Sistemi

Giovanni Tosini

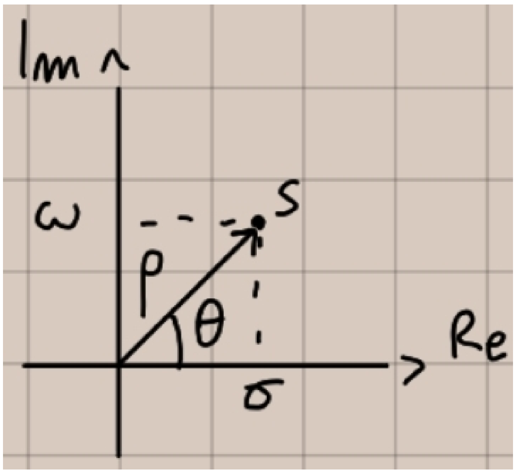
Indice

Capitolo 1

Numeri complessi

Un numero complesso $s = \sigma + j\omega$ con $j = \sqrt{-1}$ e $\sigma, \omega \in R$ in cui

- $\sigma = Re(s)$ parte reale
- $\omega = Im(s)$ parte immaginaria
- $C = st.c.s = \sigma + j\omega, \sigma, \omega \in R$ insieme dei numeri complessi



Forma polare dei numeri complessi, $s = \rho(cos\theta + jsin\theta)$

- $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ il modulo di s con $\rho \in R^+$
- $\theta =$ argomento di s

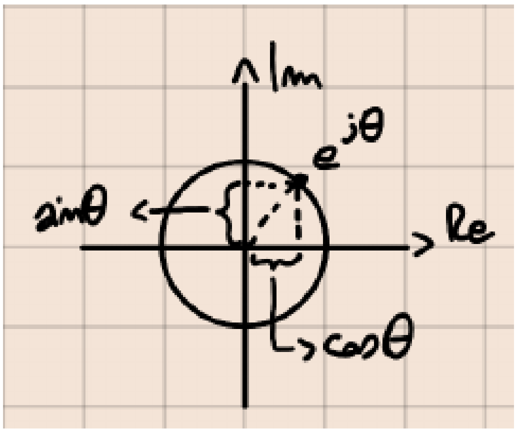
Osservazione 1 $Re(s) = \rho cos\theta$ e $Im(s) = \rho sin\theta$

Osservazione 2 L'argomento θ è determinato a meno di multipli interi di 2π. Imponendo $\theta \in [0, 2\pi)$ oppure $(-\pi, \pi]$ (deve essere un intervallo lungo 2π) si ottiene l'argomento principale θ che notiamo con $arg(s)$

1.1 Formula di Eulero

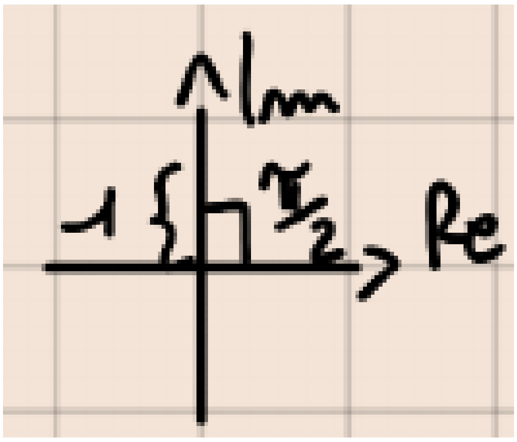
$\theta \in R, j = \sqrt{-1}$ abbiamo $e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$

Forma esponenziale $s = \rho e^{j\theta}$



$|e^{j\theta} = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = 1$

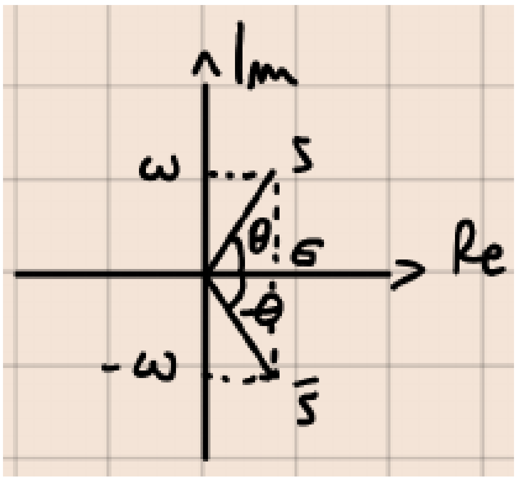
Esempio: $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$



$s = 0 + 1j = j$

Def: i numeri **immaginari puri** hanno la parte reale nulla

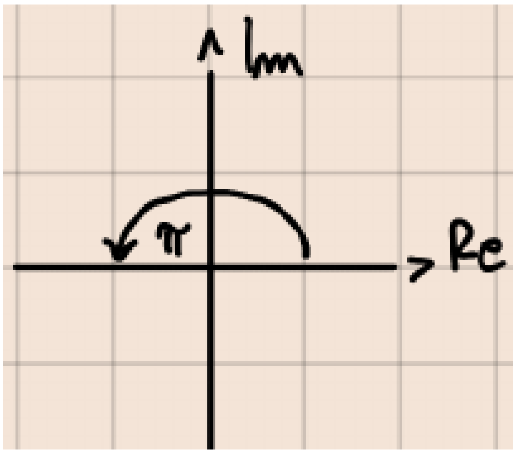
Def: dato $s : \sigma + j\omega \in C$ $\bar{s} : \sigma - j\omega$ coniugato complesso



La forma polare di $\bar{s}$ sarà uguale a $\rho(cos\theta - jsin\theta)$

Osservazione $|s| = |\bar{s}| arg(\bar{s}) = -arg(s)$

Esempio: $e^{j\pi} = -1 = e^{j\pi} + 1 = 0$

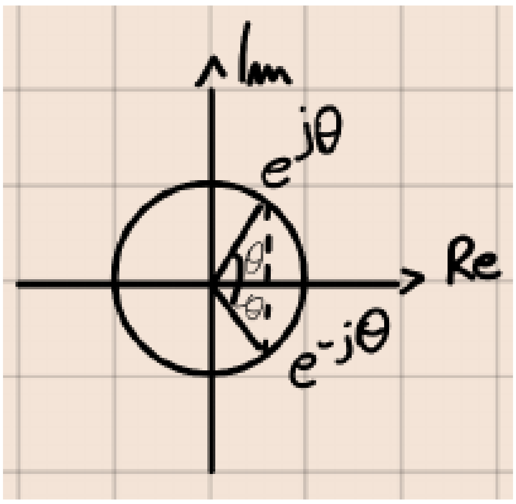


1.2 Operazioni con i numero complessi

- $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1, s_2 = \sigma_2 + j\omega_2 \in C$
- $s_1 + s_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + j(\omega_1 + \omega_2)$
- $s_1 - s_2 = \sigma_1 - \sigma_2 + j(\omega_1 - \omega_2)$

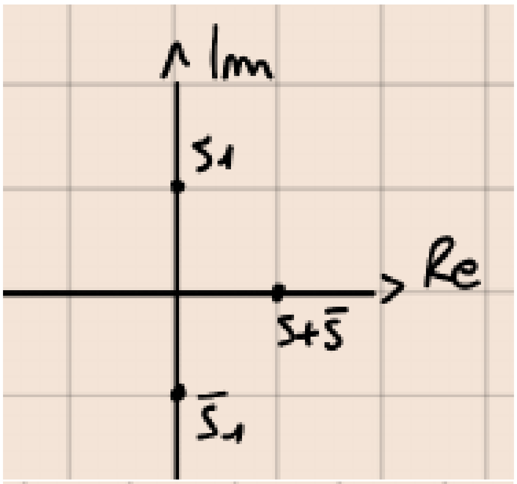
Osservazione: $Re(s) = \frac{s+\bar{s}}{2}$ e $Im(s) = \frac{s+\bar{s}}{2j}$

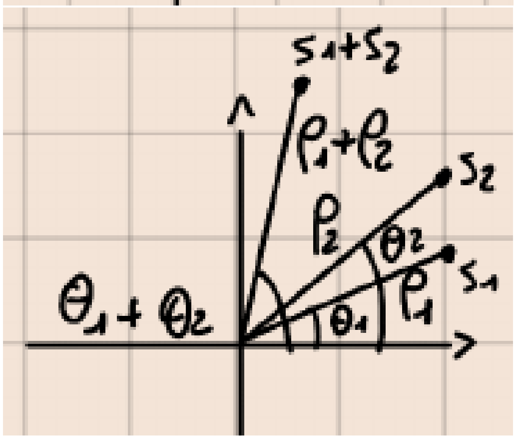
Per la formula di Eulero $e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ e $sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$



Osservazione: $2Re(s) = s + \bar{s}$ e $2jIm(s) = s - \bar{s}$

$s = \bar{s} \Rightarrow Im(s) = 0$ e $s = -\bar{s} \Rightarrow Re(s) = 0$





- $s_1 = \rho_1(cos\theta_1 + jsin\theta_1)$
- $s_2 = \rho_1(cos\theta_2 + jsin\theta_2)$
- $s_1 s_2 = \rho_1\rho_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + jsin(\theta_1 + \theta_2))$
- $s_1 s_2 = \rho_1\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 + jcos\theta_1 sin\theta_2 + jsin\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2)$
- $s_1 s_2 = \rho_1\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2 + j(cos\theta_1 sin\theta_2 + sin\theta_1 cos\theta_2))$

N.B.: $cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2 = cos(\theta_1 + \theta_2)$ e $cos\theta_1 sin\theta_2 + sin\theta_1 cos\theta_2 = sin(\theta_1 + \theta_2)$

Def: Dato $s \in C$ il numero s^{-1} t.c. $ss^{-1} = 1$, $s^{-1} = \frac{\bar{s}}{|s|^2}$ reciproco (inverso) di s.

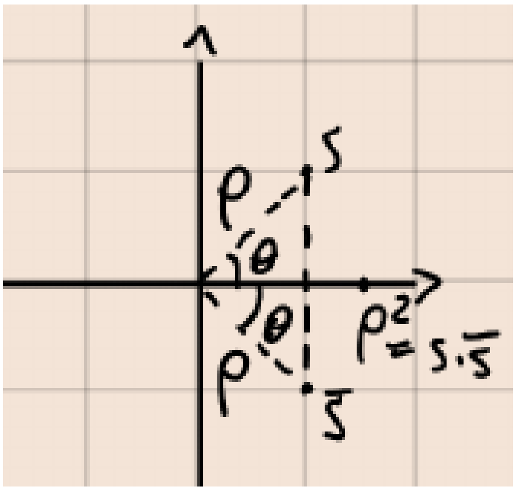
$ss^{-1} = s\frac{\bar{s}}{|s|^2} = \frac{s\bar{s}}{|s|^2}$

$s\bar{s} = \rho^2(cos(\theta - \theta) + jsin(\theta - \theta)) = \rho^2 = |s|^2$

Osservazione: l'argomento di un numero complesso si può chiamare anche **fase**.

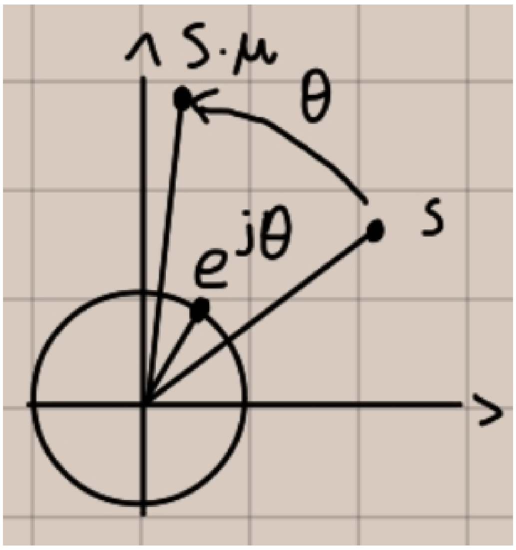
$\frac{s_1}{s_2} = s_1 s_2^{-1} = s_1\frac{\bar{s_2}}{|s_2|^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(cos(\theta_1 - \theta_2)jsin(\theta_1 - \theta_2))$

Osservazione: $s\bar{s} = \rho^2(cos(\theta - \theta) + jsin(\theta - \theta)) = \rho^2 \Rightarrow |s|^2 = s\bar{s}$



Def: $u \in C$ si dice complesso unitario se $|u| = 1$. In forma polare $u = cos\theta + jsin\theta$. In forma esponenziale $u = e^{j\theta}$ e $|e^{j\theta}| = 1$

Sia $u = cos\alpha + jsin\alpha$ con $s = \rho(cos\theta + jsin\theta)$ avremo che $su = \rho(cos(\theta + \alpha) + jsin(\theta + \alpha))$ (rotazione intorno all'origine)



$s^n = \rho^n(cos(n\theta) + jsin(n\theta))$

Esempio:

$$(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$$

Radici complesse Ogni $s \in C$ ammette n distinte radici n-esime $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1} \in C$. Dobbiamo trovare $\omega \in C$ t.c. $\omega^n = s$.

$$]\forall k \in [0, n-1], \omega_k \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + jsin(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k))$$

Prova:

$$\omega_k^n = (\sqrt[n]{\rho}^n)(\cos(n(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)) + jsin(n(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k))) =$$
$$= \rho(cos(\theta + 2\pi k) + jsin(\theta + 2\pi k)) =$$

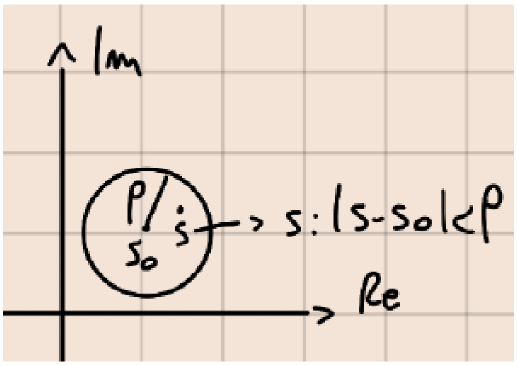
Notare che $cos(\theta + 2\pi k)$ è equivalente a $cos\theta$ e $sin(\theta + 2\pi k)$ equivale a $sin\theta$ questo $\forall k = 0, ..., n-1$.

L'equazione: $s^4 = 1 + 2j$ ha 4 radici distinte nel campo C. Esempio: le radici complesse dell'unità

$s^n = 1 \omega_k = cos(\frac{2\pi}{n}k) + jsin(\frac{2\pi}{n}k) k = 0, ..., n-1$

Funzioni di variabile complessa Gli insieme su cui definiamo una funzione di variabile complessa f si scrivono $D(f)$, $D(f) \subseteq C$

Def: un punto $s_0 \in D(f) \subseteq C$ è interno a $D(f)$ se esiste un disco $B_\rho(s_0)$ di raggio ρ con $\rho \in R^+$ centrato in s_0, t.c. $B_\rho(s_0) \subseteq D(f)$ dove $B_\rho(s_0) = s \in Ct.c.|s - s_0| < \rho$



Def: Un insieme $D(f) \subseteq C$ si dice aperto se tutti i suoi punti sono interni

Def: Una funzione $f : D(f) \to C$ con $D(f) \subseteq C$ aperto è una funzione complessa

Esempi di funzioni complesse con annesso dominio:

- $f(s) = s, D(f) = C$
- $f(s) = s^2, D(f) = C$
- $f(s) = Re(s) + jIm(s)^2, D(f) = C$
- $f(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k, D(f) = C$
- funzione polinomiale, $f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ dove $P(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$ e funzione razionale $Q(s) = \sum_{k=0}^{n} b_k s^k$, $D = C - \lambda_1, ..., \lambda_m$ dove λ_α è radice di $Q(s) = 0$ per $k = 1, ..., m$

1.3 Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio $P(s)$ a coefficienti complessi di grado $n > 0$ ha n radici complesse e si può comporre come

$P(s) = a_n(s - \lambda_1)_1^\mu (s - \lambda_2)_2^\mu ... (s - \lambda_r)_r^\mu$ dove $\lambda_1, ...\lambda_r$ sono radici e $\mu_1, ..., \mu_r$ sono le **molteplicità** relative di ciascuna radice per cui $\mu_1 + ... + \mu_r = n$

Osservazione Un numero λ è una radice di molteplicità μ per un polinomio $P(s)$ se e solo se $P(\lambda) = P'(\lambda) = P''(\lambda) = ... = P^{\mu-1}(\lambda) = 0$ e $P^{\mu}(\lambda) \neq 0$

Capitolo 2

Segnali

Sono funzioni matematiche definite su un dominio, esistono nel dominio:

- continuo $\rightarrow R, C, \ldots;$
- discreto $\rightarrow Z.$

2.1 Segnali elementari a tempo continuo

2.1.1 Segnale sinusoidale

Consiste di una funzione:

$$v : R \rightarrow R, v(t) = A \overbrace{\cos}^{[-1,1]}(\omega t + \phi) \text{ con } A, \omega, \phi \in R$$

- $A > 0$ è l'ampiezza;
- ω la pulsazione;
- ϕ la fase;
- v è periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$;
- la frequenza $f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$.

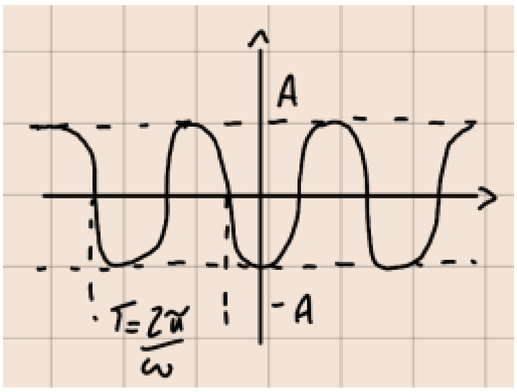


Figura 2.1: Funzione sinusoidale

2.1.2 Fasore

Una funzione:

$$v : R \to C, v(t) = Ae^{j(\omega t+\phi)}[1] \text{ con } A, \omega, \phi \in R$$

Di conseguenza sarà uguale sempre ad A.

Osservazione: dalla formulla di Eulero, possiamo esprimere un segnale sinusoidale

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t+\phi) &= A\frac{e^{j(\omega t+\phi)}+e^{-j(\omega t+\phi)}}{2} = \\ &= \frac{A}{2}e^{j(\omega t+\phi)}+\frac{A}{2}e^{-j(\omega t+\phi)} \end{aligned}$$

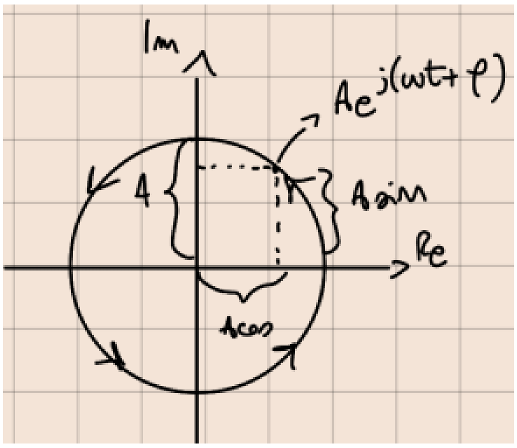


Figura 2.2: Fasore

2.1.3 Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente

$$v : R \to R \tag{2.1}$$
$$v(t) = Ae^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi) \tag{2.2}$$
$$\text{con } \sigma, A, \omega, \phi \in R, A > 0 \tag{2.3}$$
$$\tag{2.4}$$

non è periodico.

- per $\sigma > 0$ e $t \to \infty \Rightarrow v(t) = \infty$
- per $\sigma < 0$ e $t \to \infty \Rightarrow v(t) = 0$

[1] $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \to |e^{j\theta}| = 1$

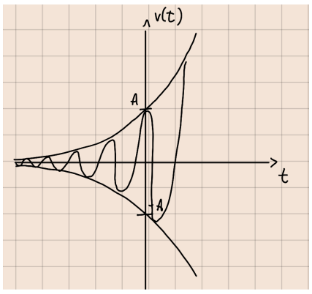


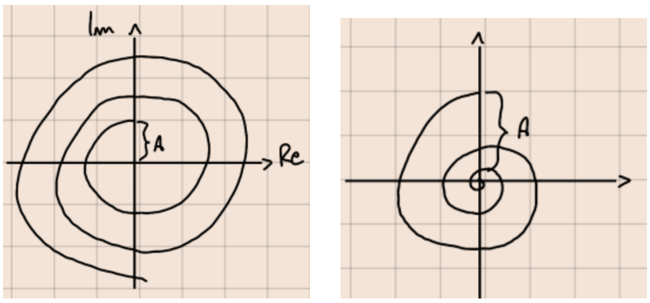
Figura 2.3: Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente

Osservazione: segnali sinusoidali, modulati esponenzialmente, si possono scrivere come combinazione lineare di fasori:

$$
\begin{aligned}
Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi) &= Ae^{\sigma t}\frac{e^{j(\omega t+\phi)} + e^{-j(\omega t+\phi)}}{2} = \\
&= \frac{Ae^{\sigma t}e^{j(\omega t+\phi)}}{2} + \frac{Ae^{\sigma t}e^{-j(\omega t+\phi)}}{2} = \\
&= \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{t(\sigma+j\omega)} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{t(\sigma-j\omega)}}_{\text{sono complessi coniugati}}
\end{aligned}
$$

2.1.4 Segnale esponenziale complesso

$$v : R \to C, v(t) = Ae^{\sigma t}e^{j(\omega t+\phi)}$$



(a) ***Per*** $\sigma > 0$ ***e*** $t \to \infty |v(t)| \to \infty$

(b) ***Per*** $\sigma < 0$ ***e*** $t \to \infty |v(t)| \to 0$

2.1.5 Funzioni generalizzate

2.1.5.1 Segnali polinomiali

$$\delta_{-n} : R \to R\delta_{-n} = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0; \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Da un certo istante ha un valore e quello sarà l'istante 0.

Osservazione:

$$\delta_{-n}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_{-(n-1)}(\Psi) d\Psi$$

Il segnale polinomiale n-esimo può essere ottenuto come integrale del segnale (n - 1)-esimo

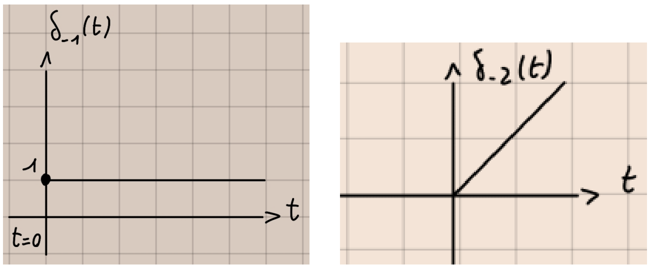
$$\delta_{-n}(t) = \frac{d\delta^t_{-(n+1)}}{dt}$$

Esempio per n = 1

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per n = 2

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$



(a) ***Funzione gradino*** (b) ***Rampa unitaria***

Osservazione: l'integrale del gradino è la rampa e viceversa la derivata della rampa è il gradino.

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_{-1} d\alpha = \delta_{-2}(t) \frac{d\delta_{-2}(t)}{dt} = \delta_{-1}(t)$$

2.1.5.2 Finestra rettangolare unitaria

$$\Pi : R \to R\Pi(t) = \begin{cases} 1, -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$ [2]

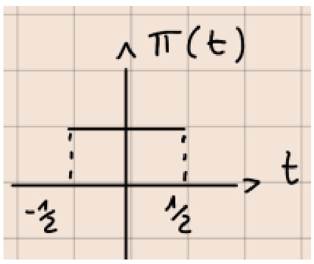


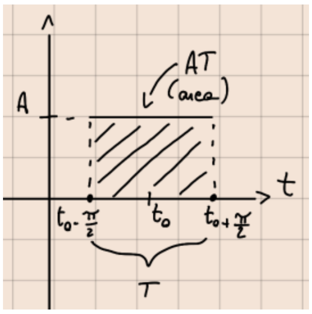
Figura 2.4: Finestra rettangolare unitaria, ampiezza = 1

Osservazione: La finestra rettangolare unitaria è una combinazione lineare di due gradini:

$$\Pi(t) = \delta_{-1}(t + \frac{1}{2}) - \delta_{-1}(t - \frac{1}{2})$$

2.1.5.3 Finestra rettangolare ad ampiezza A con diverso supporto

N.B.: il supporto è il sottoinsieme del dominio per cui la funzione è $\neq 0$



L'ampiezza A, centrata in t_0, con supporto $(t_0 - \frac{\pi}{2}, t_0 + \frac{\pi}{2})$.

$$A\Pi(\frac{t-t_0}{T}) = \begin{cases} A, t_0 - \frac{\pi}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{\pi}{2} \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.1.5.4 Finestre (o impulso) triangolare unitaria

$$\Lambda : R \to R, \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, -1 \leq t \leq 1 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

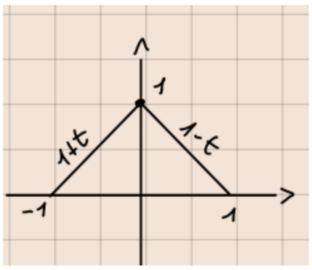
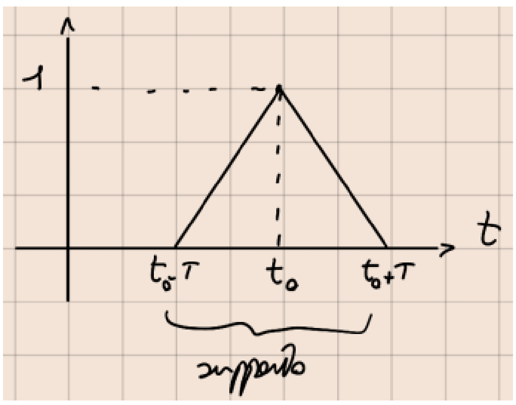


Figura 2.5: Impulso, supporto $[-1, 1]$, area $= 1$

2.1.5.5 Finestra triangolare ad ampiezza A con supporto 2T centrata in t_0



$$A\Lambda(\frac{t-t_0}{T}) = \begin{cases} A - \frac{A}{T}|t-t_0|, t_0 - T \le t \le t_0 + T \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

supporto $(t_0 - T, t_0 + T)$, area $= AT$

2.1.5.6 Impulso di Diraca o funzione $\delta(t)$

Osservazione: l'impulso è una funzione generalizzata che è definita come un limite di una succesione di funzioni.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\Pi(\frac{t}{\frac{2}{n}}) \text{ dove} \\ f_n(t) &= \frac{n}{2}\Pi(\frac{t}{\frac{2}{n}}) = \\ &= \begin{cases} \frac{n}{2}, -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n} \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

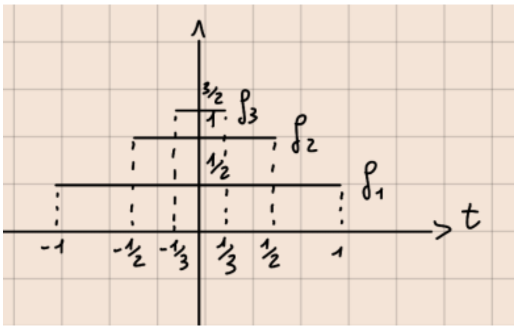


Figura 2.6: Impulsod di Dirac, prosegue fino a ∞

$$\delta_t\text{"} = \text{"} \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{f_n(t)dt}^{\text{ogni finestra ha area} = 1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

2.1.5.7 Impulso di ampiezza A e centrato in t_0

$$A\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, t = t_0 \\ 0, \text{altrimenti} \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty 0} A\delta(t-t_0)dt = A$$

Proprietà dell'impulso:

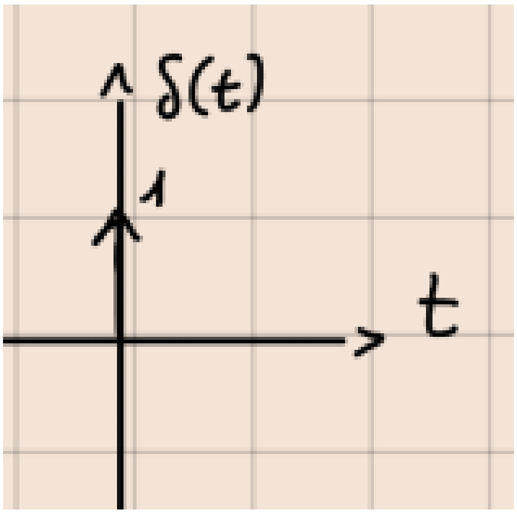


Figura 2.7: Rappresentazione grafica

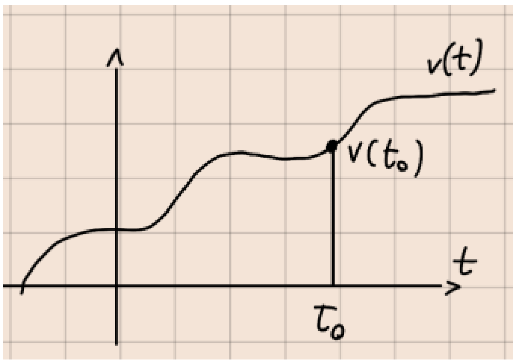
- L'impulso ideale centrato in origine è pari a:

$$\delta(-t) = \delta(t), t \in R$$

- Area unitaria

$$\begin{cases} \int_a^b \delta(t)dt = 1, \text{ se } 1 \in (a,b) \\ \int_a^b \delta(t)dt = 0, \text{ se } 1 \notin (a,b) \end{cases}$$

- Proprietà di campionamento



$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\Psi)\delta(\Psi - t_0)d\Psi$$

Inolte se v è continua sul dominio

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\Psi)\delta(\Psi - t)d\Psi \text{ moltiplico per } \delta(t - t_0)$$

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
v(t_0) &= v(t) + v(t_0) - v(t) \\
& v(t_0)\delta(t - t_0) = v(t)\delta(t - t_0) + [v(t_0) - v(t)]\delta(t - t_0) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} v(t_0)\delta(\Psi - t_0)d\Psi = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} v(\Psi)\delta(\Psi - t_0)d\Psi + \\
& + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\delta(\Psi - t_0)}^{0 \text{ per } \Psi \neq t_0} \overbrace{[v(t_0) - v(\Psi)]}^{0 \text{ per } \Psi = t_0} d\Psi}_{0} \\
& \Rightarrow v(t_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Psi - t_0)d\Psi}_{1 \text{ perché l'impulso è unitario}} = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} v(\Psi)\delta(\Psi - t_0)d\Psi \\
v(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\Psi)\delta(\Psi - t_0)d\Psi
\end{aligned}
$$

Osservazione: si può scrivere anche come

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0)$$