Funzione di trasferimento

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \qquad (1)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$\boxed{V(s) = \frac{p(s)}{d(s)} + \frac{n(s)}{d(s)} U(s)} \qquad (*)$$

$$V(s) = \frac{\overbrace{p(s) + n(s)U(s)}^{n'(s)}}{d(s)} = \frac{n'(s)}{d(s)}$$

dove $d(s) = a_n s^n + \dots + a_0$ (pol. caratteristico di (1))

$n(s) = b_m s^m + \dots + b_0$

$$p(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left(\sum_{j=k+1}^{n} a_{j+1} \underbrace{\left. \frac{d^{n-j} v(t)}{dt^{n-j}} \right|_{t=0^-}}_{\text{cond. iniziali}} \right)$$

La risposta totale $v(t) = \underbrace{v_\ell(t)}_{\substack{\text{cond. iniziali} \\ u(t)=0}} + \underbrace{v_f(t)}_{\text{cond. iniziali} = 0}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} V(s) = V_\ell(s) + V_f(s)$$

$$V_\ell(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} U(s) \qquad (**)$$

Ricordiamo che $v_f(t) = [h * u](t)$ (nel tempo)

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$V_f(s) = H(s) \cdot U(s) \overset{(**)}{\Longrightarrow} H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \qquad H(s) = \mathcal{L}[h(t)](s)$$

Oss 1: La funzione di trasferimento $H(s)$ è la TdL della risposta impulsiva $h(t)$ del sistema (1).

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

Oss 2: $$\boxed{h(t) = d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t)} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} H(s) = d_0 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} \cdot \frac{1}{(s - \lambda_i)^{l+1}}$$

$d_0 \neq 0$ se $n = m$

Esempio: $$\frac{d^3 v(t)}{dt^3} + \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt} \qquad n = 3,\ m = 1$$

$$H(s) = \boxed{\frac{s}{s^3 + s^2}} = \boxed{\frac{1}{s^2 + s}} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{d_1}{s} + \frac{d_2}{s+1} \quad \text{(decomposizione)}$$

zeri: $\beta_1 = 0$ $\nu_1 = 1$

poli: $\alpha_1 = -1$ $\mu_1 = 1$ $\alpha_2 = 0$ $\mu_2 = 2$

zeri: Φ

poli: $\alpha_1 = -1$ $\alpha_2 = 0$

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m (s-\beta_1)^{\nu_1}(s-\beta_2)^{\nu_2}\dots(s-\beta_q)^{\nu_q}}{a_n (s-\alpha_1)^{\mu_1}(s-\alpha_2)^{\mu_2}\dots(s-\alpha_r)^{\mu_r}}$$

T. fond. dell'algebra

dove $\beta_1, \dots, \beta_q$ sono le radici di $n(s)$ chiamate anche zeri di $H(s)$ con $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_q = m$

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sono le radici di $d(s)$ chiamate anche poli di $H(s)$ con $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_r = n$

Def: Zero di una funzione razionale $H(s)$ è un $\beta \in \mathbb{C}$ per cui $H(\beta)=0$ (radice del numeratore)

$\beta \in \mathbb{C}$ è uno zero di molteplicità algebrica ν per $H(s)$ se

$$\lim_{s\to\beta} \frac{1}{(s-\beta)^{\nu}} H(s) \neq 0 \quad e \quad \lim_{s\to\beta} \frac{1}{(s-\beta)^{\nu-1}} H(\beta) = 0$$

Def: Polo di una funzione razionale $H(s)$ è un $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\lim_{s\to\alpha} H(s) = \infty$

$\alpha \in \mathbb{C}$ è un polo di molteplicità algebrica μ per $H(s)$ se

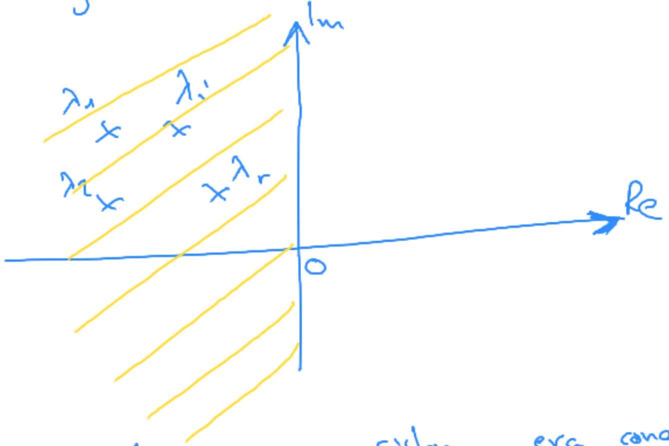
$$\lim_{s\to\alpha} (s-\alpha)^{\mu} H(s) \neq \infty \quad e \quad \lim_{s\to\infty} (s-\alpha)^{\mu-1} H(s) = \infty$$

BIBO stabilità

Sia $H(s)$ la FdT dopo la semplificazione di zeri e poli uguali (irriducibile)

e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ i suoi poli dopo le semplificazioni.

(1) è BIBO stabile $\Leftrightarrow$ $Re(\lambda_i) < 0 \quad i = 1, \dots, r$ (il sistema (1) è BIBO stabile $\Leftrightarrow$ tutti i poli di $H(s)$ giacciono nel semipiano sinistro del piano complesso)



Oss: La stabilità asintotica di un sistema era condizionata dalla stabilità dei modi elementari del polinomio caratteristico

La stabilità BIBO di un sistema è condizionata dalla stabilità dei modi elementari della risposta impulsiva

Le eventuali semplificazioni della FdT sono il motivo per cui i modi elementari della risposta impulsiva sono un sottoinsieme dei modi elementari del sistema

$$\{\text{poli di } H(s)\} \subseteq \{\text{zeri di } d(s)\}$$

(stab. BIBO) $\Longleftarrow$ (stab. asintotica)

Oss: Per far diventare BIBO stabile un sistema asintoticamente non stabile posso associare ai poli λ_i, con $Re(\lambda_i) > 0$ degli zeri $z_i = \lambda_i$ che elimineranno i modi non convergenti nella risposta impulsiva.

Esempio:
$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} - 2\frac{dv(t)}{dt} - 3v(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} - \frac{du(t)}{dt} - 6u(t)$$

$d(s) = s^2 - 2s - 3$ (polinomio caratteristico) $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$

Il sistema è asintoticamente instabile in quanto $Re(\lambda_1) = 3 > 0$

$$H(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^2 - 2s - 3} = \frac{\cancel{(s-3)}(s+2)}{\cancel{(s-3)}(s+1)} = \frac{s+2}{s+1}$$

ha il polo $p_1 = -1$

$Re(p_1) = -1 \Rightarrow$ il sistema è BIBO stabile

Esempio: Studiare la stabilità dei seguenti sistemi lineari

1) $\dot{v}(t) - 3v(t) = \dot{u}(t) + 4u(t)$

2) $\ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t) = \ddot{u}(t) - 4\dot{u}(t) + 3u(t)$

3) $\dddot{v}(t) + 4\ddot{v}(t) - \dot{v}(t) - 6v(t) = \ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) - 4u(t)$

$$\begin{array}{l|l} s^2-4s+3 & s^2+3s+2 \\ \hline \ldots\ldots & 1 \\ \hline = \ldots\ldots & \end{array}$$

1) $d(s) = s-3$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad Re(\lambda_1) > 0 \quad \neg$ è as. stabile

$H(s) = \dfrac{s+4}{s-3}$ $\quad p_1 = 3 \quad Re(p_1) > 0 \quad \neg$ è BIBO stabile

(dove $\neg$ = "non")

Per rendere il sistema BIBO stabile avrei dovuto modificare la parte destra in $\dot{u}(t) - 3u(t)$

$\Rightarrow H'(s) = \dfrac{s-3}{s-3} = 1$ (costante) $\left(V_f(s) = \underbrace{H(s)}_{=1} U(s) \Rightarrow V_f(s) = U(s) \Rightarrow v_f(t) = u(t) \right)$

2) $d(s) = s^2 + 3s + 2$ $\quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$ sistema as. stabile $\Rightarrow$ BIBO stabile

$$H(s) = \frac{s^2-4s+3}{s^2+3s+2} = \frac{n(s)}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1} \qquad \downarrow \mathcal{L}^{-1} \qquad \downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$h(t) = \delta(t) + Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

Antitrasformata di Laplace

Serve per passare dal dominio complesso al dominio del tempo

$V(s) = \frac{n'(s)}{d(s)}$ la risposta totale

$\deg n'(s) \geq \deg d(s)$ (compare il termine impulsivo) — Divisione polinomiale — Fratti semplici — Antitrasformata

$\deg n'(s) < \deg d(s)$

Oss.: Nei sistemi che consideriamo (propri) la divisione tra $n'(s)$ e $d(s)$ sarà un polinomio di grado 0 (costante) $\Rightarrow V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + k$ (dove $k = \frac{b_m}{a_n}$ per $m = n$)

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r(s)}{d(s)} + k\right] = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r(s)}{d(s)}\right]}_{\text{grado } r(s) < \text{grado } d(s)} + \mathcal{L}^{-1}[k]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[k] \rightarrow k\,\delta(t)$$

Esempio: $V(s) = \dfrac{2s^2+4s-3}{s^2-s-1}$ $\left(\dfrac{d^2v(t)}{dt^2} - \dfrac{dv(t)}{dt} - v(t) = 2\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + 4\dfrac{du(t)}{dt} - 3u(t) \right.$ con cond. iniziali nulle$\left.\right)$

$$
\begin{array}{r|l}
2s^2 + 4s - 3 & s^2 - s - 1 \\
\cline{2-2}
2s^2 - 2s - 2 & 2 \\
\cline{1-1}
/ \quad 6s - 1 &
\end{array}
$$

$$V(s) = 2 + \frac{6s-1}{\underbrace{s^2-s-1}_{\lambda_1,\lambda_2}} = 2 + \frac{6s-1}{(s-\lambda_1)\cdot(s-\lambda_2)} = 2 + \frac{\overset{?}{A}}{s-\lambda_1} + \frac{\overset{?}{B}}{s-\lambda_2}$$

radici

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \mathcal{L}^{-1}[2] + A\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda_1}\right] + B\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda_2}\right]$$

$$\downarrow$$

$$2\,\delta(t) + A\,e^{\lambda_1 t}\,\delta_{-1}(t) + B\,e^{\lambda_2 t}\,\delta_{-1}(t)$$