Sistemi

Giovanni Tosini

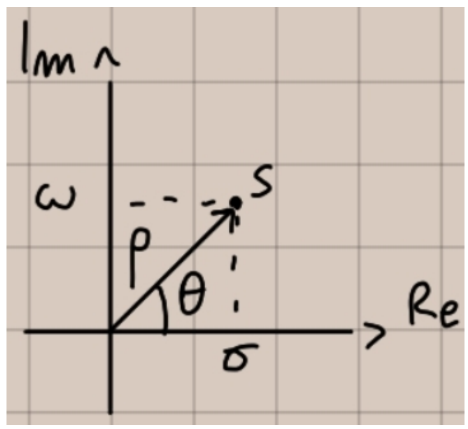
Indice

0.1 Numeri complessi 4
0.1.1 Formula di Eulero 4
0.1.2 Operazioni con i numero complessi 6
0.1.3 Teorema fondamentale dell'algebra 10

0.1 Numeri complessi

Un numero complesso $s = \sigma + j\omega$ con $j = \sqrt{-1}$ e $\sigma, \omega \in R$ in cui

- $\sigma = Re(s)$ parte reale
- $\omega = Im(s)$ parte immaginaria
- $C = st.c.s = \sigma + j\omega, \sigma, \omega \in R$ insieme dei numeri complessi



Forma polare dei numeri complessi, $s = \rho(cos\theta + jsin\theta)$

- $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ il modulo di s con $\rho \in R^+$
- $\theta =$ argomento di s

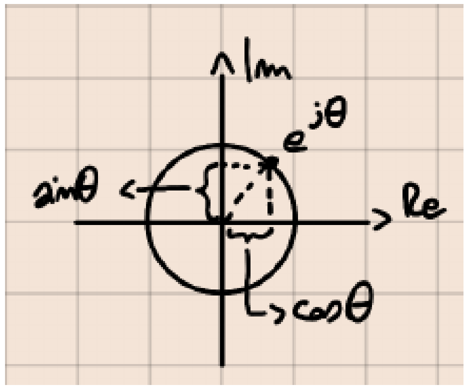
Osservazione 1 $Re(s) = \rho cos\theta$ e $Im(s) = \rho sin\theta$

Osservazione 2 L'argomento θ è determinato a meno di multipli interi di 2π. Imponendo $\theta \in [0, 2\pi)$ oppure $(-\pi, \pi]$ (deve essere un intervallo lungo 2π) si ottiene l'argomento principale θ che notiamo con $arg(s)$

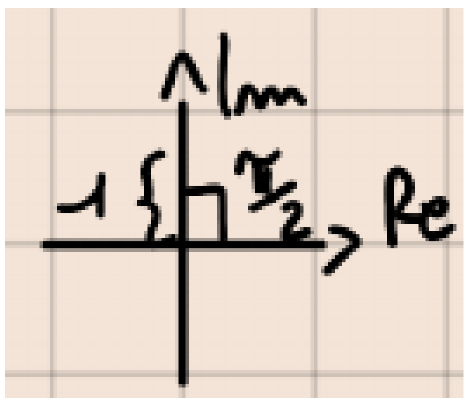
0.1.1 Formula di Eulero

$\theta \in R, j = \sqrt{-1}$ abbiamo $e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$

Forma esponenziale $s = \rho e^{j\theta}$



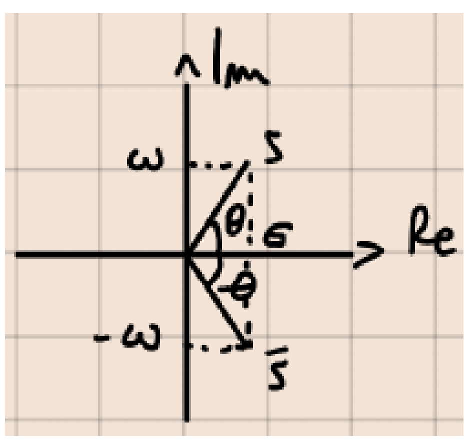
$|e^{j\theta} = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = 1$
Esempio: $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$



$s = 0 + 1j = j$

Def: i numeri **immaginari puri** hanno la parte reale nulla

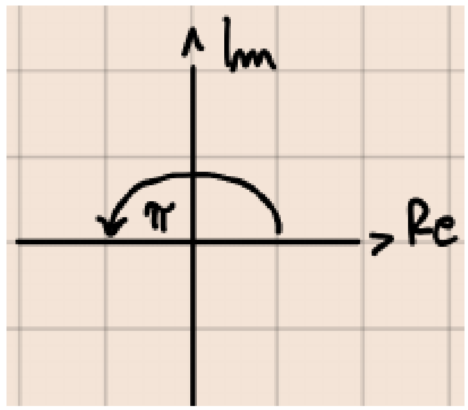
Def: dato $s : \sigma + j\omega \in C$ $\bar{s} : \sigma - j\omega$ coniugato complesso



La forma polare di $\bar{s}$ sarà uguale a $\rho(cos\theta - jsin\theta)$

Osservazione $|s| = |\bar{s}| arg(\bar{s}) = -arg(s)$

Esempio: $e^{j\pi} = -1 = e^{j\pi} + 1 = 0$

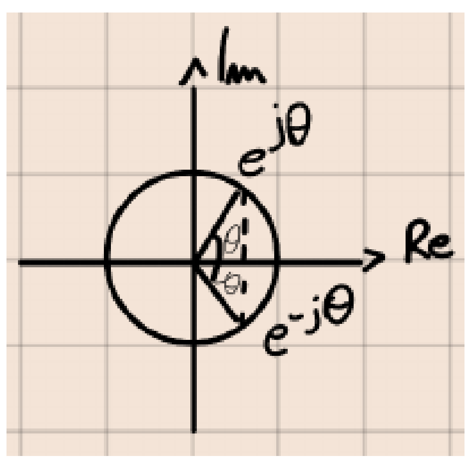


0.1.2 Operazioni con i numero complessi

- $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1, s_2 = \sigma_2 + j\omega_2 \in C$
- $s_1 + s_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + j(\omega_1 + \omega_2)$
- $s_1 - s_2 = \sigma_1 - \sigma_2 + j(\omega_1 - \omega_2)$

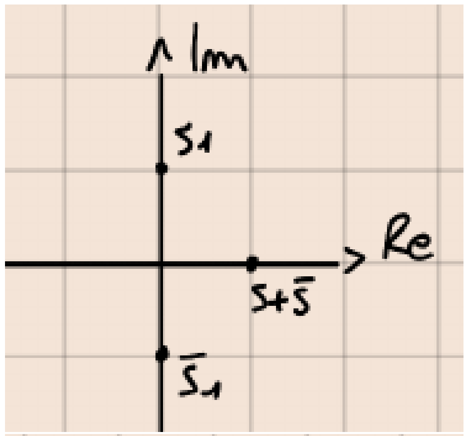
Osservazione: $Re(s) = \frac{s+\bar{s}}{2}$ e $Im(s) = \frac{s+\bar{s}}{2j}$

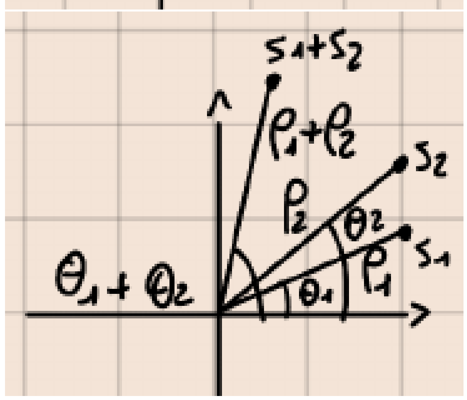
Per la formula di Eulero $e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ e $sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$



Osservazione: $2Re(s) = s + \bar{s}$ e $2jIm(s) = s - \bar{s}$

$s = \bar{s} \Rightarrow Im(s) = 0$ e $s = -\bar{s} \Rightarrow Re(s) = 0$





- $s_1 = \rho_1(cos\theta_1 + jsin\theta_1)$
- $s_2 = \rho_1(cos\theta_2 + jsin\theta_2)$
- $s_1 s_2 = \rho_1\rho_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + jsin(\theta_1 + \theta_2))$
- $s_1 s_2 = \rho_1\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 + jcos\theta_1 sin\theta_2 + jsin\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2)$
- $s_1 s_2 = \rho_1\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2 + j(cos\theta_1 sin\theta_2 + sin\theta_1 cos\theta_2))$

N.B.: $cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2 = cos(\theta_1 + \theta_2)$ e $cos\theta_1 sin\theta_2 + sin\theta_1 cos\theta_2 = sin(\theta_1 + \theta_2)$

Def: Dato $s \in C$ il numero s^{-1} t.c. $ss^{-1} = 1$, $s^{-1} = \frac{\bar{s}}{|s|^2}$ reciproco (inverso) di s.

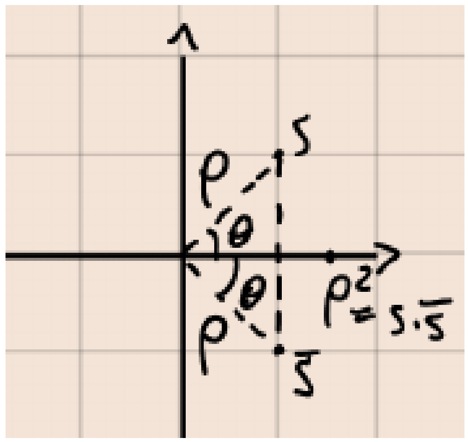
$ss^{-1} = s\frac{\bar{s}}{|s|^2} = \frac{s\bar{s}}{|s|^2}$

$s\bar{s} = \rho^2(cos(\theta - \theta) + jsin(\theta - \theta)) = \rho^2 = |s|^2$

Osservazione: l'argomento di un numero complesso si può chiamare anche **fase**.

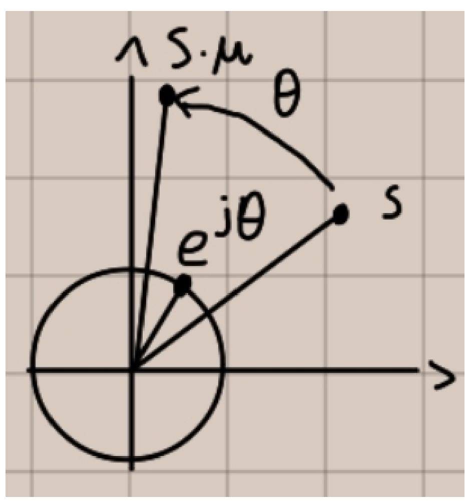
$\frac{s_1}{s_2} = s_1 s_2^{-1} = s_1 \frac{\bar{s_2}}{|s_2|^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(cos(\theta_1 - \theta_2) jsin(\theta_1 - \theta_2))$

Osservazione: $s\bar{s} = \rho^2(cos(\theta - \theta) + jsin(\theta - \theta)) = \rho^2 \Rightarrow |s|^2 = s\bar{s}$



Def: $u \in C$ si dice complesso unitario se $|u| = 1$. In forma polare $u = cos\theta + jsin\theta$. In forma esponenziale $u = e^{j\theta}$ e $|e^{j\theta}| = 1$

Sia $u = cos\alpha + jsin\alpha$ con $s = \rho(cos\theta + jsin\theta)$ avremo che $su = \rho(cos(\theta + \alpha) + jsin(\theta + \alpha))$ (rotazione intorno all'origine)



$s^n = \rho^n(cos(n\theta) + jsin(n\theta))$

Esempio: $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$

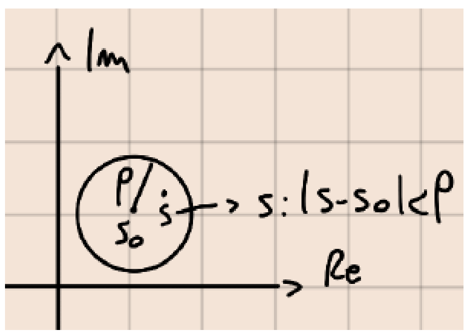
Radici complesse Ogni $s \in C$ ammette n distinte radici n-esime $\omega_1, ..., \omega_{n-1} \in C$. Dobbiamo trovare $\omega \in C$ t.c. $\omega^n = s$.
$\forall k \in [0, n-1], \omega_k \sqrt[n]{\rho}(cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + jsin(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k))$
Prova: $\omega_k^n = (\sqrt[n]{\rho}^n)(cos(n(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)) + jsin(n(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k)))$
$\rho(cos(\theta + 2\pi k) + jsin(\theta + 2\pi k)) = s$
Notare che $cos(\theta + 2\pi k)$ è equivalente a $cos\theta$ e $sin(\theta + 2\pi k)$ equivale a $sin\theta$ questo $\forall k = 0, ..., n-1$

L'equazione: $s^4 = 1 + 2j$ ha 4 radici distinte nel campo C. Esempio: le radici complesse dell'unità

$s^n = 1 \omega_k = cos(\frac{2\pi}{n}k) + jsin(\frac{2\pi}{n}k) k = 0, ..., n-1$

Funzioni di variabile complessa Gli insieme su cui definiamo una funzione di variabile complessa f si scrivono $D(f)$, $D(f) \subseteq C$

Def: un punto $s_0 \in D(f) \subseteq C$ è interno a $D(f)$ se esiste un disco $B_\rho(s_0)$ di raggio ρ con $\rho \in R^+$ centrato in s_0, t.c. $B_\rho(s_0) \subseteq D(f)$ dove $B_\rho(s_0) = s \in Ct.c.|s - s_0| < \rho$



Def: Un insieme $D(f) \subseteq C$ si dice aperto se tutti i suoi punti sono interni

Def: Una funzione $f : D(f) \to C$ con $D(f) \subseteq C$ aperto è una funzione complessa

Esempi di funzioni complesse con annesso dominio:

- $f(s) = s, D(f) = C$
- $f(s) = s^2, D(f) = C$
- $f(s) = Re(s) + jIm(s)^2, D(f) = C$
- $f(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k, D(f) = C$
- funzione polinomiale, $f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ dove $P(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$ e funzione razionale $Q(s) = \sum_{k=0}^{n} b_k s^k$, $D = C - \lambda_1, ..., \lambda_m$ dove λ_α è radice di $Q(s) = 0$ per $k = 1, ..., m$

0.1.3 Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio $P(s)$ a coefficienti complessi di grado $n > 0$ ha n radici complesse e si può comporre come

$P(s) = a_n(s-\lambda_1)_1^{\mu}(s-\lambda_2)_2^{\mu}...(s-\lambda_r)_r^{\mu}$ dove $\lambda_1, ...\lambda_r$ sono radici e $\mu_1, ..., \mu_r$ sono le **molteplicità** relative di ciascuna radice per cui $\mu_1 + ... + \mu_r = n$

Osservazione Un numero λ è una radice di molteplicità μ per un polinomio $P(s)$ se e solo se $P(\lambda) = P'(\lambda) = P''(\lambda) = ... = P^{\mu-1}(\lambda) = 0$ e $P^{\mu}(\lambda) \neq 0$