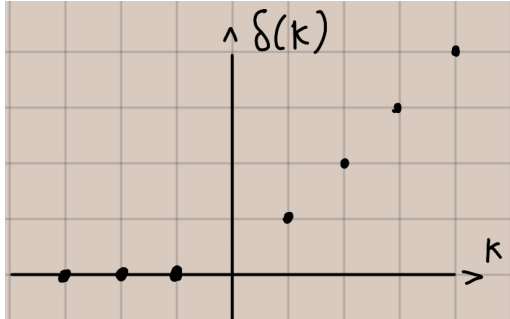


Figura 2.10: Rampa

**Osservazione:** abbiamo che l'integrale dell'impulso del gradino, come serie corrisponde a  $\delta_{-1}(k) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i)$  praticamente se io sommo tutti tutti i valori dell'impulso avrò come risultato un qualsiasi valore  $k \geq 0$ , sommando tutti i valori dell'impulso ottengo il gradino e in modo analogo sommando tutti i valori del gradino fino a  $k$  ottengo la rampa  $\delta_{-2} = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \delta_{-1}(i)$ .

**N.B.:** la somma nel campo discreto corrisponde all'integrazione nel campo continuo.

$$\delta_{-2}(k) = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \sum_{j=-\infty}^i \delta(ij)$$

### 2.2.4 Successione esponenziale discreta

$$v : Z \rightarrow R, \quad v(k) = Ae^{j\phi} \lambda^k, \text{ dove } k \in Z, \phi \in R, \lambda \in C.$$

**Osservazione:** se scriviamo

$$\begin{aligned} \lambda &= \rho(\cos \theta + j \sin \theta) \\ v(k) &= Ar^{j\phi} \rho^k (\cos k\theta + j \sin k\theta) = \\ &= Ae^{j\phi} e^{k \log \rho} e^{jk\theta} = \\ &= Ae^{j\phi} e^{k(\log \rho + j\theta)} \end{aligned}$$

### 2.2.5 Successione sinusoidale discreta

$$\begin{aligned}v : Z \rightarrow R, v(k) &= A \cos(\omega k + \phi), \\ \text{con } k \in Z, \omega \in R, \phi \in R \\ \text{dove } A \text{ ampiezza, } \omega \text{ pulsazione e } \phi \text{ fase.}\end{aligned}$$

**Osservazione:**  $v(k)$  è periodico di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  se e solo se  $\omega = 2\pi r$ ,  
dove  $r \in Q$  ( $\omega$  è un multiplo razionale di  $2\pi$ )

# Capitolo 3

## Sistema a tempo continuo

I sistemi possono essere a

- tempo continuo
- tempo discreto

Un sistema è un modello matematico che formalizza un fenomeno fisico o un processo che in modo deterministico trasforma certi input in determinati output. Esempio:

- Il pendolo, data una spinta inizierà a muoversi da una parte all'altra, l'input può essere l'impulso della forza applicata l'output può essere il movimento nel tempo lungo un asse designato;
- Una palla che scivola lungo una collina, l'input può essere simile a quello di prima, l'output sarà il movimento lungo il versante che formerà una specie di mezza parabola;

Proprietà:

1. Linearità, a una combinazione lineare degli input corrisponde una combinazione lineare degli output

$$au_1(t) + bu_2(t) \mapsto av_1(t) + bv_2(t)$$

2. Tempo invarianza, un sistema a tempo continuo è tempo invariante se e solo

$$u(t) \mapsto v(t) \Rightarrow u(t - \tau) \mapsto v(t - \tau) \forall \tau \in R$$

3. Causalità, un sistema è causale se e solo se l'uscita al momento  $\tau$  dipende soltanto dall'ingresso per  $t < \tau$  (  $v(\tau)$  dipende soltanto da  $u(t)$  per  $t \leq \tau$  ) e non da valori successivi.

**Osservazione:** in un sistema causale, l'effetto (output) non può precedere la causa (input)

**Osservazione:** considereremo sistemi inizialmente a riposo

$$(u(t) = 0, t \leq \tau \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{sistemi causali}} \quad v(t) = 0, t \leq \tau)$$

Per convenzione  $\tau = 0$  (origine del tempo,  $t_0$ )

**Definizione:** un sistema a tempo continuo per cui valgono le proprietà di linearità e tempo invarianza si chiama sistema LTI (**L**inear **t**ime **i**nvariant)

**Proprietà di stabilità asintotica** Un sistema è asintoticamente stabile se:

$$\exists \tau \in R, \text{ t.c. } u(t) = 0, \forall t \geq \tau \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

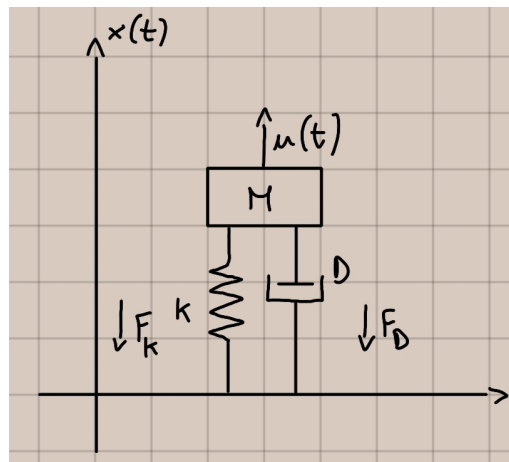
Significa che se l'ingresso non agisce più sul sistema, all'infinito l'uscita converge verso 0.

**Bounded Input Bounded Output (BIBO) stabilità** Ingresso limitato e output limitato, come una funzione sinusoidale. Un sistema è BIBO stabile se:

$$\begin{aligned} &\exists \tau \in R \text{ e } M_u > 0, M_u \in R \text{ t.c. se} \\ &|u(t)| < M_u, \forall t \geq \tau \Rightarrow \exists M_v > 0 : |v(t)| < M_v, \forall t \geq \tau \end{aligned}$$

### 3.1 Sistemi descritti da equazioni differenziali

Esempio 1: Sistema massa-molla-smorzatore

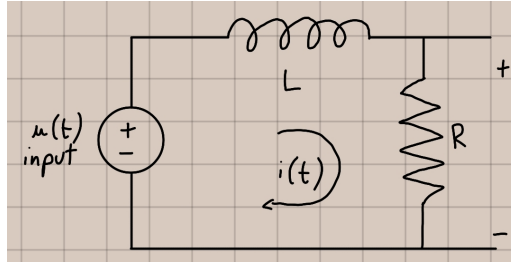


Essendo che  $F = ma$  e che  $a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$  avremo che:

$$\begin{aligned} Ma(t) &= u(t) - \underbrace{F_K}_{kx(t)} - \underbrace{D \frac{dx(t)}{dt}}_{F_D} \Rightarrow \\ &\overbrace{M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + D \frac{dx(t)}{dt} + kx(t)}^{\text{ingresso}} = \underbrace{u(t)}_{\text{uscita}} \end{aligned}$$



## Esempio 2: Circuito elettrico



L'ingresso in questo caso è dato dalla tensione formata dalla somma delle tensioni sull'induttore e la resistenza, come output avremo la tensione ai capi dei resistori:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \underbrace{Ri(t)}_{v(t)}$$

$$\text{se } v(t) = Ri(t) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}v(t)$$

$$\frac{L}{R} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = u(t)$$

In generale sono una sommatoria delle derivate dell'input che saranno uguali alla sommatoria delle derivate dell'output, in generale ha la seguente forma:

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t)$$

dove  $u(t)$  è l'ingresso,  $v(t)$  è l'uscita e  $a_n, b_n \neq 0$  è fondamentale che la derivata di ordine maggiore abbia coefficiente non nullo. L'equazione può essere riscritta in forma compatta con la sommatoria:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

$n$  si chiama l'ordine dell'equazione differenziale, in generale  $n \geq m$ , su tutti i sistemi considerati il grado di derivazione dell'output sarà maggiore o uguale dell'input. Se  $n \geq m$  il sistema è detto **strettamente proprio**, altrimenti il sistema è **proprio**.

Riprendendo gli esempi fatti sopra:

$$\underbrace{Mx''(t)}_{a_2} + \underbrace{Dx'(t)}_{a_1} + \underbrace{kx(t)}_{a_0} = \underbrace{u(t)}_{b_0}$$

Possiamo notare che il sistema è strettamente proprio siccome  $n = 2$  e  $m = 0$

**Osservazione:** il sistema descritto con l'equazione differenziale non ha soluzione unica, a patto che non vengano imposte  $n$  condizioni iniziali

### 3.1.1 Soluzione di un sistema a tempo continuo descritto da un'equazione differenziale

La soluzione equivale all'uscita  $v$  (reale o complessa) che si può scomporre in

$$v = \underbrace{v_l}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{v_f}_{\text{risposta forzata}}$$

La risposta libera è la parte che non dipende dall'ingresso, ma dalle condizioni iniziali, perché il sistema può anche non essere a riposo, mentre la risposta forzata dipende dall'ingresso  $u$ .

**Evoluzione libera (oppure risposta libera)** Per calcolare l'evoluzione libera associamo all'equazione differenziale iniziale l'equazione differenziale **omogenea**:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

quando una parte dell'equazione viene posta a 0 l'equazione si definisce **omogenea**, all'equazione qui sopra associamo il **polinomio caratteristico**

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

Devo risolvere l'equazione caratteristica  $P(s) = 0$  applicando il teorema fondamentale dell'algebra  $\rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_r$  sono radici di  $P(s) = 0$  con le molteplicità  $\mu_1, \dots, \mu_r$  con  $\mu_1 + \dots + \mu_r = n$ . La soluzione dell'equazione per il calcolo della risposta libera è:

$$v(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}$$

I coefficienti  $c_{i,l}$  vengono determinati dalle condizioni iniziali.

Esempio 1:

$$Mx'' + Dx' + kx = 0 \quad M = 1 \quad D = 2 \quad k = 1$$

$$P(s) = s^2 + 2s + 1 \quad \underbrace{\lambda_1 = -1}_{\text{valore che lo annulla}} \quad \underbrace{\mu_1 = 2}_{\text{il grado}}$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^1 \sum_{l=0}^1 c_{i,l} e^{-t} \frac{t^l}{l!} =$$

$$\sum_{l=0}^1 c_{1,l} e^{-t} \frac{t^l}{l!} =$$

$$c_{1,0} e^{-t} + c_{1,1} e^{-t} t$$

Notare che la prima sommatoria non c'è perché abbiamo una sola radice distinta.

Esempio 2:

$$\begin{aligned}v'''(t) + 3v''(t) + 3v'(t) + 1 &= 0 \\P(s) &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s + 1)^3 \\ \lambda_1 = 1 \quad \mu_1 &= 3 \\ v(t) &= c_{1,0}e^{-t} + c_{1,1}e^{-t}t + c_{1,2}e^{-t}\frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

La prima sommatoria scompare pure in questo caso.

### 3.1.2 Modi elementari

$$m_i(t) = e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}$$

è detto **modo elementare** ( $i = 1, \dots, r$ )

**Osservazione:**  $c_{i,l}$  verranno calcolati dalle condizioni iniziali.

Esempio: Trovare la risposta libera del sistema

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

con le condizioni iniziali

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 1$$

Come si risolve? Si scrive l'equazione omogenea:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 0$$

Ora si scrive il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned}P(s) &= s^2 + 3s - 4 = (s - 1)(s + 4) \\ \lambda_1 = 1 \quad \mu_1 &= 1 \\ \lambda_2 = -4 \quad \mu_2 &= 1 \\ v_l(t) &= c_{1,0}e^t + c_{2,0}e^{-4t} \\ v'_l(t) &= c_{1,0}e^t - 4c_{2,0}e^{-4t}\end{aligned}$$

$$v_l(0) = \begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 0 & \text{condizione iniziale} \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 & \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}c_{1,0} &= \frac{1}{5} \quad c_{2,0} = -\frac{1}{5} \\ v_l(t) &= \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-4t}\end{aligned}$$

Per un sistema descritto dall'equazione differenziale di base, la risposta libera è la funzione  $v_l$  che si ottiene come soluzione dell'equazione omogenea

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

i cui coefficienti sono determinati dalle condizioni iniziali.

**Osservazione:** la risposta libera di un sistema è la risposta del sistema in assenza di ingresso ( $u(t) = 0$ ) e dipende soltanto dalle condizioni iniziali.

### 3.1.3 Convergenza dei modi elementari

Dato il modo elementare vale che:

1.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

2.

$$m(t) \text{ limitato su } [0, \infty) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$$

Se  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  allora deve valere che  $l = 0$

3.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = \infty$$

in tutti gli altri casi ( $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ ) oppure  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  e  $l \neq 0$ )

**Dimostrazione:**

1.  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ . Scriviamo

$$\begin{aligned} \lambda &= \sigma + j\omega \Rightarrow \\ m(t) &= \frac{t^l}{l!} e^{\sigma t} e^{j\omega t} \\ &= \frac{t^l}{\underbrace{l! e^{-\sigma t}}_0} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{funzione limitata}} \Rightarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) &= 0 \end{aligned}$$

2.  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$  per  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  abbiamo visto che il modo converge per

$$t \rightarrow \infty \quad \xRightarrow{m(t) \text{ continuo}} \quad m(t) \text{ limitato}$$

Per

$$\operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ e } l = 0 \Rightarrow m(t) = e^{j\omega t}$$

una funzione limitata in modulo;

3.

$$\operatorname{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow e^{\sigma t} \rightarrow \infty \text{ per } t \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$$

Per

$$\operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ e } l \neq 0 \Rightarrow m(t) = \underbrace{\frac{t^l}{l!}}_{\text{per } t \rightarrow \infty = \infty} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{limitata}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$$

**Teorema:** un sistema LTI descritto dall'equazione differenziale è asintoticamente stabile se e solo se ogni suo modo elementare converge a zero, cioè

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_i(t) = 0, \text{ dove } m_i(t) = e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \text{ per } i = 1, \dots, r$$

**Osservazione:** un sistema LTI descritto dall'equazione differenziale è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomi caratteristico hanno la parte reale negativa

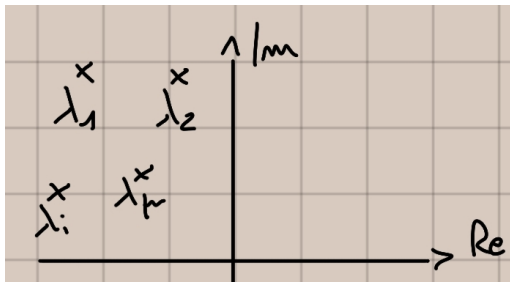


Figura 3.1: Con le radici a sinistra dell'asse dell'immaginario il sistema sarà asintoticamente stabile.

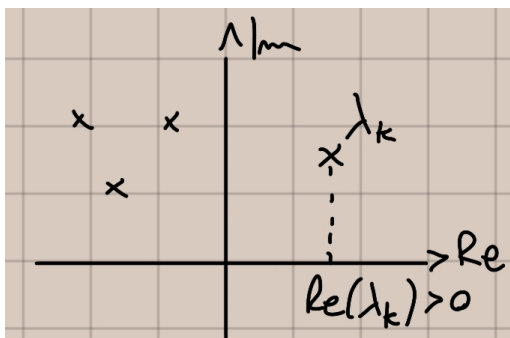


Figura 3.2: Questo sistema non è asintoticamente stabile perché ho una parte reale maggiore di zero.

Esempio 1 dal circuito elettrico RL:

$$\frac{dv(t)}{d(t)} + \frac{R}{L}v(t) = \frac{R}{L}u(t)$$

L'equazione caratteristica sarà:

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L} \in \mathbb{R} \quad \lambda < 0 \text{ per } R, L > 0$$

quindi il sistema è stabile.

Esempio 2 della molla:

$$M \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + D \frac{dv(t)}{dt} - kv(t) = 0 \text{ con } M, D, k > 0$$

L'equazione caratteristica sarà:

$$Ms^2 + Ds - k = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 + 4kM}}{2M}$$

In base ai valori di M, D, k si ricaveranno i valori di  $\lambda_1, \lambda_2$

### 3.1.4 Risposta impulsiva ed evoluzione forzata

**Definizione:** il prodotto di convoluzione tra due funzione u,v se esiste è definito da

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)v(t - \xi)d\xi =$$

$$\underbrace{=}_{\text{cambio variabile } t-\xi=x} \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \xi)v(\xi)d\xi$$

Proprietà:

1. Commutatività:

$$(u * v)(t) = (v * u)(t)$$

2. Associatività:

$$(u * v)(t) * w(t) = u(t) * (v * w)(t)$$

3. Distribuibilità rispetto alla somma:

$$u(t) * (v(t) + w(t)) = (u * v)(t) + (u * w)(t)$$

questre tre prime proprietà derivano dalle proprietà dell'integrazione

4. L'impulso è elemento neutro per la convoluzione:

$$(v * \delta)(t) = (\delta * v)(t) = v(t)$$

per la proprietà di campionamento dell'impulso:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi)\delta(t - \xi)d\xi = (v * \delta)(t)$$

**Definizione:** dato un sistema a tempo continuo inizialmente a riposo definiamo la risposta impulsiva del sistema, la risposta in corrispondenza dell'impulso ideale

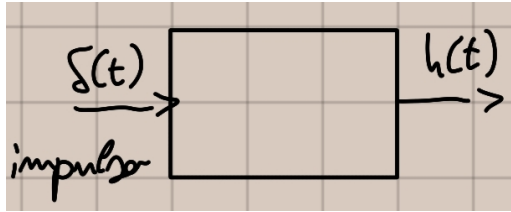


Figura 3.3: La risposta impulsiva  $h(t)$

**Teorema:** la risposta in uscita  $v(t)$  di una sistema LTI, inizialmente a riposo, in corrispondenza a un ingresso  $u(t)$  è data dal seguente prodotto di convoluzione (se esiste)

$$v(t) = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)u(t - \xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \xi)u(\xi)d\xi$$

con  $h(t)$  la risposta impulsiva del sistema.

**Osservazione:** un sistema LTI inizialmente a riposo è causale

$$u(t) = 0, v(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

siamo a riposo. Siccome  $h(t) = 0$  per  $t < 0$  (perché  $\delta(t) = 0, t < 0$ )  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} (u * h)(t) &= \int_{0^-}^{\infty} h(\xi)u(t - \xi)d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} h(t - \xi)u(\xi)d\xi \end{aligned}$$

In particolare, la risposta forzata di un sistema LTI, inizialmente a riposo (quindi causale) in corrispondenza a un ingresso  $u(t)$  ( $u(t) = 0, t < 0$ ) è:

$$\begin{aligned} v_f(t) = (u * h)(t) &= \int_{0^-}^{t^+} h(\xi)u(t - \xi)d\xi = \\ &= \int_{0^-}^{t^+} h(t - \xi)u(\xi)d\xi \end{aligned}$$

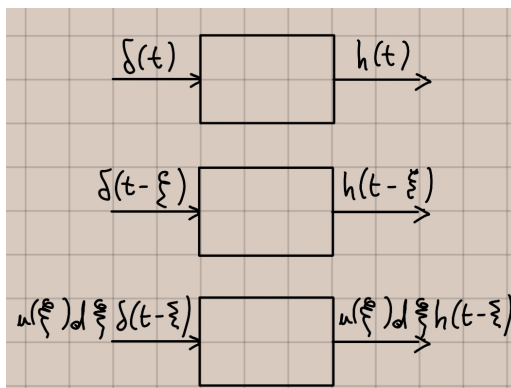


Figura 3.4: La seconda valida per tempo invarianza, mentre la terza per la linearità

**Dimostrazione:** Integriamo  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \delta(t - \xi) d\xi}_{u(t)} \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) h(t - \xi) d\xi$$

$$u(t) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) h(t - \xi) d\xi = (u * h)(t)$$

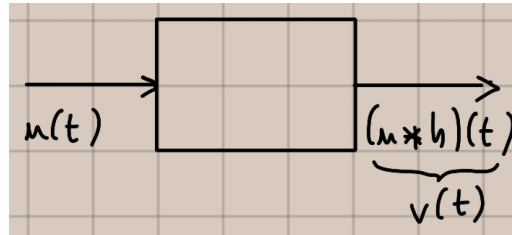


Figura 3.5: Dimostrazione completa.

**Osservazione:** si può dimostrare che per il sistema definito dalla prima equazione differenziale

$$h(t) = d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \underbrace{\delta_{-1}(t)}_{\text{dobbiamo assicurarci la causalità}}$$

con  $d_0 \neq 0$  se e solo se  $n = m$

Esempio: determinare la risposta impulsiva del sistema

$$\frac{dv(t)}{dt} + 2v(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

Equazione caratteristica:

$$s + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \text{il modo elementare } m(t) = e^{-2t}$$

$$h(t) = d_0 \delta(t) + d_1 e^{-2t} \delta_{-1}(t)$$

Come si ricavano  $d_0, d_1 = ?$

$$\frac{dh(t)}{dt} = d_0 \frac{d\delta(t)}{dt} - 2d_1 e^{-2t} \delta_{-1}(t) + d_1 e^{-2t} \delta(t)$$

Sostituisco nell'equazione (\*)

$$\Rightarrow d_0 \frac{d\delta(t)}{dt} - 2d_1 e^{-2t} \delta_{-1}(t) + d_1 e^{-2t} \delta(t) + 2d_0 \delta(t) + 2d_1 e^{-2t} \delta_{-1}(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$$

$$d_0 \frac{d\delta(t)}{dt} + d_1 \delta(t) + 2d_0 \delta(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$$

$$d_{0-1} \frac{d\delta(t)}{dt} + (d_1 + 2d_{0-1}) \delta(t) = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} d_{0-1} = 0 \Rightarrow d_0 = 1 \\ d_1 + 2d_{0-1} = 0 \Rightarrow d_1 = -1 \end{cases}$$

Per  $t \rightarrow 0$ . Perciò abbiamo trovato la nostra risposta impulsiva:

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

Riassunto, se noi abbiamo una sistema LTI rappresentato dall'equazione differenziale, avremo che la risposta totale sarà data dalla somma della risposta libera con la risposta forzata:

$$v(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

- $v_l(t)$  si ottiene trovando le radici dell'equazione omogenea associata e utilizzando le condizioni iniziali  $\rightarrow$  stabilità asintotica
- $v_f(t)$  si ottiene tramite

$$\int_0^{t^+} u(\xi)h(t-\xi)d\xi$$

$\rightarrow$  stabilità BIBO

### 3.1.5 Stabilità di un sistema continuo definito dalla risposta impulsiva

**Teorema:** un sistema a tempo continuo LTI è BIBO stabile se e solo se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)|d\xi < \infty$$

**Dimostrazione:** da destra a sinistra, se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)|d\xi < \infty \Rightarrow \text{il sistema è BIBO stabile}$$

Se l'ingresso  $u(t)$  tale che  $|u(t)| < M_u, \forall t$  dobbiamo dimostrare che l'uscita  $v(t)$  corrispondente è limitata ( $\exists M_v$  t.c.  $|v(t)| < M_v, \forall t$ )

$$\begin{aligned} v(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)u(t-\xi)d\xi \\ |v(t)| &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)u(t-\xi)|d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)| \underbrace{|u(t-\xi)|}_{< M_u} d\xi < M_u \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)|d\xi}^{= M_v} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{< \infty} \\ \Rightarrow |v(t)| &< M_v \end{aligned}$$

### 3.1.6 Risposta in frequenza

Ci interessa la risposta di un sistema definito dall'equazione differenziale in corrispondenza di un ingresso del tipo:

$$u(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \quad (fasore)$$

Il sistema è BIBO stabile  $\leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty$$

$$\begin{aligned} v(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) Ae^{j(\omega_0(t-\tau) + \phi)} d\tau = \\ &= \underbrace{Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}}_{\in C} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau}_{\text{converge?}} \\ &| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau | = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \underbrace{|e^{-j\omega_0 \tau}|}_{=1} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty \end{aligned}$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} H(j\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \\ \Rightarrow v(t) &= \underbrace{H(j\omega_0)}_{\text{dipende soltanto dal sistema considerato}} \underbrace{Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}}_{\text{l'ingresso}}, t \in R \end{aligned}$$

**Definizione:** dato un sistema LTI BIBO stabile, di risposta impulsiva  $h(t)$  definiamo la **risposta in frequenza** la funzione

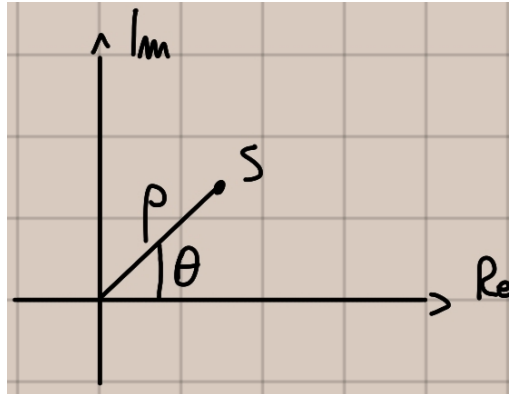
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau, H(j\omega) \in C, \omega \in R$$

Definiamo inoltre

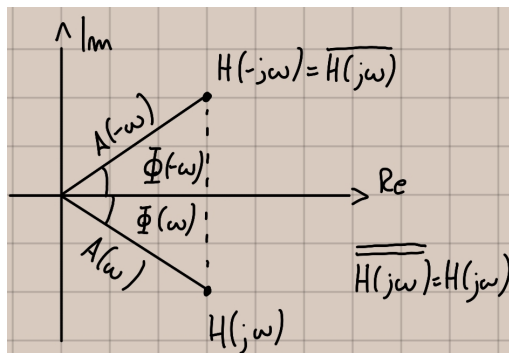
$$\begin{aligned} A(\omega) &= |H(j\omega)| \\ \Phi(\omega) &= \arg(H(j\omega)) \end{aligned}$$

il modulo  $A$  e l'argomento (la fase)  $\Phi$  della risposta in frequenza  $H$

$$\begin{aligned} A(\omega) &:= |H(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right| \\ \Phi(\omega) &:= \arg(H(j\omega)) = \arg\left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) \end{aligned}$$



(a)



(b)

$$s = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\rho = |s|$$

$$\theta = \arg(s)$$

Proprietà:

1.  $A(\omega)$  è pari ( $A(-\omega) = A(\omega)$ )
2.  $\Phi(\omega)$  è dispari ( $\Phi(-\omega) = -\Phi(\omega)$ )
3.  $H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)}$

**Dimostrazione del punto 3**

$$\begin{aligned} H(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau)}_{\in R} e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(\tau) e^{-j\omega\tau}} d\tau = \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau} = \overline{H(j\omega)} \end{aligned}$$

Esempio di risposta a un segnale sinusoidale:

$$u(t) = A \cos(\omega t + \underbrace{\phi}_{fase})$$

Formula di Eulero

$$\begin{aligned}\Rightarrow u(t) &= \frac{A}{2}e^{j(\omega t + \phi)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega t + \phi)} = \\ &= \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega t}}_{u_1(t)} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega t}}_{u_2(t)}\end{aligned}$$

Per la linearità

$$\begin{aligned}u_1(t) &\mapsto v_1(t) \\ u_2(t) &\mapsto v_2(t)\end{aligned}$$

Quindi

$$A \cos(\omega t + \phi) = u_1(t) + u_2(t) \mapsto v_1(t) + v_2(t) = v(t)$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}H(j\omega) &= A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \text{ rappresentazione esponenziale} \\ v(t) &= \underbrace{\frac{A}{2}A(\omega)e^{j(\phi + \Phi(\omega))}e^{j\omega t}}_{v_1(t)} + \underbrace{\frac{A}{2}A(-\omega)e^{-j(\phi - \Phi(-\omega))}e^{-j\omega t}}_{v_2(t)} = \text{ per proprietà 1 e 2} \\ &= A(\omega)\frac{A}{2}e^{j(\phi + \Phi(\omega))}e^{j\omega t} + \frac{A}{2}A(\omega)e^{-j(\phi + \Phi(\omega))}e^{-j\omega t} \\ &= AA(\omega)\left[\frac{e^{j(\omega t + \phi + \Phi(\omega))}}{2} + \frac{e^{-j(\omega t + \phi + \Phi(\omega))}}{2}\right] = \\ &= AA(\omega) \cos(\omega t + \phi + \Phi(\omega)) \\ &\underbrace{A \cos(\omega t + \phi)}_{\text{ingresso}} \mapsto \underbrace{\overbrace{AA(\omega)}^1 \cos(\omega t + \phi + \underbrace{\Phi(\omega)}^2)}_{\text{uscita}}\end{aligned}$$

1. Per l'ampiezza della risposta in frequenza  $H(j\omega)$

2. Più l'argomento (fase) della risposta in frequenza  $H(j\omega)$

**Osservazione:** La risposta di un sistema LTI e BIBO staile a un segnale sinusoidale di frequenza  $\omega$  e un segnale sinusoidale della stessa frequenza  $\omega$  è:

- ampiezza data dal prodotto dell'ampiezza dell'ingresso per l'ampiezza della risposta in frequenza;
- fase data dalla somma della fase iniziale e della fase della risposta in frequenza

Esempio  $u(t) = e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned}v(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \\ &= e^{j\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{H(j\omega) \text{ risposta in frequenza}} = H(j\omega)e^{j\omega t}\end{aligned}$$

Per i sistemi definiti dall'equazione differenziale e ingresso  $u(t)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} &= \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i (H(j\omega)e^{j\omega t})}{dt^i} &= \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i (e^{j\omega t})}{dt^i} \\ \Leftrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t} \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i &= e^{j\omega t} \sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i \\ \frac{d^i (e^{j\omega t})}{dt^i} &= (j\omega)^i e^{j\omega t}\end{aligned}$$

**Osservazione:** Per il sistema dell'equazione differenziale, in corrispondenza di ingressi fasori la risposta in frequenza è una funzione razionale (rapporto di due polinomi) in  $j\omega$ .

### 3.1.7 La trasformata di Laplace

Sia  $v(t), t \in R$  una funzione sommabile su  $[0^-, \infty)$  ( $\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt < \infty$ ) la **trasformata di Laplace unilatera** è:

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-st} dt, s \in C$$

Notazione  $V(s) = \mathcal{L}[v(t)](s)$

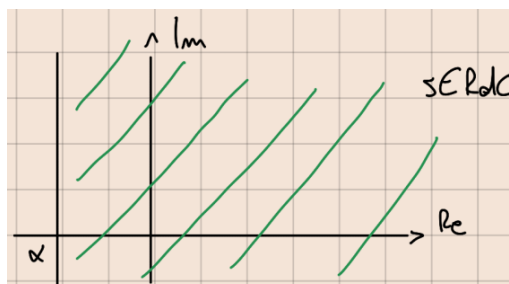
**Osservazione:** Affinchè  $V(s)$  esista

$$|\int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}| < \infty \text{ l'integrale converge}$$

Il dominio di  $V$  saranno tutti gli  $s$  per cui l'integrale converge e viene chiamato **regione di convergenza**(RdC). Si può dimostrare che RdC è sempre un semipiano aperto del tipo

$$RdC = s \in C | Re(s) > \alpha, \alpha \in R$$

$\alpha$  si chiama **ascissa di convergenza**.



### 3.1.8 RdC della trasformata di Laplace unilatera di una combinazione lineare di funzioni esponenziali

**Teorema**  $v(t) = \sum_{i=0}^n c_i e^{\lambda_i t}$ , dove  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \in C$ ,  $c_i$  costanti. La RdC di  $\mathcal{L}[v(t)](s)$  è un semipiano destro

$$RdC = s \in C | \operatorname{Re}(s) > \alpha \text{ dove } \alpha = \max \operatorname{Re}(\lambda_0), \dots, \operatorname{Re}(\lambda_n)$$

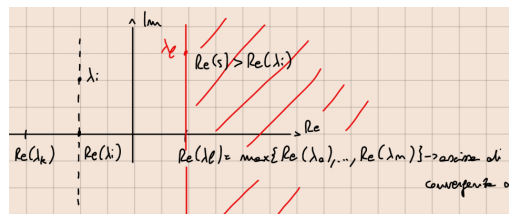
Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n c_i e^{\lambda_i t} \right) e^{-st} dt = \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_{0^-}^{\infty} e^{\lambda_i t} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{\dots} \end{aligned}$$

**INCOMPLETA VEDI LEZIONE 31-03** Per  $i \in 0, \dots, n$  sia  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$  e  $s = \sigma + j\omega$ , valutiamo il modulo dell'integrale

$$\begin{aligned} & \left| \int_{0^-}^{\infty} e^{\lambda_i t} e^{-st} dt \right| = \\ & \left| \int_{0^-}^{\infty} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \right| = \\ & \left| \int_{0^-}^{\infty} e^{[\sigma_i - \sigma + j(\omega_i - \omega)]t} dt \right| = \\ & \left| \frac{e^{[\sigma_i - \sigma + j(\omega_i - \omega)]t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right|_{0^-}^{\infty} = \\ & \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{e^{(\sigma_i - \sigma)t}}^1 \overbrace{e^{j(\omega_i - \omega)t}}^2}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} - \frac{1}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right| < \infty \\ & \text{per } \sigma > \sigma_i \leftrightarrow \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\lambda_i) \end{aligned}$$

1. converge per  $\sigma_i - \sigma < 0$
2. ha il modulo 1

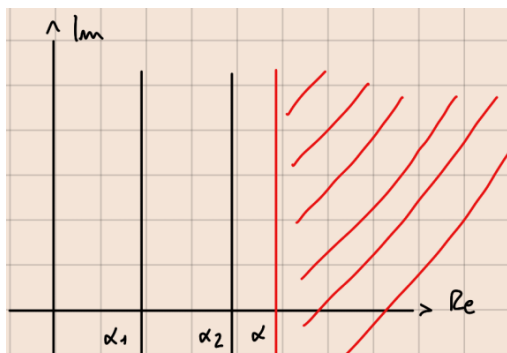


### 3.1.9 Proprietà della trasformata di Laplace

1. **Linearità**, se  $v_1, v_2$  ammettono la trasformata di Laplace (TdL) allora anche  $a_1 v_1 + a_2 v_2$  ammette la TdL e:

$$\mathcal{L}[a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)](s) = a_1 \mathcal{L}[v_1(t)](s) + a_2 \mathcal{L}[v_2(t)](s)$$

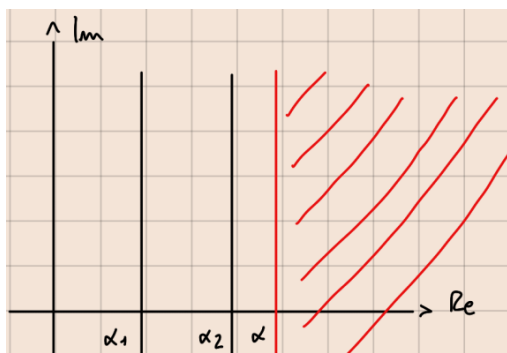
e l'ascissa di convergenza è  $\alpha \geq \max \alpha_1, \alpha_2$  dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono rispettivamente le ascisse di convergenza di  $v_1$  e  $v_2$



2. Traslazione nel dominio del tempo (**time shifting**) se  $v(t)$  ammette TdL allora anche  $v(t - \tau), \tau > 0$  ammette TdL e:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \mathcal{L}[v(t)](s)$$

L'ascisse di convergenza non cambia



**dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v(t - \tau)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} v(t - \tau) e^{-st} dt \stackrel{*}{=} \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(x) e^{-s(x+\tau)} dx = \\ &= e^{s\tau} \int_{0^-}^{\infty} v(x) e^{-sx} dx \stackrel{**}{=} \\ &= e^{s\tau} \mathcal{L}[v(t)](s) \end{aligned}$$

(\*) cambio di variabile

$$x = t - \tau \Rightarrow dx = dt$$

(\*\*) ritorno alla variabile di prima

3. Traslazione nel dominio dei complessi o moltiplicazione per una funzione esponenziale (**frequency shifting**) Se  $v(t)$  ammette TdL  $V(s)$ , allora anche  $e^{\lambda t}v(t)$  ammette TdL e

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)](s) = V(s - \lambda) (= \mathcal{L}[v(t)](s - \lambda))$$

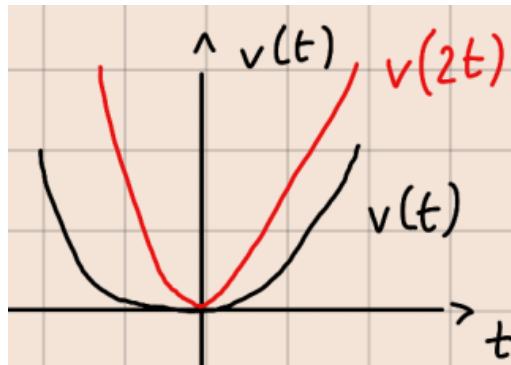
L'ascissa di convergenza è  $\alpha = \alpha_0 + \operatorname{Re}(\lambda)$  dove  $\alpha_0$  è l'ascissa di convergenza di  $V(s)$  **dimostrazione:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{\lambda t}v(t)e^{-st}dt = \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-(s-\lambda)t}dt = \mathcal{L}[v(t)](s - \lambda) = V(s - \lambda)\end{aligned}$$

4. Cambiamento di scale (**scaling**) se  $v(t)$  ammette TdL allora  $v(rt)$  ammette TdL e

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r}V\left(\frac{s}{r}\right)$$

con ascissa di convergenza  $\alpha = r\alpha_0$



**dimostrazione:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(rt)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} v(rt)e^{-st}dt \stackrel{*}{=} \\ &= \frac{1}{r} \int_{0^-}^{\infty} v(\tau)e^{\frac{s}{r}\tau}d\tau = \\ &= \frac{1}{r}V\left(\frac{s}{r}\right)\end{aligned}$$

(\*) cambio variabile

$$rt = \tau \quad dt = \frac{d\tau}{r}$$