

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA



Sistemi

ESERCIZIARIO

Magdalena M. Solitro
Sebastiano Fregnani
Bogdan Mihai Maris
Daniele Meli

Nota dell'autore

Il presente eserciziario è alla sua prima versione e il controllo della sua qualità è stato interamente a carico dell'autore. Se il lettore dovesse quindi trovare degli errori o delle imprecisioni, sarei felice se me lo segnalasse scrivendomi una mail all'indirizzo magdalena.solitro@studenti.univr.it.

Se il lettore volesse inviare nuovi esercizi svolti o se volesse collaborare in qualche modo alle nuove versioni della dispensa, può farmelo presente scrivendo allo stesso indirizzo mail.

Contents

1 Sistemi LTI a tempo continuo	3
2 Schemi a blocchi	18
3 Sistemi LTI a tempo discreto	31
4 Diagrammi di Bode	47
5 Trasformate di Fourier	71
6 Esercitazioni del corso A.A. 2019/2020	88

1 Sistemi LTI a tempo continuo

Esercizio 1.1

Si consideri il sistema dinamico rappresentato dalla seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + 5\dot{v}(t) + 4v(t) = \dot{u}(t) - bu(t) \\ \dot{v}(0) = 1 \\ v(0) = 0 \\ u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

1. Deteterminare la stabilità asintotica del sistema al variare di b
2. Determinare l'evoluzione libera per $b = 1$
3. Determinare la risposta impulsiva nel dominio delle frequenze (Laplace)
4. Determinare la risposta totale nel dominio delle frequenze (Laplace)

-
1. Un sistema dinamico è **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le sue radici caratteristiche si trovano nel semipiano negativo del piano complesso:

$$\Re(s_1), \Re(s_2), \dots, \Re(s_n) < 0$$

Calcoliamo quindi le radici caratteristiche del sistema:

$$s^2 + 5s + 4 = 0 \iff s_1 = -4, s_2 = -1$$

Notiamo che sono radici reali negative, quindi il sistema è **asintoticamente stabile** per qualunque valore di b .

Dato che la stabilità asintotica implica la BIBO stabilità, possiamo dire che il sistema è anche **BIBO stabile**, per qualunque valore di b .

2. Per $b = 1$, l'equazione del nostro sistema diventa:

$$\ddot{v}(t) + 5\dot{v}(t) + 4v(t) = \dot{u}(t) - u(t)$$

L'evoluzione libera del sistema è data dalla seguente espressione:

$$v_l(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

$$v_l(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$$

Impongo le condizioni iniziali per ricavare i coefficienti c_1 e c_2 :

$$\begin{cases} v(0) = 0 = c_1 + c_2 \\ \dot{v}(0) = 1 = -4c_1 - c_2 \end{cases}$$

Da cui ricaviamo che $c_1 = -\frac{1}{3}$ e $c_2 = \frac{1}{3}$. L'espressione finale dell'evoluzione libera risulta quindi essere:

$$v_l(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}$$

3. Scriviamo la funzione di trasferimento $H(s)$:

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+4)(s+1)}$$

Scompongo in fratti semplici:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1} \\ A &= (s+4) \frac{s-1}{(s+4)(s+1)} \Big|_{s=-4} = \frac{5}{3} \\ B &= (s+1) \frac{s-1}{(s+4)(s+1)} \Big|_{s=-1} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Quindi l'espressione di $H(s)$ scomposta risulta essere:

$$H(s) = \frac{5}{3} \frac{1}{s+4} - \frac{2}{3} \frac{1}{s+1}$$

Questa forma ci permette di calcolare agevolmente l'antitrasformata di Laplace, e arrivare quindi all'espressione finale della risposta impulsiva nel dominio del tempo:

$$h(t) = \left(\frac{5}{3}e^{-4t} - \frac{2}{3}e^{-t} \right) \delta_{-1}(t)$$

4. Per calcolare la risposta totale del sistema nel dominio delle frequenze, devo eseguire la trasformata di Laplace sia dell'ingresso che dell'uscita:

$$\mathcal{L}[\ddot{v}(t) + 5\dot{v}(t) + 4v(t)] = \mathcal{L}[\dot{u}(t) - u(t)]$$

$$s^2V(s) - (0 \cdot s^1 + 1 \cdot s^0) + 5(s^1V(s) - 0) + 4s^0V(s) = sU(s) - U(s)$$

$$V(s)(s^2 + 5s + 4) = U(s)(s - 1) + 1$$

$$V(s) = U(s) \frac{s - 1}{(s^2 + 5s + 4)} + \frac{1}{(s^2 + 5s + 4)}$$

Dato che $u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t)$, ricaviamo che $U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s+2}$, e quindi

$$V(s) = \frac{s - 1}{(s + 4)(s + 2)(s + 1)} + \frac{1}{(s + 4)(s + 1)} = \frac{2s + 1}{(s + 4)(s + 2)(s + 1)}$$

Applico il metodo dei fratti semplici:

$$V(s) = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2}$$

Ricavo i coefficienti A, B, C:

$$A = (s + 4) \frac{2s + 1}{(s + 4)(s + 2)(s + 1)} \Big|_{s=-4} = -\frac{7}{6}$$

$$B = (s + 1) \frac{2s + 1}{(s + 4)(s + 2)(s + 1)} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3}$$

$$C = (s + 2) \frac{2s + 1}{(s + 4)(s + 2)(s + 1)} \Big|_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

Da cui ricaviamo l'espressione di V(s) scomposta:

$$V(s) = -\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{s + 4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s + 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s + 2}$$

Eseguendo l'antitrasformata di Laplace otteniamo l'espressione della risposta totale nel dominio del tempo:

$$v(t) = \left(-\frac{7}{6}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \right) \delta_{-1}(t)$$

Esercizio 1.2 - parziale del 02/05/2019

Si consideri il seguente sistema dinamico rappresentato dall'equazione differenziale:

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + (3+k)u(t) \\ \dot{v}(0) = 2 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = 2e^{4t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

1. Discutere la stabilità del sistema al variare del parametro k
 2. $k = -5$: calcolare la risposta libera nel dominio del tempo
 3. Calcolare la risposta impulsiva nel dominio del tempo
 4. Calcolare la risposta forzata utilizzando l'antitrasformata di Laplace
-

1. Dobbiamo verificare che tutte le radici caratteristiche dell'equazione differenziale siano *minori di 0*:

$$s^2 - 5s + 6 = 0 \Rightarrow s_1 = 3, s_2 = 2$$

Il sistema, quindi **non è asintoticamente stabile**, e notiamo che questo non dipende dal parametro k .

Dobbiamo quindi verificare esplicitamente l'eventuale stabilità BIBO: il sistema risulta essere BIBO stabile se e solo se tutte le radici caratteristiche che causano l'instabilità asintotica (in questo caso s_1 e s_2) si semplificano nella funzione di trasferimento.

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 3 + k}{s^2 - 5s + 6}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 3 + k}{(s - 3)(s - 2)}$$

Le radici del polinomio al numeratore sono date da $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4(3+k)}}{2}$, quindi dovremmo trovare un k univoco che possa essere soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \frac{-1+\sqrt{1-4(3+k)}}{2} = 3 \\ \frac{-1-\sqrt{1-4(3+k)}}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -15 \\ \frac{-1-\sqrt{-26}}{2} = 2 \end{cases}$$

Nella seconda equazione abbiamo una radice negativa, quindi il sistema non ha soluzione! Non potendo fattorizzare il numeratore in modo da semplificare i poli, deduciamo che il sistema **non è BIBO stabile**.

2. Ponendo $k = -5$, l'equazione differenziale che descrive il sistema diventa:

$$\ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) - 2u(t)$$

Sappiamo già dal punto precedente che le radici del sistema sono $s_1 = 3$ e $s_2 = 2$. Quindi:

$$v_l(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

Non ci resta che trovare il valore dei coefficienti c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 1 \\ \dot{v}(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Giungiamo quindi all'espressione che descrive l'evoluzione libera:

$$v_l = e^{2t}$$

3. Scriviamo l'espressione generale della risposta impulsiva, tenendo conto del fatto che il sistema è *proprio* e che dunque deve comparire il termine impulsivo:

$$h(t) = d_0 \delta(t) + (d_1 e^{2t} + d_2 e^{3t}) \delta_{-1}(t)$$

Nell'equazione originale sostituiamo $h(t)$ a $v(t)$, e $\delta(t)$ a $u(t)$:

$$\ddot{h}(t) - 5\dot{h}(t) + 6h(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + \frac{d\delta(t)}{dt} - 2\delta(t) \quad (1)$$

Scriviamo di seguito le derivate di primo e secondo ordine di $h(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= d_0 \frac{d\delta(t)}{dt} + (2d_1 e^{2t} + 3d_2 e^{3t}) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{2t} + d_2 e^{3t}) \delta(t) \\ \frac{d^2h(t)}{dt^2} &= d_0 \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + (4d_1 e^{2t} + 9d_2 e^{3t}) \delta_{-1}(t) + 2(2d_1 e^{2t} + 3d_2 e^{3t}) \delta(t) \\ &\quad + (d_1 e^{2t} + d_2 e^{3t}) \frac{d\delta(t)}{dt} \end{aligned}$$

Ora si sostituiscono queste espressioni nell'equazione (1) e si svolgono i calcoli (si possono omettere gli esponenziali, dato che siamo interessati solo ai valori dei coefficienti d_0 , d_1 e d_2). Alla fine, l'equazione (1) dovrebbe risultare così:

$$d_0 \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + (-5d_0 + d_1 e^{2t} + d_2 e^{3t}) \frac{d\delta(t)}{dt} + (6d_0 - d_1 e^{2t} + d_2 e^{3t}) \delta(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + \frac{d\delta(t)}{dt} - 2\delta(t)$$

Ora dobbiamo fare in modo che i coefficienti dei termini a sinistra coincidano con quelli che erano presenti dell'equazione originale! Quindi impostiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ -5d_0 + d_1 + d_2 = 1 \\ 6d_0 - d_1 + d_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = 7 \\ d_2 = -1 \end{cases}$$

L'espressione definitiva della risposta impulsiva $h(t)$ è:

$$h(t) = \delta(t) + (7e^{2t} - e^{3t})\delta_{-1}(t)$$

4. Nel dominio delle frequenze, invece, la risposta forzata si calcola come il prodotto della funzione trasferimento per la trasformata di Laplace dell'ingresso:

$$V_f(s) = \mathcal{L}[h(t) * u(t)] = H(s) \cdot U(s)$$

La proprietà di convoluzione della trasformata di Laplace dice infatti che se due funzioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono nulle per $t < 0$ e sono dotate di trasformata di Laplace, rispettivamente $V_1(s)$ e $V_2(s)$, allora il prodotto di convoluzione $[v_1 * v_2](t)$ nel tempo diventa un prodotto semplice, $V_1(s) \cdot V_2(s)$ nelle frequenze.

Proseguiamo dunque nel calcolo della risposta forzata:

$$V_f(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^2 - 5s + 6} \cdot \frac{2}{s - 4} = \frac{s^2 + s - 2}{(s - 3)(s - 2)} \cdot \frac{2}{s - 4}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$V_f(s) = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s - 3} + \frac{C}{s - 4}$$

Calcoliamo quindi il valore dei vari coefficienti:

$$A = (s - 2) \frac{2(s^2 + s - 2)}{(s - 2)(s - 3)(s - 4)} \Big|_{s=2} = 4$$

$$B = (s - 3) \frac{2(s^2 + s - 2)}{(s - 2)(s - 3)(s - 4)} \Big|_{s=3} = -20$$

$$C = (s - 4) \frac{2(s^2 + s - 2)}{(s - 2)(s - 3)(s - 4)} \Big|_{s=4} = 18$$

Quindi possiamo riscrivere l'espressione dell'evoluzione forzata come:

$$V_f(s) = \frac{4}{s - 2} + \frac{-20}{s - 3} + \frac{18}{s - 4}$$

Ora possiamo facilmente ricavare il suo equivalente nel dominio del tempo applicando le antitrasformate elementari:

$$v_f(t) = 4e^{2t}\delta_{-1}(t) - 20e^{3t}\delta_{-1}(t) + 18e^{4t}\delta_{-1}(t)$$

Esercizio 1.3

Si consideri il seguente sistema dinamico rappresentato dall'equazione differenziale:

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t) + 5v(t) = \dot{u}(t) + u(t) \\ \dot{v}(0) = 1 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = 2\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

1. Discutere la stabilità asintotica
 2. Calcolare l'evoluzione libera del sistema
 3. Calcolare la risposta impulsiva nel dominio del tempo
 4. Calcolare l'evoluzione forzata con il prodotto di convoluzione
-

1. L'equazione caratteristica del sistema è:

$$s^2 + 2s + 5 = 0$$

che ha due radici complesse: $s_1 = -1 + 2j$ e $s_2 = -1 - 2j$.

Notiamo che $\operatorname{Re}(s_1) < 0$ e $\operatorname{Re}(s_2) < 0$, quindi il sistema è asintoticamente stabile.

Di conseguenza, è anche BIBO stabile.

2. Dato che le radici dell'equazione caratteristica sono complesse, l'evoluzione libera si presenta nella seguente forma:

$$v_l = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t)$$

L'occorrenza delle funzioni seno e coseno in presenza di radici caratteristiche complesse è una conseguenza dell'**identità di Eulero**:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$e^{i\theta}$ è il vettore che individua il numero nel piano complesso. Il suo modulo è costante, dunque localizza tutti i numeri complessi che stanno su una circonferenza di raggio pari a $|e^{i\theta}|$.

Intuitivamente, nell'equazione dell'evoluzione libera la parte reale della radice è contenuta nell'esponente di e , mentre la componente complessa è nell'argomento del seno (o del coseno).

Ora imponiamo le condizioni iniziali e ricaviamo il valore dei coefficienti.

Attenzione al calcolo della derivata di v_l :

$$\dot{v}_l(t) = (2c_2 - c_1)e^{-t} \cos(2t) - (2c_1 + c_2)e^{-t} \sin(2t)$$

$$\begin{cases} v(0) = 1 = c_1 e^0 \cos(0) + c_2 e^0 \sin(0) \\ \dot{v}(0) = 1 = (2c_2 - c_1)e^0 \cos(0) - (2c_1 + c_2)e^0 \sin(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere l'espressione finale dell'evoluzione libera:

$$v_l(t) = e^{-t} \cos(2t) + e^{-t} \sin(2t)$$

3. Dato che il sistema è *proprio* (ovvero: il massimo grado di derivazione dell'uscita è maggiore del massimo grado di derivazione dell'ingresso), l'espressione della risposta impulsiva sarà:

$$h(t) = (d_1 e^{-t} \sin(2t) + d_2 e^{-t} \cos(2t)) \delta_{-1}(t)$$

Per ricavare i coefficienti d_1 e d_2 , dobbiamo fare la derivata prima e seconda di $h(t)$ e sostituirle nell'equazione originale. Al posto dell'ingresso, inoltre, dobbiamo sostituire l'impulso di Dirac.

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= [(2d_1 - d_2)e^{-t} \cos(2t) - (d_1 + 2d_2)e^{-t} \sin(2t)] \delta_{-1}(t) \\ &\quad + (d_1 e^{-t} \sin(2t) + d_2 e^{-t} \cos(2t)) \delta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} &= [(4d_2 - 3d_1)e^{-t} \sin(2t) - (4d_1 + 3d_2)e^{-t} \cos(2t)] \delta_{-1}(t) \\ &\quad + 2 [(2d_1 - d_2)e^{-t} \cos(2t) - (d_1 + 2d_2)e^{-t} \sin(2t)] \delta(t) \\ &\quad + [d_1 e^{-t} \sin(2t) + d_2 e^{-t} \cos(2t)] \frac{d\delta(t)}{dt} \end{aligned}$$

Fortunatamente, molti dei termini presenti in queste espressioni si annullano tra loro! Dopo aver effettuato le opportune semplificazioni, rimaniamo con la seguente equazione:

$$[d_1 e^{-t} \sin(2t) + d_2 e^{-t} \cos(2t)] \frac{d\delta(t)}{dt} + [4e^{-t} (d_1 \cos(2t) - d_2 \sin(2t))] \delta(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$$

I coefficienti dei termini a sinistra devono coincidere con quelli dell'equazione originale, quindi:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{4} \\ d_2 = 1 \end{cases}$$

Ora inseriamo questi coefficienti nell'espressione iniziale della risposta impulsiva, ottenendo:

$$h(t) = \left(e^{-t} \cos(2t) + \frac{1}{4} e^{-t} \sin(2t) \right) \delta_{-1}(t)$$

4. La risposta forzata del sistema è definita come il prodotto di convoluzione tra la risposta impulsiva e l'ingresso:

$$v_f(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau$$

Ovvvero:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-\tau} \cos(2\tau) + \frac{1}{4} e^{-\tau} \sin(2\tau) \right) \delta_{-1}(\tau) \cdot 2\delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= 2 \int_0^t \left[e^{-\tau} \cos(2\tau) + \frac{1}{4} e^{-\tau} \sin(2\tau) \right] d\tau \\ &= \frac{1}{10} [e^{-t} (7 \sin(2t) - 6 \cos(2t))]_0^t \\ &= \frac{1}{10} [e^{-t} (7 \sin(2t) - 6 \cos(2t)) + 6] \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Gli integrali alla seconda riga sono stati risolti col metodo di integrazione per parti.

Esercizio 1.4

Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + \dot{v} - 2v(t) = \dot{u}(t) - u(t) \\ \dot{v}(0) = 0 \\ v(0) = 3 \\ u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

1. Discutere la stabilità del sistema
 2. Calcolare l'evoluzione libera nel dominio del tempo
 3. Calcolare l'evoluzione forzata nel dominio delle frequenze
 4. Calcolare la risposta totale del sistema nel dominio delle frequenze
-

1. Verifichiamo la stabilità asintotica del sistema.

La sua equazione caratteristica è data da:

$$s^2 + s - 2 = 0$$

le cui radici sono:

$$s_1 = -2 \quad s_2 = 1$$

Dato che $\operatorname{Re}(s_2) > 0$, il sistema **non è asintoticamente stabile**.

Dobbiamo quindi verificare esplicitamente la BIBO stabilità: il sistema risulta essere BIBO stabile se e solo se tutte le radici che causano l'instabilità asintotica (in questo caso solo s_2) si semplificano nella funzione di trasferimento $H(s)$.

$$H(s) = \frac{(s-1)}{s^2 + s - 2} = \frac{(s-1)}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s+2}$$

La radice s_2 si semplifica con il numeratore, dunque il sistema è **BIBO stabile**.

2. L'espressione dell'evoluzione libera per questo sistema è:

$$v_l(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \Rightarrow v_l(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

Ricaviamo i coefficienti c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ \dot{v}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -2c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Quindi l'espressione finale dell'evoluzione libera sarà:

$$v_l(t) = e^{-2t} + 2e^t$$

3. Nel dominio delle frequenze, l'evoluzione forzata si calcola come il prodotto della funzione di trasferimento per la trasformata di Laplace dell'ingresso:

$$V_f(s) = H(s) \cdot U(s)$$

dove $U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s+2}$, quindi

$$V_f(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

L'espressione dell'evoluzione forzata si presenta già nella sua forma "elementare", ed è facilmente antitrasformabile secondo Laplace:

$$v_f(t) = t \cdot e^{-2t} \delta_{-1}(t)$$

4. Bisogna calcolare la trasformata di Laplace dell'ingresso e dell'uscita, e poi uguagliarle:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{v}(t) + \dot{v}(t) - 2v(t)] &= \mathcal{L}[\dot{u}(t) - u(t)] \\ s^2 V(s) - [v(0) \cdot s + \dot{v}(0)] + sV(s) - v(0) - 2V(s) &= sU(s) - U(s) \\ s^2 V(s) - 3s + sV(s) - 3 - 2V(s) &= sU(s) - U(s) \\ V(s)(s^2 + s - 2) - 3s - 3 &= sU(s) - U(s) \\ V(s) &= \frac{3s + 3}{s^2 + s - 2} + \frac{s - 1}{s^2 + s - 2} U(s) \end{aligned}$$

$U(s)$ è la trasformata di Laplace dell'ingresso, quindi: $U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$

$$V(s) = \frac{3s + 3}{s^2 + s - 2} + \frac{s - 1}{s^2 + s - 2} \frac{1}{s+2} = \frac{3s^2 + 10s + 5}{(s+2)^2(s-1)}$$

Scomponiamo l'espressione in fratti semplici:

$$V(s) = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s-1}$$

$$A = \frac{d}{ds} \left((s+2)^2 \frac{3s^2 + 10s + 5}{(s+2)^2(s-1)} \right) \Big|_{s=-2} = 1$$

$$B = \left((s+2)^2 \frac{3s^2 + 10s + 5}{(s+2)^2(s-1)} \right) \Big|_{s=-2} = 1$$

$$C = (s-1) \frac{3s^2 + 10s + 5}{(s+2)^2(s-1)} \Big|_{s=1} = 2$$

A questo punto possiamo riscrivere l'equazione della risposta totale come:

$$V(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} + 2 \frac{1}{s-1}$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace:

$$v(t) = [e^{-2t} + te^{-2t} + 2e^t] \delta_{-1}(t)$$

Esercizio 1.5

Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t) = \frac{1}{3}u(t) \\ \dot{v}(0) = 2 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

1. Calcolare le radici dell'equazione caratteristica e ricavare l'evoluzione libera del sistema
 2. Discutere la stabilità del sistema
 3. Calcolare l'evoluzione forzata
 4. Calcolare la risposta impulsiva usando la Trasformata di Laplace
-

1. L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

le cui radici sono $s_1 = -1$ e $s_2 = -2$.

Quindi l'equazione dell'evoluzione libera sarà del tipo

$$v_l(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

La soluzione particolare dell'equazione differenziale si ottiene imponendo le condizioni iniziali e trovando quindi i valori dei coefficienti c_1 e c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -3 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera del sistema è

$$v_l(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

2. Le radici caratteristiche del sistema sono $s_1 = -1$ e $s_2 = -2$, ricavate al punto precedente. Dato che $\Re(s_1) < 0$ e $\Re(s_2) < 0$, il sistema risulta **asintoticamente stabile**, e di conseguenza è anche **BIBO stabile**.

3. La consegna non specifica in quale dominio calcolare l'evoluzione forzata del sistema, quindi lo faremo in entrambi i modi possibili: prima nel dominio del tempo, poi in quello delle frequenze, quindi con la Trasformata di Laplace.

Dominio del tempo

la risposta impulsiva del sistema :

$$h(t) = d_0\delta(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t)$$

Notiamo che, nell'equazione differenziale di partenza, abbiamo $m = 0$ e $n = 2$, ovvero: il massimo grado di derivazione a sinistra dell'equazione è 2, mentre a destra il grado massimo di derivazione è 0.

Il sistema è quindi strettamente proprio e il termine d_0 è nullo.

Per calcolare l'evoluzione forzata dobbiamo prima calcolare la risposta impulsiva:

$$\frac{d}{dt}h(t) = (-d_1e^{-t} - 2d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\delta(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) = (d_1e^{-t} + 4d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t) + 2(-d_1e^{-t} - 2d_2e^{-2t})\delta(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\frac{d}{dt}\delta(t)$$

Nell'equazione differenziale originale sostituisco l'espressione appena trovata per $h(t)$ al posto di $v(t)$, mentre al posto di $u(t)$ scrivo $\delta(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) &= \frac{1}{3}\delta(t) \\ [(d_1e^{-t} + 4d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t) + 2(-d_1e^{-t} - 2d_2e^{-2t})\delta(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\frac{d}{dt}\delta(t)] + 3[(-d_1e^{-t} - 2d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\delta(t)] + 2[(d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t)] &= \frac{1}{3}\delta(t) \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta_{-1}(t)[(d_1e^{-t} + 4d_2e^{-2t}) + 3(-d_1e^{-t} - 2d_2e^{-2t}) + 2(d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})] = 0 \\ \delta(t)[2(-d_1e^{-t} - 2d_2e^{-2t}) + 3(d_1e^{-t} + d_2e^{-2t}) - \frac{1}{3}] = 0 \\ \frac{d}{dt}\delta(t)[(d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})] = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -2d_1 - 4d_2 + 3d_1 + 3d_2 - \frac{1}{3} = 0 \\ d_1 + d_2 = 0 \\ \left. \begin{array}{l} d_1 = \frac{1}{6} \\ d_2 = -\frac{1}{6} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

La risposta impulsiva è quindi:

$$h(t) = \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t})\delta_{-1}(t)$$

Possiamo ora calcolare la risposta forzata usando l'integrale di convoluzione:

$$\begin{aligned}
 v_f(t) &= \frac{1}{6} \int_{0^-}^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau})(e^{-2(t-\tau)}) d\tau \\
 v_f(t) &= \frac{1}{6} e^{-2t} \int_{0^-}^t (e^\tau - e^0) d\tau \\
 v_f(t) &= \frac{1}{6} e^{-2t} (e^t - 1 - t) \\
 v_f(t) &= \frac{1}{6} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-2t} (1 + t)
 \end{aligned}$$

Dominio delle frequenze (Trasformata di Laplace)

L'evoluzione forzata nel dominio delle frequenze si ottiene moltiplicando la funzione di trasferimento, $H(s)$, per la trasformata di Laplace dell'ingresso:

$$V_f(s) = H(s)U(s)$$

$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s+2}$, quindi:

$$V_f(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 3s + 2} U(s) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(s+1)(s+2)} \right) \frac{1}{s+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$V_f(s) = \frac{1}{3} \left(\frac{C_{1,1}}{s+1} + \frac{C_{2,1}}{s+2} + \frac{C_{2,2}}{(s+2)^2} \right)$$

$$C_{1,1} = (s+1) \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$C_{2,1} = \frac{d}{ds} ((s+2)^2 \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}) \Big|_{s=-2} = -1$$

$$C_{2,2} = (s+2)^2 \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = -1$$

Quindi otteniamo l'espressione definitiva di V_f nel dominio delle frequenze:

$$V_f(s) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} \right)$$

Applico l'antitrasformata \mathcal{L}^{-1} e ottengo :

$$v_f(t) = \frac{1}{3} (e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t})$$

$$v_f(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}(e^t - 1 - t)$$

4. La risposta impulsiva nel dominio delle frequenze si ottiene facendo la trasformata di Laplace dell'ingresso e dell'uscita con *condizioni iniziali nulle!*.
Quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}u(t)\right] \\ (s^2 + 3s + 2)V(s) &= \frac{1}{3}U(s) \\ H(s) = \frac{U(s)}{V(s)} &= \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)(s+2)}\end{aligned}$$

Applichiamo l'antitrasformata di Laplace per ricavare la risposta impulsiva nel dominio del tempo:

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$A = (s+1) \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{3}$$

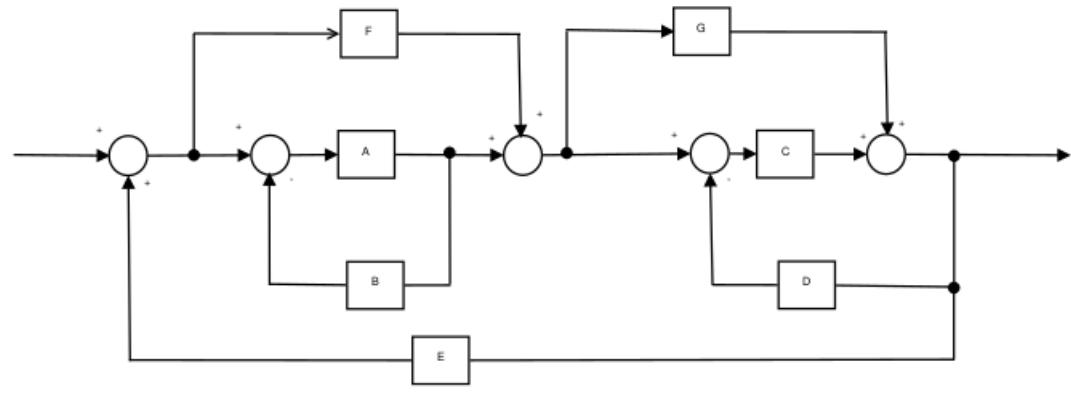
$$B = (s+2) \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{3}$$

Quindi la funzione di trasferimento si può riscrivere come

$$H(s) = \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(s+2)}$$

Con l'espressione in questa forma possiamo ricondurci ad antitrasformate elementari, ottenendo la risposta impulsiva nel dominio del tempo:

$$h(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-2t})\delta_{-1}(t)$$



2 Schemi a blocchi

Per la risoluzione di questo tipo di esercizi, cioè per calcolare la trasmittanza T dello schema (e successivamente la funzione di trasferimento $H(s)$ nel caso in cui venissero fornite le definizioni dei blocchi), possiamo semplificare per via grafica lo schema a blocchi iniziale passo passo, oppure possiamo utilizzare la **formula di Mason**:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_i P_i \Delta_i$$

in cui:

- $\Delta = 1 - (\text{anelli})$
 - + (prodotto delle coppie di anelli che non si toccano)
 - (prodotto delle triple di anelli che non si toccano)
 - + ...
- $P_i = \text{percorso } i\text{-esimo}$
- $\Delta_i = \Delta \text{ togliendo i termini che toccano } P_i$

dove *toccare* significa incrociarsi almeno una volta (quindi toccare lo stesso nodo sommatore oppure passare da uno stesso ramo oppure entrare nello stesso blocco).

Esercizio 2.1

Calcolare la trasmittanza del seguente schema a blocchi:

Cominciamo individuando nello schema a blocchi tutti i percorsi e gli elementi che andranno a formare il Δ , cioè anelli singoli, coppie separate, triple separate, eccetera:

percorsi: $P_1 = AC$, $P_2 = FC$, $P_3 = FG$, $P_4 = AG$

anelli: $A_1^1 = -AB$, $A_2^1 = -CD$, $A_3^1 = ACE$, $A_4^1 = AGE$, $A_5^1 = FCE$, $A_6^1 = FGE$

coppie anelli separati: $A_1^2 = (-AB)(-CD) = ABCD$, $A_2^2 = (-AB)(FCE) = -ABCEF$, $A_3^2 = (-AB)(FGE) = -ABEFG$

Calcoliamo il determinante Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (-AB - CD + ACE + AGE + FCE + FGE) + (ABCD - ABCEF - ABEFG) \\ &= 1 + AB + CD - ACE - AGE - FCE - FGE + ABCD - ABCEF - ABEFG\end{aligned}$$

e ora i determinanti relativi ai singoli percorsi (ovvero Δ_1 , Δ_2 ecc.): notiamo che i percorsi P_1 e P_4 sono toccati da tutti gli elementi in Δ tranne che da 1, quindi ogni elemento di Δ verrà rimosso tranne 1 (che rappresenta il collegamento diretto dall'ingresso all'uscita); i percorsi P_2 e P_3 invece sono toccati da tutti gli elementi tranne che da 1 e AB . In conclusione otteniamo

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 + AB$$

$$\Delta_3 = 1 + AB$$

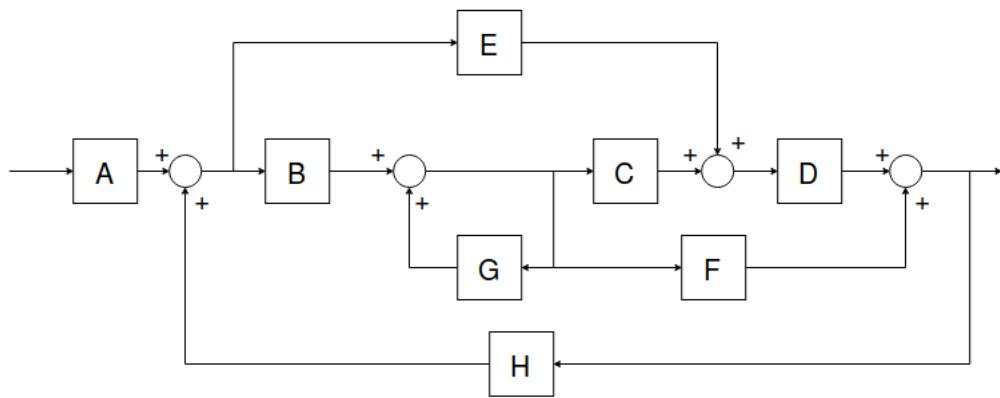
$$\Delta_4 = 1$$

Ora abbiamo tutti gli elementi per calcolare la trasmittanza T :

$$\begin{aligned}T &= \frac{AC(1) + FC(1 + AB) + FG(1 + AB) + AG(1)}{1 + AB + CD - ACE - AGE - FCE - FGE + ABCD - ABCEF - ABEFG} \\ &= \frac{(C + G)(A + F(1 + AB))}{(1 + AB)(1 + CD) - E(C + G)(A + F(1 + AB))}\end{aligned}$$

Esercizio 2.2

Calcolare la trasmittanza del seguente schema a blocchi:



percorsi: $P_1 = ABCD$, $P_2 = AED$, $P_3 = ABF$

anelli: $A_1^1 = G$, $A_2^1 = BCDH$, $A_3^1 = EDH$, $A_4^1 = BFH$

coppie di anelli separati: $A_1^2 = (G)(EDH) = EDGH$

Calcoliamo Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (G + BCDH + EDH + BFH) + (EDGH) \\ &= 1 - G - BCDH - EDH - BFH + EDGH\end{aligned}$$

Calcoliamo i determinanti relativi ai singoli percorsi, notando che il percorso P_2 non viene toccato dall'anello G:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - G$$

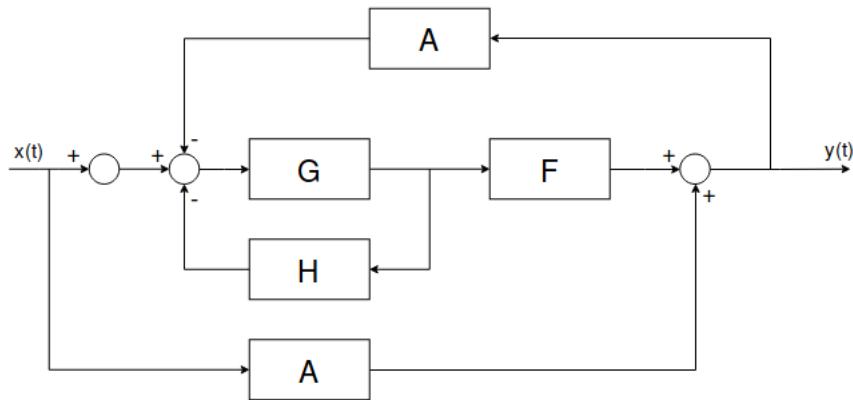
$$\Delta_3 = 1$$

Quindi la trasmittanza risulta essere:

$$T = \frac{ABCD + AED(1 - G) + ABF}{1 - G - BCDH - EDH - BFH + EDGH}$$

Esercizio 2.3

Calcolare la trasmittanza del seguente schema a blocchi:



$$\text{percorsi: } P_1 = GF \quad P_2 = A$$

$$\text{anelli: } A_1 = -GH \quad A_2 = -GFA$$

Calcoliamo Δ :

$$\Delta = 1 - (-GH - GFA) = 1 + GH + GFA$$

Calcoliamo i determinanti relativi ai vari percorsi:

$$\Delta_1 = 1$$

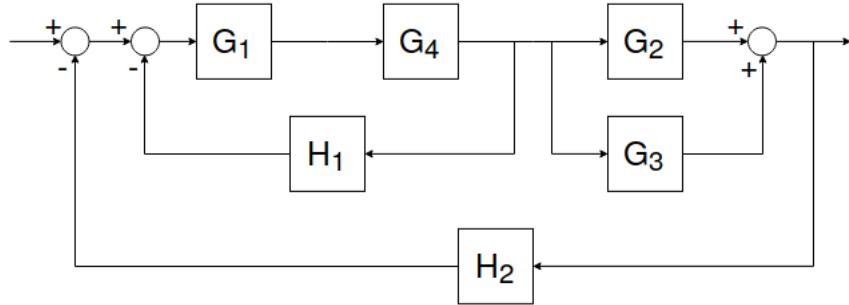
$$\Delta_2 = 1 + GH$$

Oraabbiamo tutti gli elementi per calcolare la formula di Mason:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_i P_i \Delta_i = \frac{GF + A(1 + GH)}{1 + GH + GFA}$$

Esercizio 2.4

Calcolare la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi:



$$\text{percorsi: } P_1 = G_1 G_4 G_2, \quad P_2 = G_1 G_4 G_3$$

$$\text{anelli: } A_1^1 = -G_1 G_4 H_1, \quad A_2^1 = -G_1 G_4 G_2 H_2, \quad A_3^1 = -G_1 G_4 G_3 H_2$$

È immediato notare che gli anelli presenti nello schema si toccano, e il determinante sarà:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (-G_1 G_4 H_1 - G_1 G_4 G_2 H_2 - G_1 G_4 G_3 H_2) \\ &= 1 + G_1 G_4 H_1 + G_1 G_4 G_2 H_2 + G_1 G_4 G_3 H_2\end{aligned}$$

Per il calcolo dei determinanti dei percorsi notiamo che sia il percorso P_1 che P_2 toccano ogni elemento di Δ in qualche punto, dunque i relativi determinanti sono semplicemente

$$\Delta_1 = 1$$

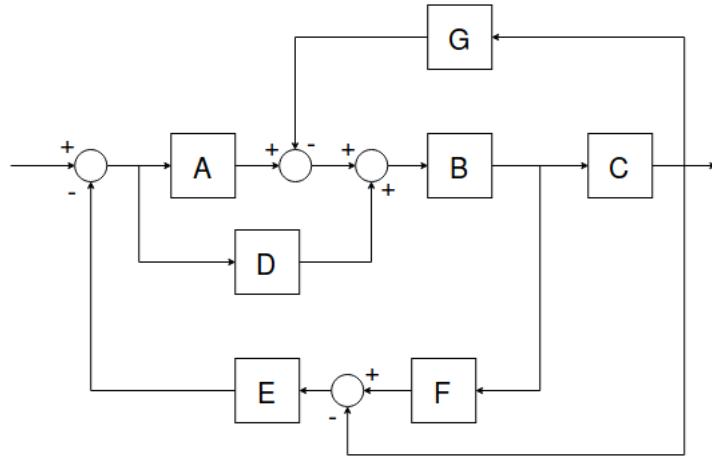
$$\Delta_2 = 1$$

Ora possiamo applicare la formula di Mason:

$$\begin{aligned}T &= \frac{G_1 G_4 G_2(1) + G_1 G_4 G_3(1)}{1 + G_1 G_4 H_1 + G_1 G_4 G_2 H_2 + G_1 G_4 G_3 H_2} \\ &= \frac{G_1 G_4 (G_2 + G_3)}{1 + G_1 G_4 (H_1 + H_2 (G_2 + G_3))}\end{aligned}$$

Esercizio 2.5 - appello del 13/09/2019

Calcolare la trasmittanza del seguente sistema a blocchi:



Iniziamo l'esercizio individuando tutti gli anelli e tutti i percorsi dello schema:

anelli: $A_1 = -ABFE, \quad A_2 = ABCE, \quad A_3 = -BCG, \quad A_4 = -DBFE, \quad A_5 = DBCE$

percorsi: $P_1 = ABC, \quad P_2 = DBC$

Tutti gli anelli si toccano in almeno un punto: infatti, anche senza guardare lo schema a blocchi, notiamo che tutti passano dal blocco B. Proseguendo, il determinante è

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (-ABFE + ABCE - BCG - DBFE + DBCE) \\ &= 1 + ABFE - ABCE + BCG + DBFE - DBCE\end{aligned}$$

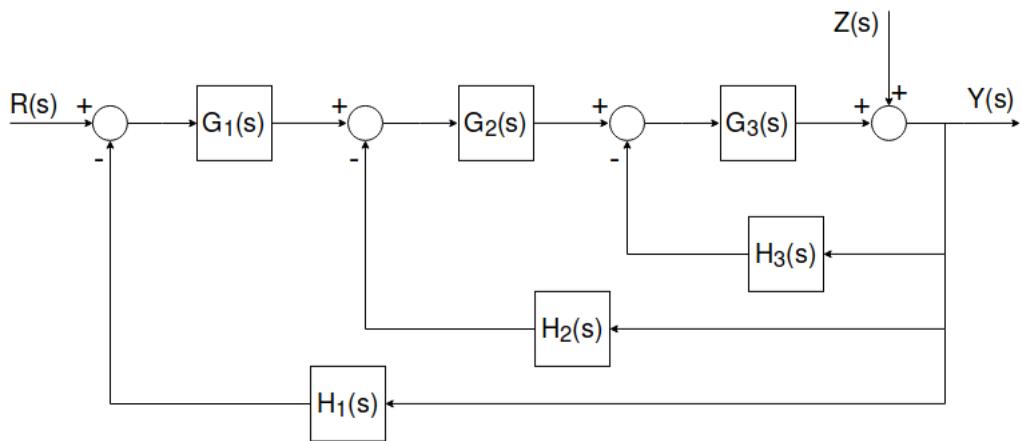
Ora calcoliamo i determinanti Δ_1 e Δ_2 relativi ai singoli percorsi: notiamo che i percorsi passano tutti dal blocco B, e questo blocco è presente anche in tutti gli anelli, quindi i determinanti dei percorsi saranno semplicemente $\Delta_1 = 1$ e $\Delta_2 = 1$.

Adesso abbiamo tutti gli elementi per utilizzare la formula di Mason e calcolare la trasmittanza dello schema a blocchi:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{\Delta} \sum_i P_i \Delta_i = \frac{ABC + DBC}{1 + ABFE - ABCE + BCG + DBFE - DBCE} \\ &= \frac{BC(A + D)}{1 + BCG + B(A + D)(FE - CE)}\end{aligned}$$

Esercizio 2.6

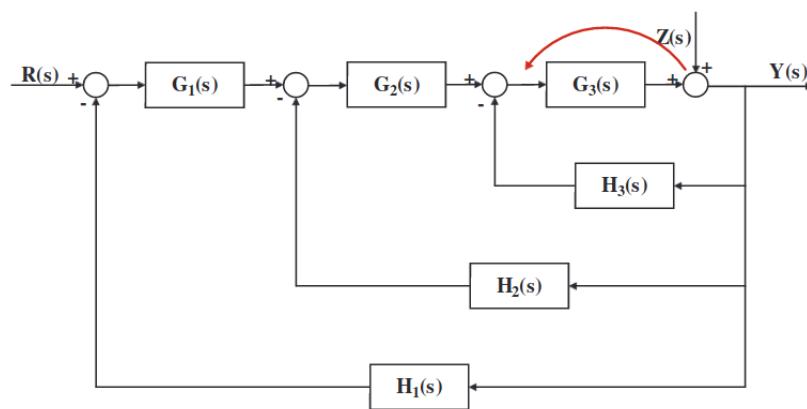
Calcolare la funzione di trasferimento (poiché ogni blocco e ingresso è in funzione di s) del seguente schema a blocchi *utilizzando l'algebra dei blocchi*:



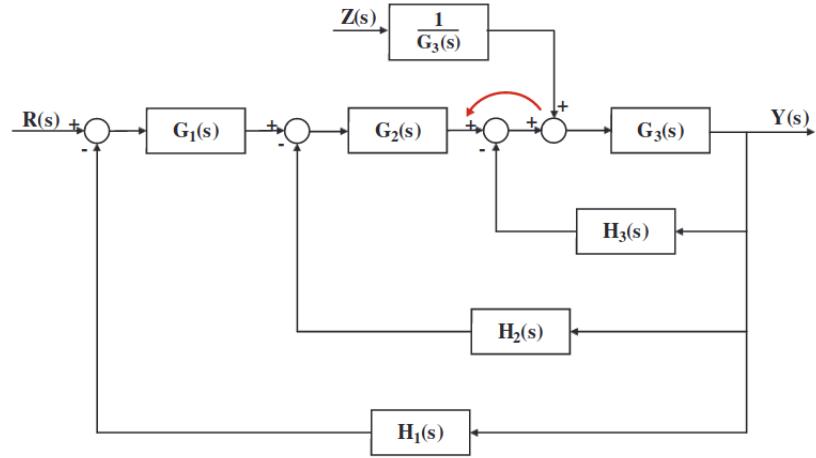
In questo esercizio si chiede espressamente di non fare uso della formula di Mason, ma di calcolare la funzione di trasferimento operando le semplificazioni possibili tra i vari blocchi. Notiamo che in questo esercizio c'è una novità: abbiamo due funzioni di ingresso, $R(s)$ e $Z(s)$, anziché una, come eravamo abituati.

Tuttavia questo non cambia di molto il metodo di risoluzione dell'esercizio: possiamo spostare l'ingresso $Z(s)$ all'interno dello schema come fosse un qualsiasi altro blocco!

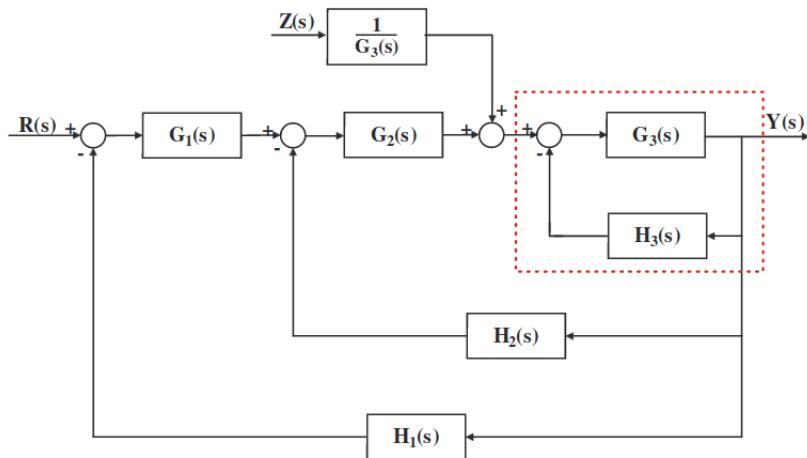
- cominciamo spostando la giunzione sommante in cui entra l'ingresso $Z(s)$ a monte del blocco $G_3(s)$:



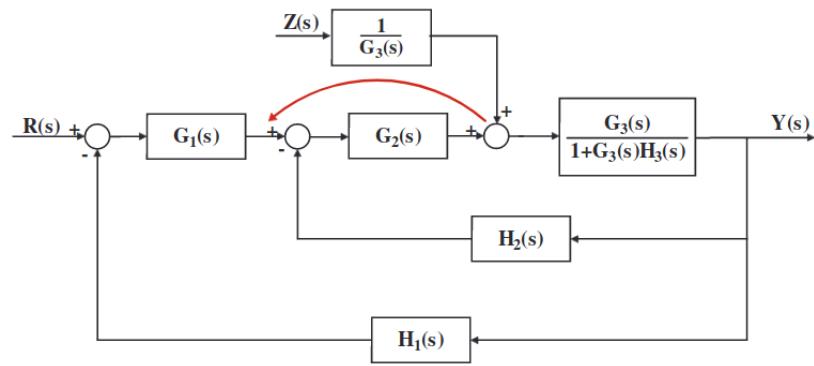
- le giunzioni sommanti possono essere scambiate senza apportare altre modifiche, grazie alla proprietà commutativa dell'addizione:



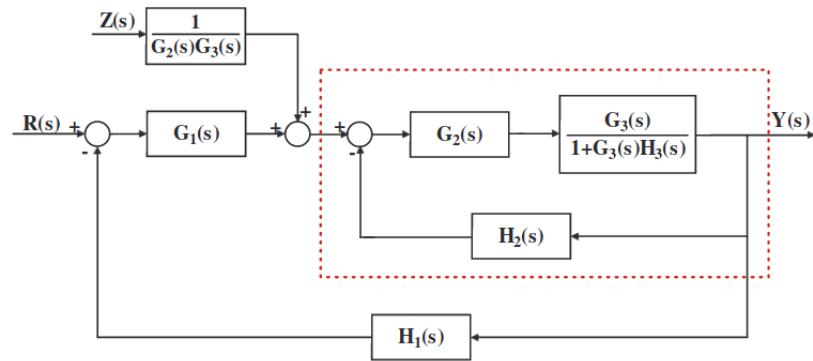
- così facendo siamo riusciti a isolare un anello:



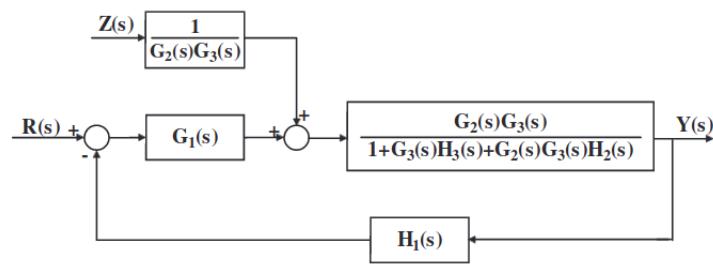
- semplifichiamo i blocchi che appartengono all'anello e spostiamo ulteriormente il sommatore in cui entra l'ingresso Z(s) a monte del blocco G2(s):



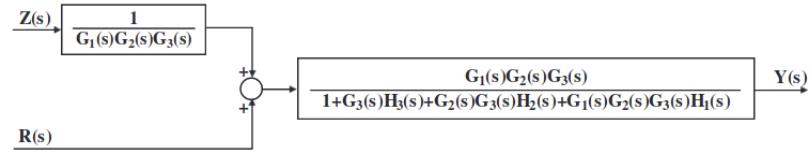
- così facendo otteniamo due blocchi in serie e un anello:



- possiamo quindi semplificare tra loro questi blocchi ottenendo il seguente schema:

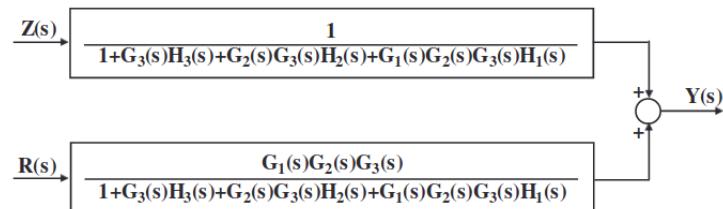


- spostando la giunzione sommante di $Z(s)$ a monte del blocco $G_1(s)$ e del primo sommatore otteniamo nuovamente una serie e un anello, che possono essere semplificati come



abbiamo fatto nel punto precedente:

- come ultimo passaggio, spostiamo il blocco così ottenuto a monte della giunzione sommante e otteniamo il seguente schema:

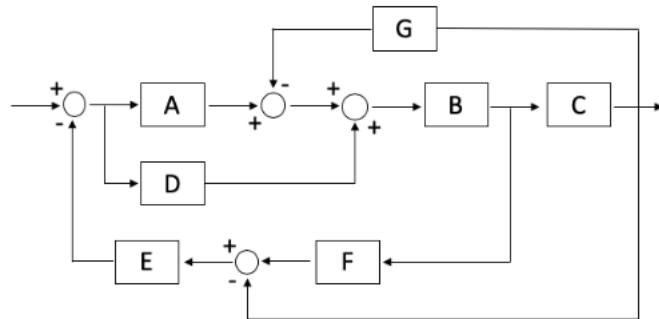


Se chiamiamo la funzione scritta all'interno blocco superiore $A(s)$ e la funzione scritta nel blocco inferiore $B(s)$, la funzione di trasferimento $H(s)$ dello schema risulta essere:

$$H(s) = A(s) + B(s)$$

Esercizio 2.7 - appello del 13/09/2019

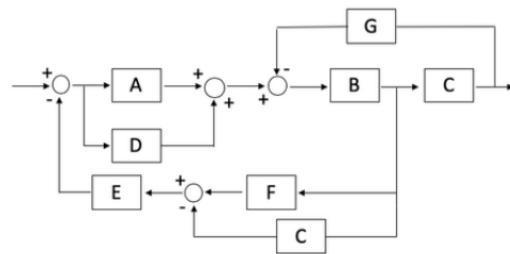
Calcolare la trasmittanza del seguente schema a blocchi:



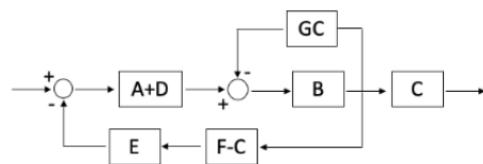
Risolviamo questo esercizio utilizzando entrambi i metodi che conosciamo: prima con l'algebra dei blocchi, poi con la formula di Mason.

1^o metodo: algebra dei blocchi

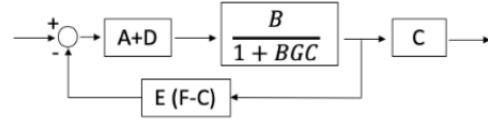
- invertiamo i nodi sommatori che si trovano tra il blocco A e il blocco B; inoltre sposto la diramazione a monte del blocco C:



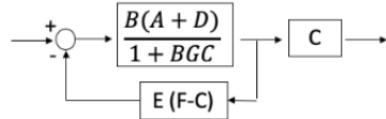
- sposto l'altra diramazione a monte di C e risolvo i blocchi in parallelo A,D e F,C:



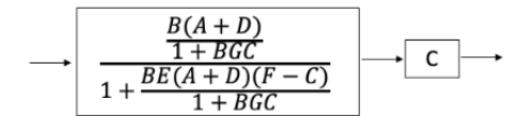
- risolvo la serie nel ramo inferiore, composta dai blocchi E e F-C; inoltre risolvo la retroazione dei blocchi B e GC:



- semplifico i blocchi in serie:



- infine risolvo la retroazione, e ottengo:



Ora abbiamo solo due blocchi in serie, e sappiamo che questa configurazione si risolve moltiplicando i due blocchi.

La funzione di trasferimento finale risulta quindi essere:

$$T = \frac{BC(A + D)}{1 + BGC + BEAF - BEAC + BEDF - BCED}$$

2^o metodo: formula di Mason

Individuiamo tutti i cammini del percorso:

$$P_1 = ABC$$

$$P_2 = DBC$$

Gli anelli presenti sono invece:

$$A_1 = -BCG$$

$$A_2 = -ABFE$$

$$A_3 = ABCE$$

$$A_4 = BCED$$

$$A_5 = -BFED$$

Notiamo che tutti gli anelli si toccano in qualche punto: infatti tutti contengono passano

dal blocco B!

Il delta dello schema a blocchi sarà quindi:

$$\Delta = 1 - (-BCG - ABFE + ABCE + BCED - BFED) = 1 + BCG + ABFE - ABCE - BCED + BFED$$

Calcoliamo ora i delta relativi ai vari percorsi:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

Questo perchè tutti i percorsi e tutti gli anelli passano dal blocco B, quindi non esistono anelli che non toccano qualche percorso!

Applicando la formula di Mason, ricaviamo che la trasmittanza totale dello schema è uguale a quella calcolata con il metodo precedente:

$$\begin{aligned} T &= \frac{ABC(1) + DBC(1)}{1 + BCG + ABFE - ABCE - BCED + BFED} \\ &= \frac{BC(A + D)}{1 + BGC + BEAF - BEAC + BEDF - BCED} \end{aligned}$$

3 Sistemi LTI a tempo discreto

Esercizio 3.1 - appello del 01/07/2019, versione A

Dato il sistema LTI causale a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alla differenze:

$$\begin{cases} v(k) - v(k-1) - \frac{3}{4}v(k-2) = -\frac{5}{2}u(k) - \frac{3}{4}u(k-1) \\ v(-1) = 2 \\ v(-2) = -1 \\ u(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k) \end{cases}$$

1. Calcolare la risposta libera nel tempo (esclusivamente nel tempo!)
 2. Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO
 3. Calcolare la risposta impulsiva del sistema utilizzando l'antitrasformata Zeta
 4. Calcolare la risposta totale del sistema utilizzando l'antitrasformata Zeta
-

1. Scriviamo innanzitutto l'equazione caratteristica del sistema e calcoliamo le sue radici:

$$z^2 - z - \frac{3}{4} = 0 \iff 4z^2 - 4z - 3 = 0$$

Le radici di questa equazione sono $z_1 = \frac{3}{2}$ e $z_2 = -\frac{1}{2}$.
L'espressione dell'evoluzione libera sarà dunque nella forma:

$$v_l(k) = c_1 \left(\frac{3}{2}\right)^k + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Per trovare il valore dei coefficienti c_1 e c_2 devo semplicemente imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(-1) = 2 = c_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ v(-2) = -1 = c_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 3 + 3c_2 \\ (3 + 3c_2) \left(\frac{4}{9}\right) + c_2(4) = -1 \end{cases}$$

Risolvendo queste equazioni si trova che $c_1 = \frac{27}{16}$ e $c_2 = -\frac{7}{16}$.

Possiamo quindi scrivere l'espressione definitiva dell'evoluzione libera:

$$v_l(k) = \frac{27}{16} \left(\frac{3}{2}\right)^k - \frac{7}{16} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

2. Il sistema è **asintoticamente stabile** se e solo se tutte le radici caratteristiche sono in modulo minori di 1, quindi $|z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1$

Nel nostro caso però, notiamo subito che $|z_1| = |\frac{3}{2}| > 1$, e dunque concludiamo che il sistema *non è asintoticamente stabile*.

Verifichiamo ora la stabilità BIBO analizzando la funzione di trasferimento del sistema: il sistema è BIBO stabile se e solo se tutti i poli che causano l'instabilità asintotica (nel nostro caso, z_1) si semplificano.

$$H(z) = \frac{-\frac{5}{2}z^2 - \frac{3}{4}z}{(z - \frac{3}{2})(z + \frac{1}{2})}$$

Ma il polo z_1 non viene semplificato, dunque il sistema *non è BIBO stabile*.

3. La risposta impulsiva del sistema si ricava eseguendo l'antitrasformata Zeta della funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z(-\frac{5}{2}z - \frac{3}{4})}{(z - \frac{3}{2})(z + \frac{1}{2})}$$

L'antitrasformata si ottiene seguendo questi passaggi:

- Divido $H(z)$ per z:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{-\frac{5}{2}z - \frac{3}{4}}{(z - \frac{3}{2})(z + \frac{1}{2})}$$

- Scompongo in fratti semplici:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{(z - \frac{3}{2})} + \frac{B}{(z + \frac{1}{2})}$$

Calcolo i coefficienti A e B:

$$A = (z - \frac{3}{2}) \left. \frac{-\frac{5}{2}z - \frac{3}{4}}{(z - \frac{3}{2})(z + \frac{1}{2})} \right|_{s=\frac{3}{2}} = -\frac{9}{4}$$

$$B = (z + \frac{1}{2}) \left. \frac{-\frac{5}{2}z - \frac{3}{4}}{(z - \frac{3}{2})(z + \frac{1}{2})} \right|_{s=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}$$

Da cui ricaviamo l'espressione scomposta:

$$\frac{H(z)}{z} = -\frac{9}{4} \left(\frac{1}{z - \frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z + \frac{1}{2}} \right)$$

- Moltiplico per z:

$$H(z) = -\frac{9}{4} \left(\frac{z}{z - \frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{z + \frac{1}{2}} \right)$$

- Ora posso ricavare la funzione antitrasformata, che è esattamente la risposta impulsiva che cercavamo:

$$h(k) = \left[\frac{9}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^k - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right] \delta_{-1}(k)$$

4. Applico la trasformata Zeta all'ingresso e all'uscita:

$$z^0 V(z) - [z^{-1} V(z) + v(-1) z^0] - \frac{3}{4} [z^{-2} V(z) + v(-1) z^{-1} + v(-2) z^0] = -\frac{5}{2} z^0 U(z) - \frac{3}{4} z^{-1} U(z)$$

$$V(z) - \frac{1}{z} V(z) - 2 - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{z^2} V(z) - 1 + 2 \frac{1}{z} \right) = -\frac{5}{2} U(z) - \frac{3}{4z} U(z)$$

Raccogliendo V(z) e U(z) si ottiene:

$$V(z) = \frac{\frac{5}{4}z^2 + \frac{3}{2}z}{z^2 - z - \frac{3}{4}} + \frac{-\frac{5}{2}z^2 - \frac{3}{4}z}{z^2 - z - \frac{3}{4}} U(z)$$

Dato che $u(k) = (-\frac{1}{2})^k \delta_{-1}(k)$, ricaviamo facilmente che $U(z) = \mathcal{Z}[u(k)] = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$

E quindi l'espressione finale di V(z) sarà:

$$V(z) = \frac{z \left(-\frac{5}{4}z^2 + \frac{11}{8}z + \frac{3}{4} \right)}{(z + \frac{1}{2})^2 (z - \frac{3}{2})}$$

Ora applico l'algoritmo descritto al punto precedente per calcolare l'antitrasformata Zeta di V(z) con il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{A}{(z + \frac{1}{2})} + \frac{B}{(z + \frac{1}{2})^2} + \frac{C}{(z - \frac{3}{2})}$$

Attenzione! Il polo $z = -\frac{1}{2}$ ha molteplicità 2, dunque il coefficiente A dovrà essere calcolato con la derivata:

$$A = \frac{d}{dz} \left((z + \frac{1}{2})^2 \frac{-\frac{5}{4}z^2 + \frac{11}{8}z + \frac{3}{4}}{(z + \frac{1}{2})^2 (z - \frac{3}{2})} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{16}(4z^2 - 12z + 9)}{\frac{1}{4}(4z^2 - 12z + 9)} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{5}{4} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{5}{4}$$

$$B = \left((z + \frac{1}{2})^2 \frac{-\frac{5}{4}z^2 + \frac{11}{8}z + \frac{3}{4}}{(z + \frac{1}{2})^2 (z - \frac{3}{2})} \right) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$C = \left((z - \frac{3}{2}) \frac{-\frac{5}{4}z^2 + \frac{11}{8}z + \frac{3}{4}}{(z + \frac{1}{2})^2(z - \frac{3}{2})} \right) \Big|_{z=\frac{3}{2}} = 0$$

Otteniamo quindi l'espressione scomposta di $V(z)$:

$$V(z) = -\frac{5}{4} \left(\frac{z}{z + \frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{\frac{1}{2}z}{(z + \frac{1}{2})^2} \right) + 0 \left(\frac{z}{z - \frac{3}{2}} \right)$$

Da cui ricaviamo facilmente l'antitrasformata:

$$v(k) = \left[-\frac{5}{4} \left(-\frac{1}{2} \right)^k + \frac{1}{16} k \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right] \delta_{-1}(t)$$

Notare che il secondo termine $\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ è moltiplicato per un fattore k : questo è sempre dovuto al fatto che quel polo ha molteplicità 2.

Esercizio 3.2 - appello del 17/07/2017

Dato il seguente sistema LTI a tempo discreto

$$\begin{cases} 9v(k) + 6v(k-1) + v(k-2) = 3u(k) + u(k-1) \\ v(-1) = 1 \\ v(-2) = 1 \\ u(t) = \delta_{-1}(k) \end{cases}$$

1. Calcolare l'evoluzione libera del sistema nel dominio del tempo
 2. Discutere la stabilità del sistema
 3. Calcolare la risposta impulsiva nel dominio del tempo
 4. Calcolare la risposta totale con l'antitrasformata Zeta
-

1. Cominciamo calcolando le radici dell'equazione caratteristica:

$$9z^2 + 6z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{1}{3}$$

Notare che la molteplicità algebrica della radice è 2 ($\mu = 2$)!
L'espressione dell'evoluzione libera sarà dunque nella forma:

$$v_l(k) = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^k + kc_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Impongo le condizioni iniziali del sistema per ricavare i coefficienti c_1 e c_2 :

$$\begin{cases} v(-1) = 1 = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} + (-1)c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \\ v(-2) = 1 = c_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + (-2)c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{7}{9} \\ c_2 = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Quindi l'espressione finale dell'evoluzione libera è:

$$v_l(k) = -\frac{7}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^k - k \frac{4}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

2. Il sistema è **asintoticamente stabile** se $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n| < 1$.
Nel nostro caso, $|- \frac{1}{3}| = \frac{1}{3} < 1$, quindi il sistema è asintoticamente stabile.
La stabilità asintotica implica la BIBO stabilità, quindi il nostro sistema è anche BIBO stabile.

3. L'espressione della risposta impulsiva è nella forma:

$$h(k) = \left[d_1 \left(-\frac{1}{3} \right)^k + k d_2 \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right] \delta_{-1}(k)$$

Per ricavare i coefficienti d_1 e d_2 , devo sostituire nell'espressione originale del sistema $v(k)$ con $h(k)$, e $u(k)$ con $\delta(k)$.

Per capirne il motivo, è sufficiente pensare al significato stesso della *risposta impulsiva*: essa è definita come l'uscita del sistema in risposta a un impulso unitario!

Dopo aver effettuato la sostituzione, troviamo dunque la seguente espressione:

$$9h(k) + 6h(k-1) + h(k-2) = 3\delta(k) + \delta(k-1)$$

$$\boxed{k=0}: 9h(0) + 6h(-1) + h(-2) = 3\delta(0) + \delta(-1)$$

Sappiamo che la risposta impulsiva è nulla per valori negativi di k e che l'impulso è non nullo solo nell'origine, quindi per $k=0$. Quindi alla fine resta:

$$9h(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad h(0) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{k=1}: 9h(1) + 6h(0) + h(-1) = 3\delta(1) + \delta(0)$$

Da cui si ricava facilmente che $h(1) = -\frac{1}{9}$.

Ora ricaviamo i coefficienti d_1 e d_2 impostando il sistema seguente:

$$\begin{cases} h(0) = \frac{1}{3} = [d_1 + 0 \cdot d_2] \delta_{-1}(0) \\ h(1) = -\frac{1}{9} = [-\frac{1}{3}d_1 + -\frac{1}{3}d_2] \delta_{-1}(1) \end{cases}$$

Da cui si ricava che $d_1 = \frac{1}{3}$ e $d_2 = 0$.

Possiamo quindi scrivere l'espressione finale della risposta impulsiva:

$$h(k) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^k \delta_{-1}(k)$$

4. Calcoliamo la risposta totale del sistema applicando la trasformata Zeta all'ingresso e all'uscita:

$$\mathcal{Z}[9v(k) + 6v(k-1) + v(k-2)] = \mathcal{Z}[3u(k) + u(k-1)]$$

$$9z^0V(z) + 6(z^{-1}V(z) + v(-1) \cdot z^0) + z^{-2}V(z) + v(-2)z^0 + v(-1)z^{-1} = 3z^0U(z) + z^{-1}U(z)$$

Eseguendo gli opportuni calcoli, e isolando $V(z)$ otteniamo l'espressione:

$$V(z) = U(z) \frac{3 + \frac{1}{z}}{9 + \frac{6}{z} + \frac{1}{z^2}} - \frac{7 + \frac{1}{z}}{9 + \frac{6}{z} + \frac{1}{z^2}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per z^2 , e sostituiamo $U(z) = \mathcal{Z}[u(k)] = \frac{z}{z-1}$:

$$V(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{3z^2+z}{(3z+1)^2} - \frac{7z^2+z}{(3z+1)^2}$$

I passaggi da effettuare per ricavare l'antitrasformata della nostra funzione, e dunque l'espressione della risposta totale nel tempo, sono:

- dividere $V(z)$ per z :

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{-4z^2 + 7z + 1}{(z-1)(3z+1)^2}$$

- scomporre l'espressione trovata in fratti semplici:

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{3z+1} + \frac{C}{(3z+1)^2}$$

Notare che abbiamo il coefficiente B deve essere calcolato con la derivata, perché $z = -\frac{1}{3}$ è un polo di molteplicità 2!

$$A = (z-1) \cdot \left. \frac{-4z^2+7z+1}{(z-1)(3z+1)^2} \right|_{z=1} = \frac{1}{4}$$

$$B = \left. \frac{d}{dz} \left((3z+1)^2 \cdot \frac{-4z^2+7z+1}{(z-1)(3z+1)^2} \right) \right|_{z=-\frac{1}{3}} = -\frac{23}{4}$$

$$C = \left. (3z+1)^2 \cdot \frac{-4z^2+7z+1}{(z-1)(3z+1)^2} \right|_{z=-\frac{1}{3}} = 2$$

Quindi

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-1} \right) - \frac{23}{4} \left(\frac{1}{3z+1} \right) + 2 \left(\frac{1}{(3z+1)^2} \right)$$

- moltiplicare il risultato per z e antitrasformare:

$$V(z) = \frac{1}{4} \frac{z}{z-1} - \frac{23}{12} \frac{z}{z+\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{3}z}{(z+\frac{1}{3})^2}$$

Da cui il risultato:

$$v(k) = \left[\frac{1}{4}(1)^k - \frac{23}{12} \left(-\frac{1}{3} \right)^k + \frac{2}{3} k \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right] \delta_{-1}(k)$$

Esercizio 3.3 - parziale del 13/06/2019

Dato il seguente sistema LTI a tempo discreto:

$$\begin{cases} v(k) + \frac{5}{14}v(k-1) - \frac{1}{14}v(k-2) = 7u(k) - u(k-2) \\ v(-1) = 1 \\ v(-2) = -2 \\ u(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k) \end{cases}$$

1. Calcolare l'evoluzione libera del sistema nel dominio del tempo
 2. Discutere la stabilità del sistema
 3. Calcolare la risposta impulsiva con l'antitrasformata Zeta
 4. Calcolare la risposta totale con l'antitrasformata Zeta
-

1. Scriviamo l'equazione caratteristica del sistema e calcoliamone le radici:

$$z^2 + \frac{5}{14}z - \frac{1}{14} = 0$$

Che ha come soluzioni $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{7}$.

Quindi

$$v_l(k) = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^k + c_2 \left(\frac{1}{7}\right)^k$$

Impongo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(-1) = 1 = 7c_1 - 2c_2 \\ v(-2) = -2 = 49c_1 + 4c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi l'espressione definitiva dell'evoluzione libera sarà

$$v_l(k) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

2. Notiamo subito che $|z_1| = \frac{1}{2} < 1$ e $|z_2| = \frac{1}{7} < 1$: entrambe le radici si trovano all'interno del cerchio unitario, quindi possiamo concludere che il sistema è **asintoticamente stabile** e, di conseguenza, è anche **BIBO stabile**.

3. La risposta impulsiva si ricava facendo l'antitrasformata Zeta della funzione di trasferimento $H(z)$:

$$H(z) = \frac{7z^2 - 1}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})}$$

Dividendo per z si ottiene:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{7z^2 - 1}{z(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})}$$

Scomponiamo quindi in fratti semplici:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z + \frac{1}{2})} + \frac{C}{(z - \frac{1}{7})}$$

$$A = z \cdot \left. \frac{7z^2 - 1}{z(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})} \right|_{z=0} = 14$$

$$B = \left. \left(z + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{7z^2 - 1}{z(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{7}{3}$$

$$C = \left. \left(z - \frac{1}{7} \right) \cdot \frac{7z^2 - 1}{z(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})} \right|_{z=\frac{1}{7}} = -\frac{28}{3}$$

Quindi l'espressione di $\frac{H(z)}{z}$ si può riscrivere, scomposta, come:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{14}{z} - \frac{28}{3} \frac{1}{(z - \frac{1}{7})} + \frac{7}{3} \frac{1}{(z + \frac{1}{2})}$$

Moltiplico per z e antitrasformo, ottenendo così l'espressione finale della risposta impulsiva:

$$h(t) = 14\delta(k) - \left[\frac{28}{3} \left(\frac{1}{7} \right)^k + \frac{7}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right] \delta_{-1}(k-1)$$

4. Per calcolare la risposta totale del sistema, applico la trasformata Zeta all'ingresso e all'uscita:

$$\mathcal{Z} \left[v(k) + \frac{5}{14}v(k-1) - \frac{1}{14}v(k-2) \right] = \mathcal{Z} [7u(k) - u(k-2)]$$

Da cui otteniamo:

$$z^0 V(z) + \frac{5}{14} (z^{-1}V(z) + v(-1)z^0) - \frac{1}{14} (z^{-2}V(z) + v(-2)z^0 + v(-1)z^{-1}) = 7z^0 U(z) - z^{-2}U(z)$$

Moltiplico a sinistra e a destra per z^2 e raccolgo $V(z)$ e $U(z)$:

$$V(z)(z^2 + \frac{5}{14}z - \frac{1}{14}) + \frac{5}{14}z^2 + \frac{2}{14}z^2 - \frac{1}{14}z = U(z)(7z^2 - 1)$$

$$V(z) = \frac{7z^2 - 1}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})} U(z) + \frac{-\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{14}z}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})}$$

Dato che $u(t) = (-\frac{1}{2})^k \delta_{-1}(k)$, si ricava facilmente che $U(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$, e quindi l'espressione che abbiamo trovato si riscrive come:

$$V(z) = \frac{7z^2 - 1}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{14}z}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})} = \frac{z(\frac{13}{2}z^2 - \frac{5}{28}z - \frac{27}{28})}{(z - \frac{1}{7})(z + \frac{1}{2})^2}$$

Divido per z e scompongo in fratti semplici: $\frac{V(z)}{z} = \frac{A}{(z - \frac{1}{7})} + \frac{B}{(z + \frac{1}{2})^2} + \frac{C}{(z + \frac{1}{2})}$

Ora, per ricavare il valore dei coefficienti A, B e C è sufficiente applicare il solito metodo dei fratti semplici, prestando attenzione al fatto che il polo $z = -\frac{1}{2}$ ha molteplicità 2, e C si calcola con la derivata. Si dovrebbe ottenere il seguente risultato:

$$A = \frac{56}{27}$$

$$B = \frac{343}{42}$$

$$C = -\frac{137}{49}$$

Ora possiamo facilmente antitrasformare $\frac{V(z)}{z}$ per ottenere l'espressione della risposta totale:

$$v(t) = \left[\frac{56}{27} \left(\frac{1}{7} \right)^k + \frac{343}{42} k \left(-\frac{1}{2} \right)^k - \frac{137}{49} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right] \delta_{-1}(k)$$

Esercizio 3.4 - esame del 16/06/2017

Si consideri il seguente sistema LTI a tempo discreto:

$$\begin{cases} v(k) - \frac{1}{9}v(k-2) = 2u(k) + u(k-1) + \frac{1}{2}u(k-2) \\ v(-1) = 0 \\ v(-2) = 1 \\ u(t) = \delta_{-1}(k) \end{cases}$$

1. Calcolare la risposta libera nel tempo
 2. Discutere la stabilità del sistema
 3. Calcolare l'evoluzione forzata con l'antitrasformata Zeta
 4. Calcolare la risposta totale con l'antitrasformata Zeta
-

1. L'equazione caratteristica del sistema è

$$z^2 - \frac{1}{9} = 0$$

le cui radici sono $z_1 = \frac{1}{3}$, di molteplicità $\mu_1 = 1$, e $z_2 = -\frac{1}{3}$, di molteplicità $\mu_2 = 1$. Quindi l'espressione dell'evoluzione libera sarà del tipo

$$v_l(k) = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^k + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Ricaviamo i coefficienti c_1 e c_2 nel solito modo, imponendo le condizioni iniziali che ci vengono date e mettendo le equazioni a sistema:

$$\begin{cases} v(-1) = 0 = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \\ v(-2) = 1 = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{18}$$

Dunque l'espressione finale dell'evoluzione libera è:

$$v_l(k) = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{18} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

2. $|z_1| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$ e $|z_2| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, quindi il sistema è asintoticamente stabile e, di conseguenza, è anche BIBO stabile.

3. Nel dominio del tempo, l'evoluzione forzata è data dalla *convoluzione* tra la risposta impulsiva $h(k)$ e l'ingresso $u(k)$.

Nel dominio della trasformata Zeta, la convoluzione corrisponde a una moltiplicazione, e quindi la trasformata zeta dell'evoluzione forzata si ricava *moltiplicando* la trasformata della risposta impulsiva per la trasformata dell'ingresso:

$$v_f(k) = h(k) * u(k) \Rightarrow \mathcal{Z}[v_f] = \mathcal{Z}[h(k) * u(k)] \Rightarrow V_f(z) = H(z) \cdot U(z)$$

(si veda p. 205 del libro).

$H(z)$ non è altro che la funzione di trasferimento, ovvero il rapporto tra gli ingressi e le uscite:

$$H(z) = \frac{2z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{9}}$$

$U(z)$, invece, si ricava applicando normalmente la trasformata Zeta all'ingresso dato:

$$U(z) = \mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] = \frac{z}{z-1}$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per ricavare l'espressione di V_f :

$$V_f(z) = \frac{2z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{9}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{(2z^2 + z + \frac{1}{2})z}{(z - \frac{1}{3})(z + \frac{1}{3})(z-1)}$$

Divido per z :

$$\frac{V_f(z)}{z} = \frac{(2z^2 + z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{3})(z + \frac{1}{3})(z-1)}$$

Scompongo in fratti semplici:

$$\frac{V_f(z)}{z} = \frac{A}{z - \frac{1}{3}} + \frac{B}{z + \frac{1}{3}} + \frac{C}{z-1}$$

$$A = \frac{(2z^2 + z + \frac{1}{2})}{(z + \frac{1}{3})(z-1)} \Big|_{z=\frac{1}{3}} = -\frac{19}{8}$$

$$B = \frac{(2z^2 + z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{3})(z-1)} \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{7}{16}$$

$$C = \frac{(2z^2 + z + \frac{1}{2})}{(z + \frac{1}{3})(z-\frac{1}{3})} \Big|_{z=1} = \frac{63}{16}$$

Quindi l'espressione di V_f scomposta è:

$$\frac{V_f(z)}{z} = -\frac{19}{8} \left(\frac{1}{z - \frac{1}{3}} \right) + \frac{7}{16} \left(\frac{1}{z + \frac{1}{3}} \right) + \frac{63}{16} \left(\frac{1}{z-1} \right)$$

Moltiplico tutto per z e applico l'antitrasformata, per ricavare l'espressione finale di v_f :

$$V_f(z) = -\frac{19}{8} \left(\frac{z}{z - \frac{1}{3}} \right) + \frac{7}{16} \left(\frac{z}{z + \frac{1}{3}} \right) + \frac{63}{16} \left(\frac{z}{z - 1} \right)$$

$$v_f(k) = \left[-\frac{19}{8} \left(\frac{1}{3} \right)^k + \frac{7}{16} \left(-\frac{1}{3} \right)^k + \frac{63}{16} (1)^k \right] \delta_{-1}(k)$$

4. La risposta totale si ricava applicando la trasformata Zeta sia agli ingressi che alle uscite:

$$z^0 V(z) - \frac{1}{9} [z^{-2} V(z) + z^{-1} v(-1) + v(-2)] = 2z^0 U(z) + z^{-1} U(z) + \frac{1}{2} z^{-2} U(z)$$

Svolgendo i vari calcoli e raccogliendo gli opportuni termini, si dovrebbe arrivare alla seguente espressione:

$$V(z) = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9} \frac{1}{z^2}} + \frac{2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2}}{1 - \frac{1}{9} \frac{1}{z^2}} \cdot U(z)$$

Per arrivare a una forma su cui è possibile eseguire l'antitrasformata, moltiplichiamo numeratore e denominatore per z^2 . Inoltre, sostituiamo $U(z)$ con il suo effettivo valore, ovvero $\frac{z}{z-1}$:

$$V(z) = \frac{\frac{1}{9} z^2}{z^2 - \frac{1}{9}} + \frac{2z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{9}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Svolgendo i calcoli si dovrebbe arrivare alla seguente espressione:

$$V(z) = \frac{z \left(\frac{19}{9} z^2 + \frac{8}{9} z + \frac{1}{2} \right)}{(z^2 - \frac{1}{9})(z-1)}$$

Dividendo per z , si semplifica il termine z al numeratore.

Ora possiamo eseguire la scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{A}{z - \frac{1}{3}} + \frac{B}{z + \frac{1}{3}} + \frac{C}{z - 1}$$

Calcoliamo quindi i coefficienti:

$$A = (z-1) \left. \frac{\frac{19}{9} z^2 + \frac{8}{9} z + \frac{1}{2}}{(z-1)(z-\frac{1}{3})(z+\frac{1}{3})} \right|_{z=1} = \frac{63}{16}$$

$$B = \left. \left(z - \frac{1}{3} \right) \frac{\frac{19}{9} z^2 + \frac{8}{9} z + \frac{1}{2}}{(z-1)(z-\frac{1}{3})(z+\frac{1}{3})} \right|_{z=\frac{1}{3}} = -\frac{167}{72}$$

$$C = \left. \left(z + \frac{1}{3} \right) \frac{\frac{19}{9} z^2 + \frac{8}{9} z + \frac{1}{2}}{(z-1)(z-\frac{1}{3})(z+\frac{1}{3})} \right|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{71}{144}$$

Quindi l'espressione di $\frac{V_f(z)}{z}$ scomposta sarà:

$$\frac{V_f(z)}{z} = \frac{63}{16} \frac{1}{(z-1)} - \frac{167}{72} \frac{1}{(z-\frac{1}{3})} + \frac{71}{144} \frac{1}{(z+\frac{1}{3})}$$

Ora non ci resta che moltiplicare questa espressione per z e antitrasformare come sappiamo già fare:

$$V_f(z) = \frac{63}{16} \frac{z}{(z-1)} - \frac{167}{72} \frac{z}{(z-\frac{1}{3})} + \frac{71}{144} \frac{z}{(z+\frac{1}{3})}$$

$$v_f(k) = \left[\frac{63}{16}(1)^k - \frac{167}{72} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{71}{144} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right] \delta_{-1}(k)$$

Esercizio 3.5 - parziale del 30/01/2012

Si consideri il seguente sistema LTI a tempo discreto:

$$\begin{cases} v(k) - v(k-1) + 0.25v(k-2) = u(k) - 3u(k-1) \\ v(-1) = 4 \\ v(-2) = 3 \\ u(k) = (-0.5)^k \delta_{-1}(k) \end{cases}$$

1. Calcolare l'evoluzione libera risolvendo direttamente l'equazione alle differenze
 2. Il sistema è asintoticamente stabile?
 3. Il sistema è BIBO stabile?
 4. Calcolare la risposta impulsiva nel dominio del tempo
-

1. L'equazione caratteristica del sistema è:

$$z^2 - z - 0.25 = 0$$

che ha due soluzioni reali e coincidenti (ovvero, la molteplicità μ della soluzione è 2)
 $z_1 = z_2 = 0.5 = \frac{1}{2}$.

L'espressione dell'evoluzione libera è dunque:

$$v_l(k) = c_{1,0} \left(\frac{1}{2}\right)^k + c_{1,1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Importante: notare come cambia l'espressione quando ho radici con molteplicità maggiore di 1. Se ho la radice λ_i di molteplicità $\mu_i = n$, allora nell'evoluzione libera avrò n coefficienti $c_{i,0}, c_{i,1}, \dots, c_{i,n-1}$ che moltiplicano λ_i . Ogni coefficiente va inoltre moltiplicato per $\frac{k^0}{0!}, \frac{k^1}{1!}, \dots, \frac{k^{n-1}}{(n-1)!}$.

Questa considerazione si ricava facilmente applicando l'espressione generale che ci permette di calcolare l'evoluzione libera:

$$v_l(k) = \sum_{i=1}^r \sum_{n=0}^{\mu_i-1} c_{i,n} \cdot \lambda_i^n \cdot \frac{k^l}{l!}$$

Impongo le condizioni iniziali che ci vengono fornite per ricavare c_1 e c_2 :

$$\begin{cases} v(-1) = 4 = c_{1,0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + c_{1,1} \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ v(-2) = 3 = c_{1,0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + c_{1,1} \cdot (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{1,0} = \frac{13}{4} \\ c_{1,1} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Quindi abbiamo l'espressione:

$$v_l(k) = \frac{13}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{5}{4} k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

2. Il sistema è asintoticamente stabile perchè $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$
3. Il sistema è BIBO stabile perchè è asintoticamente stabile
4. Il nostro sistema è *strettamente proprio*, ovvero risulta che $n > m$.

Quindi la formula generale per ricavare la risposta impulsiva è:

$$h(k) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \cdot \lambda_i^k \cdot \frac{k^l}{l!} \delta_{-1}(k)$$

Applicandola, si ricava l'espressione della risposta impulsiva per il nostro sistema:

$$h(k) = \left[d_{1,0} \left(\frac{1}{2}\right)^k + d_{1,1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] \delta_{-1}(k) \quad (2)$$

Ora è sufficiente sostituire, nell'espressione originale, $v(k)$ con $h(k)$, e $u(k)$ con $\delta(k)$:

$$h(k) - h(k-1) + 0.25h(k-2) = \delta(k) - 3\delta(k-1)$$

Calcoliamo i valori che questa equazione assume in corrispondenza di $k = 0, k = 1, \dots, k = n - 1$.

Si ricordi che sia la risposta impulsiva, sia l'impulso di Dirac sono nulli per valori negativi di k !

$$\boxed{k=0} : h(0) - h(-1) + 0.25h(-2) = \delta(0) - 3\delta(-1) \Rightarrow h(0) = 1$$

$$\boxed{k=1} : h(1) - h(0) + 0.25h(-1) = \delta(1) - 3\delta(0) \Rightarrow h(1) = -2$$

Ora impostiamo un sistema in cui eguagliamo i valori di $h(0)$ e $h(1)$ appena trovati, con l'equazione (1) della risposta impulsiva:

$$\begin{cases} h(0) = \left[d_{1,0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 0 \cdot d_{1,1} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right] \delta_{-1}(0) = 1 \\ h(1) = \left[d_{1,0} \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot d_{1,1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \right] \delta_{-1}(1) = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} d_{1,0} = 1 \\ d_{1,1} = -5 \end{cases}$$

Quindi l'equazione che descrive la risposta impulsiva è:

$$h(k) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - 5k \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] \delta_{-1}(k)$$

4 Diagrammi di Bode

Esercizio 4.1 - appello del 13/09/2019

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{20s^2 + 8s + 20}{s^2(1 + 10s)}$$

Riportare G(s) in forma di Bode, disegnare i diagrammi delle singole componenti elementari e il diagramma globale.

Forma di Bode:

$$G(s) = \frac{20(s^2 + 0.4s + 1)}{s^2(1 + 10s)} \rightarrow G(s) = 20 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{(s^2 + 0.4s + 1)}{(1 + 10s)}$$

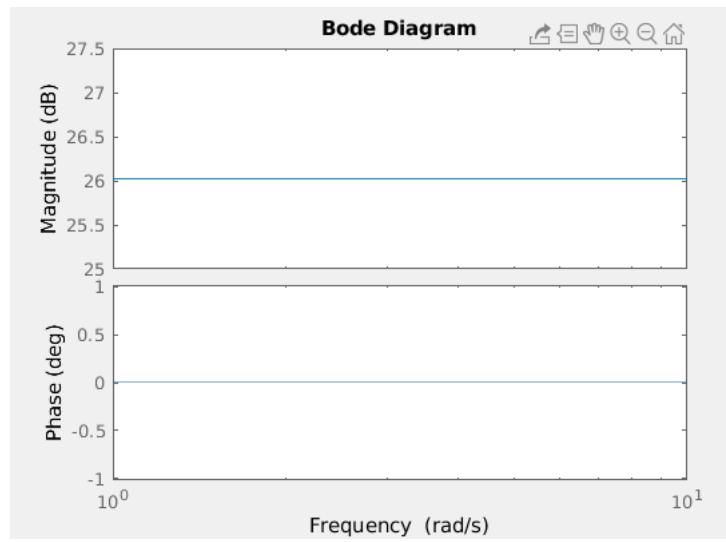
La funzione di trasferimento nella forma di Bode presenta quattro componenti elementari, di cui traceremo modulo e fase di seguito.

- **Termine costante:** $K_B = 20$

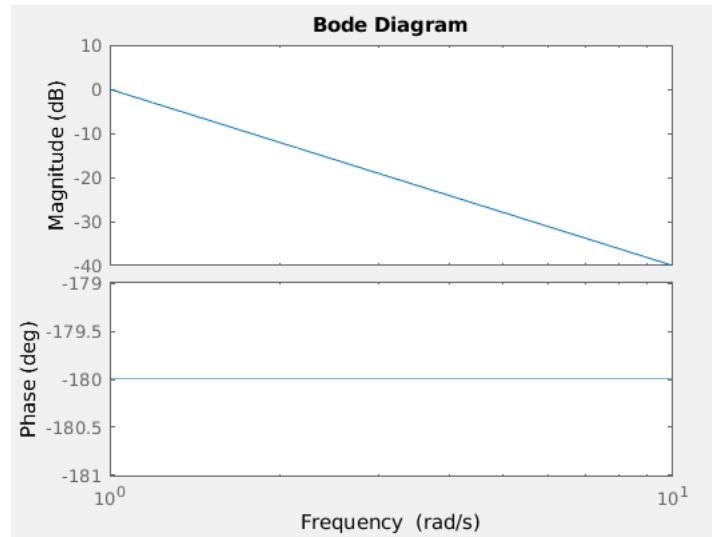
sia il modulo che la fase hanno un diagramma costante:

$$|K_B|_{dB} = 20\log_{10}(K_B) = 26.02$$

$$\phi(K_B) = 0^\circ, \text{ perché } K_B > 0$$



- **Polo nell'origine:** $\frac{1}{s^2}$
molteplicità del polo: $\mu = 2$, quindi:
 $|\frac{1}{s^2}|_{dB} = -20 \cdot \mu \text{ dB/dec} = -40 \text{ dB/dec}$
 $\phi(\frac{1}{s^2}) = -\mu \cdot \phi(s) = -2 \cdot 90^\circ = -180^\circ$



- **Zeri complessi coniugati:** $s^2 + 0.4s + 1$

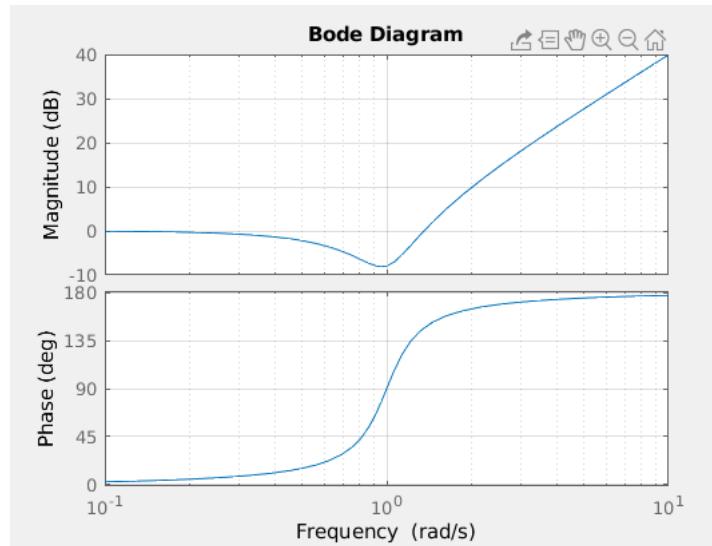
Lo studio degli zeri (poli) complessi coniugati richiede di conoscere più caratteristiche della funzione di trasferimento, ovvero: il valore della pulsazione naturale ω_n , il coefficiente di smorzamento ζ , il picco di risonanza M_R e la pulsazione di risonanza ω_R . Vediamo quindi

come si calcolano.

L'espressione degli zeri si presenta nella forma: $\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1$, da cui ricaviamo che:

- pulsazione naturale: $\omega_n^2 = 1$, quindi $\omega_n = 1 = 10^0$
- coefficiente di smorzamento: $\frac{2\zeta}{1} = 0.4$, quindi $\zeta = 0.2$

Il diagramma della fase e quello del modulo restano costanti su 0 fino a ω_n , dopodichè:
 $|s^2 + 0.4s + 1|_{dB} = +40$ dB/dec
 $\phi(s^2 + 0.4s + 1) = +180^\circ$



Dato che $0 \leq |\zeta| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, e si tratta di zeri (quindi $\mu > 0$), il diagramma dei moduli ha un punto di *minimo*, che viene chiamato *picco di attenuazione*.

Inoltre, dato che $\zeta < \frac{1}{2}$, il diagramma interseca l'ascissa a destra di $\omega = \omega_n$.

Il diagramma assume il suo valore minimo nel punto ω_R :

$$M_R^{dB} = 20\mu \log(2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}) \approx -8.136 \quad \omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} = 0.95$$

- **Poli reali:** $\frac{1}{1+10s}$

$\tau = 10$, quindi si ha un cambio di pendenza in $\omega_t = \frac{1}{|\tau|} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10^{-1}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+10s} \right|_{dB} &= -20\log(1+10s) = -20dB/dec \\ \phi\left(\frac{1}{1+10s}\right) &= -\phi(1+10s) = -90^\circ \end{aligned}$$

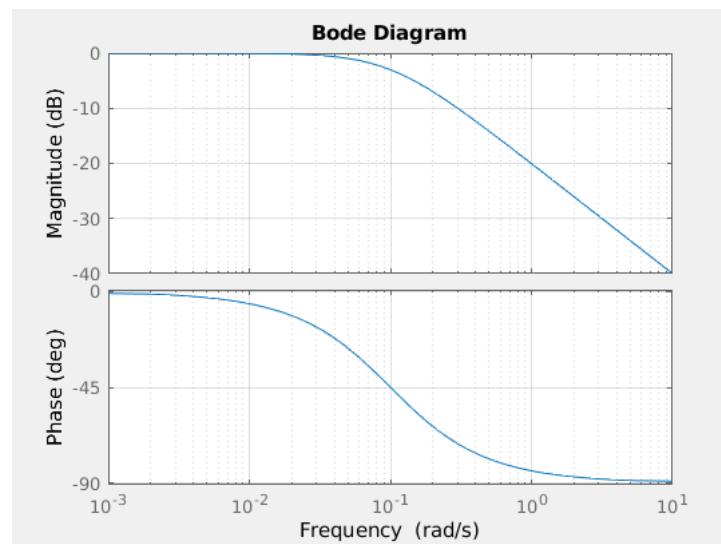
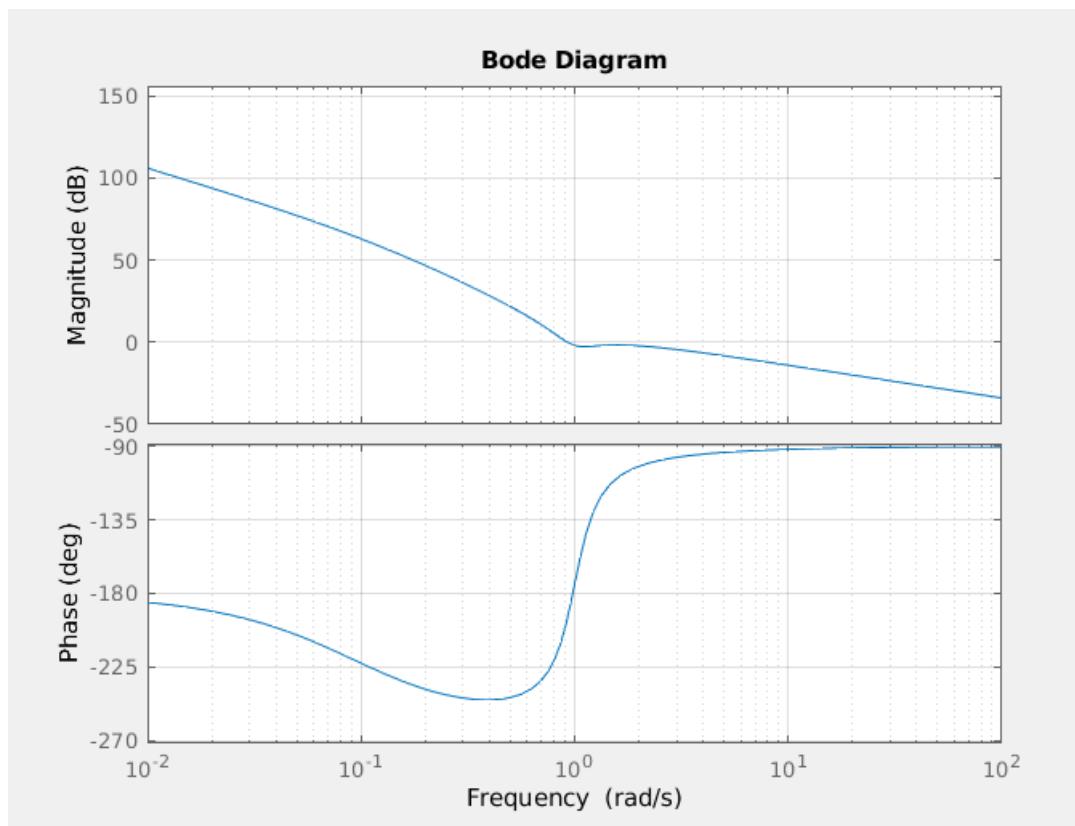


Diagramma totale



Esercizio 4.2 - appello del 03/02/2017

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s^3(s+1)}{s^2 + 2s + 3}$$

Riportare la funzione in forma di Bode, disegnare i diagrammi delle singole componenti elementari e il diagramma globale.

Per portare la funzione in forma di Bode, è sufficiente "portare fuori" il 3 al denominatore, e otteniamo:

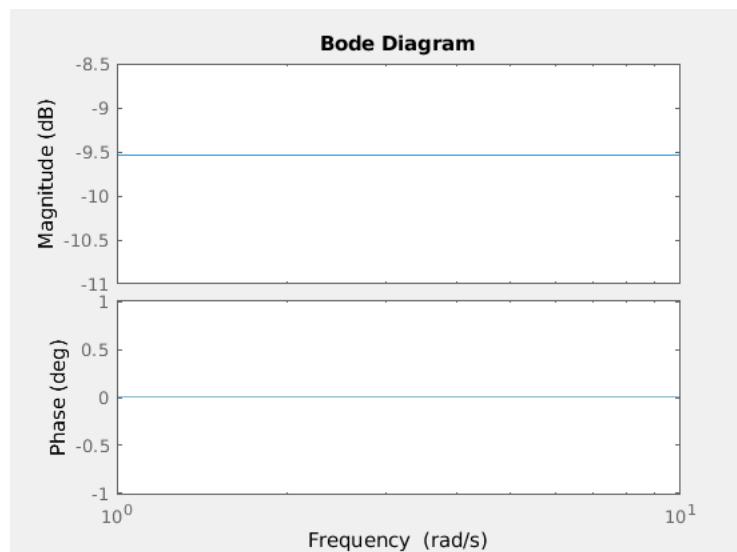
$$G(s) = \frac{1}{3}s^3 \frac{s+1}{\left(\frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}s + 1\right)}$$

Dobbiamo quindi tracciare i diagrammi di quattro componenti elementari: il termine costante $\frac{1}{3}$, lo zero nell'origine dato da s^3 , lo zero reale in $s = -1$ e la coppia di poli complessi coniugati dati da $(\frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}s + 1)$

- **Termine costante:** $K_B = \frac{1}{3}$

$$|K_B| = 20 \log_{10}(K_B) = -9.54$$

$$\phi(K_B) = 0^\circ$$

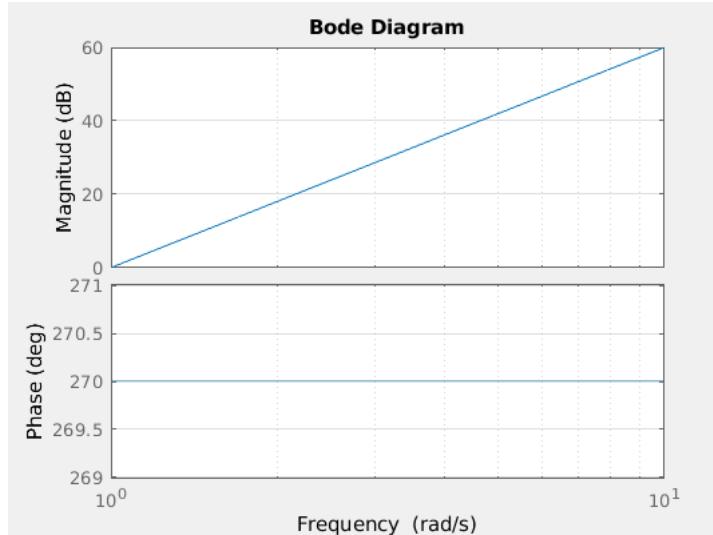


- **Zero nell'origine:** s^3

lo zero ha molteplicità $\mu = 3$, di conseguenza:

$$|s^3|_{dB} = 20\log(s^3) = 3 \cdot 20\log(s) = 60\log(s) = +60 \text{ dB/dec}$$

$$\phi(s^3) = 3 \cdot \phi(s) = 3 \cdot 90^\circ = +270^\circ$$



- **Zeri reali:** $(s + 1)$

pulsazione naturale, ω_n : dato che $\tau = 1$, ricaviamo che $\omega_n = \frac{1}{|\tau|} = 1$.

Quindi il diagramma del modulo rimane costante fino su 0 fino a ω_n , dopodiché il suo andamento sarà:

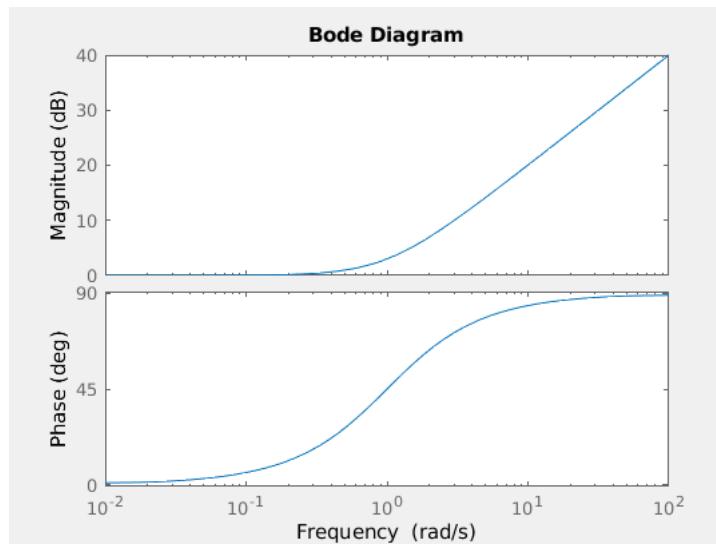
$$|s + 1|_{dB} = 20\log(s\tau) = 20\log(s) = +20 \text{ dB/dec}$$

Per quanto riguarda il diagramma della fase, i cambi di pendenza si verificano alle pulsazioni:

$$\omega_A = \frac{1}{4,81}\omega_t \quad \omega_B = 4,81\omega_t$$

Nel nostro caso otteniamo $\omega_A \approx 0.20$ e $\omega_B = 4.81$.

Questo significa che il diagramma della fase rimane costante su 0 fino alla pulsazione ω_A , dopodiché cresce fino a raggiungere $+90$ in corrispondenza della pulsazione ω_B . La fase aumenta di $+90$ perché $(s + 1)$ è uno zero di molteplicità $\mu = 1$.



- **Poli complessi coniugati:** $(\frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}s + 1)^{-1}$

pulsazione naturale: $\omega_n^2 = 3$, quindi $\omega_n = \sqrt{3} = 1.73$

coefficiente di smorzamento: $2\frac{\zeta}{\omega_n} = \frac{2}{3} \rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$

Dato che $0 \leq |\zeta| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, deduciamo che il diagramma dei moduli ha un punto di *massimo* (il picco di risonanza), e interseca l'ascissa a destra della pulsazione naturale ω_n .

picco di risonanza: $M_R^{\text{dB}} = 20\mu \log(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) \approx 0.514$

pulsazione di risonanza: $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \approx 1.002$

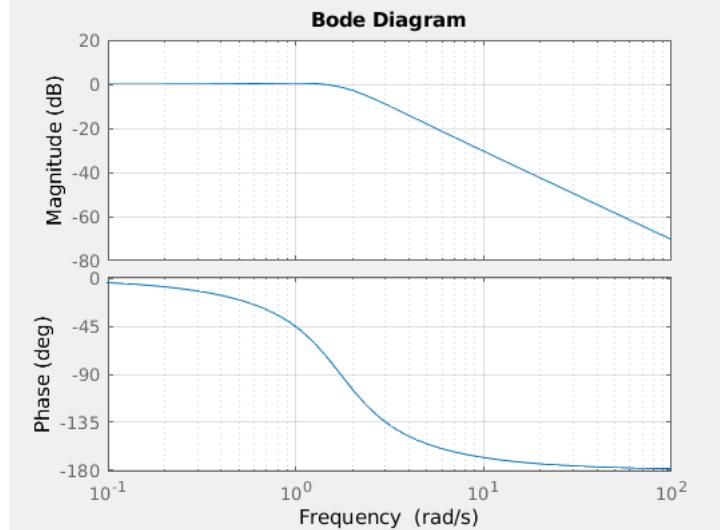
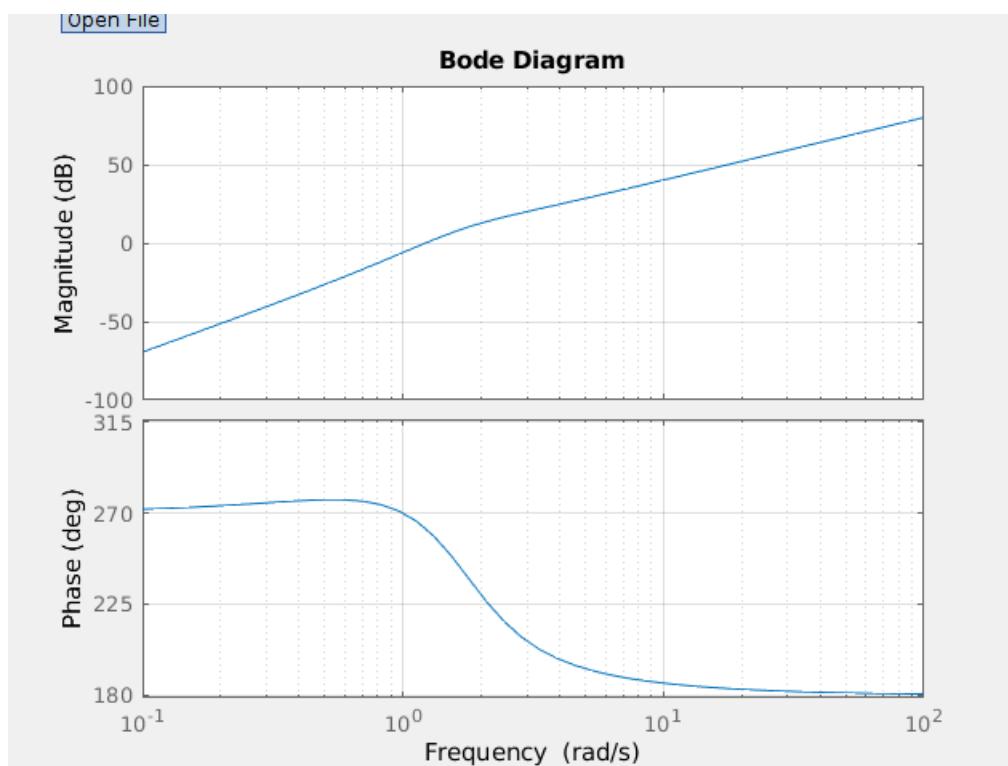


Diagramma globale



Esercizio 4.3

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 100 \frac{(s+1)}{(s+10)(s+100)}$$

Riportare la funzione in forma di Bode, disegnare i diagrammi delle singole componenti elementari e il diagramma globale.

Forma di Bode: $G(s) = \frac{100}{10 \cdot 100} \frac{s+1}{(0.1s+1)(0.01s+1)} \rightarrow G(s) = 0.1 \frac{s+1}{(0.1s+1)(0.01s+1)}$

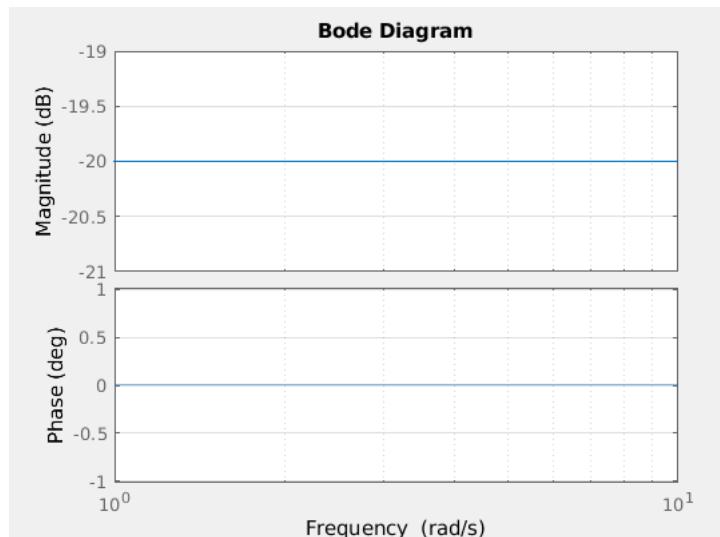
Dalla forma di Bode si deduce che la funzione di trasferimento ha un termine costante, $K_B = 0.1$, uno zero in $s = -1$, un polo in $s = -10$ e un polo in $s = -100$.

Procediamo quindi tracciando i diagrammi delle componenti elementari.

- **Termine costante, $K_B = 0.1$**

$$|K_B|_{dB} = 20\log(0.1) = -20 \text{ dB/dec}$$

$$\phi(K_B) = 0^\circ$$



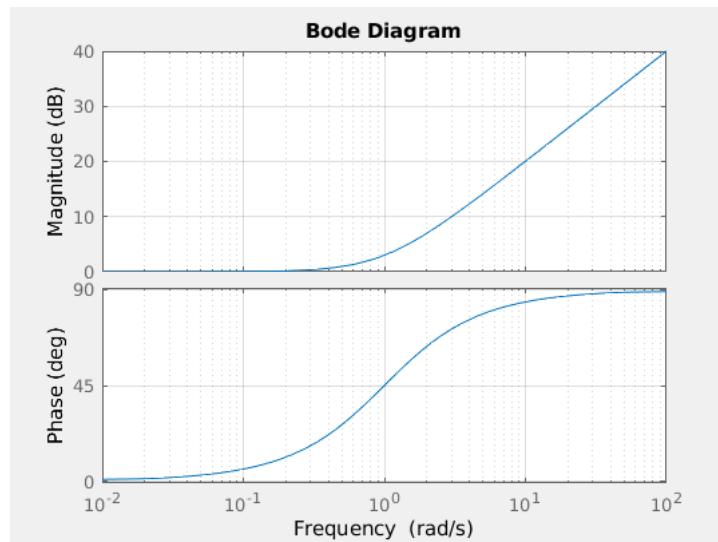
- **Zero reale, $(s + 1)$**

$\tau = 1$, quindi il diagramma del modulo rimane costante su 0 fino alla pulsazione $\omega_n = \frac{1}{|\tau|} = 1$. Dopodichè, la pendenza diventa:

$$|s + 1|_{dB} = 20\log(s\tau) = 20\log(s) = 20 \text{ dB/dec}$$

Nel diagramma delle fasi, i cambi di pendenza avvengono alle pulsazioni $\omega_A = \frac{1}{4.81}\omega_t \approx 0.20$ e $\omega_B = 4.81\omega_t = 4.81$, dopodichè il diagramma si stabilizza alla fase:

$$\phi(s + 1) = +90^\circ$$



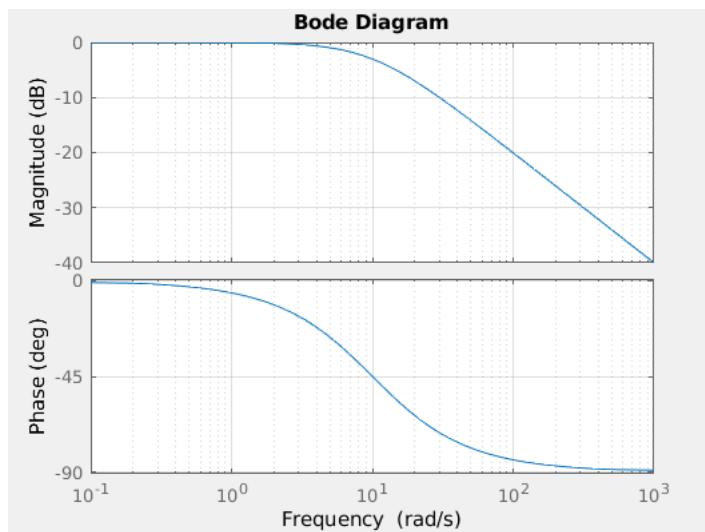
- **Polo reale, $\frac{1}{0.1s+1}$**

$\tau = 0.1$, quindi il diagramma del modulo rimane costante su 0 fino alla pulsazione $\omega_n = \frac{1}{|\tau|} = 10$. Dopodichè la pendenza diventa:

$$|\frac{1}{0.1s+1}|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{0.1s+1}\right) = -20\log(0.1s + 1) \approx -20\log(0.1s) \approx -20 \text{ dB/dec}$$

Nel diagramma delle fasi, i cambi di pendenza avvengono alle pulsazioni $\omega_A = \frac{1}{4.81}\omega_t \approx 2.07$ e $\omega_B = 4.81\omega_t = 48.1$, dopodichè il diagramma si stabilizza alla fase:

$$\phi\left(\frac{1}{0.1s+1}\right) = -\phi(0.1s + 1) = -90^\circ$$

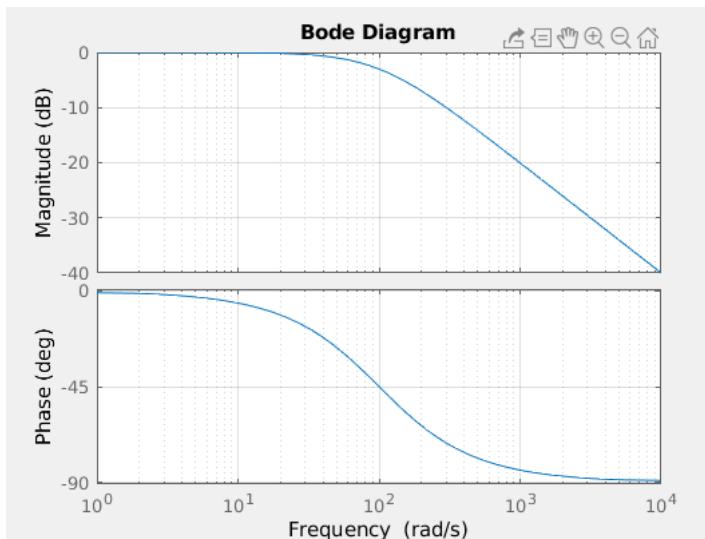


- **Polo reale,** $\frac{1}{0.01s+1}$

$\tau = 0.01$, quindi la pulsazione naturale vale $\omega_n = 100$. Il diagramma dei moduli rimane quindi costante su 0 fino alla pulsazione ω_n , dopodichè diminuisce:

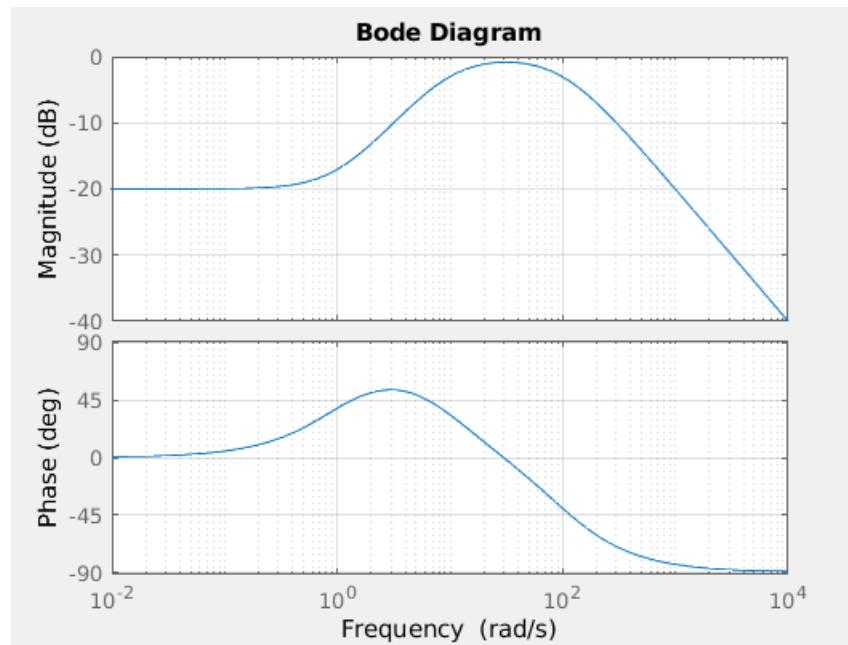
$$|\frac{1}{0.01s+1}|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{0.01s+1}\right) = -20\log(0.01s + 1) \approx -20\log(0.01s) \approx -20 \text{ dB/dec}$$

Per quanto riguarda la fase, il diagramma resta costante su 0 fino alla pulsazione $\omega_A = \frac{1}{4.81}\omega_t$, dopodichè aumenta fino a raggiungere la fase $+90$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_B = 4.81\omega_t$



Ora abbiamo tutti gli elementi per tracciare il diagramma globale della nostra funzione di trasferimento:

Diagramma globale



Esercizio 4.4

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = 30 \frac{(s + 10)}{s^2 + 3s + 50}$$

Riportare la funzione in forma di Bode, disegnare i diagrammi delle singole componenti elementari e il diagramma globale.

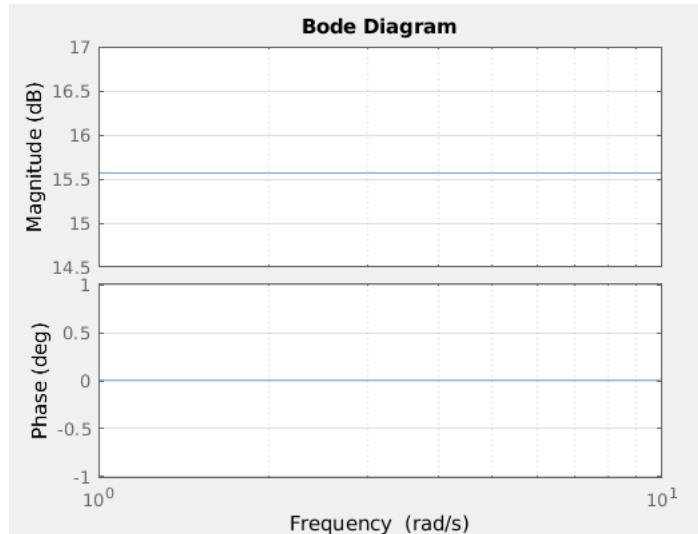
Forma di Bode:

$$H(s) = 30 \frac{10}{50} \frac{\left(\frac{1}{10}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{50}s^2 + \frac{3}{50}s + 1\right)} = 6 \frac{\left(\frac{1}{10}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{50}s^2 + \frac{3}{50}s + 1\right)}$$

Quindi abbiamo tre componenti elementari di cui tracciare il diagramma: il termine costante, $K_B = 6$, uno zero in $s = -10$ e due poli complessi coniugati dati da $\left(\frac{1}{50}s^2 + \frac{3}{50}s + 1\right)$

- **Termine costante, K_B**

$$|K_B|_{dB} = 20\log(K_B) = 15.56$$
$$\phi(K_B) = 0^\circ$$



- **Zeri reali,** $(\frac{1}{10}s + 1)$

$\tau = \frac{1}{10}$, quindi il diagramma del modulo resta costante su 0 fino alla pulsazione $\frac{1}{|\tau|} = 10$, dopodichè varia nel seguente modo:

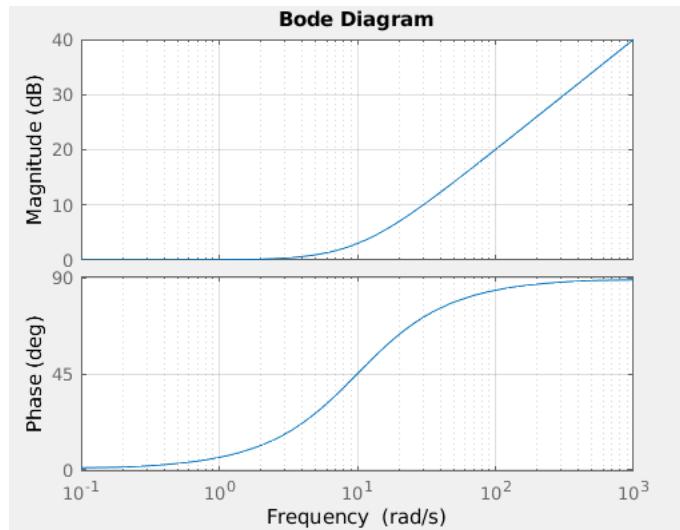
$$|\frac{1}{10}s + 1|_{dB} = 20\log(\frac{1}{10}s + 1) = +20 \text{ dB/dec}$$

Il diagramma della fase, invece, subisce i cambi di pendenza in corrispondenza delle pulsazioni:

$$\omega_A = \frac{1}{4.81}\omega_t = 2.07 \quad \omega_B = 4.81\omega_t = 48.1$$

Prima della pulsazione ω_A il diagramma resta costante su 0. Dopodichè, cresce fino a raggiungere la fase $+90^\circ$ in corrispondenza della pulsazione ω_B .

Perchè cresce a $+90^\circ$? Perchè è uno *zero*, e come tale porta a un *aumento* di fase, e la sua molteplicità è $\mu = 1$, quindi l'aumento di fase vale $+90 \cdot \mu$.



- **Poli complessi coniugati,** $(\frac{1}{50}s^2 + \frac{3}{50}s + 1)^{-1}$

Per disegnare accuratamente il diagramma dei moduli abbiamo bisogno di calcolare: la pulsazione naturale ω_n , il coefficiente di smorzamento ζ , il picco di risonanza M_R e la pulsazione di risonanza.

I primi due elementi si ricavano facilmente sapendo che, quando la funzione di trasferimento è in forma di Bode, i poli complessi coniugati sono nella forma: $\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1$. Quindi:

- pulsazione naturale: $\omega_n^2 = 50 \rightarrow \omega_n = \sqrt{50} \approx 7.07$
- coefficiente di smorzamento: $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{3}{50} \rightarrow \frac{2\zeta}{\sqrt{50}} = \frac{3}{50} \rightarrow \zeta = \frac{3}{50} \cdot \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{50}} \approx 0.212$

Dato che $0 \leq |\zeta| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, e la molteplicità è $\mu = -1 < 0$, deduciamo che il diagramma delle fasi avrà un punto di *massimo* (individuato dal picco di risonanza) e intersecherà l'ascissa a destra di ω_n .

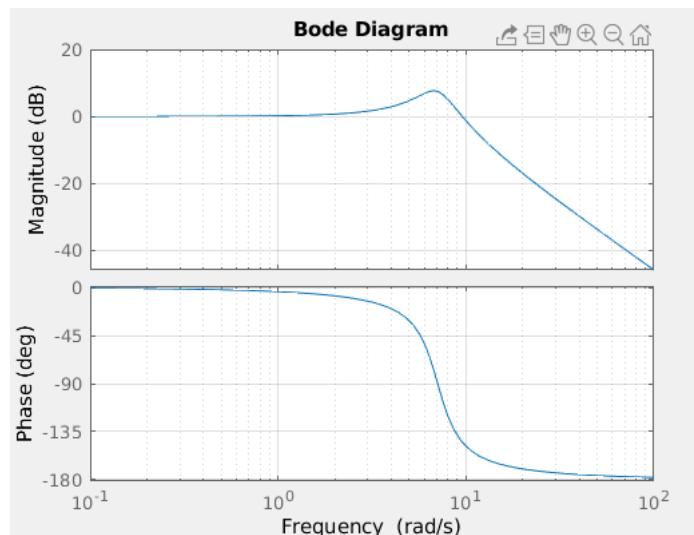
Calcoliamo ora il picco di risonanza M_R e la pulsazione di risonanza ω_R :

$$M_R^{\text{dB}} = 20\mu \log(2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}) \approx 7.652 \quad \omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \approx 6.74$$

Per studiare la fase, invece, è sufficiente calcolare le pulsazioni alle quali si verifica il cambio di fase:

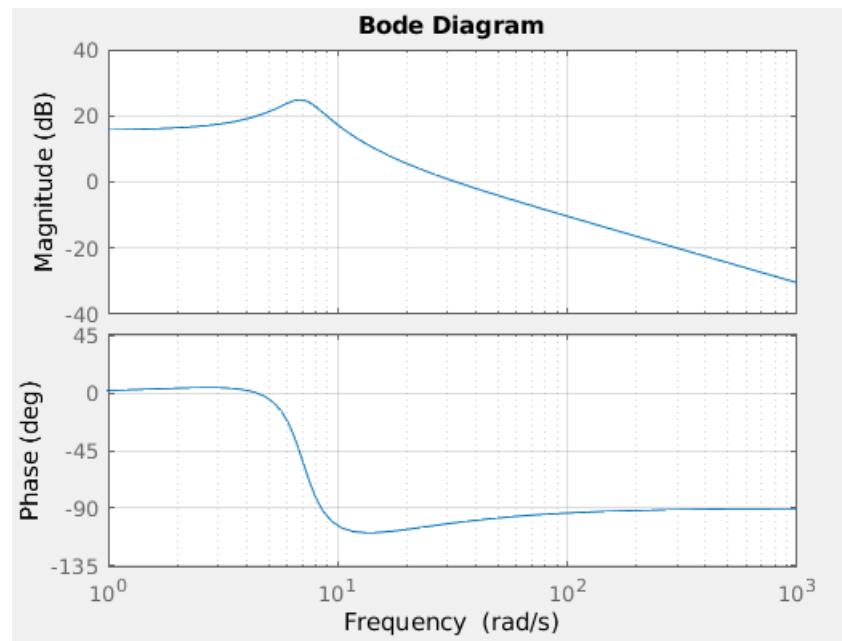
$$\omega_A = \frac{1}{4.81\zeta}\omega_n \approx 5.06 \quad \omega_B = 4.81\zeta\omega_n \approx 9.86$$

Quindi il diagramma della fase resta costante su 0 fino a ω_A , dopodichè cresce fino a raggiungere -180° in corrispondenza della pulsazione ω_B . Ora abbiamo tutti gli elementi necessari per disegnare i diagrammi:



Ora abbiamo tutti gli elementi per poter disegnare il diagramma totale della nostra funzione di trasferimento (vedi pagina seguente).

Diagramma totale



Esercizio 4.5

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{(s+1)(s^2 + 2s + 9)}{s^3}$$

Riportare la funzione in forma di Bode, disegnare i diagrammi delle singole componenti elementari e il diagramma globale.

Forma di Bode:

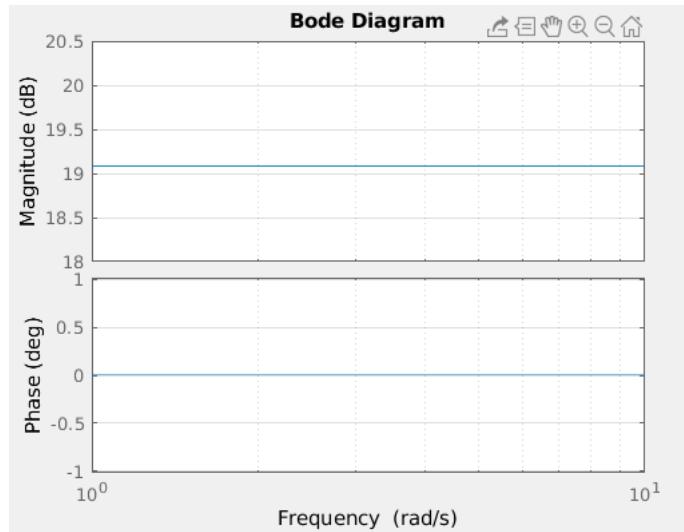
$$H(s) = \frac{9(s+1) \left(1 + \frac{2}{9}s + \frac{1}{9}s^2\right)}{s^3} \rightarrow H(s) = 9 \cdot \frac{1}{s^3} \cdot (1+s) \left(1 + \frac{2}{9}s + \frac{1}{9}s^2\right)$$

Quindi abbiamo quattro componenti elementari di cui dobbiamo disegnare i diagrammi: il termine costante $K_B = 9$, il polo nell'origine $\frac{1}{s^3}$, lo zero reale $(1+s)$ e infine gli zeri complessi coniugati $(1 + \frac{2}{9}s + \frac{1}{9}s^2)$.

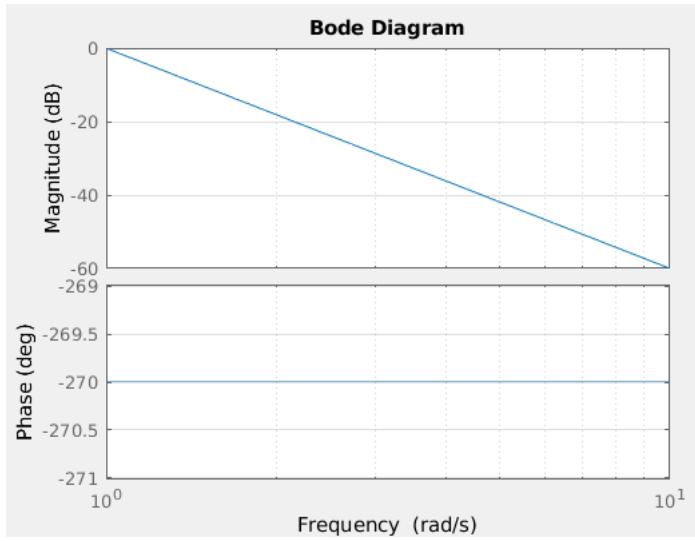
- **Termine costante, $K_B = 9$**

$$|K_B|_{dB} = 20\log(9) = 19.08$$

$$\phi(K_B) = 0^\circ$$



- **Polo nell'origine, $\frac{1}{s^3}$**



$$\left| \frac{1}{s^3} \right|_{dB} = 20 \log \left(\frac{1}{s^3} \right) = -3 \cdot 20 \log(s) = -60 \text{ dB/dec}$$

$$\phi \left(\frac{1}{s^3} \right) = -3 \cdot \phi(s) = -3 \cdot 90^\circ = -270^\circ$$

- **Zero nell'origine, $(1 + s)$**

$\tau = 1$, quindi il diagramma dei moduli resta costante su 0 fino a $\omega = \frac{1}{|\tau|} = 1$ (detto anche *punto di rottura*), dopodichè varia in pendenza:

$$|1 + s|_{dB} = 20 \log(1 + s) = +20 \text{ dB/dec}$$

Per quanto riguarda la fase, i cambiamenti di pendenza avvengono alle pulsazioni:

$$\omega_A = \frac{1}{4.81} \omega_t \approx 0.20 \quad \omega_B = 4.81 \omega_t = 4.81$$

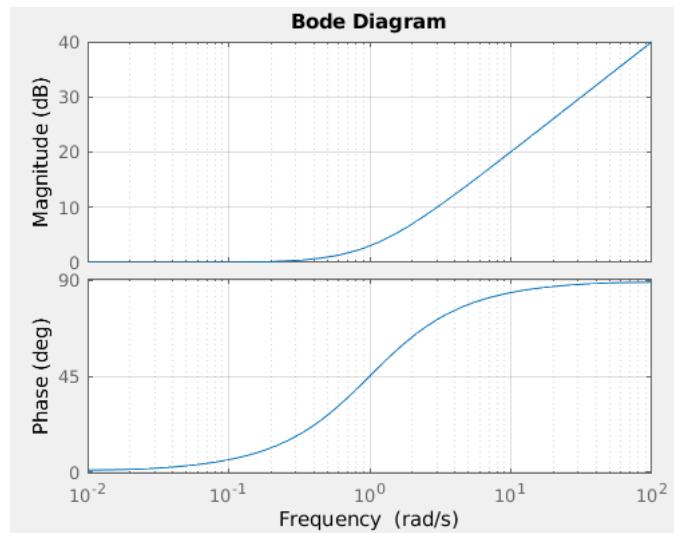
Il diagramma resta costante fino a ω_A , dopodichè la pendenza aumenta fino a raggiungere $+90^\circ$ in corrispondenza di ω_B .

- **Zeri complessi coniugati, $(1 + \frac{2}{9}s + \frac{1}{9}s^2)$**

Calcoliamo per prima cosa il valore della pulsazione naturale ω_n e il coefficiente di smorzamento ζ :

- pulsazione naturale: $\omega_n^2 = 9 \rightarrow \omega_n = \sqrt{9} = 3$
- coefficiente di smorzamento: $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{2}{9} \rightarrow \zeta = \frac{1}{3} \approx 0.333$

Dato che $0 \leq |\zeta| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ e la molteplicità μ di questo termine è positiva, concludiamo che il diagramma ha un punto di *minimo*. Inoltre, dato che $0 \leq |\zeta| \leq \frac{1}{2}$, il diagramma interseca l'ascissa a destra della pulsazione $\omega_n = 3$.



Il diagramma assume il suo valore minimo in corrispondenza della pulsazione di attenuazione ω_R :

$$M_R^{\text{dB}} = 20\mu \log(2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}) \approx -4.041 \quad \omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \approx 1.73$$

Quindi all'inizio il modulo è a quota 0, dopodichè comincia a calare fino a raggiungere il suo valore minimo in corrispondenza del punto $\omega_R = 1.73$. Passato questo punto, riprende a salire fino a stabilizzarsi sulla retta +40 dB/dec.

Per quanto riguarda la fase, invece, i cambi di pendenza avvengono in corrispondenza delle pulsazioni:

$$\omega_A = \frac{1}{4.81\zeta}\omega_n \approx 1.78 \quad \omega_B = 4.81\zeta\omega_n \approx 5.03$$

Quindi la fase resta costante su 0° fino a ω_A , dopodichè cresce fino a raggiungere la fase $+180^\circ$ in corrispondenza della pulsazione ω_B .

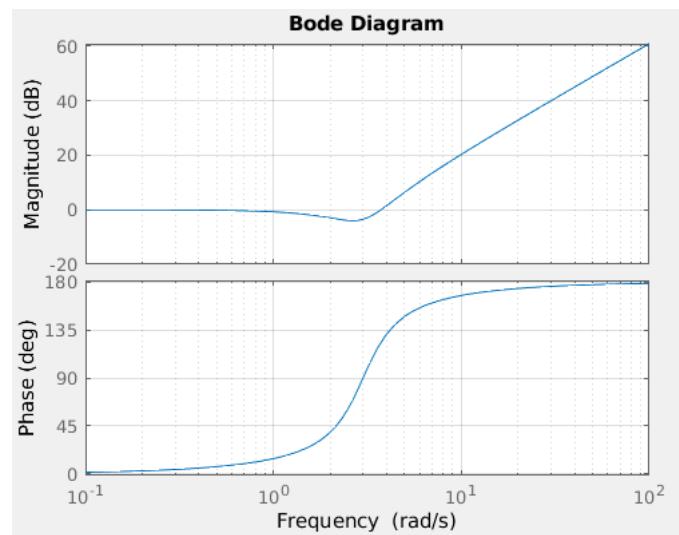
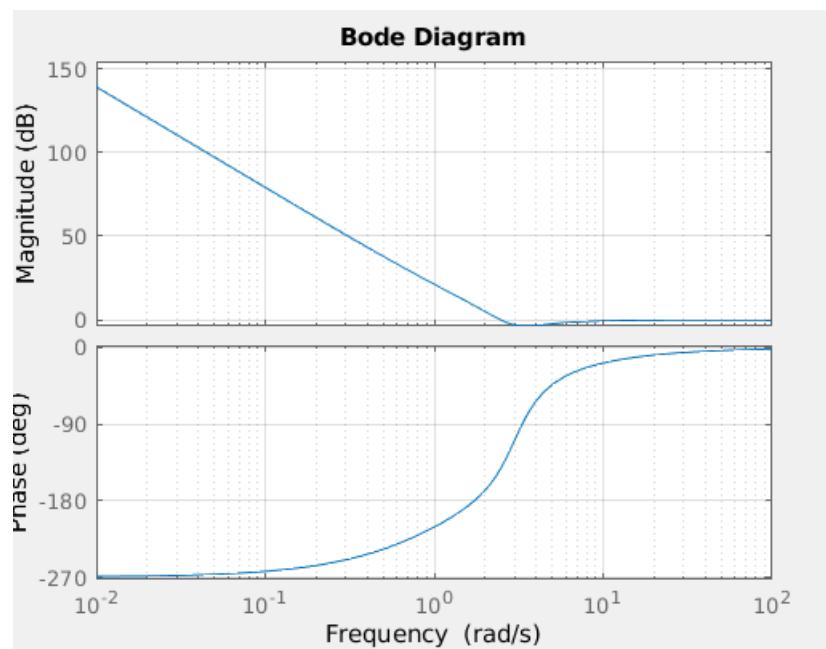


Diagramma totale



Esercizio 4.6 - appello del 01/07/2019

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 4)}{s(s + 3)(s^2 + 3s + 4)}$$

disegnare il diagramma di Bode (sia di ciascuna componente elementare, sia il risultante diagramma globale).

Scriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

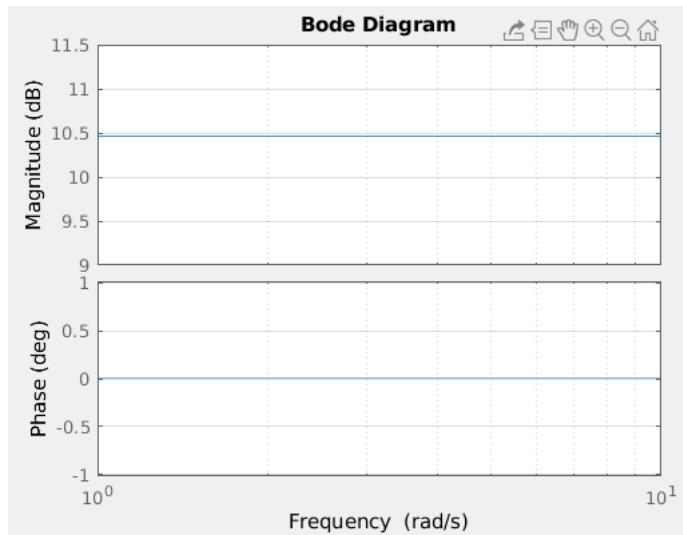
$$G(s) = \frac{10 \cdot 4}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}s^2}{s(1 + \frac{1}{3}s)(1 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^2)} \rightarrow G(s) = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}s^2}{(1 + \frac{1}{3}s)(1 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^2)}$$

Quindi abbiamo cinque componenti elementari di cui tracciare il grafico.

- **Termine costante, $K_B = \frac{10}{3}$**

$$|K_B|_{dB} = 20\log\left(\frac{10}{3}\right) = 10.45$$

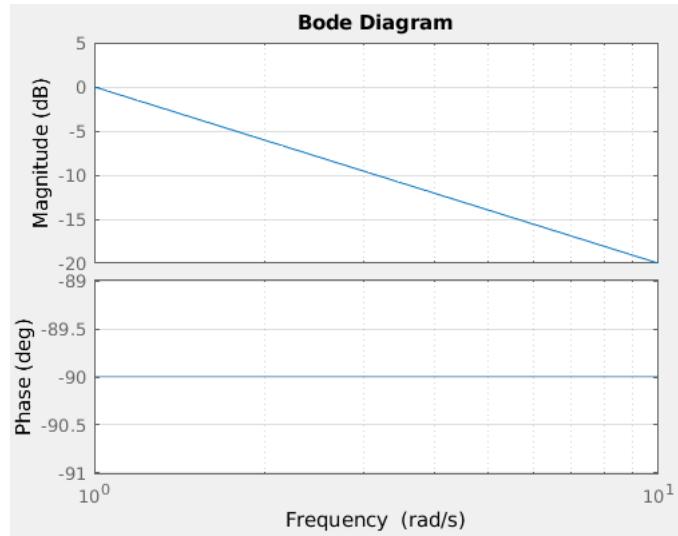
$$\phi(K_B) = 0^\circ$$



- **Polo nell'origine, $\frac{1}{s}$**

$$\left|\frac{1}{s}\right|_{dB} = -20 \text{ dB/dec}$$

$$\phi\left(\frac{1}{s}\right) = -90^\circ$$



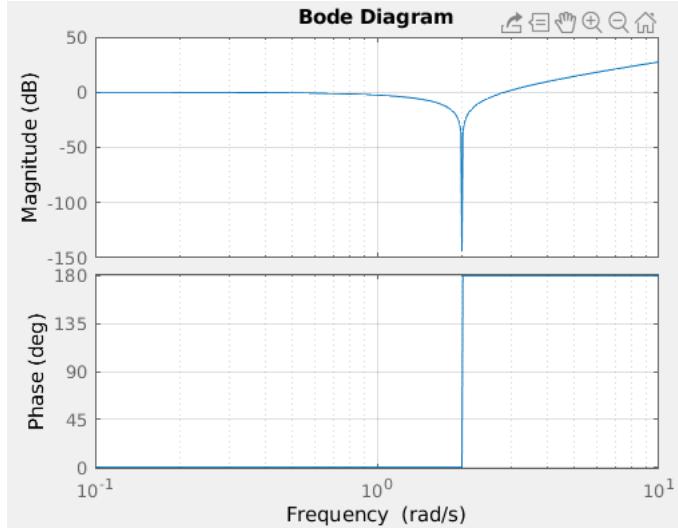
- **Zeri complessi coniugati, $1 + \frac{1}{4}s^2$**

Calcoliamo la pulsazione naturale, che rappresenta il punto di rottura del diagramma (ovvero il punto in cui si ha una variazione di pendenza):

$$\omega_n^2 = 4 \rightarrow \omega_n = 2$$

Quindi sia il diagramma del modulo che quello della fase restano costanti su 0 fino a ω_n , dopodichè si ha che:

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{1}{4}s^2\right|_{dB} &= +40 \text{ dB/dec} \\ \phi\left(1 + \frac{1}{4}s^2\right) &= +180^\circ \end{aligned}$$



Notare l'andamento "a gradino" del diagramma della fase: questo è dovuto al fatto che

il coefficiente di smorzamento ζ è pari a 0! Infatti, nell'espressione degli zeri complessi coniugati manca il termine $\frac{2\zeta}{\omega_n} s$. Più il valore di ζ si avvicina a 0, più il cambiamento di fase sarà "brusco". Al contrario, se ζ si avvicina a 1, il cambiamento di fase seguirà asintoticamente l'andamento del gradino, ma sarà più "dolce".

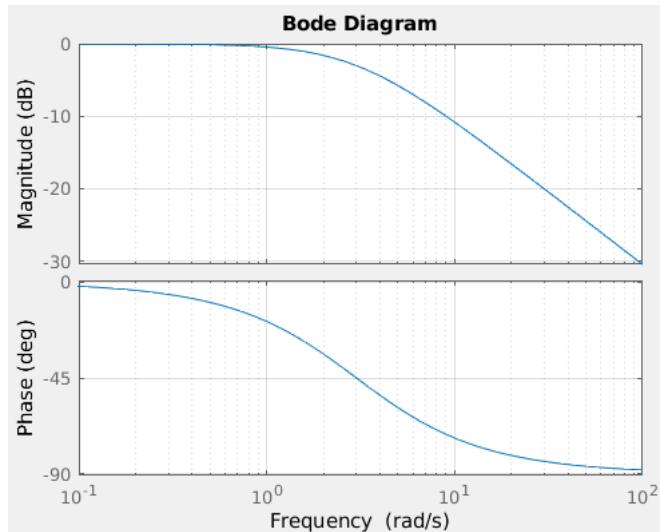
- **Poli reali, $1 + \frac{1}{3}s$**

Dato che $\tau = \frac{1}{3}$, il valore della pulsazione naturale sarà: $\omega_n = \frac{1}{|\tau|} = 3$.

A partire da ω_n si ha quindi che:

$$|1 + \frac{1}{3}s|_{dB} = -20 \text{ dB/dec}$$

$$\phi(1 + \frac{1}{3}s) = -90^\circ$$



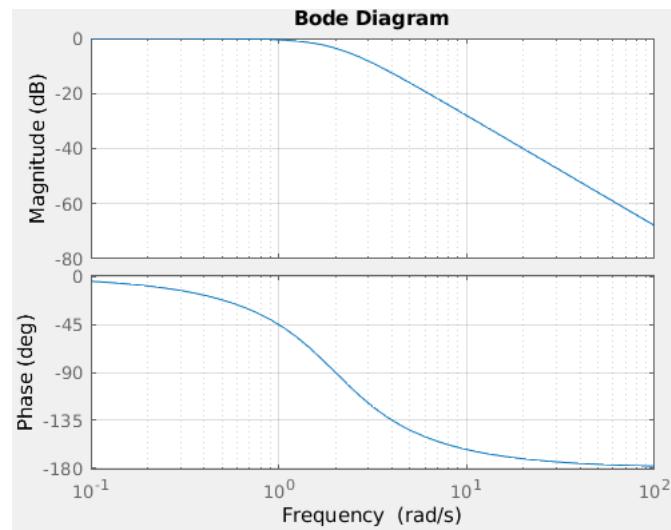
- **Poli complessi coniugati, $(1 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^2)^{-1}$**

– pulsazione naturale: $\omega_n^2 = 4 \rightarrow \omega_n = 2$

– coefficiente di smorzamento: $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{3}{4} \rightarrow \zeta = \frac{3}{4} = 0.75$

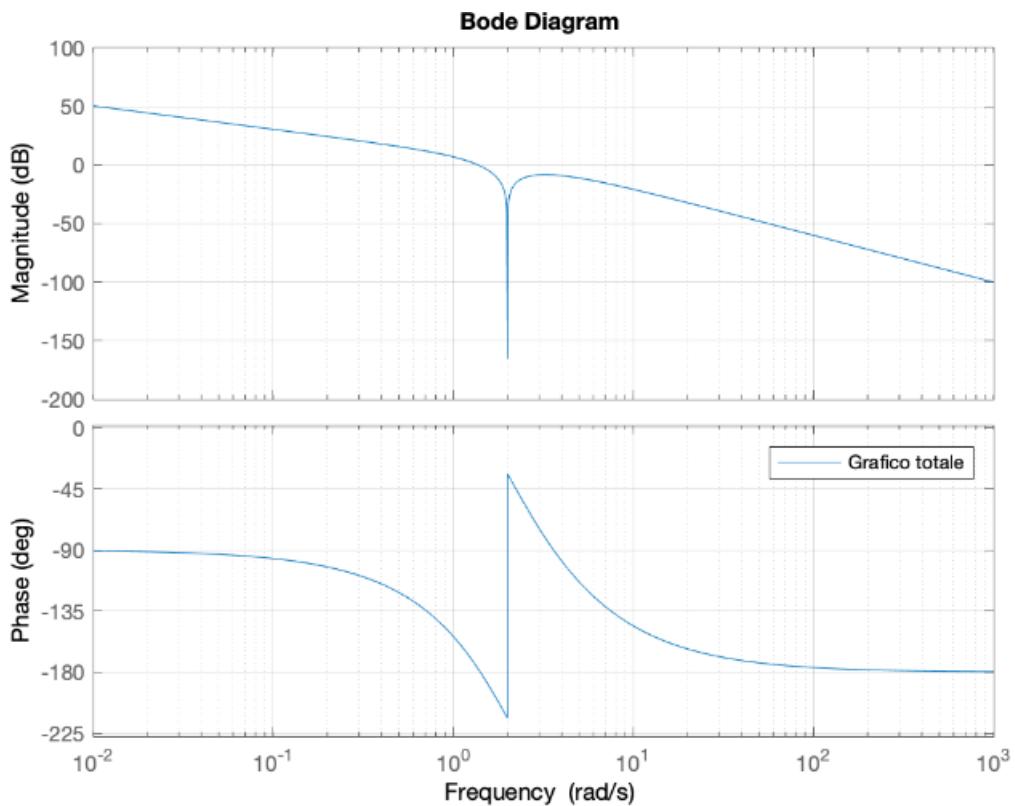
Il valore del coefficiente di smorzamento è abbastanza vicino a 1, quindi ci aspettiamo un cambiamento di fase meno brusco rispetto a quello degli zeri complessi coniugati visti prima.

Notiamo che $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |\zeta| \leq 1$, quindi il diagramma *non interseca mai l'ascissa*. Inoltre, visto che si tratta di poli, e quindi $\mu < 0$, concludiamo che il diagramma si trova interamente *al di sotto* della sua approssimazione asintotica (viceversa, se si fosse trattato di zeri, il diagramma si sarebbe trovato interamente *al di sopra* dell'approssimazione).



Ora possiamo disegnare il diagramma globale della funzione di trasferimento:

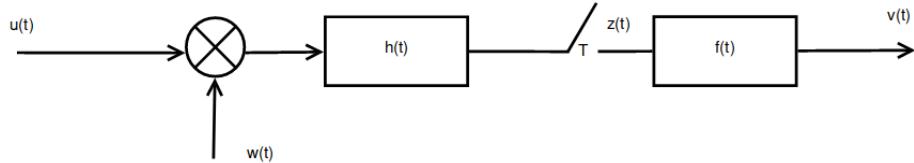
Diagramma globale



5 Trasformate di Fourier

Esercizio 5.1 - parziale del 13/06/2019

Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita $v(t)$ del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze:



Dove $u(t) = 3\cos(6\pi t) + \cos(2\pi t)$, $w(t) = 2\cos(4\pi t)$, $h(t) = 4\text{sinc}(4t)$, $f(t) = 2\text{sinc}(2t)$.

Periodo di campionamento con $T = 1s$.

Si verifica il fenomeno di aliasing? Motivare la risposta.

Dobbiamo convertire i segnali dati dal dominio del tempo al dominio delle frequenze, quindi calcoliamo di ognuno la trasformata di Fourier:

$$u(t) = 3\cos(6\pi t) + \cos(2\pi t) \xrightarrow{TdF} U(f) = \frac{3}{2} [\delta(f - 3) + \delta(f + 3)] + \frac{1}{2} [\delta(f - 1) + \delta(f + 1)]$$

$$w(t) = 2\cos(4\pi t) \xrightarrow{TdF} W(f) = \delta(f - 2) + \delta(f + 2)$$

$$h(t) = 4\text{sinc}(4t) \xrightarrow{TdF} H(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right)$$

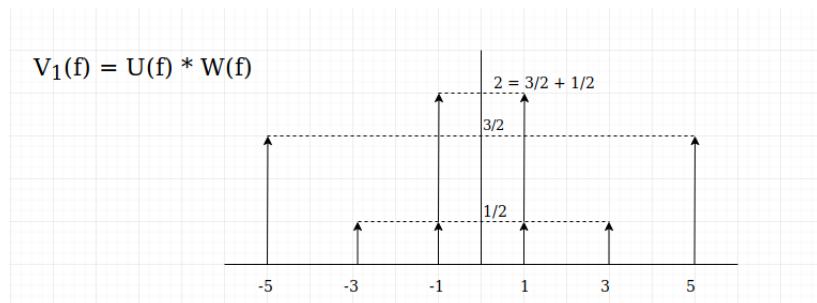
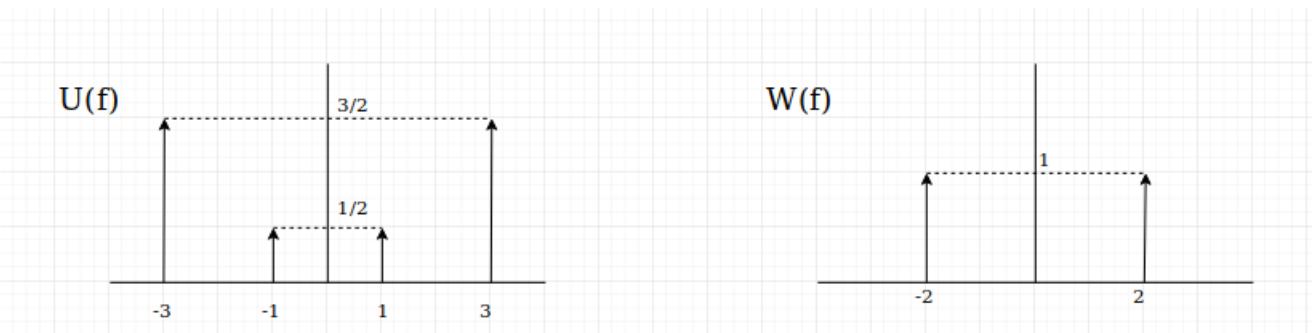
$$f(t) = 2\text{sinc}(2t) \xrightarrow{TdF} F(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

frequenza di campionamento: $f_c = 1$ Hz

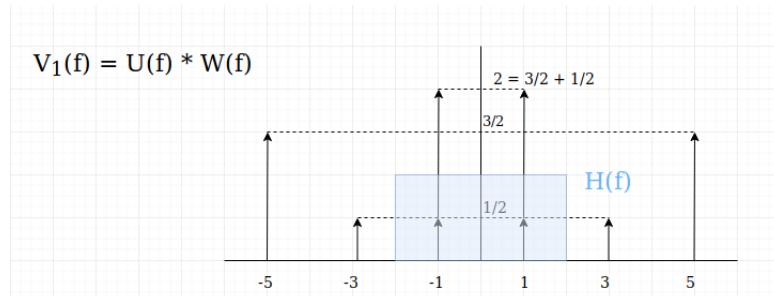
Ora disegniamo i due segnali di input, ovvero $U(f)$ e $W(f)$:

Dopodichè effettuiamo la convoluzione dei due segnali, ottenendo il segnale risultante $V_1(f)$. La convoluzione tra due segnali per via grafica si realizza andando a "centrare" un segnale nell'altro. In questo caso, scegliamo arbitrariamente di centrare il segnale $U(f)$ in $W(f)$, ma si potrebbe anche fare il contrario.

Se i segnali si sovrappongono, bisogna **sommare** le ampiezze, altrimenti bisogna **moltiplicarle**.



Ora dobbiamo applicare il filtro $H(f)$, che è una box di ampiezza $A = 1$ e banda $B = 2$: teniamo solo la parte di $V_1(f)$ che viene inclusa dalla box.



L'ampiezza del segnale risultante $V_2(f)$ si ricava **moltiplicando** l'ampiezza del filtro e quella del segnale. In questo caso, $A_H = 1$, $A_{V_1} = 2$, quindi l'ampiezza del segnale risultante $V_2(f)$ sarà 2:

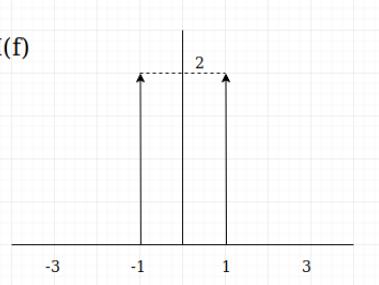
Adesso dobbiamo campionare il segnale a 1 Hz.

Ricordiamo che *un campionamento nel tempo corrisponde a una replicazione nelle frequenze!* Visto che stiamo lavorando nel dominio delle frequenze, andremo a replicare il segnale $V_2(f)$ a frequenza 1 Hz, ottenendo il segnale $V_3(f)$.

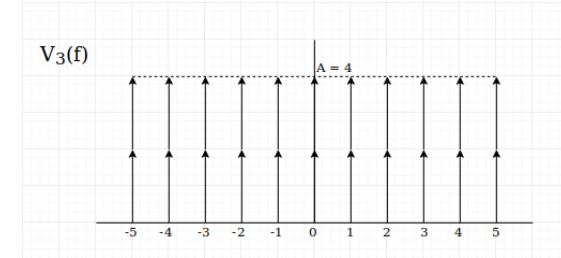
Se durante la replicazione i segnali si sovrappongono, significa che abbiamo **aliasing** e dobbiamo sommare le ampiezze dei due segnali (parlando in termini prettamente grafici, andiamo a posizionare un segnale sopra l'altro):

In questo caso notiamo subito che **si verifica il fenomeno di aliasing**.

$$V_2(f) = V_1(f) \text{ filtrato } H(f)$$



$$V_3(f)$$



Avere aliasing significa che, dopo aver effettuato il campionamento, i segnali diventano indistinguibili (perché si sovrappongono!) e dunque non è possibile avere un filtro di ricostruzione che restituisca i segnali originali.

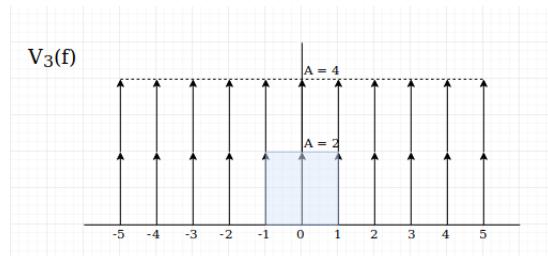
La condizione da rispettare per evitare aliasing viene enunciata nel *teorema del campionamento* ed è che la frequenza di campionamento sia superiore al doppio della banda del segnale:

$$f_c > 2 \cdot B$$

dove B rappresenta la banda del segnale. In questo caso, $B = 1$ e $f_c = 1\text{Hz}$, quindi evidentemente la condizione non è rispettata.

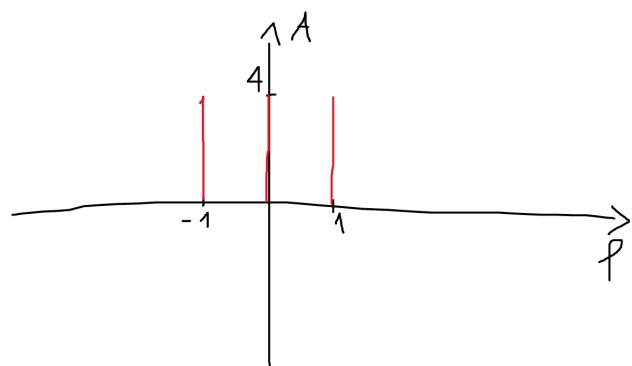
L'ultimo passaggio che dobbiamo fare è filtrare questo segnale con $F(f)$, tenendo solo la parte di segnale che risulta inclusa nel filtro, e moltiplicando le ampiezze.

$$V_3(f)$$



Il filtro $F(f)$ ha ampiezza $A_F = 1$ e banda $B_F = 1$, quindi l'ampiezza del segnale risultante $V(f)$ sarà $A_f = 4$.

Si noti che il segnale risultante comprende anche la parte di $V_3(f)$ presente ai "bordi" del filtro.



L'equazione del segnale risultante nel dominio delle frequenze è:

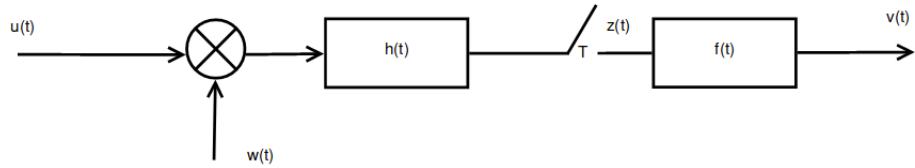
$$V(f) = 4\delta(f) + 4[\delta(f - 1) + \delta(f + 1)]$$

Eseguendo l'antitrasformata otteniamo il segnale nel dominio del tempo:

$$v(t) = 4 + 8\cos(2\pi t)$$

Esercizio 5.2 - appello 01/07/2019

Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita $v(t)$ del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze:



Dove $u(t) = \text{sinc}(2t) + 2$, $w(t) = 4\cos(10\pi t)$, $h(t) = 4\text{sinc}(10t)$, $f(t) = 2\text{sinc}(2t)$.

Periodo di campionamento con $T = 100ms$.

Si verifica il fenomeno di Aliasing? Motivare la risposta.

Per prima cosa, scriviamo le trasformate di Fourier dei segnali:

$$u(t) = \text{sinc}(2t) + 2 \xrightarrow{TdF} U(f) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{2}\right) + 2\delta(f)$$

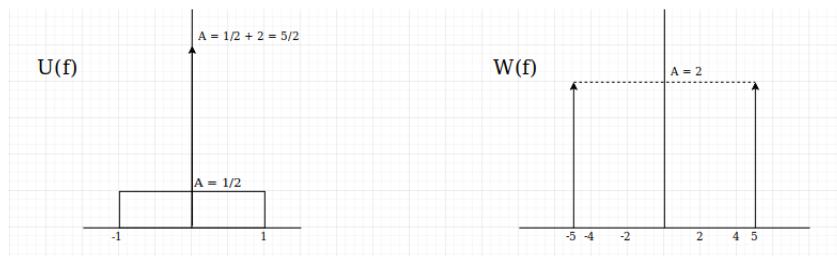
$$w(t) = 4\cos(10\pi t) \xrightarrow{TdF} W(f) = 2[\delta(f-5) + \delta(f+5)]$$

$$h(t) = 4\text{sinc}(10t) \xrightarrow{TdF} H(f) = \frac{4}{10}\Pi\left(\frac{f}{10}\right)$$

$$f(t) = 2\text{sinc}(2t) \xrightarrow{TdF} F(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

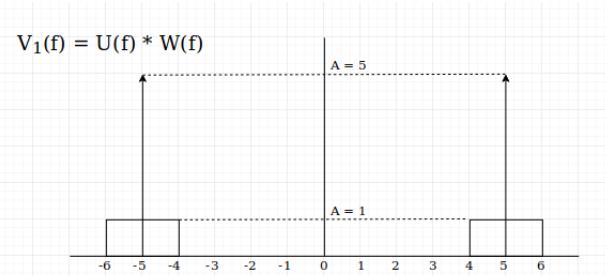
periodo di campionamento: $T = 100s \rightarrow$ frequenza di campionamento: $f_c = \frac{1}{T} = 10Hz$.

Ora disegniamo i grafici dei segnali in ingresso, $U(f)$ e $W(f)$:

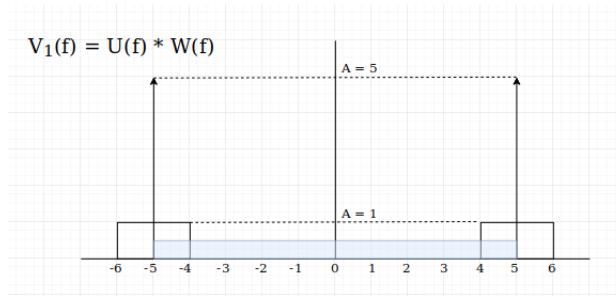


Eseguiamo per via grafica la convoluzione tra i due, andando a centrare il segnale $U(f)$ in $W(f)$ e ottenendo così il segnale risultante $V_1(f)$.

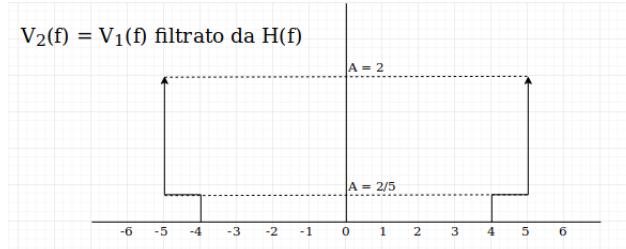
L'ampiezza di $V_1(f)$ si ottiene moltiplicando le ampiezze di $U(f)$ e $W(f)$.



Il segnale $V_2(f)$ si ottiene applicando il filtro $H(f)$ (banda $B_H = 5$ e ampiezza $A_H = \frac{2}{5}$) su $V_1(f)$: teniamo solo la parte di segnale che viene inclusa dal filtro (*estremi inclusi!*) e moltiplichiamo le loro ampiezze.



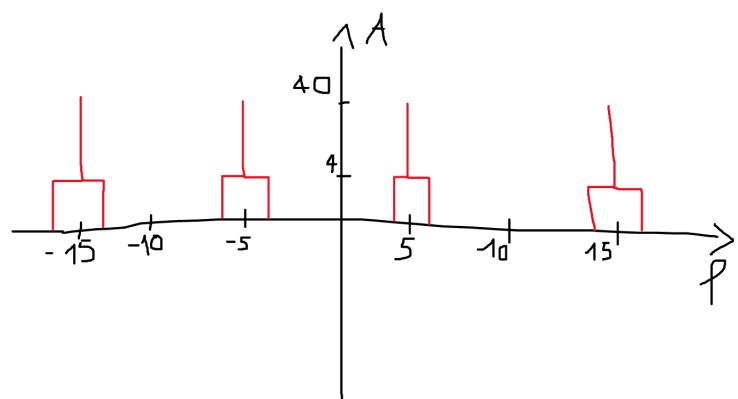
Da cui otteniamo:



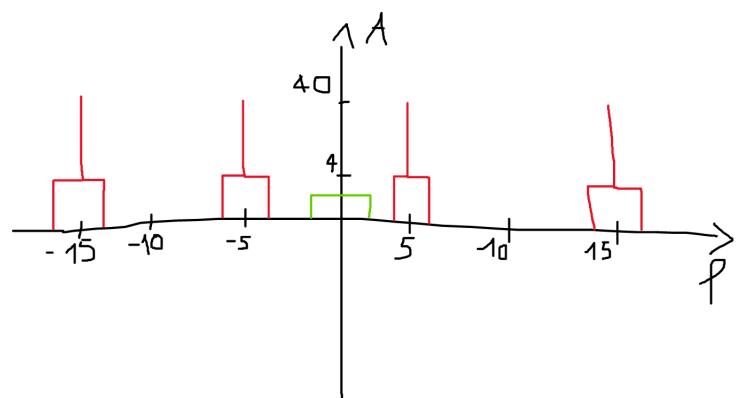
Ora dobbiamo eseguire il campionamento a $T = 100ms$: lavorando nelle frequenze, questo significa replicare il segnale ogni $f_c = 10Hz$ e scalarlo di un fattore f_c .

Notiamo subito che la banda del segnale $V_2(f)$ è $B_{V_2} = 5$, e quindi la condizione $f_c > 2 \cdot B$ non è rispettata: significa che **si verifica il fenomeno di aliasing** (teorema del campionamento). Questa conclusione viene confermata dal grafico del segnale risultante, in cui notiamo un'evidente sovrapposizione di segnali:

L'ultimo passaggio da effettuare è quello di filtrare il segnale con $F(f)$, che ha banda $B_F = 1$



e ampiezza $A_F = 1$:

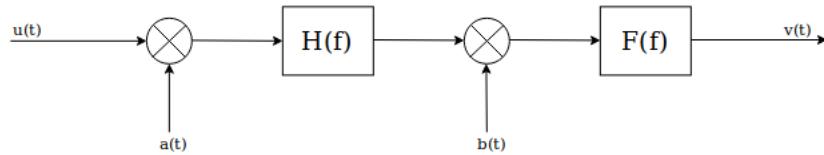


Notiamo subito che nessuna parte del segnale $V_3(f)$ viene inclusa nel dominio del filtro: quindi il segnale risultante $V(f)$ è nullo!

$$V(f) = 0 \quad \rightarrow \quad v(t) = 0$$

Esercizio 5.3

Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita $v(t)$ del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze:



Dove i segnali in ingresso sono: $u(t) = \text{sinc}^2(t)$, $a(t) = \cos(10\pi t)$, $b(t) = \cos(6\pi t)$.

I filtri invece sono definiti nel modo seguente

$$H(f) = \begin{cases} 2 & \text{se } 3 \leq |f| \leq 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad F(f) = \begin{cases} 2 & \text{se } |f| \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si verifica il fenomeno di Aliasing? Motivare la risposta.

Notiamo che $H(f)$ è un filtro **passabanda** (ovvero un filtro a supporto limitato attorno a un punto che NON contiene l'origine), mentre $F(f)$ è un filtro **passabasso** (ovvero a supporto limitato attorno all'origine).

Convertiamo i segnali temporali in segnali frequenziali usando la trasformata di Fourier:

$$u(t) = \text{sinc}^2(t) \xrightarrow{TdF} U(f) = \Lambda(f)$$

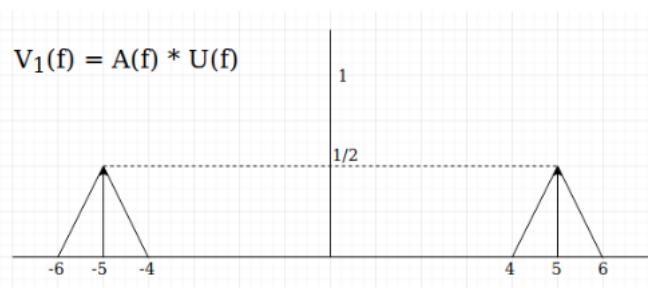
$$a(t) = \cos(10\pi t) \xrightarrow{TdF} A(f) = \frac{1}{2} [\delta(f + 5) + \delta(f - 5)]$$

$$b(t) = \cos(6\pi t) \xrightarrow{TdF} B(f) = \frac{1}{2} [\delta(f + 3) + \delta(f - 3)]$$

Cominciamo quindi l'esercizio rappresentando graficamente i due segnali in input, $u(t)$ e $a(t)$:

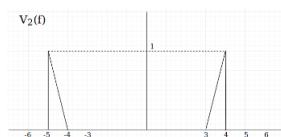
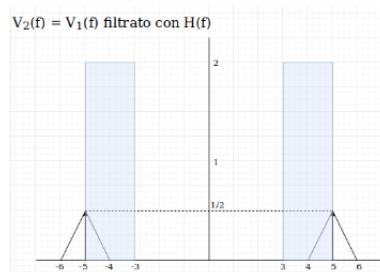


Effettuiamo la convoluzione tra i due segnali andando a centrare $U(f)$ in $A(f)$, e moltiplichiamo

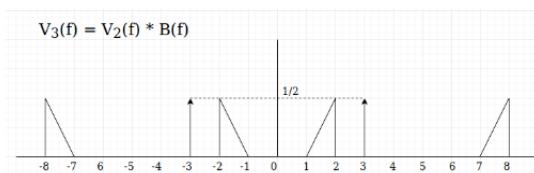


le rispettive ampiezze, ottentendo un segnale $V_1(f)$ di ampiezza $A = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

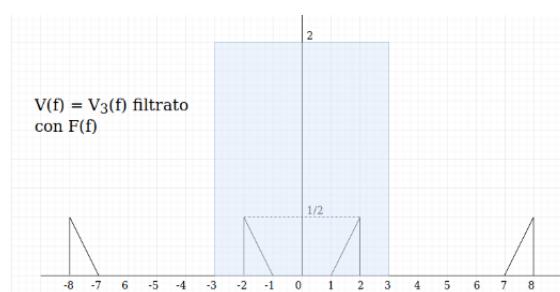
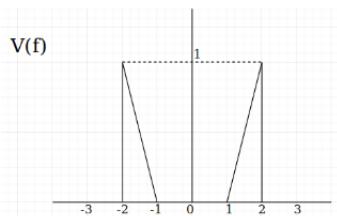
Ora adoperiamo il filtro $H(f)$ sul segnale $V_1(f)$, ottenendo in uscita il segnale $V_2(f)$, che avrà ampiezza $A = 1$.



Ora dobbiamo effettuare la convoluzione tra $V_2(f)$ e $B(f)$: centriamo il primo nel secondo e moltiplichiamo le rispettive ampiezze, ottenendo il seguente segnale $V_3(f)$, che avrà ampiezza pari alla metà di quella di partenza:

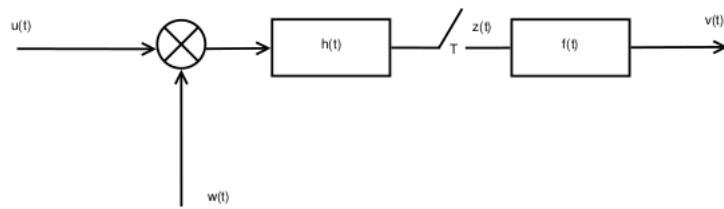


L'ultimo passaggio da effettuare è quello di filtrare il segnale così ottenuto con $F(f)$, che è una box di banda $B_F = 3$ e ampiezza $A_F = 2$:



Esercizio 5.4 - esame del 03/02/2017

Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita $v(t)$ del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze:



Dove i segnali in ingresso sono: $u(t) = 3\cos(2\pi 50t)$, $w(t) = 2\cos(\pi 40t)$, i filtri sono $h(t) = 80\text{sinc}(80t)$, $f(t) = 40\text{sinc}(40t)$ e il tempo di campionamento è $T = \frac{1}{10}s$.

Stabilire inoltre se si verifica il fenomeno di **aliasing** e motivare la risposta.

Trasformiamo tutti i segnali dati con la trasformata di Fourier:

$$u(t) = 3\cos(2\pi 50t) \xrightarrow{TdF} U(f) = \frac{3}{2} [\delta(f - 50) + \delta(f + 50)]$$

$$w(t) = 2\cos(\pi 40t) \xrightarrow{TdF} W(f) = [\delta(f - 20) + \delta(f + 20)]$$

$$h(t) = 80\text{sinc}(80t) \xrightarrow{TdF} H(f) = \Pi\left(\frac{t}{80}\right)$$

$$f(t) = 40\text{sinc}(40t) \xrightarrow{TdF} F(f) = \Pi\left(\frac{t}{40}\right)$$

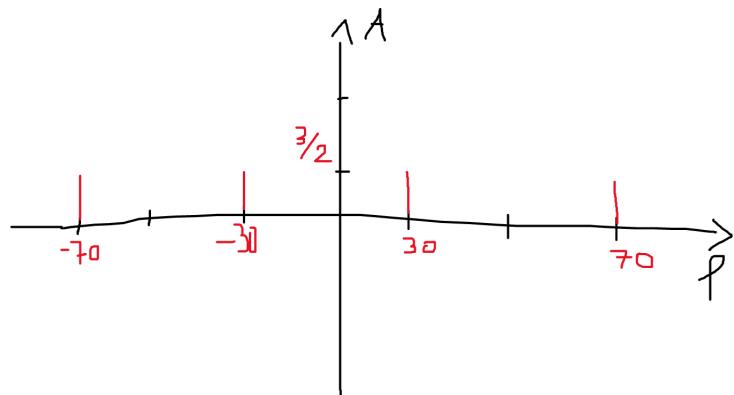
Il tempo T con cui campioniamo il segnale nel dominio del tempo, diventa la frequenza f con cui eseguiamo la replicazione del segnale nel dominio delle frequenze:

$$f = \frac{1}{T} = 10\text{Hz}$$

Cominciamo l'esercizio disegnando i due segnali in input, $U(f)$ e $W(f)$:



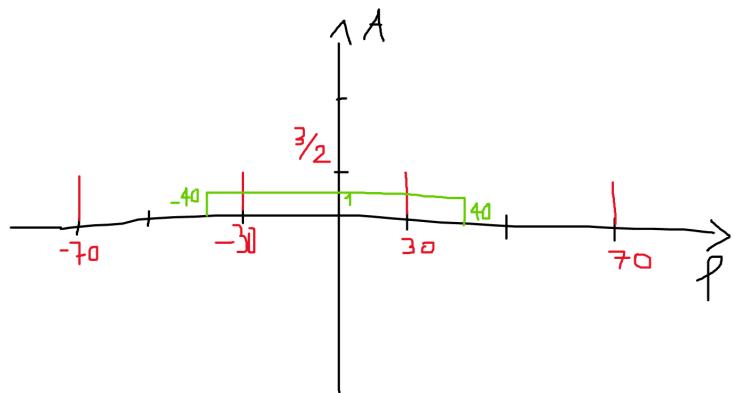
Ora effettuiamo la convoluzione tra i due segnali, andando a centrare $W(f)$ in $U(f)$ (ma si



può fare anche viceversa).

Il segnale risultante dalla convoluzione sono quattro impulsi di ampiezza $\frac{3}{2}$ alle frequenze -70, -30, +30 e +70.

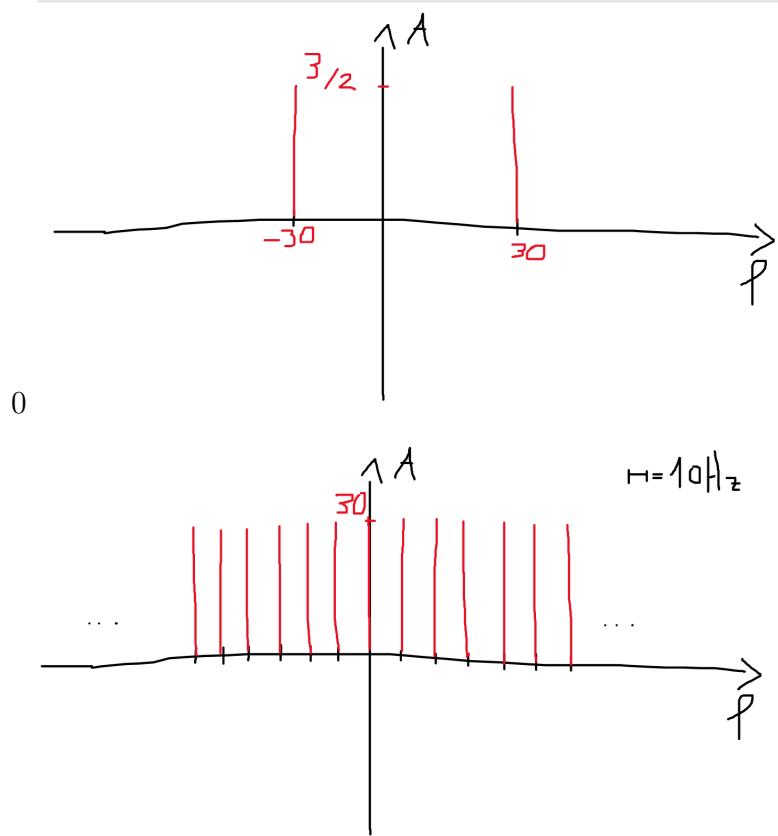
Il prossimo passo è filtrare il segnale così ottenuto con $H(f)$, che ha uno spettro di 80Hz:



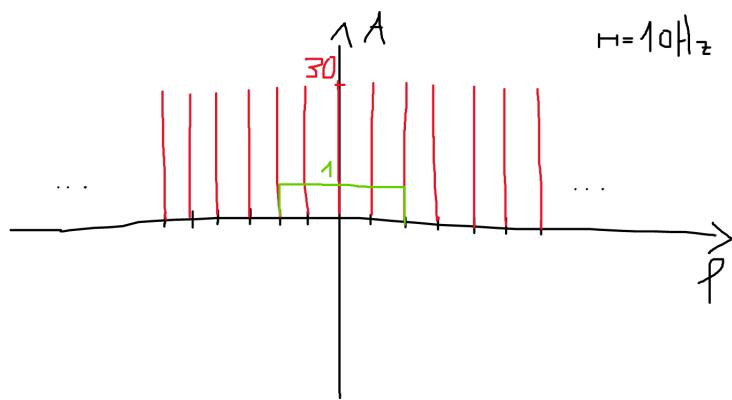
Notiamo che l'unica parte di segnale che resta sono gli impulsi in -30 e 30. L'ampiezza rimane invariata, perché il filtro $H(f)$ ha ampiezza unitaria.

Ora dobbiamo replicare il segnale ogni 10 Hz e scalarlo: dato che la banda del segnale è $B = 30$ Hz abbiamo che $f < 2B$, e concludiamo quindi che **si verifica il fenomeno di aliasing**.

Dove i segnali si sovrappongono dobbiamo sommare le ampiezze.

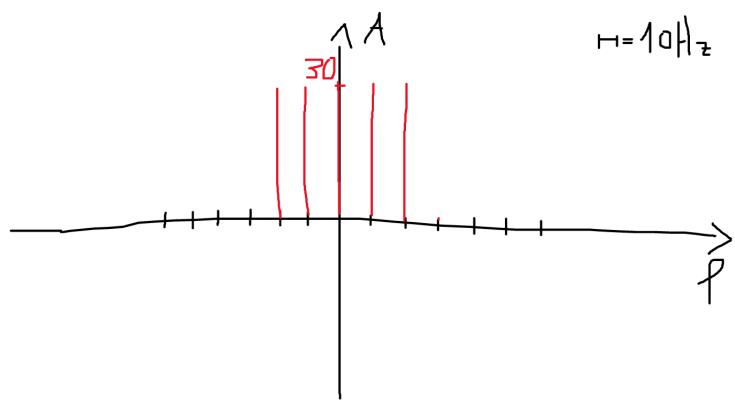


Alla fine del processo, otteniamo una serie di impulsi distanziati tra loro di 10Hz e di ampiezza 30. Come ultimo passaggio, dobbiamo filtrare il segnale con $F(f)$:



Il segnale finale, $V(f)$, risulta essere composto dunque da cinque impulsi di ampiezza 30: L'equazione di questo segnale è

$$V(f) = 30 [\delta(f - 20) + \delta(f + 20) + \delta(f - 10) + \delta(f + 10) + \delta(f)]$$

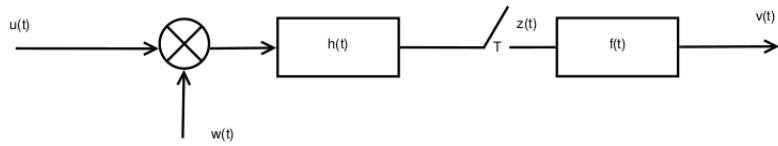


Applicando l'antitrasformata di Fourier riportiamo il segnale nel dominio del tempo e otteniamo la soluzione:

$$v(t) = 60\cos(2\pi 20t) + 60\cos(2\pi 10t) + 30$$

Esercizio 5.5 - esame del 06/06/2017

Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita $v(t)$ del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze:



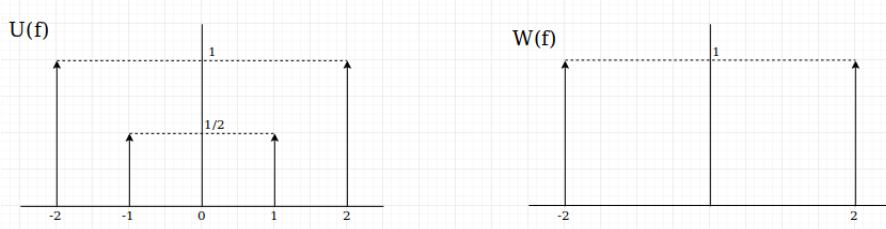
Dove i segnali in ingresso sono: $u(t) = 2\cos(4\pi t) + \cos(2\pi t)$, $w(t) = 2\cos(4\pi t)$, i filtri sono $h(t) = 4\text{sinc}(4t)$, $f(t) = 2\text{sinc}(2t)$ e il tempo di campionamento è $T = 1s$.

Stabilire se si verifica il fenomeno di **aliasing**, motivando la risposta.

Trasformata di Fourier dei segnali coinvolti:

$$\begin{aligned} u(t) &= 2\cos(4\pi t) + \cos(2\pi t) \xrightarrow{TdF} U(f) = \delta(f - 2) + \delta(f + 2) + \frac{1}{2}[\delta(f - 1) + \delta(f + 1)] \\ w(t) &= 2\cos(4\pi t) \xrightarrow{TdF} W(f) = \delta(f - 2) + \delta(f + 2) \\ h(t) &= 4\text{sinc}(4t) \xrightarrow{TdF} H(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \\ f(t) &= 2\text{sinc}(2t) \xrightarrow{TdF} F(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \end{aligned}$$

Tracciamo il grafico dei due segnali in ingresso, che sono $u(t)$ e $w(t)$:



Ora effettuiamo la convoluzione dei segnali (Figura 1), centrando il segnale $U(f)$ in $W(f)$, e ottenendo così il segnale $V_1(f)$.

Notare che, laddove i segnali si sovrappongono, le ampiezze vanno *sommate* (operazione che, a livello grafico, si traduce nel posizionare un segnale sopra l'altro). La prossima operazione da fare è filtrare $V_1(f)$ con $H(f)$, che è un filtro di banda $B_H = 2$. Inoltre, dato che l'ampiezza del filtro è unitaria, l'ampiezza del segnale risultante rimarrà invariata. L'applicazione del filtro conserva quindi un segnale, $V_2(f)$, composto da tre impulsi (Figura 2): Il passo successivo è il campionamento (Figura 3), il periodo di campionamento viene effettuato con periodo $T = 1s$, quindi nelle frequenze abbiamo una replicazione del segnale a frequenza $f_c = \frac{1}{T} = 1\text{Hz}$.

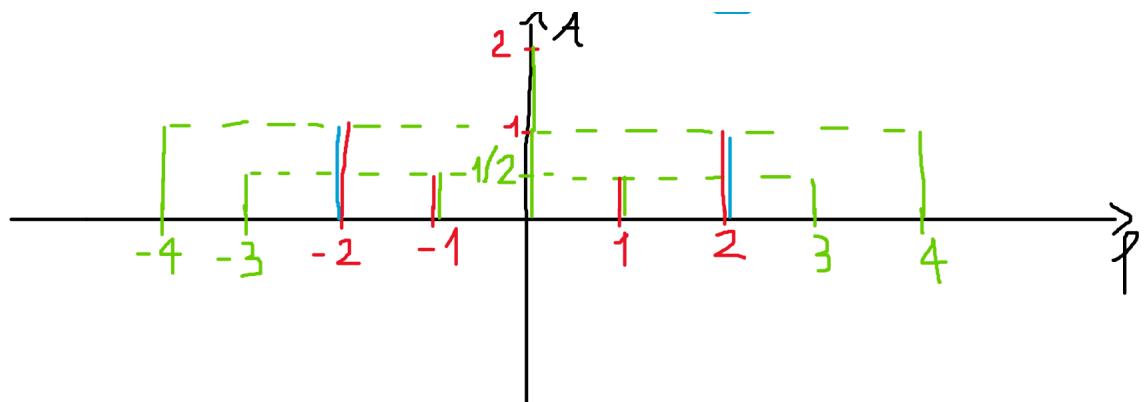


Figure 1: $U(f)$ in rosso, $W(f)$ in blu, convoluzione in verde.

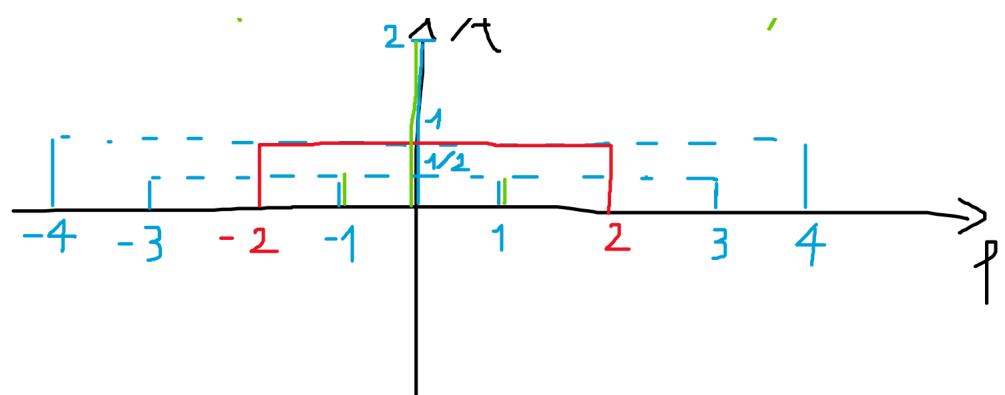


Figure 2: In blu convoluzione in ingresso, in rosso filtro, in verde uscita.

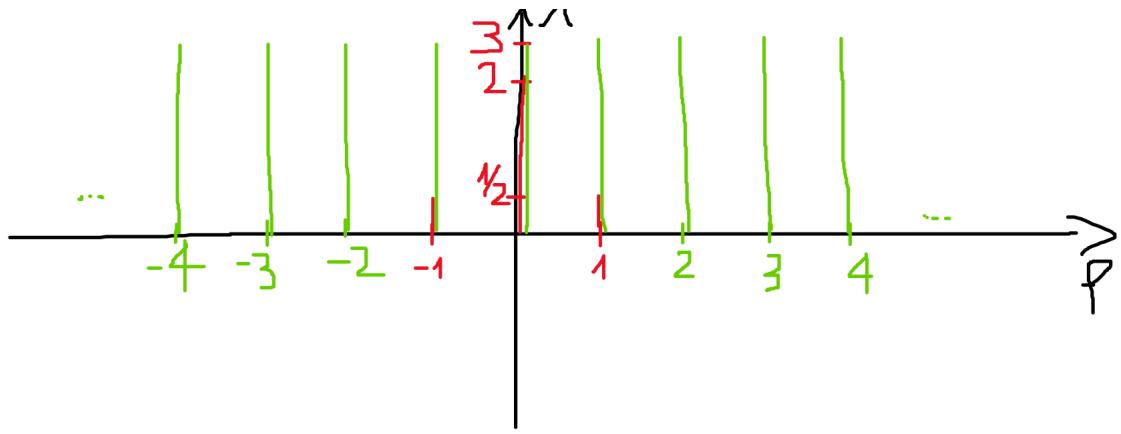


Figure 3: In rosso segnale in ingresso, in verde segnale campionato.

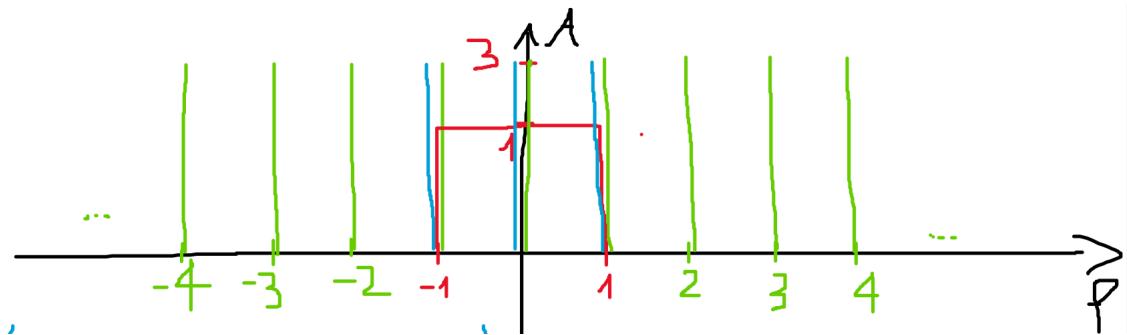


Figure 4: Spettro campionato in verde, filtro in rosso, $V(f)$ in blu.

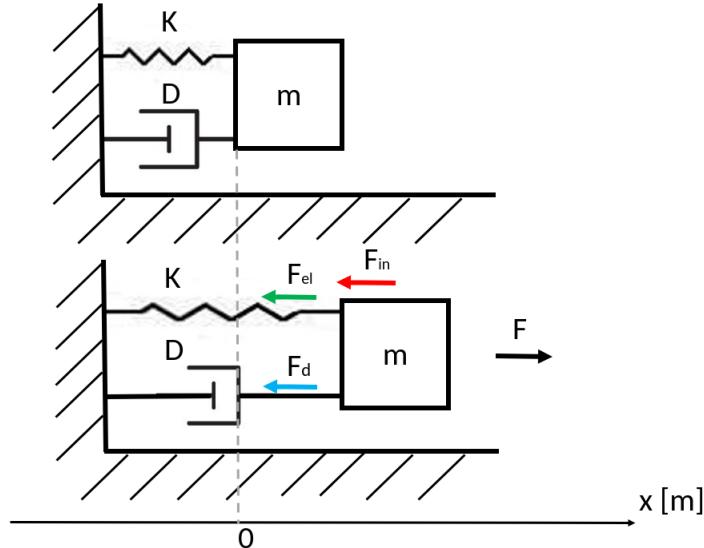
Ricordiamo che la condizione per non avere aliasing è $f_c > 2B$ (dove B rappresenta la banda del segnale); poiché la banda del segnale $V_2(f)$ è 2, risulta che $f_c < 2B$, e concludiamo quindi che **si verifica il fenomeno di aliasing**. Infine, filtriamo il segnale con $F(f)$, un filtro di banda bilatera pari a 2, e otteniamo finalmente il segnale in uscita $V(f)$ (Figura 4): Per concludere l'esercizio, applichiamo l'antitrasformata di Fourier e otteniamo l'equazione del segnale nel dominio del tempo: $V(f) = 3[\delta(f - 1) + \delta(f + 1) + \delta(f)] \xrightarrow{TdF^{-1}} v(t) = 6\cos(2\pi t) + 3$

6 Esercitazioni del corso A.A. 2019/2020

Esercitazione 2 del 27/03/2020 - risposta libera nel dominio del tempo

Sistema massa-molla-smorzatore (MKD)

Consideriamo il classico sistema meccanico massa-molla-smorzatore (MKD):



Supponiamo che, dall'istante $t = 0$, la massa m , inizialmente a riposo, sia sottoposta alla forza esterna $F(t)$. Le altre forze che agiscono sul sistema sono:

- *forza elastica* $F_{el}(t) = Kx(t)$ (assumendo l'origine del sistema di riferimento nella posizione di riposo)
- *forza di smorzamento (damping)* $F_d(t) = D\frac{dx(t)}{dt}$
- *forza di inerzia* $F_{in}(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Il bilancio delle forze secondo la legge di Newton porta alla seguente equazione differenziale:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = F(t) \quad (3)$$

L'equazione descrive un *sistema LTI*. Infatti, assumendo $F(t) = u(t)$ come ingresso e $x(t) = v(t)$ come uscita, esso è nella forma $\sum_{i=0}^2 a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_0^0 b_i \frac{d^0 u(t)}{dt^0} = u(t)$. Siamo ora interessati a studiare la *risposta libera del sistema*, ossia supponiamo $F(t) = 0 \forall t > 0$, e assumiamo l'elongazione iniziale della molla, per $t = 0$, sia x_0 . Assumiamo anche che la massa abbia velocità iniziale v_0 .

Studiamo il comportamento del sistema nel caso $D = 0$ (molla ideale). L'equazione (3) diventa:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + Kx(t) = 0$$

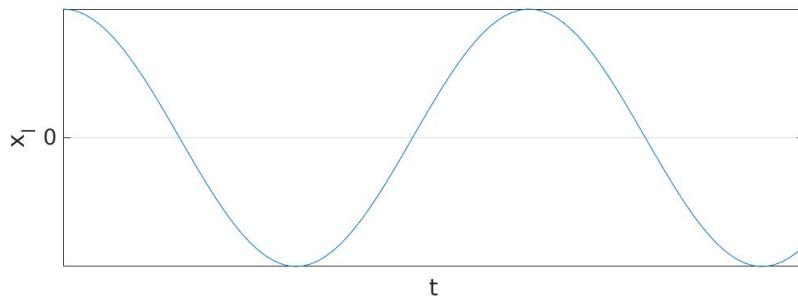
Il polinomio caratteristico è $ms^2 + K = 0$, con radici complesse coniugate $s_{1-2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{m}}$. Possiamo quindi scrivere la risposta libera del sistema come:

$$x_l(t) = a_1 \cos(\sqrt{\frac{K}{m}}t) + b_1 \sin(\sqrt{\frac{K}{m}}t)$$

Per determinare i coefficienti a_1, a_2 dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = x_l(0) = a_1 \cos(0) + a_2 \sin(0) \\ v_0 = \frac{dx_l(t)}{dt}|_{t=0} = -\sqrt{\frac{K}{m}}a_1 \sin(0) + \sqrt{\frac{K}{m}}a_2 \cos(0) \end{cases}$$

Si ottiene quindi $a_1 = x_0, a_2 = 0$. Il comportamento del sistema è oscillatorio, in quanto la molla non ha perdite e, di conseguenza, la massa continua ad oscillare periodicamente.



Assumiamo ora di trascurare $m = 0$ in (3), ossia che l'inerzia del corpo connesso alla molla sia minima rispetto ai parametri della molla. Otteniamo un sistema del primo ordine in evoluzione libera:

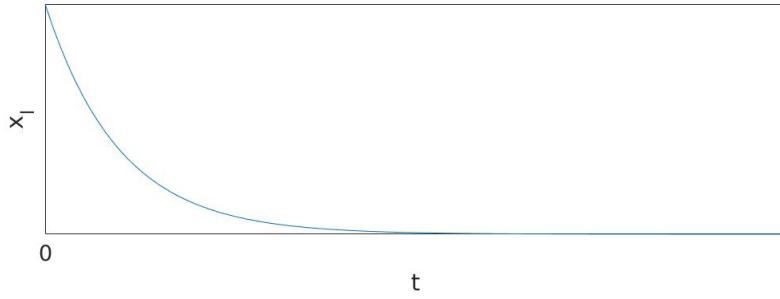
$$D \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = 0$$

Il polinomio caratteristico è ora $Ds + K = 0$, da cui si ottiene una risposta del tipo:

$$x_l(t) = ae^{-\frac{K}{D}t} \quad (4)$$

Per determinare a , è sufficiente imporre la condizione iniziale sulla posizione, in quanto il sistema è del primo ordine. Si ottiene $x_l(t) = x_0 e^{-\frac{K}{D}t}$.

Consideriamo ora il caso completo:



$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + D \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = 0$$

Il polinomio caratteristico é $ms^2 + Ds + K = 0$, che ammette radici:

$$s_{1/2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4Km}}{2m}$$

La natura delle due soluzioni dipende dal segno di $D^2 - 4Km$. Assumiamo, inizialmente, $D^2 - 4Km > 0$. In questo caso, $s_{1/2} \in \mathbb{R}$. La soluzione é del tipo:

$$x_l(t) = a_1 e^{-s_1 t} + a_2 e^{-s_2 t}$$

Notiamo, in particolare, che $D^2 - 4Km < D^2 \rightarrow \sqrt{D^2 - 4Km} < D$; di conseguenza, $s_1, s_2 < 0$ e gli esponenziali sono decrescenti nel tempo. Questo é il comportamento *sovramorzato*, in quanto il termine di damping prevale sul termine elastico, portando ad un rapido annullamento della condizione iniziale.

Consideriamo ora il caso opposto, $D^2 - 4Km < 0$. In questo caso, gli esponenziali della risposta diventano complessi. Scrivendo $s_{1/2} = -\xi \pm j\omega$, con $\xi = -\frac{D}{2m}$, $\omega = \frac{\sqrt{4Km-D^2}}{2m}$ ottiene una risposta del tipo:

$$x_l(t) = a_1 e^{(-\xi+j\omega)t} + a_2 e^{(-\xi-j\omega)t} = e^{-\xi t} (b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t))$$

Questo é il caso *sottosmorzato*: la risposta é oscillatoria come nel caso non smorzato ($D = 0$), ma l'ampiezza delle oscillazioni decresce esponenzialmente a 0 secondo il fattore di smorzamento $\xi = -\frac{D}{2m}$.

Consideriamo infine il caso $D^2 - 4Km = 0 \rightarrow D = 2\sqrt{Km}$. In questo caso, $s_1 = s_2 = -\frac{D}{2m}$, ossia il polinomio caratteristico ha una radice con molteplicità algebrica doppia. La risposta del sistema, in questo caso, é:

$$x_l(t) = a_1 e^{-\frac{D}{2m}t} + a_2 t e^{-\frac{D}{2m}t}$$

Il valore $D = 2\sqrt{Km}$ è il valore di *smorzamento critico*, che delimita la transizione dal caso oscillatorio smorzato al caso sovrasmorzato. Il comportamento del sistema nei tre casi è mostrato di seguito.

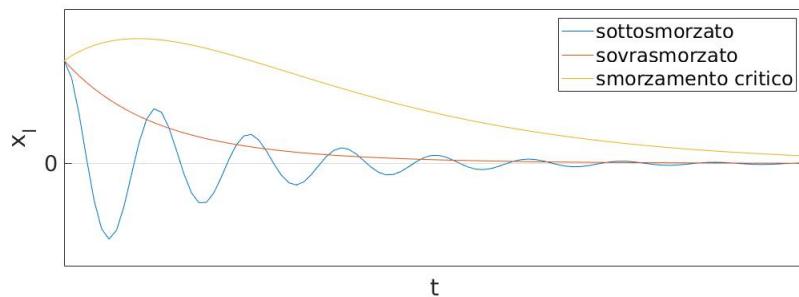


Figure 5

Sistema RLC elettrico

Consideriamo ora l'equivalente elettrico del sistema MKD. **In questa e nelle successive esercitazioni**, considereremo sistemi elettrici composti da 4 tipi di elementi:

- *generatori di tensione* $e(t)$;
- *resistori* con resistenza R ;
- *induttori* con induttanza L ;
- *condensatori* con capacità C .

Quando reistori, induttori e condensatori sono attraversati da una corrente $i(t)$, ai loro capi si crea una *caduta di tensione* (c.d.t.). Nello specifico:

- ai capi di un resistore si genera la c.d.t. $v(t) = Ri(t)$;
- ai capi di un induttore si genera la c.d.t. $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$;
- ai capi di un condensatore si genera la c.d.t. $v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \rightarrow i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$.

Richiamiamo anche le *leggi di Kirchhoff*, che ci torneranno utili per lo studio dei circuiti elettrici:

- *Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)*: la somma delle correnti entranti in un *nodo* (punto di convergenza di tre o più rami del circuito) è pari alla somma delle correnti uscenti;
- *Legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)*: la somma delle tensioni generate e delle cadute di tensione all'interno di una *maglia* (percorso chiuso in un circuito elettrico) è pari a 0.

La figura seguente mostra schematicamente le due leggi.

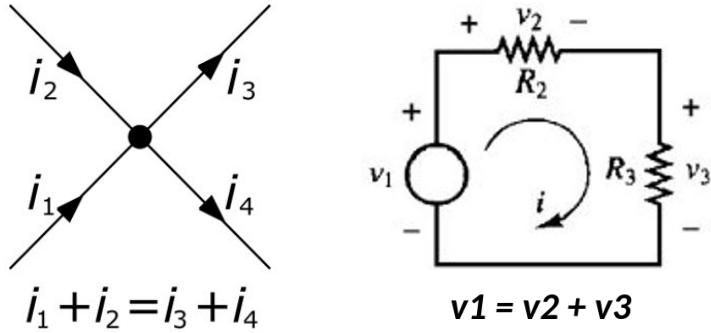
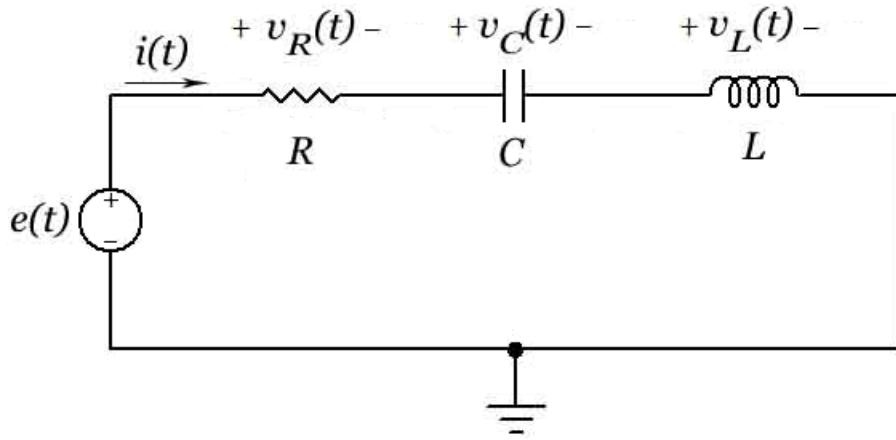


Figure 6: Leggi di Kirchhoff per correnti (sx) e tensioni (dx).

Introduciamo ora il circuito RLC, *equivalente elettrico del sistema MKD meccanico*.



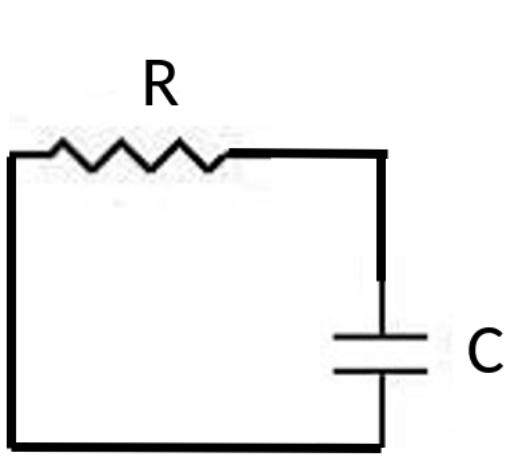
Applicando la LKT all'unica maglia del circuito, otteniamo l'equazione dinamica:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t)$$

Ricordando l'espressione della corrente nel condensatore (unica corrente del circuito) $i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$, si ottiene la seguente equazione di sistema LTI:

$$e(t) = LC \frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

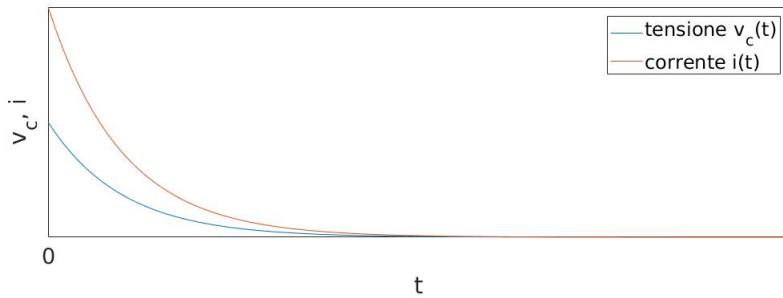
Dove l'uscita è $v_c(t)$ e l'ingresso è la tensione generata $e(t)$. Al netto dei coefficienti, la struttura dell'equazione è identica a (3). Lo studio del circuito completo in evoluzione libera è analogo allo studio dell'equazione MKD completa (Figure 5). Ci soffermiamo ora su un caso specifico, ossia quello in cui $L = 0$. Il circuito in evoluzione libera ($e(t) = 0 \forall t > 0$) diviene il seguente.



Supponiamo che il condensatore abbia una tensione iniziale $v_c(0) = v_0$. L'equazione dinamica del sistema in evoluzione libera risulta:

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = 0$$

che ha una soluzione del tipo $v_{c,l}(t) = v_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ analoga al caso $m = 0$ del sistema MKD (vedi (4)). Fisicamente, la tensione presente sul condensatore si scarica attraverso l'elemento dissipativo R (ricordiamo che, per la LKT, la tensione ai capi del condensatore è uguale alla c.d.t. sul resistore $\forall t > 0$). Per questo motivo, questo caso particolare del circuito RLC è chiamato *circuito di scarica del condensatore*. Inoltre, la corrente nel circuito è pari a $i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{v_c(t)}{R}$, ossia è proporzionale alla tensione sul condensatore.



Esercitazione 4 del 07/04/2020 - Laplace e analisi di stabilità con metodo di Routh

Trasformate e antitrasformate di Laplace

Calcoliamo le trasformate di Laplace delle seguenti funzioni nel dominio del tempo:

- $f(t) = t^3$: applichiamo la formula

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^l}{l!}\right\} = \frac{1}{s^{l+1}}$$

con $l = 3$, ottenendo così

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

- $f(t) = t^2 e^{-3t}$: sappiamo, dalle proprietà delle trasformate di Laplace, che

$$\mathcal{L}\{h(t)e^{\lambda t}\} = H(s - \lambda)$$

essendo $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$. Nel nostro caso

$$h(t) = t^2, \quad \lambda = -3$$

Calcoliamo come nell'esercizio precedente

$$H(s) = \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

quindi otteniamo

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{(s + 3)^3}$$

- $f(t) = te^t \sin 2t$: sappiamo che l'esponenziale nel tempo introduce solo uno shift di coordinata s , quindi ci concentriamo sulla trasformata di Laplace della funzione

$$h(t) = tsin2t$$

In generale, sappiamo che

$$\mathcal{L}\{t^l v(t)\} = (-1)^l \frac{d^l V(s)}{ds^l}$$

con $l = 1$ e $v(t) = \sin 2t$ nel nostro caso. Calcoliamo quindi

$$V(s) = \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

e ne calcoliamo la derivata di ordine 1

$$\frac{dV(s)}{ds} = -\frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$$

Il risultato è quindi, considerando anche l'esponenziale

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{4(s-1)}{((s-1)^2 + 4)^2} = \frac{4s-4}{(s^2 - 2s + 5)^2}$$

- **f(t) = t²cost:** applicando gli stessi ragionamenti di prima, e ricordando

$$V(s) = \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

dobbiamo calcolare la derivata seconda della trasformata del coseno

$$\begin{aligned} \frac{dV(s)}{ds} &= \frac{-s^2 + 1}{(s^2 + 1)^2} \\ \frac{d^2V(s)}{ds^2} &= \frac{-2s(s^2 + 1)^2 - 4s(s^2 + 1)(-s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^4} = \frac{-2s^3 - 2s + 4s^3 - 4s}{(s^2 + 1)^3} = \\ &= -\frac{2s(s^2 - 2s + 3)}{(s^2 + 1)^3} = \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

- **f(t) = e^{-t}cosh2t:** ricordando la trasformata del coseno iperbolico

$$\mathcal{L}\{\cosh \omega t\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2}$$

si ottiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s+1}{(s+1)^2 - 4} = \frac{s+1}{s^2 + 2s - 3}$$

Calcoliamo ora le *antitrasformate* di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

ESERCIZIO 1

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Per prima cosa decomponiamo il denominatore, notando che ha radici in $s = -1$, $s = -2$

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Per trovare i coefficienti A , B abbiamo due alternative:

- *uguagliamo le due espressioni ottenute di $F(s)$*

$$\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{As + 2A + Bs + B}{s^2 + 3s + 2}$$

Va quindi risolto il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

- *usiamo il metodo dei residui*

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -1} (s + 1)F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s + 2} = 1 \\ B &= \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2)F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s + 1} = -1 \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere

$$F(s) = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

Antitrasformando, otteniamo la funzione nel tempo

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

Notiamo che la funzione converge. Infatti, il sistema dinamico associato a $F(s)$ ha i poli a parte reale negativa, pertanto è **BIBO-stabile** (non possiamo affermare invece la stabilità asintotica).

ESERCIZIO 2

$$F(s) = \frac{2s^2 - s + 3}{s^2 - 2s + 5}$$

Il grado del numeratore è pari al grado del denominatore. Di conseguenza, dobbiamo prima fare il rapporto fra i due polinomi, da cui si ottiene

$$F(s) = 2 + \frac{3s - 7}{s^2 - 2s + 5} = 2 + \frac{3s - 7}{s^2 - 2s + 5}$$

Notiamo che le radici del denominatore sono $s_{1/2} = 1 \pm j2$. Riscriviamo quindi

$$F(s) = 2 + \frac{3s - 7}{(s - 1)^2 + 4} = 2 + \frac{3(s - 1)}{(s - 1)^2 + 4} - \frac{4}{(s - 1)^2 + 4}$$

Da cui otteniamo, ricordando le trasformate di seno e coseno

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2\delta(t) + e^t(3\cos(2t) - 2\sin(2t))$$

Notiamo che la funzione è divergente. Potevamo notarlo già dalla trasformata di Laplace, in quanto i poli hanno parte reale positiva, ossia **il sistema associato non è BIBO-stabile, e quindi neanche asintoticamente stabile**. Inoltre, **il sistema associato non è strettamente proprio, per cui compare il termine impulsivo**.

ESERCIZIO 3

$$F(s) = \frac{1}{s^3(s^2 + 1)}$$

Scomponiamo la funzione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{s^2 + 1}$$

Calcoliamo i coefficienti col metodo dei residui

$$\begin{aligned} B &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(s^3 F(s))}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} = 0 \\ A &= \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2(s^3 F(s))}{ds^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-2(s^2 + 1)^2 + 8s^2(s^2 + 1)}{2(s^2 + 1)^4} = -1 \\ C &= \lim_{s \rightarrow 0} s^3 F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 1} = 1 \end{aligned}$$

Per il calcolo di D, E , abbiamo due opzioni:

- *uguaglianza di frazioni*

$$\begin{aligned} \frac{Ds + E}{s^2 + 1} &= F(s) - \frac{A}{s} - \frac{B}{s^2} - \frac{C}{s^3} = \frac{1 + s^2(s^2 + 1) - (s^2 + 1)}{s^3(s^2 + 1)} = \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

Da cui si ricava $D = 1, E = 0$, ottenendo

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\delta_{-1}(t) + \frac{t^2}{2} + cost$$

- *metodo dei residui per poli complessi coniugati* Possiamo anche scrivere i fratti semplici per la coppia di poli complessi e coniugati come

$$\frac{Ds + E}{s^2 + 1} = \frac{F}{s + j} + \frac{G}{s - j}$$

con $F, G \in \mathbb{C}$. Il calcolo dei coefficienti è analogo al caso di poli semplici reali

$$F = \lim_{s \rightarrow -j} (s + j) F(s) = \lim_{s \rightarrow -j} \frac{1}{s^3(s - j)} = \frac{1}{2}$$

$$G = \lim_{s \rightarrow j} (s - j)F(s) = \lim_{s \rightarrow j} \frac{1}{s^3(s + j)} = \frac{1}{2}$$

Otteniamo quindi (escludendo i fratti associati ai poli reali), una risposta nel tempo del tipo

$$g(t) = f(t) + \delta_{-1}(t) - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) = \frac{1}{2}(cost + jsint + cos(-t) + jsin(-t)) = cost$$

Notiamo che il risultato è lo stesso nei due casi, e che **nella risposta nel dominio del tempo non possono esserci termini immaginari!**

ESERCIZIO 4

$$\mathbf{F}(s) = \frac{2s + 1}{3s^3 + 10s^2 + 3s}$$

Scomponiamo in fratti semplici

$$F(s) = \frac{2s + 1}{3s(s + \frac{1}{3})(s + 3)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + \frac{1}{3}} + \frac{C}{s}$$

I coefficienti risultano

$$A = \lim_{s \rightarrow -3} (s + 3)F(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{2s + 1}{3s} \frac{1}{s + \frac{1}{3}} = -\frac{5}{24}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{3}} (s + \frac{1}{3})F(s) = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2s + 1}{3s} \frac{1}{s + 3} = -\frac{1}{8}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 1}{3} \frac{1}{(s + \frac{1}{3})(s + 3)} = \frac{1}{3}$$

Risulta quindi

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{5}{24} \frac{1}{s + 3} - \frac{1}{8} \frac{1}{(s + \frac{1}{3})} + \frac{1}{3} \frac{1}{s}\right\} = -\frac{5}{24}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{1}{3}\delta_{-1}(t)$$

ESERCIZIO 5

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{(s + 3)^2(s + 2)(s - 1)} \quad (5)$$

Scomponiamo in fratti semplici

$$F(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s+3)^2} + \frac{D}{s+3}$$

Calcoliamo i coefficienti

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F(s) = -\frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)F(s) = \frac{1}{48}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)^2 F(s) = -\frac{1}{4}$$

$$D = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d(s+3)^2 F(s)}{ds} = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{-2s-1}{(s+2)^2(s-1)^2} = \frac{5}{16}$$

La funzione nel dominio del tempo é quindi

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{48}e^t - \frac{1}{4}te^{-3t} + \frac{5}{16}e^{-3t}$$

Metodo di Routh per l'analisi di stabilità

Il metodo di Routh consente di valutare il segno della parte reale dei poli di una funzione di trasferimento nel dominio di Laplace **dalla sola analisi dei coefficienti del denominatore (polinomio caratteristico)**. Vediamo alcuni esempi:

- $p(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2$: notiamo che il polinomio ha **tutti i coefficienti positivi, condizione necessaria perché abbia solo radici a parte reale negativa che garantiscono BIBO-stabilità**. Costruiamo la tabella di Routh per verificarlo.

i, j	0	1
3	1	4
2	3	2
1	$\frac{10}{3}$	
0	2	

Ricordiamo che per il calcolo dei coefficienti $a_{i,j}$ da inserire nella tabella di Routh vale la seguente formula:

$$a_{i,j} = \frac{a_{i+1,0}a_{i+2,j+1} - a_{i+2,0}a_{i+1,j+1}}{a_{i+1,0}}$$

Non ci sono cambi di segno nella prima colonna, pertanto le radici hanno tutte parte reale negativa. Notiamo, infatti, che é possibile riscrivere

$$p(s) = (s+1)(s^2 + 2s + 2) = (s+1)(s+1+j)(s+1-j)$$

- $p(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$: i coefficienti sono positivi, pertanto il polinomio potrebbe garantire BIBO-stabilità. Verifichiamo

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 2 & 2 \\ \mathbf{1} & 0 \end{array}$$

Notiamo che la riga **1** contiene solo elementi nulli, pertanto non possiamo applicare il metodo di Routh. Dobbiamo calcolare il **polinomio ausiliario** dalla riga **2**

$$q(s) = 2s^2 + 2$$

calcolarne la derivata

$$\frac{dq(s)}{ds} = 4s$$

e sostituire i coefficienti della derivata alla riga **1** per proseguire

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 2 & 2 \\ \hline \mathbf{1} & 4 \\ \mathbf{0} & 2 \end{array}$$

La presenza di una riga nulla porta a delle considerazioni differenti rispetto al metodo classico. Infatti, fino alla riga **2** non ci sono cambi di segno, pertanto almeno una radice è a parte reale negativa. Dalla riga **1** in poi non ci sono cambi di segno, ma **possiamo solo dedurre che ci siano due soluzioni complesse coniugate, che potrebbero avere parte reale negativa o nulla**. Infatti, le radici dopo la riga nulla sono sempre simmetriche rispetto all'origine del piano complesso. Possiamo verificare questo risultato scomponendo

$$p(s) = (s^2 + 1)(s + 2) = (s + j)(s - j)(s + 2)$$

Il polinomio è BIBO-stabile in quanto i poli complessi hanno molteplicità algebrica unitaria.

- $p(s) = s^3 + 3s - 2$: scriviamo la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{3} & 1 & 3 \\ \mathbf{2} & 0 & -2 \end{array}$$

Abbiamo il primo termine della riga **2** nullo. Applichiamo il metodo dello **scorrimento della riga**. Prima, moltiplichiamo la riga per $(-1)^h$, con $h = 1$ numero di zeri consecutivi nella riga

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{3} & 1 & 3 \\ \mathbf{2a} & 0 & 2 \end{array}$$

Facciamo quindi scorrere la riga verso sinistra di h passi

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{3} & 1 & 3 \\ \mathbf{2a} & 2 & 0 \end{array}$$

Infine, sommiamo le righe **2** e **2a** e proseguiamo la tabella

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{3} & 1 & 3 \\ \mathbf{2 + 2a} & 2 & -2 \\ \mathbf{1} & 4 \\ \mathbf{0} & -2 \end{array}$$

Notiamo una variazione di segno, quindi il sistema associato al polinomio caratteristico non è BIBO-stabile poiché ha una radice a parte reale positiva.

- $\mathbf{p(s)} = s^4 + s^3 + s^2 + s + 2$: la tabella di Routh risulta

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{4} & 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 0 & 2 \end{array}$$

Abbiamo il primo elemento nullo in riga **2**. Per proseguire, applichiamo il **metodo ϵ** , ossia sostituiamo l'elemento nullo con ϵ

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{4} & 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & \epsilon & 2 \\ \mathbf{1} & \frac{\epsilon-2}{\epsilon} \\ \mathbf{0} & 2 \end{array}$$

Calcoliamo il limite destro e sinistro

$$\epsilon \rightarrow 0^+ \quad \begin{array}{c|ccc} \mathbf{4} & 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 0^+ & 2 \\ \mathbf{1} & -\infty \\ \mathbf{0} & 2 \end{array}$$

$$\epsilon \rightarrow 0^- \quad \begin{array}{c|ccc} \mathbf{4} & 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 0^- & 2 \\ \mathbf{1} & +\infty \\ \mathbf{0} & 2 \end{array}$$

In entrambi i casi abbiamo due variazioni di segno, pertanto ci sono sicuramente due radici positive e il sistema non é BIBO-stabile.

- $p(s) = s^5 + 4s^4 + 4s^3 - 2s^2 - 5s - 2$: la tabella di Routh é

5	1	4	-5
4	4	-2	-2
3	$\frac{18}{4}$	$-\frac{18}{4}$	
2	2	-2	
1	0		

Applichiamo il metodo della derivata per la riga nulla (il metodo ϵ va bene ugualmente)

$$q(s) = 2s^2 - 2 \rightarrow \frac{dq(s)}{ds} = 4s$$

La tabella di Routh continua così

5	1	4	-5
4	4	-2	-2
3	$\frac{18}{4}$	$-\frac{18}{4}$	
2	2	-2	
1	4		
0	-2		

Abbiamo un cambiamento di segno, da cui si deduce una radice a parte reale positiva. Infatti, notiamo che il polinomio di partenza corrisponde al denominatore dell'esercizio 5 sulle antitrasformate (5)!

$$p(s) = (s+3)^3(s+2)(s-1)$$

Esercitazione 6 del 17/04/2020 - Diagrammi di Bode

Costruiamo i diagrammi di Bode *asintotici* delle seguenti funzioni di trasferimento.

ESERCIZIO 1

$$G(s) = \frac{(s^2 + 0.8s + 4)(s + 30)}{15s(1 + \frac{s}{200})^2} \xrightarrow{\text{forma di Bode}} \frac{8(1 + 0.2s + \frac{s^2}{4})(1 + \frac{s}{30})}{s(1 + \frac{s}{200})^2}$$

Possiamo tracciare il diagramma in quanto il sistema è stabile. Costruiamo i diagrammi asintotici dei singoli contributi:

- $K_B = 8$: il guadagno di Bode è maggiore di 1, pertanto avremo un'ordinata di partenza nel diagramma positiva ($20\log_{10}K_B$ in decibel).

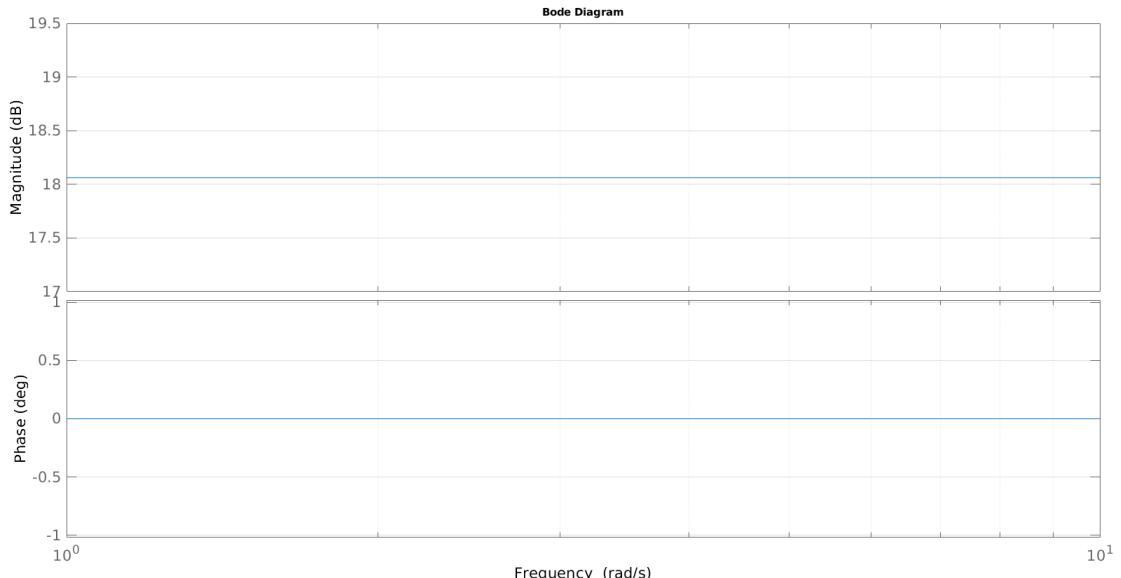


Figure 7: Diagramma asintotico corrispondente a quello reale.

- $1 + 0.2s + \frac{s^2}{4}$: zeri complessi e coniugati con $\omega_n = 2\text{rad/s}$, $\zeta = 0.2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ci aspettiamo quindi un picco (negativo) di risonanza.

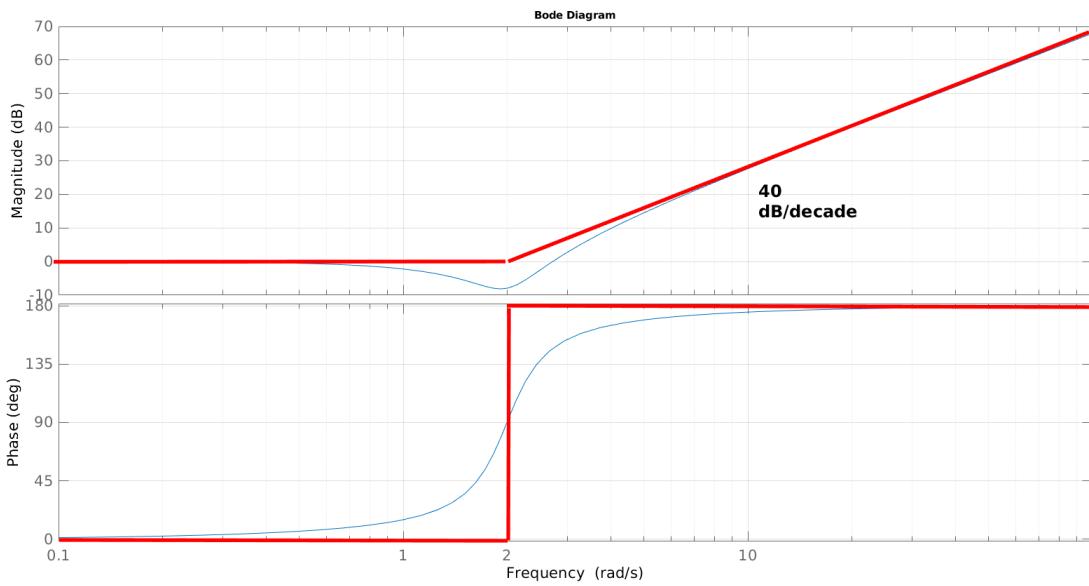


Figure 8: In rosso il diagramma asintotico, in blu quello reale.

- $1 + \frac{s}{30}$: zero reale negativo.

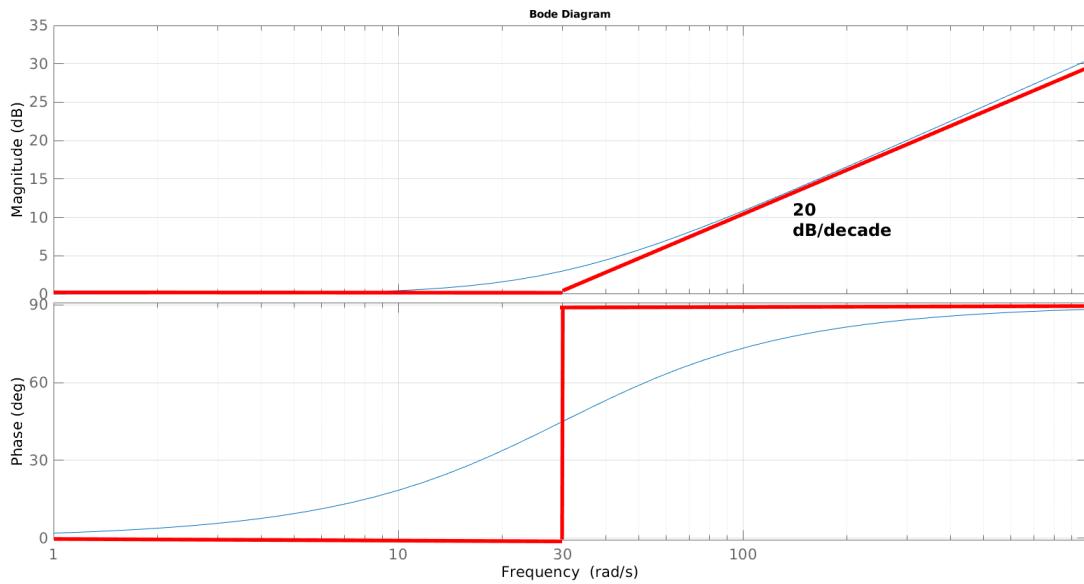


Figure 9: In rosso il diagramma asintotico, in blu quello reale.

- s : polo nell'origine.

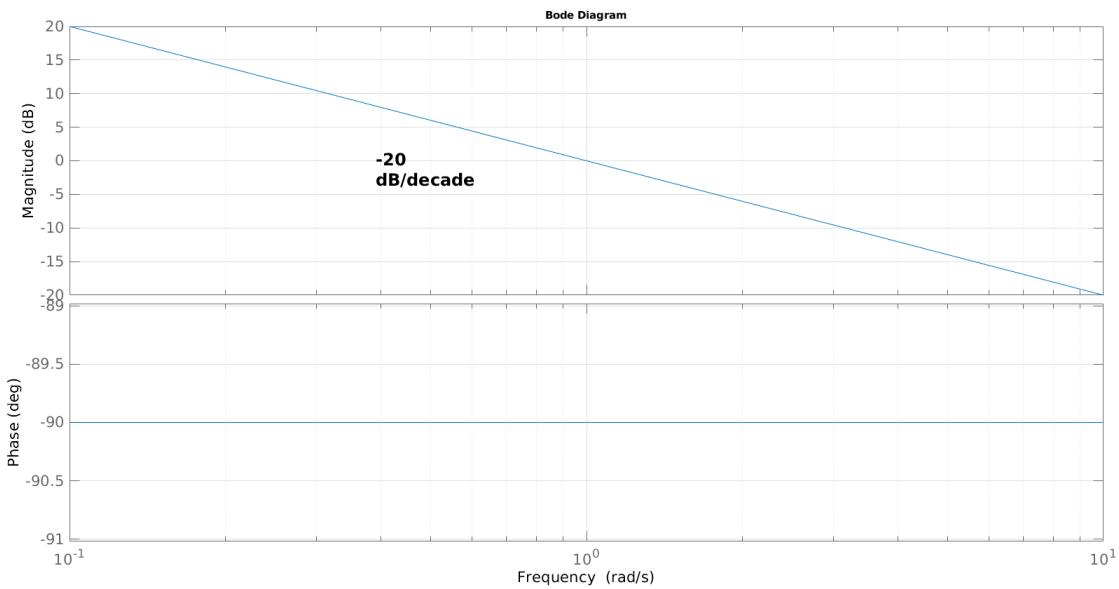


Figure 10: Diagramma asintotico corrispondente a quello reale.

- $(1 + \frac{s}{200})^2$: polo doppio reale negativo.

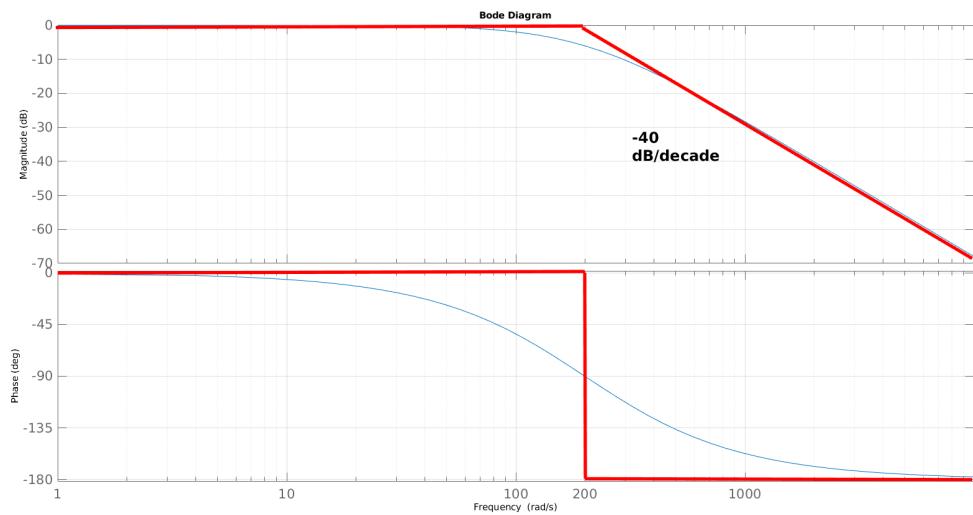


Figure 11: In rosso il diagramma asintotico, in blu quello reale.

Sommendo tutti i contributi si ottiene il seguente diagramma complessivo.

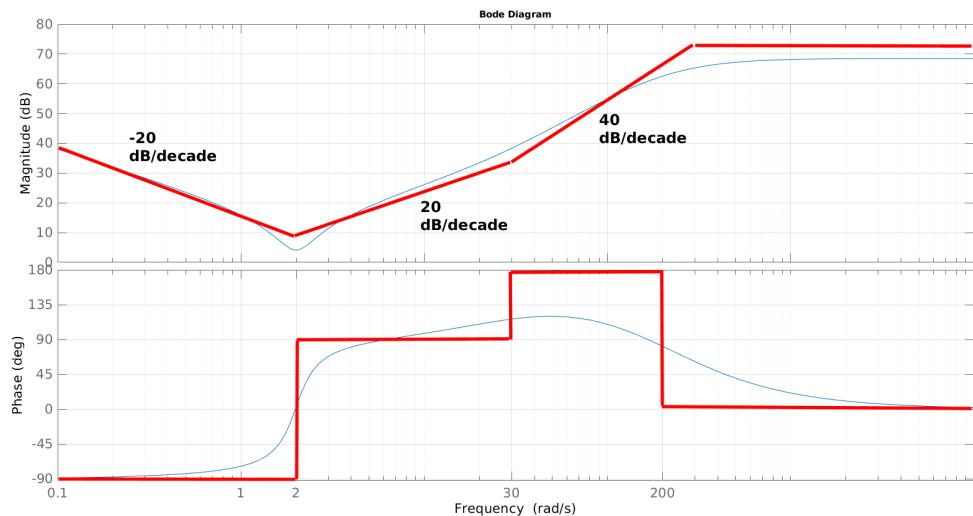


Figure 12: In rosso il diagramma asintotico, in blu quello reale.

ESERCIZIO 2

$$G(s) = \frac{1470(s + 300)}{s^2(s + 7)(s^2 + 15s + 900)} \xrightarrow{\text{forma di Bode}} \frac{70\left(1 + \frac{s}{300}\right)}{s^2\left(1 + \frac{s}{7}\right)\left(1 + \frac{s}{60} + \frac{s^2}{900}\right)}$$

Il sistema è stabile, pertanto possiamo tracciare il diagramma di Bode. I singoli contributi sono:

- $K_B = 70$: il guadagno di Bode.

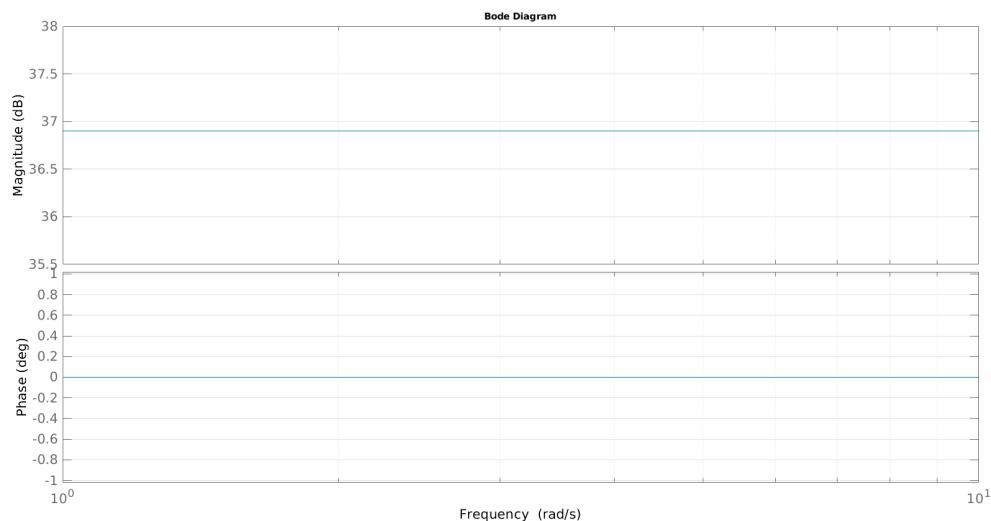


Figure 13: Il diagramma asintotico coincide con quello reale.

- $1 + \frac{s}{300}$ zero reale negativo.

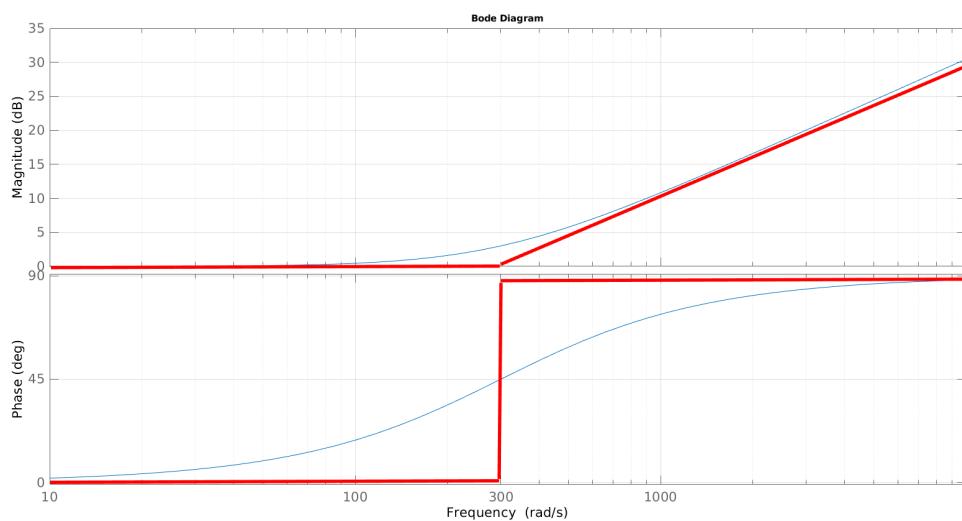


Figure 14: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

- s^2 : polo doppio nell'origine.

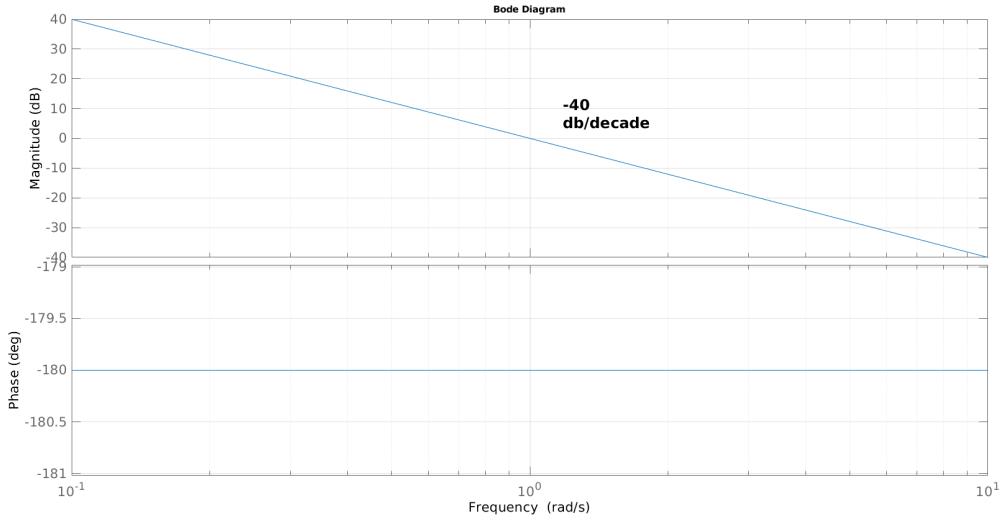


Figure 15: Il diagramma asintotico coincide con quello reale.

- $1 + \frac{s}{7}$: polo reale negativo.

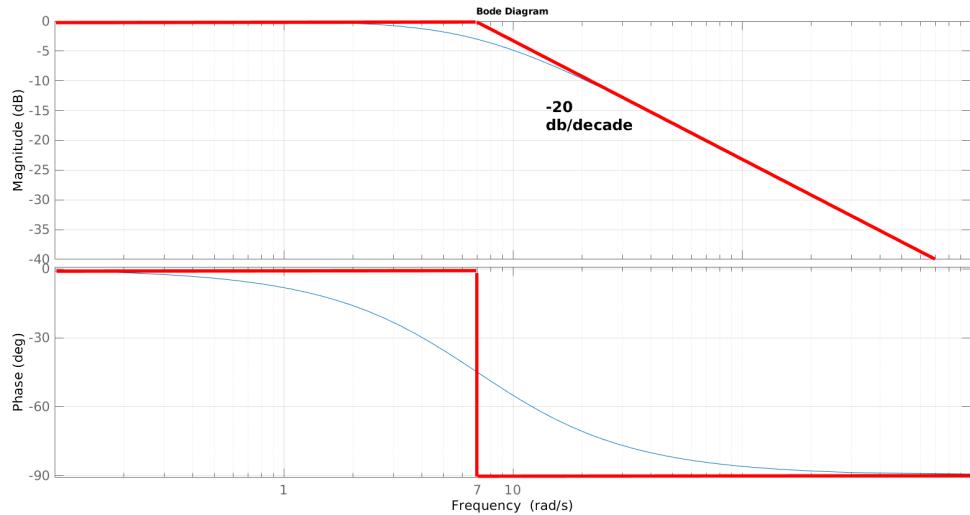


Figure 16: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

- $1 + \frac{s}{60} + \frac{s^2}{900}$: poli complessi e coniugati con $\omega_n = 30\text{rad/s}$, $\zeta = 0.25 < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ci aspettiamo quindi un picco di risonanza.

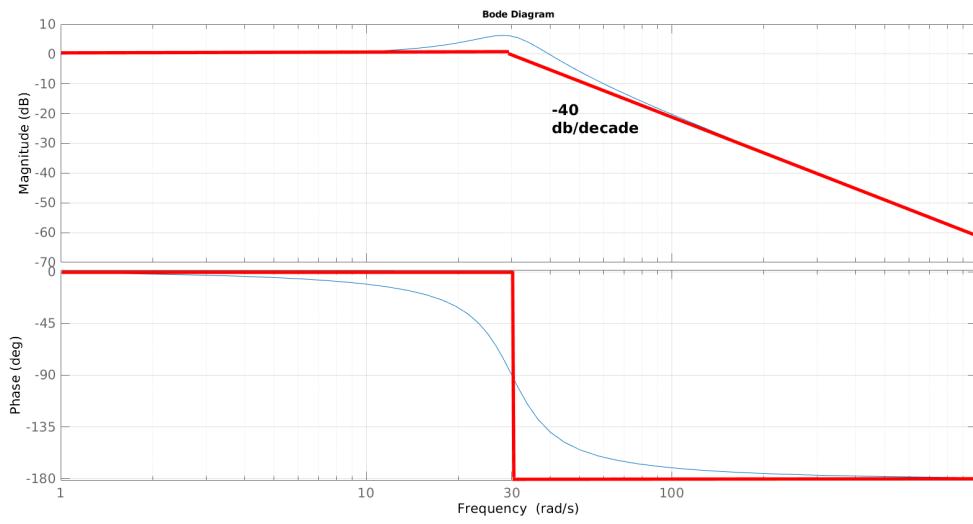


Figure 17: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

Il diagramma complessivo risulta quindi, sommando i contributi:

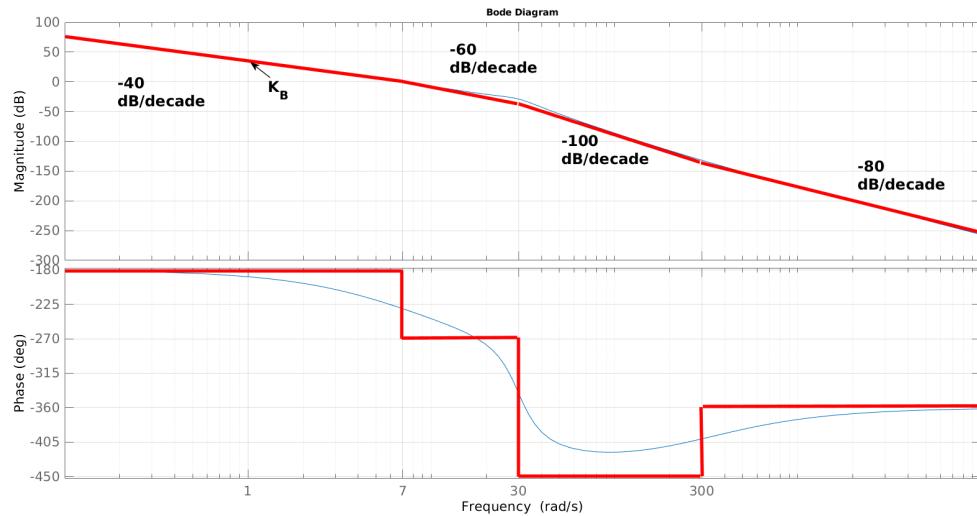


Figure 18: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

ESERCIZIO 3

$$G(s) = \frac{50(5-s)^2}{s(s^2 + 48s + 900)(10s + 5)} \xrightarrow{\text{forma di Bode}} \frac{25(1 - \frac{s}{5})^2}{90s(1 + \frac{12}{225}s + \frac{s^2}{900})(1 + 2s)}$$

Il sistema è stabile. Calcoliamo quindi i contributi al diagramma di Bode:

- $K_B = \frac{25}{90} < 1$: **Offset negativo** in decibel.
- s polo nell'origine.
- $(1 - \frac{s}{5})^2$: zero reale positivo doppio.

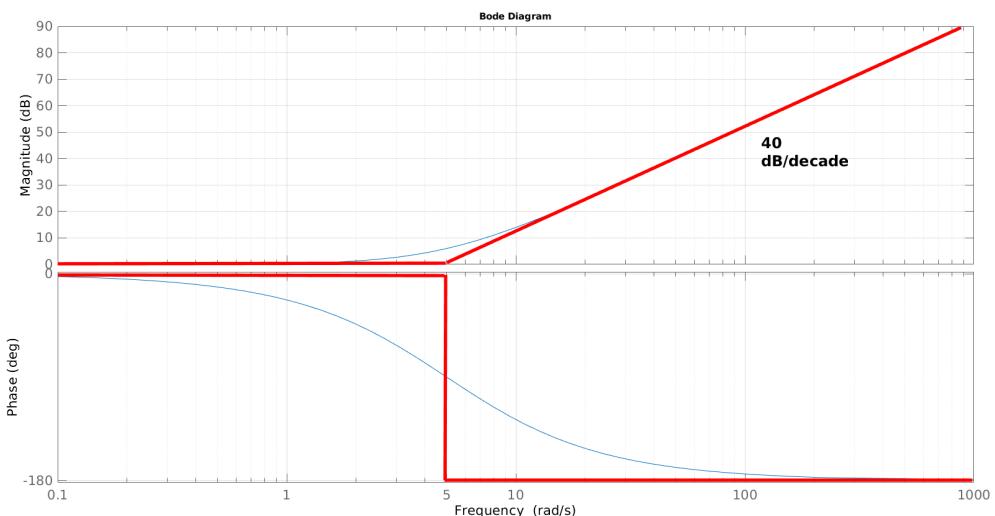


Figure 19: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

- $1 + \frac{12}{225}s + \frac{s^2}{900}$: poli complessi coniugati con $\omega_n = 30\text{rad/s}$, $\zeta = 0.8 > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Non ci sono quindi picchi di risonanza.

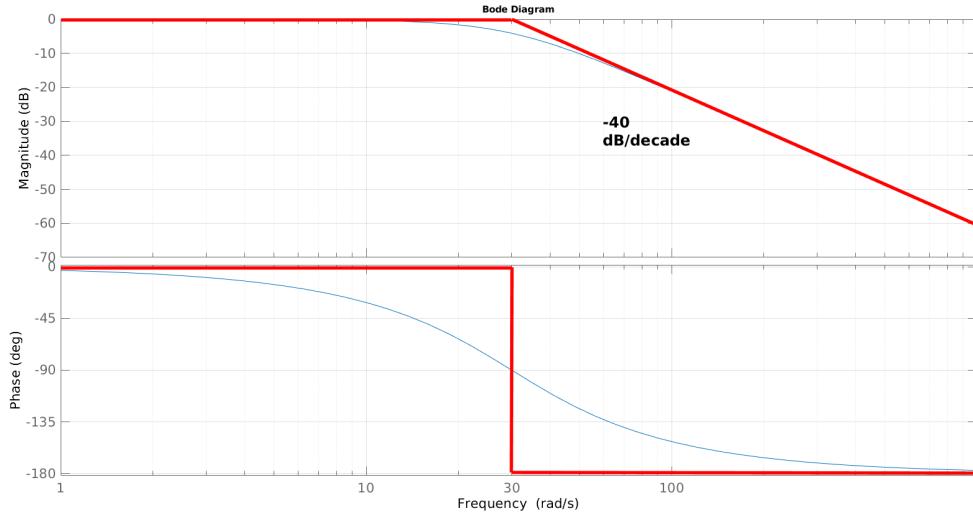


Figure 20: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

- $(1 + 2s)$: polo reale negativo.

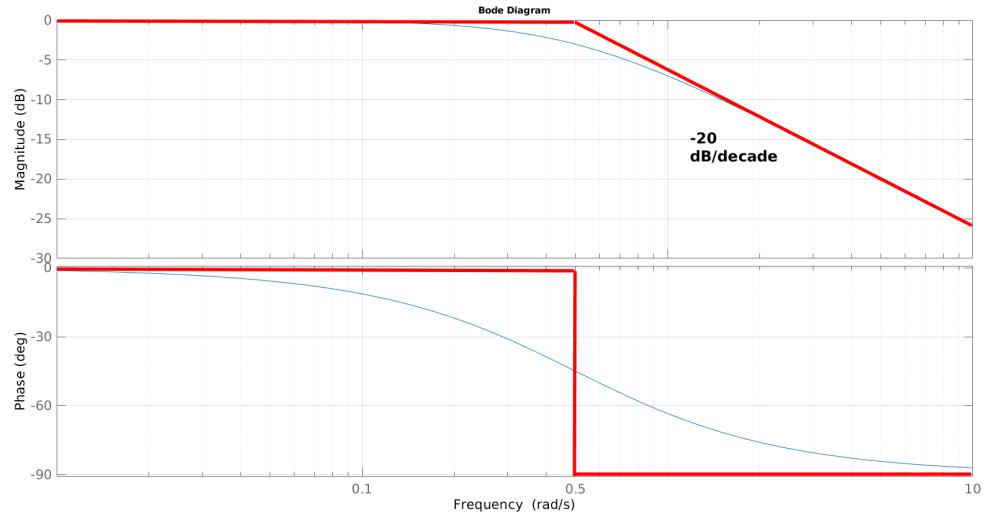


Figure 21: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

Il diagramma complessivo risulta quindi:

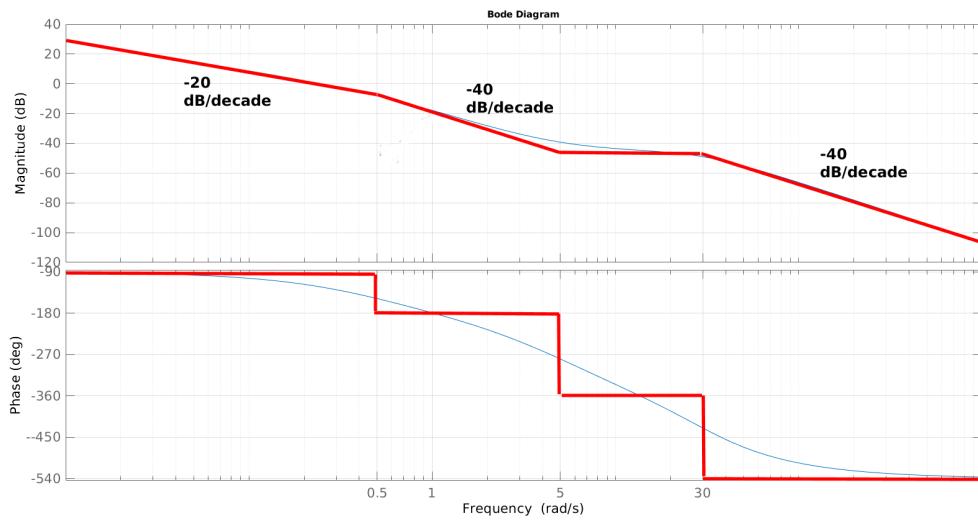


Figure 22: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

Notiamo che **l'intersezione con l'asse verticale $\omega = 1\text{rad/s}$ non coincide con il guadagno di Bode K_B** . Infatti, prima interviene il polo a frequenza $\omega = 0.5\text{rad/s}$.

ESERCIZIO 4

$$G(s) = \frac{s(s+81)}{(1+3s)(s^2 + 1.5s + 9)^2} \xrightarrow{\text{forma di Bode}} \frac{s(1 + \frac{s}{81})}{(1+3s)(1 + \frac{s}{6} + \frac{s^2}{9})^2}$$

Sistema stabile. Calcoliamo i singoli contributi di Bode:

- $K_B = 1$: guadagno di Bode.
- s : zero nell'origine.

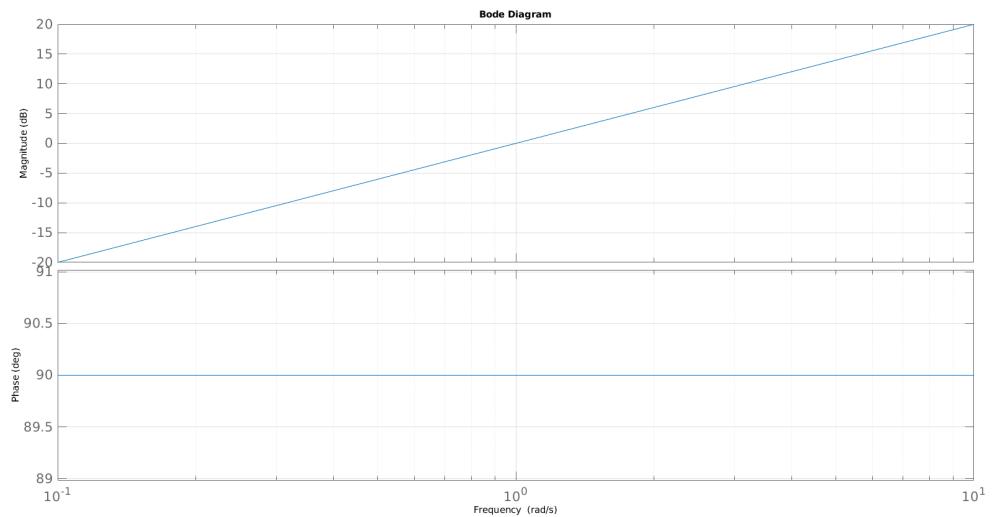


Figure 23: Diagramma asintotico coincidente con quello reale.

- $1 + \frac{s}{81}$: zero reale negativo.

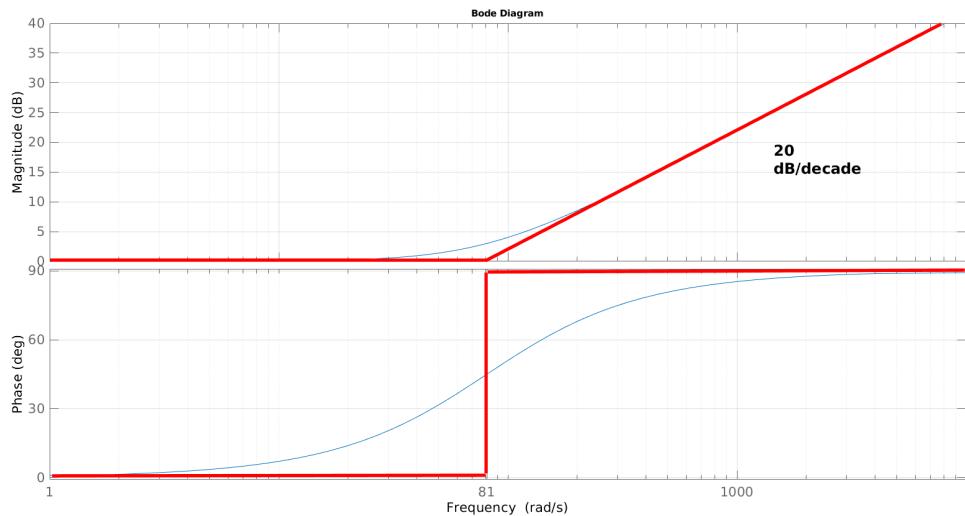


Figure 24: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

- $1 + 3s$: polo reale negativo.

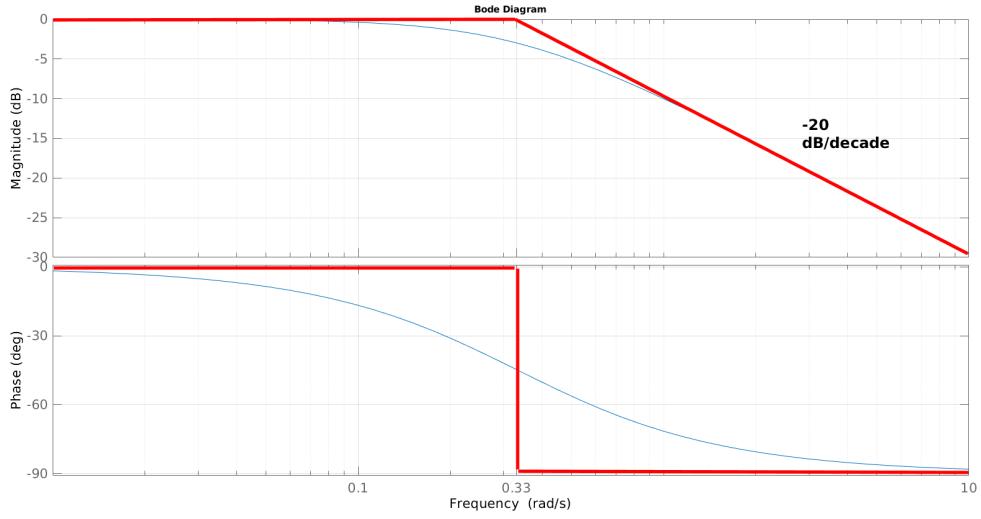


Figure 25: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

- $(1 + \frac{s}{6} + \frac{s^2}{9})^2$: poli **complessi coniugati doppi** con $\omega_n = 3\text{rad/s}$, $\zeta = 0.25 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi abbiamo un picco di risonanza.

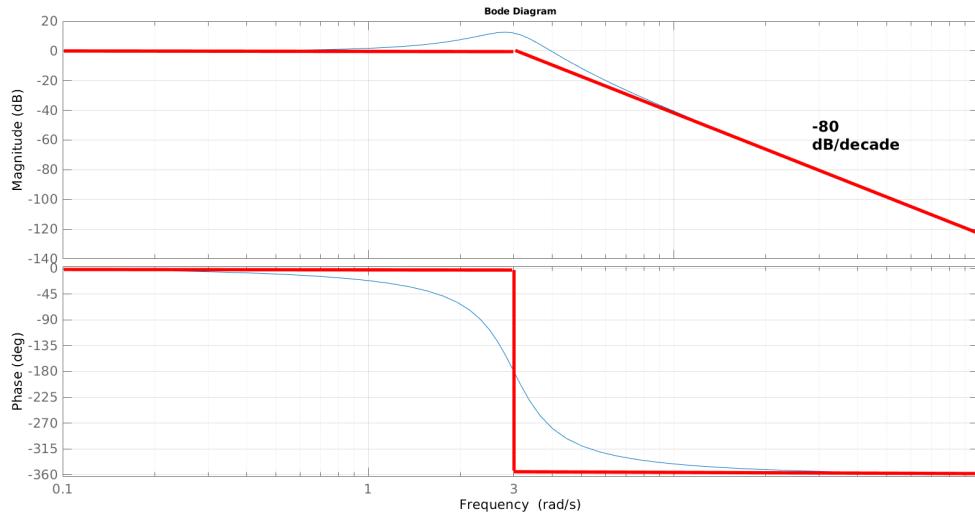


Figure 26: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

Il grafico complessivo risulta quindi:

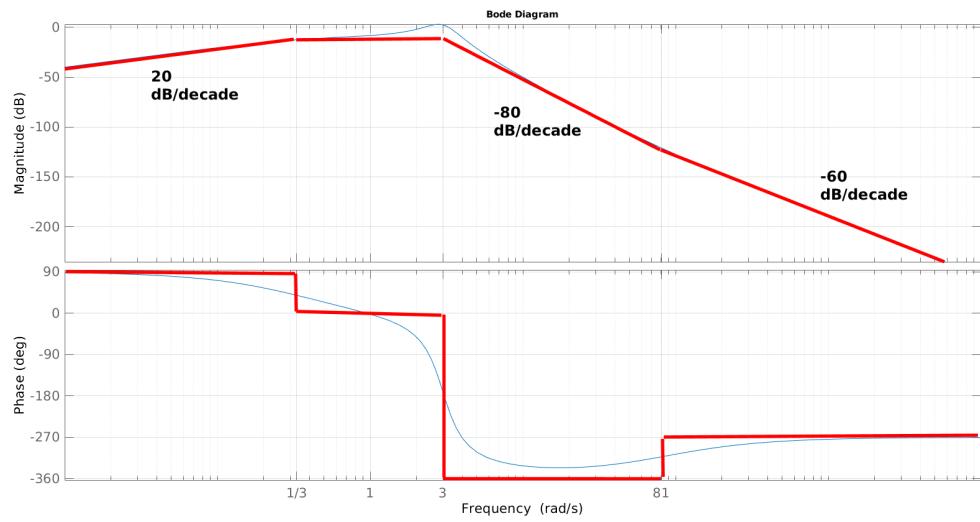


Figure 27: Diagramma asintotico in rosso, reale in blu.

ESERCIZIO 5

$$G(s) = \frac{800(s+1)(s-5)}{s(s^2 + 40s + 400)} \xrightarrow{\text{forma di Bode}} \frac{-10(s+1)(1 - \frac{s}{5})}{s(1 + \frac{s}{20})^2}$$

I contributi di Bode sono:

- $K_B = -10$: **guadagno di Bode negativo.**

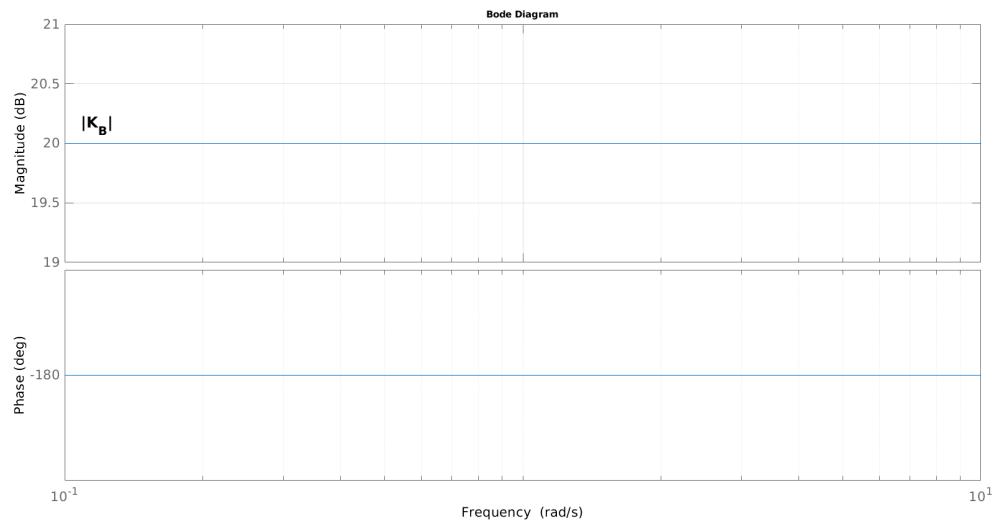


Figure 28: Diagrammi reale e asintotico coincidenti.

- $s + 1$: zero reale negativo con $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$.
- $1 - \frac{s}{5}$: zero reale positivo con $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$.
- s : polo nell'origine.
- $(1 + \frac{s}{20})^2$: polo reale negativo doppio con $\omega_n = 20 \text{ rad/s}$

Il diagramma complessivo risulta quindi:

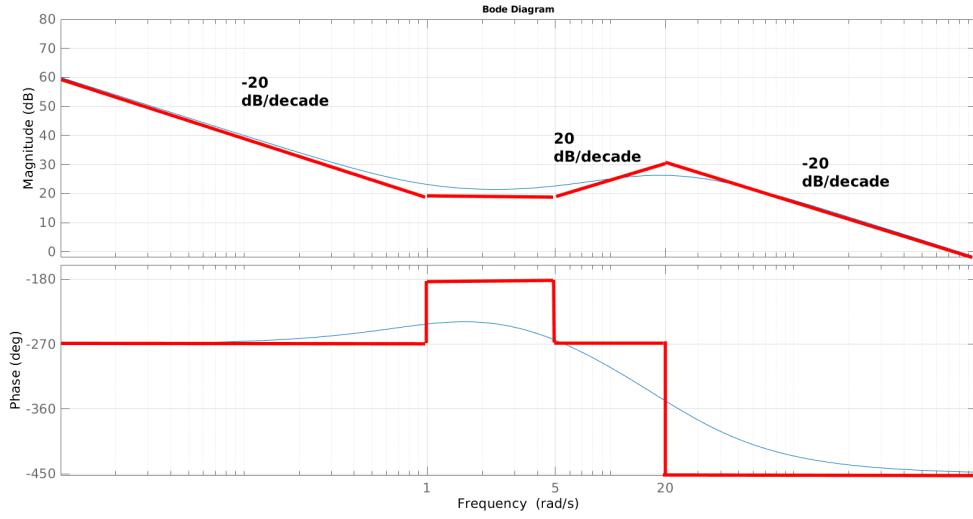


Figure 29: Diagrammi reale in blu e asintotico in rosso.

ESERCIZIO 6

$$G(s) = \frac{100(s^2 + 0.4s + 1)(1 - s)}{s(s + 0.2)(s + 200)} \xrightarrow{\text{forma di Bode}} \frac{2.5(1 + 0.4s + s^2)(1 - s)}{s(1 + 5s)(1 + \frac{s}{200})}$$

I contributi di Bode da considerare sono:

- $K_B = 2.5$: guadagno di Bode.
- s : polo nell'origine.
- $1 + 0.4s + s^2$: zeri complessi coniugati con $\omega_n = 1\text{rad}/s$, $\zeta = 0.2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $1 - s$: zero negativo con $\omega_n = 1\text{rad}/s$.
- $1 + 5s$: polo negativo con $\omega_n = 0.2\text{rad}/s$.
- $1 + \frac{s}{200}$: polo negativo con $\omega_n = 200\text{rad}/s$.

Il diagramma complessivo risulta:

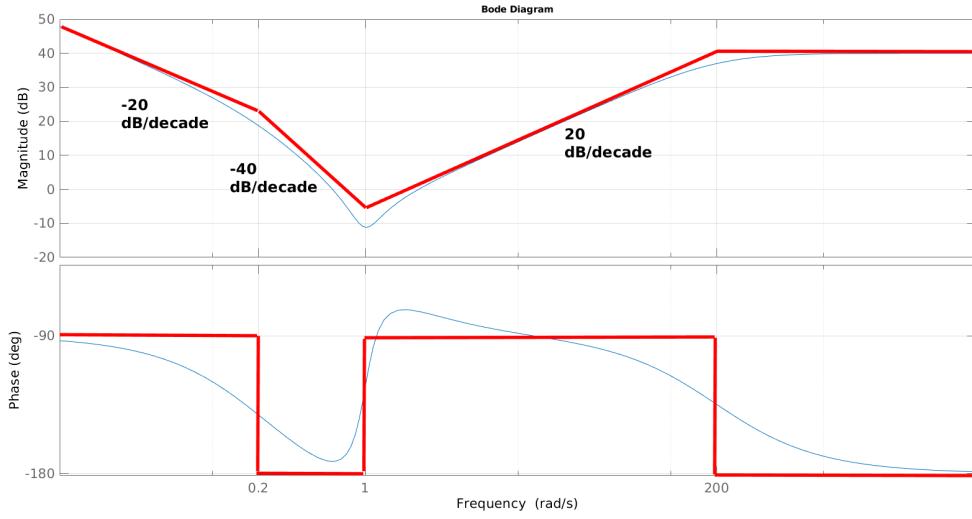


Figure 30: Diagrammi reale in blu e asintotico in rosso.

ESERCIZIO 7

$$G(s) = \frac{400s(s+1)}{(s^2 + 0.12s + 0.04)(s+20)} \xrightarrow{\text{forma di Bode}} \frac{500s(1+s)}{(1+3s+25s^2)(1+\frac{s}{20})}$$

I contributi da considerare sono:

- s : zero nell'origine.
- $K_B = 500$: guadagno di Bode.
- $1 + s$: zero negativo con $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$.
- $1 + 3s + 25s^2$: poli complessi coniugati con $\omega_n = 0.2 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.3 < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $1 + \frac{s}{20}$: polo negativo con $\omega_n = 20 \text{ rad/s}$.

Il diagramma complessivo é il seguente:

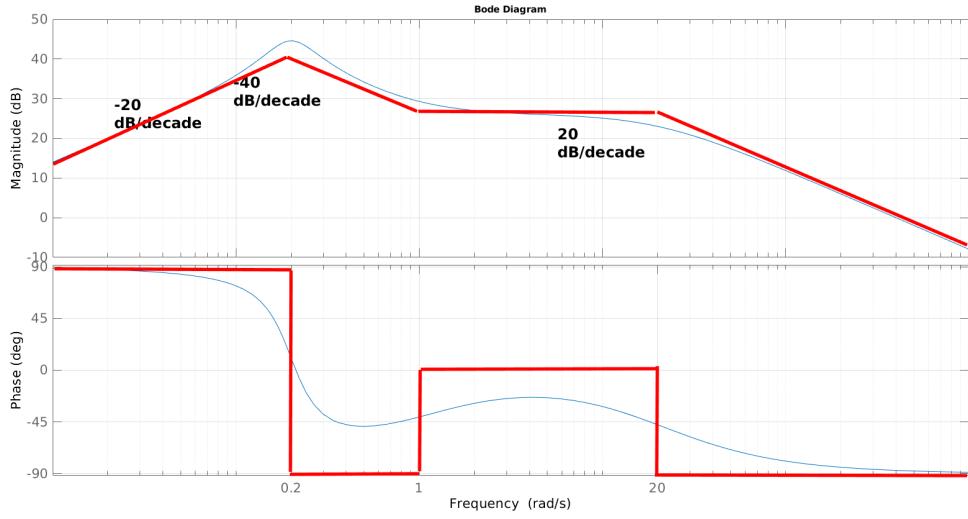


Figure 31: Diagrammi reale in blu e asintotico in rosso.

ESERCIZIO 8

$$G(s) = \frac{32(s^2 - 0.04s + 0.04)}{(s + 0.2)^2(s + 8)} \xrightarrow{\text{forma di Bode}} \frac{4(1 - s + 25s^2)}{(1 + 5s)^2(1 + \frac{s}{8})}$$

I contributi da considerare sono:

- $1 - s + 25s^2$: zeri complessi coniugati a parte reale positiva, con $\omega_n = 0.2\text{rad/s}$, $\zeta = 0.1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $(1 + 5s)^2$: polo doppio a parte reale negativa, con $\omega_n = 0.2\text{rad/s}$.
- $\omega_n = 1 + \frac{s}{8}$: polo con $\omega_n = 8\text{rad/s}$.

Il diagramma complessivo risulta:

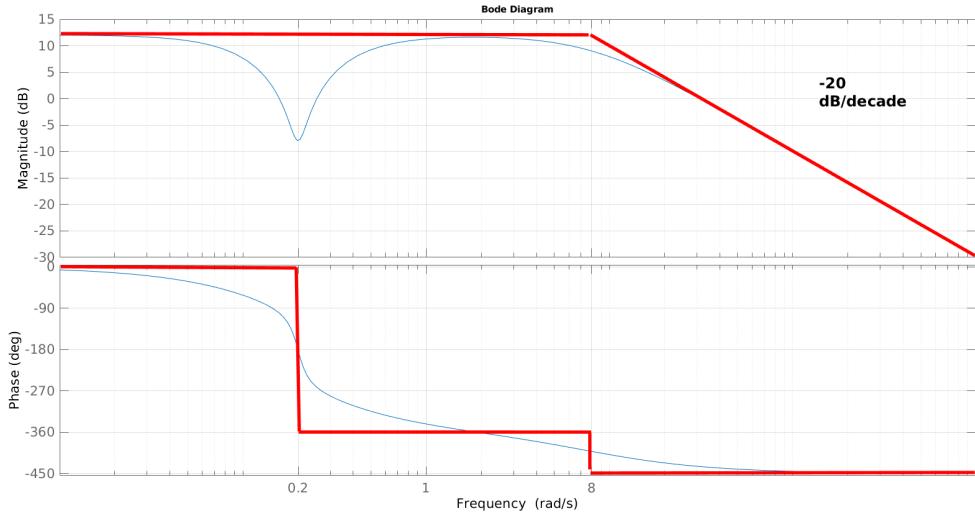


Figure 32: Diagrammi reale in blu e asintotico in rosso.

Supponiamo ora di avere:

$$G(s) = \frac{4K(1 - s + 25s^2)}{(1 + 5s)^2(1 + \frac{s}{8})}, \quad K \in \mathbb{R}$$

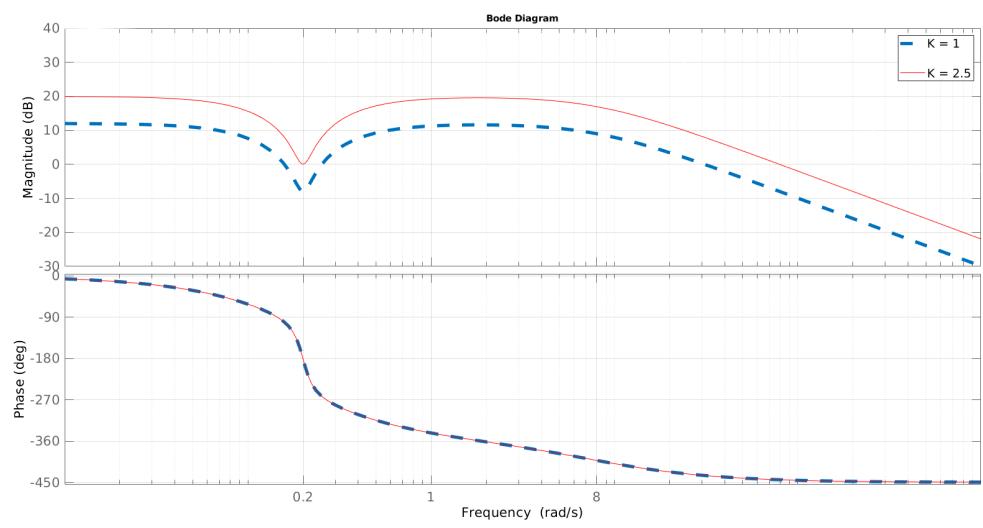
Vogliamo agire sul parametro reale K e fare in modo che, in corrispondenza della pulsazione di risonanza $\omega_r = 0.2\text{rad/s}$, il picco (negativo) passi ad un'ampiezza di 0 dB, ossia che l'effetto della risonanza sia ridotto. Scriviamo la funzione nel dominio delle frequenze:

$$G(j\omega) = \frac{4K(1 - 25\omega^2 - j\omega)}{(1 + 5j\omega)^2(1 + j\frac{\omega}{8})}$$

Calcoliamo l'ampiezza in corrispondenza di $\omega = \omega_r = 0.2\text{rad/s}$ e imponiamo che valga $0\text{dB} = 1$:

$$|G(j\omega_r)| = \frac{4K \times 0.2}{2 \times \sqrt{1 + 0.025^2}} = 1 \Rightarrow K \approx 2.5$$

Il nuovo diagramma risulta identico al precedente, al netto di un offset sulle ampiezze:



Esercitazione 9 del 12/05/2020 - Serie di Fourier per segnali periodici

Calcolare le serie di Fourier (dei prolungamenti periodici) delle seguenti funzioni:

•

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

Notiamo che la funzione è generalmente continua e derivabile su un periodo, quindi sappiamo che è sviluppabile in serie di Fourier in quanto sommabile e quadrato-sommabile. Calcoliamo i coefficienti della serie di Fourier:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \\ f_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{x_0+T} f(x) e^{-j2\pi n f x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-jnx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{xe^{-jnx}}{jn} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi jn} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jnx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{xe^{-jnx}}{jn} + \frac{e^{-jnx}}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\pi e^{-j\pi n} - \pi e^{j\pi n}}{jn} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi e^{-j\pi n} + \pi e^{j\pi n}}{n} j \right] \end{aligned}$$

La funzione $f(x)$ è dispari, quindi i coefficienti di Fourier sono immaginari puri. Possiamo scrivere la serie di Fourier come:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) \\ B_n &= -2\Im\{f_n\} = -2 \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

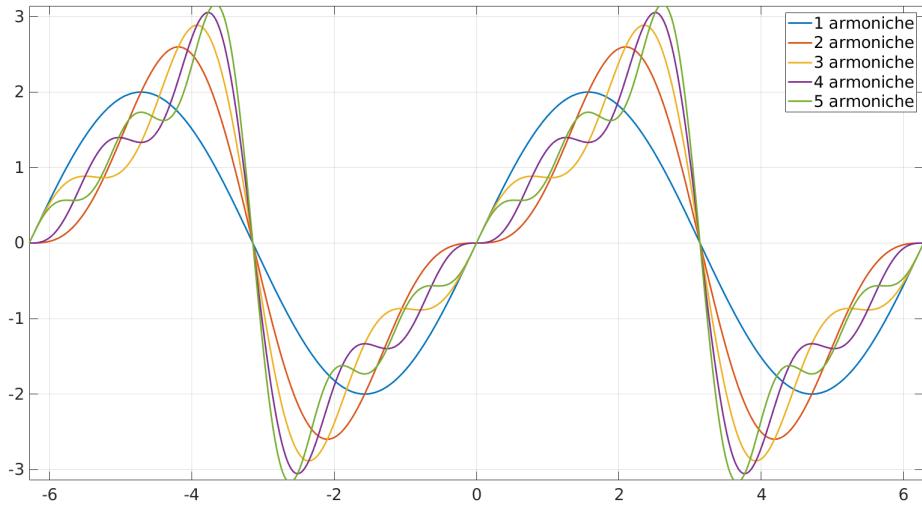
Avremmo potuto calcolare B_n anche con la formula diretta:

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin(2\pi n f x) dx$$

La serie di Fourier converge a $f(x) \forall x \in]-\pi; \pi[$, mentre per $x = \pm\pi$ converge a:

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 0$$

Dal momento che la funzione è discontinua $\forall x = (2n+1)\pi$, in corrispondenza di questi punti avremo il **fenomeno di Gibbs**, ossia oscillazioni dovute al troncamento della serie di Fourier. La potenza è data da:



$$P = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal **teorema di Parseval**. La potenza é finita, pertanto il segnale é un **segnale di potenza**, per cui ha **energia infinita**.

-

$$f(x) = \sin^2(x)$$

Notiamo che possiamo applicare le proprietà trigonometriche:

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Pertanto, abbiamo ottenuto lo sviluppo in serie di Fourier senza applicare le formule di analisi! La serie converge alla funzione in ogni punto (funzione continua e derivabile) La potenza del segnale risulta, per il teorema di Parseval:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(x) dx = f_0^2 + A_2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

-

$$f(x) = |x|, \quad x \in (-\pi; \pi]$$

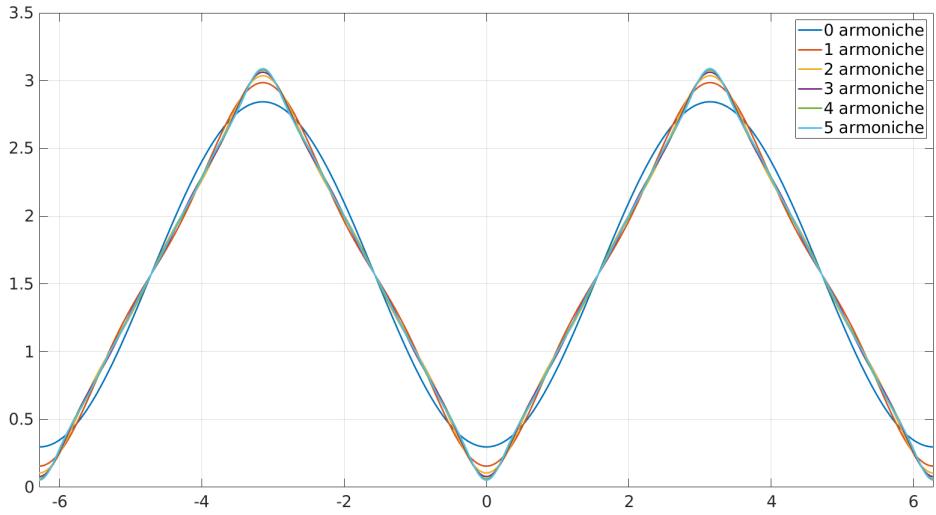


Figure 33: $f(x) = |x|$

La funzione è pari e continua, pertanto la serie di Fourier convergerà alla funzione in tutto il dominio ed avrà forma:

$$f(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi f k x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = -\frac{4}{\pi k^2}$$

assumendo k dispari. In alternativa, si potrebbe scrivere, sostituendo $k = 2n + 1$:

$$f(x) = f_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos((2n+1)x)$$

$$A_n = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$$

La potenza del segnale risulta pari al caso $f(x) = x$. Infatti, elevando le due funzioni al quadrato e integrandole su un periodo si ottiene lo stesso risultato.

$$P = f_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 = \pi^2/3$$

•

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

La funzione é pari, pertanto la serie di Fourier presenterà solo i seguenti termini:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) \\
 f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^3}{3} \\
 A_n &= \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(2\pi f n x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \dots \\
 &= (-1)^n \frac{4}{n^2}
 \end{aligned}$$

La serie converge alla funzione nei punti di continuità, mentre nei punti di discontinuità converge a:

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \pi^2$$

La potenza del segnale é:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^5}{5} = f_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

Come si vede nella figura 34, filtrando il segnale con un filtro avente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

otteniamo un segnale (con un ritardo dovuto al filtraggio) molto simile alla prima armonica (in corrispondenza della frequenza di taglio del filtro). Infatti, sappiamo che filtrare un segnale equivale a:

$$f(x) * h(x) \implies F(s)H(s) \implies F(f)H(f)$$

•

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

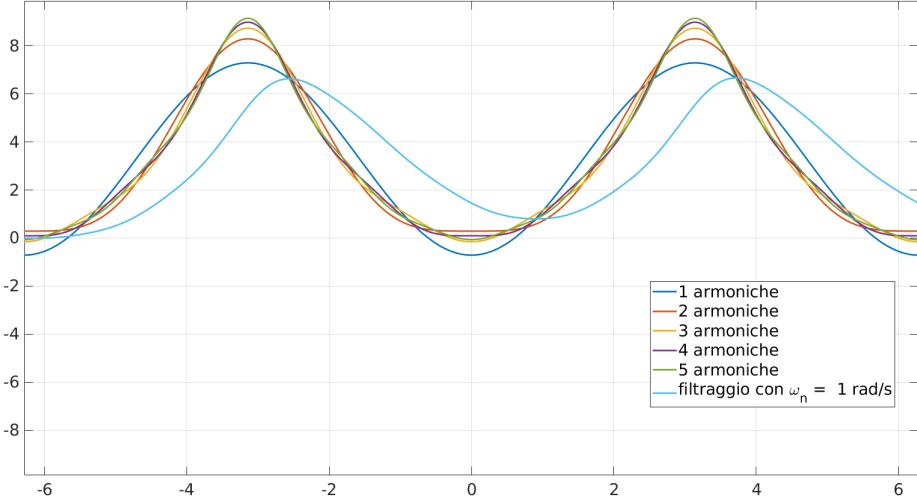


Figure 34: $f(x) = x^2$, $]-\pi, \pi[$

La funzione é pari, pertanto la serie di Fourier presenterà solo i seguenti termini:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) \\
 f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5} \\
 A_n &= \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(2\pi f n x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 \cos(nx) dx = \dots \\
 &= (-1)^n \left[\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4} \right]
 \end{aligned}$$

La serie converge alla funzione nei punti di continuità, mentre nei punti di discontinuità converge a:

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \pi^4$$

La potenza del segnale é:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^9}{9} = f_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

Come si vede nella figura 35, filtrando il segnale con un filtro avente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

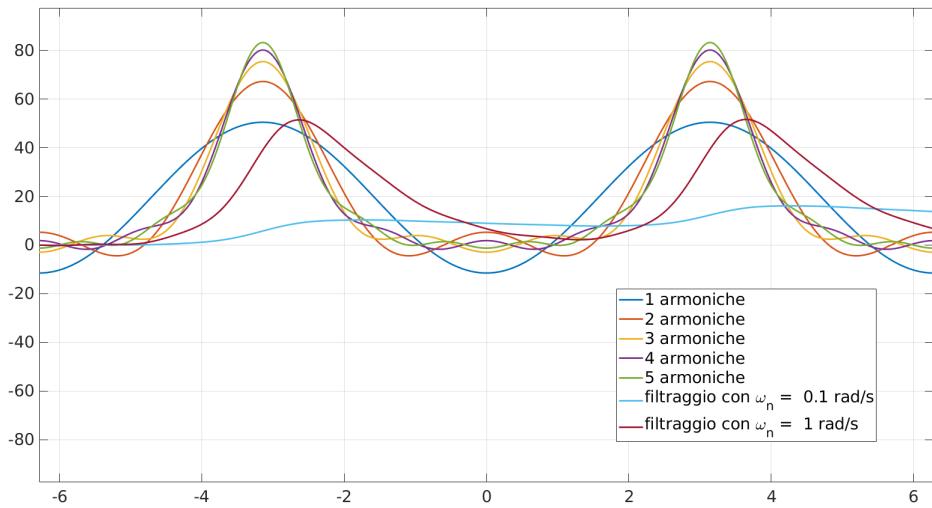


Figure 35: $f(x) = x^4, \quad]-\pi, \pi[$

otteniamo un segnale (con un ritardo dovuto al filtraggio) molto simile alla prima armonica (in corrispondenza della frequenza di taglio del filtro); invece, con un filtro a bassa frequenza rimane la componente continua come unica componente dominante.

$$H_1(s) = \frac{0.1}{s + 0.1}$$

•

$$f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi; \pi]$$

Calcoliamo, per convenienza di calcoli, i coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) \\
f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \\
f_k &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) e^{-j2\pi k f x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jk)x} dx = \frac{e^{(1-jk)\pi} - e^{-(1-jk)\pi}}{2\pi(1-jk)} = \\
&= (-1)^k \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi(k^2 + 1)} (1 + jk) \\
A_k &= 2\Re\{f_k\} = 2(-1)^k \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi(k^2 + 1)} \\
B_k &= -2\Im\{f_k\} = -2k(-1)^k \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi(k^2 + 1)}
\end{aligned}$$

La serie converge alla funzione nei punti di continuità, mentre nei punti di discontinuità converge a:

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$$

La potenza del segnale è:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2\pi} = f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2)$$

Supponiamo ora di avere un circuito elettrico come in Figura 36, con il segnale $f(x)$ in ingresso (per semplicità, sostituiamo $x = t$ per riferirci al tempo). Come si comporta, nel dominio delle frequenze, la tensione sull'induttore dovuta al passaggio della corrente $i(t)$? Chiamiamo $X_C(s) = \frac{1}{Cs}$ l'impedenza del condensatore e $X_L(s) = sL$ quella dell'induttore, e lavoriamo nel dominio delle frequenze. Il parallelo R_2/C ha impedenza:

$$Z_{//}(s) = \frac{X_C(s)R_2}{X_C(s) + R_2}$$

La corrente $I(s)$ risulta facilmente:

$$\begin{aligned}
I(s) &= H_1(s)F(s) = \frac{F(s)}{Z_{//}(s) + X_L(s) + R_1} \\
H_1(s) &= \frac{X_C(s) + R_2}{X_C(s)R_2 + (X_L(s) + R_1)X_C(s) + (X_L(s) + R_1)R_2} = \\
&= \frac{\frac{1}{sC} + R_2}{\frac{R_2}{sC} + \frac{sL + R_1}{sC} + (sL + R_1)R_2} = \frac{1 + sCR_2}{R_2 + (sL + R_1)(1 + sCR_2)}
\end{aligned}$$

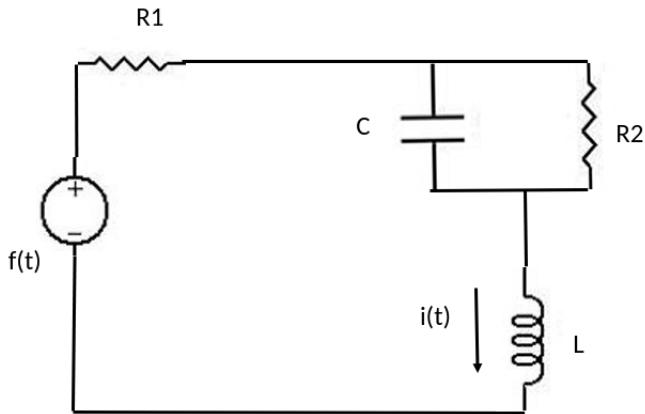


Figure 36: Circuito elettrico per $f(t) = e^t$.

Supponendo i valori numerici $R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $R_1 = 3\Omega$, la funzione di trasferimento risulta:

$$H_1(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)^2}$$

La tensione ai capi dell'induttore risulta allora semplicemente:

$$V_L(s) = X_L(s)I(s) = sLH_1(s)F(s) = sH_1(s)F(s) = H(s)F(s)$$

$$H(s) = \frac{s(s + 1)}{(s + 2)^2}$$

Come si vede dal diagramma di Bode in Figura 37, il circuito elettrico lascia passare le tensioni con pulsazioni superiori a 2 rad/s, cioè doppie della pulsazione del segnale ($\omega = \frac{2\pi}{T} = 1rad/s$). L'effetto sul segnale $f(t)$ nel dominio del tempo è evidenziato dalla composizione armonica in Figura 38: le armoniche a bassa frequenza sono tagliate.

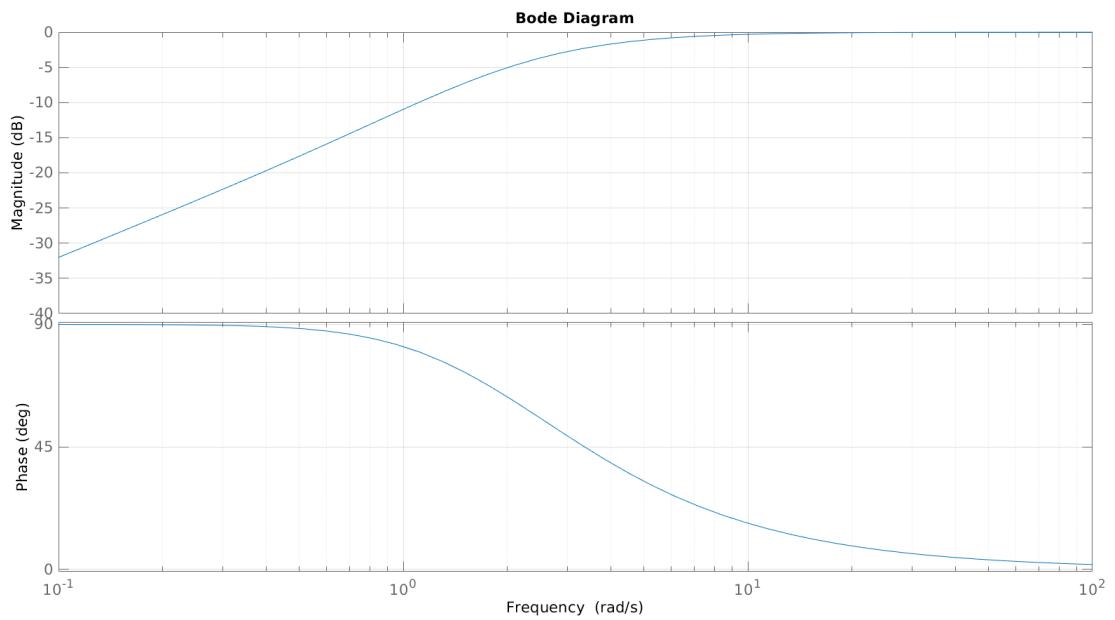


Figure 37: Diagramma di Bode per $H(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)^2}$

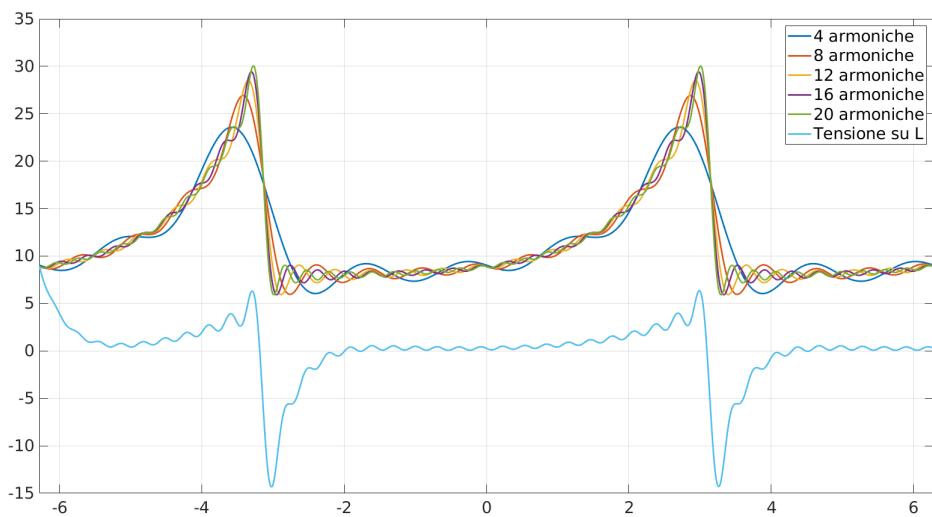


Figure 38: $f(t) = e^t$

Esercitazione 10 - Trasformata di Fourier e campionamento

Esercizi sul calcolo delle trasformate

Calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

- $x(t) = \delta_{-1}(t-1)e^{-2t} + \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t+2)$

Possiamo riscrivere la funzione come:

$$x(t) = \delta_{-1}(t-1)e^{-2t} - \Pi\left(\frac{t+1}{2}\right)$$

Ricordando che:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\delta_{-1}(t)) &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(1 + sign(t))\right) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \\ \mathcal{F}(y(t)e^{j2\pi\lambda t}) &= \mathcal{Y}(f-\lambda), \quad \mathcal{F}(y(t)) = \mathcal{Y}(f) \\ \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right) &= Tsinc(fT) = T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \\ \mathcal{F}(y(t+\tau)) &= \mathcal{F}(y(t))e^{j2\pi f\tau}\end{aligned}$$

possiamo calcolare direttamente:

$$\mathcal{F}(x(t)) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{e^{-j2\pi f-2}}{j2\pi f + 2} - 2sinc(2f)e^{j\pi f}$$

- $x(t) = \Pi\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

Ricordiamo la proprietà:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(y(t)) &= \mathcal{Y}(f) \\ \mathcal{F}(y(\lambda t)) &= \frac{1}{\lambda}\mathcal{Y}(f/\lambda)\end{aligned}$$

Otteniamo allora:

$$\begin{aligned}y(t) &= \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) \\ \mathcal{Y}(f) &= 2e^{-j2\pi f}sinc(2f) \\ \mathcal{F}(x(t)) &= \mathcal{F}(y(2t)) = e^{-j\pi f}sinc(f)\end{aligned}$$

In alternativa, avremmo potuto trasformare la funzione come:

$$\begin{aligned}x(t) &= \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ \mathcal{F}(x(t)) &= e^{-j\pi f}sinc(f)\end{aligned}$$

•

$$x(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Il segnale é a supporto compatto ed é un **segnale di energia**. Applichiamo la formula di analisi per calcolare la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Lambda(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-1}^0 (t+1)e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^1 (-t+1)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \left[-\frac{te^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{te^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \right]_0^1 + \frac{1}{j2\pi f} \int_{-1}^0 e^{-j2\pi ft} dt + \\ &\quad - \frac{1}{j2\pi f} \int_0^1 e^{-j2\pi ft} dt + \left[-\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \right]_{-1}^1 = \\ &= -\frac{e^{j2\pi f}}{j2\pi f} + \frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f} - \frac{1}{(j2\pi f)^2} \left\{ \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-1}^0 - \left[e^{-j2\pi ft} \right]_0^1 \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{j2\pi f} [e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}] = \frac{1}{(2\pi f)^2} (2 - e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi f)^2} (2 - 2\cos(2\pi f)) = \frac{4\sin^2(\pi f)}{(2\pi f)^2} = \text{sinc}^2(f) = \mathcal{F}^2\{\Pi(t)\} \end{aligned}$$

Il segnale considerato é un segnale molto importante nella teoria del filtraggio ed é chiamato **funzione triangolo (impulso triangolare)**. Avremmo potuto calcolare la trasformata di Fourier anche notando (per via grafica) che:

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau)\Pi(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^1 \Pi(\tau)\Pi(t-\tau)d\tau = \Lambda(t)$$

e applicando la proprietà di convoluzione della trasformata:

$$\mathcal{F}(x(t) * y(t)) = \mathcal{F}(x(t))\mathcal{F}(y(t))$$

Esercizi su filtraggio e campionamento

- Consideriamo il segnale $f(t) = \sin^2(\pi t)$. E' possibile campionarlo ad una frequenza di campionamento tale che la ricostruzione sia perfetta¹?

Notiamo che il segnale é esprimibile come:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi t) \implies \mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{1}{4}(\delta(f-1) + \delta(f+1))$$

¹Al netto dell'errore di quantizzazione!

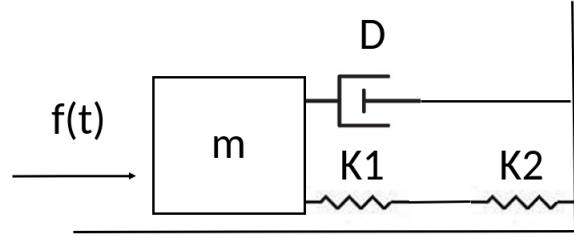


Figure 39: Circuito meccanico per il segnale $f(t) = \sin^2(\pi t)$.

I coefficienti della trasformata sono gli stessi della serie esponenziale di Fourier².

Supponiamo che il segnale sia dato in ingresso, come forza, al circuito meccanico di Figura 39. Siamo interessati allo spostamento $x(t)$ della massa m come uscita. Indicando con $x_{1,2}$ le deformazioni delle molle $K_{1,2}$, e con K_0 la costante elastica equivalente della molla vista dal corpo di massa m , applichiamo il bilancio delle forze:

$$\begin{aligned} f(t) &= m \frac{d^2(x(t))}{dt^2} + D \frac{dx(t)}{dt} + K_0 x(t) \\ K_1 x_1(t) &= K_2 x_2(t) \\ x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

Si dimostra³ che vale:

$$K_0 = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

Ossia gli elementi in serie nei circuiti meccanici si comportano come se fossero in parallelo in un equivalente circuito elettrico (e viceversa). Passando al dominio di Laplace, e assumendo i valori numerici $m \approx 0\text{kg}$, $D = 1\text{Ns/m}$, $K_1 = K_2 = 2\text{N/m}$, otteniamo la funzione di trasferimento che lega uscita ed ingresso:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s+1}$$

avente il diagramma di Bode rappresentato in figura 40 Consideriamo per semplicità lo spettro del filtro ideale. Valutiamo l'effetto sullo spettro di frequenza del segnale in ingresso (replicando lo spettro del filtro per le frequenze negative). Ricordiamo che:

$$f(t) * h(t) \implies F(f)H(f)$$

²I coefficienti della serie in forma goniometrica devono essere dimezzati, dalle formule di A_k, B_k

³più facilmente trascurando i termini di forza esterna e smorzamento, applicando il bilancio delle forze alle singole molle

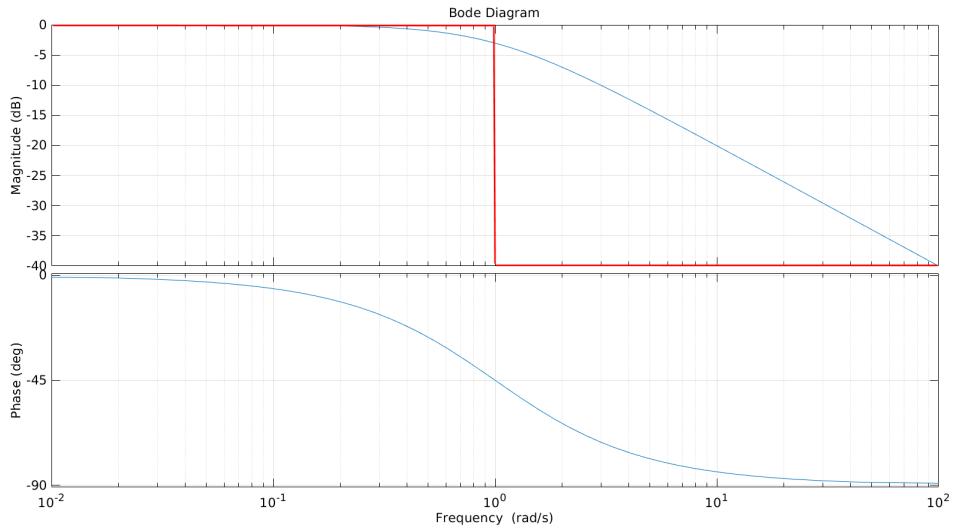


Figure 40: Filtro ideale del circuito in Figura 39

quindi è sufficiente calcolare il prodotto degli spettri di frequenza! Il filtro avrà trasformata:

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_t}\right) \implies h(t) = 2f_t \text{sinc}(2f_t t)$$

$$f_t = \frac{1}{2\pi}$$

Il risultato è mostrato in Figura 41. Le componenti oscillatorie vengono escluse ⁴. Un filtro di ricostruzione per questo segnale filtrato può essere del tipo:

$$H_{ric}(f) = \frac{1}{f_c} \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right), \quad 2 < f_L < f_c - 2, f_c > 2$$

- Consideriamo lo schema a blocchi in Figura 42. Vogliamo determinare lo spettro del segnale di uscita $v(t)$ per via grafica. I segnali in ingresso e le risposte impulsive dei filtri sono:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sin(2\pi t) \\ u_2(t) &= \cos(2\pi t) \\ u(t) &= \sin(2\pi t)\cos(2\pi t) \\ h_1(t) &= 2\text{sinc}(4t) \\ h_2(t) &= \text{sinc}^2(t)e^{j4\pi t} \end{aligned}$$

⁴Fortemente attenuate, ricordare che il diagramma di Bode esprime le ampiezze in decibel!

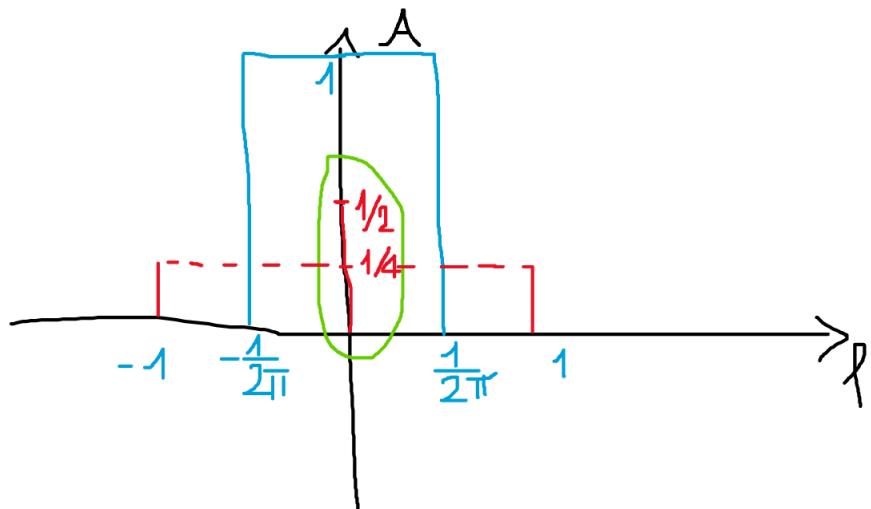


Figure 41: Risultato del filtraggio con il filtro in Figura 40. In rosso lo spettro del segnale di partenza, in blu il filtro, in verde le armoniche in uscita.

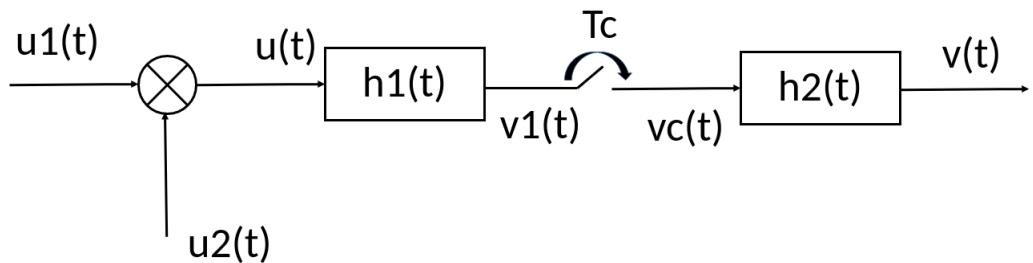


Figure 42

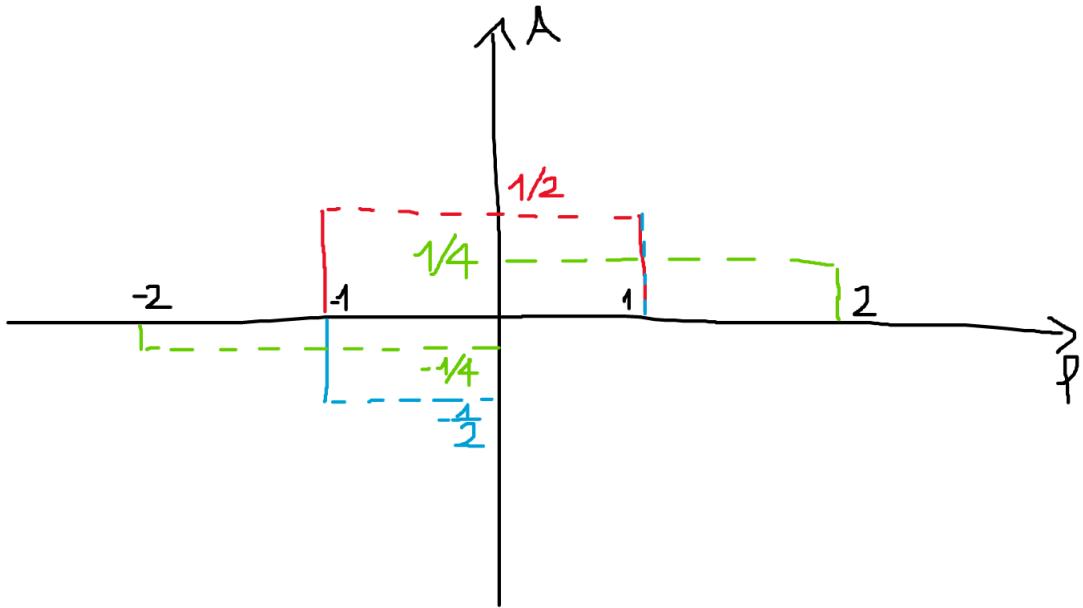


Figure 43: $U(f) = U_1(f) * U_2(f)$ in verde, con $U_1(f)$ in blu e $U_2(f)$ in rosso.

La figura 43 rappresenta lo spettro del segnale $u(t)$, ottenuto come **convoluzione** $U(f) = U_1(f) * U_2(f)$. Applichiamo ora il filtro $H_1(f)$, calcolando lo spettro $V_1(f)$ di $v_1(t)$ come prodotto degli spettri $H_1(f)U(f)$. Abbiamo:

$$H_1(f) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{4}\right)$$

L'effetto è dimezzare le ampiezze delle armoniche del segnale in ingresso, come mostrato in Figura 44. Ora dobbiamo campionare il segnale. Supponiamo che il periodo di campionamento sia $T_c = 0.1s$ ($f_c = 10Hz$). **Campionare il segnale a questa frequenza significa replicarne lo spettro alla stessa frequenza**, secondo la formula:

$$samp_{f_c}(x(t)) \implies f_{crep_{f_c}}(X(f))$$

Pertanto, come si vede in Figura 45, non si verifica aliasing⁵. Infine, applichiamo il filtro in uscita:

$$H_2(f) = \Lambda(f - 4)$$

Otteniamo quindi lo spettro del segnale in uscita $V(f)$ nullo ($\mathbf{V}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$) eseguendo il prodotto degli spettri di filtro e ingresso (Figura 45).

⁵Se avessimo campionato a 4 Hz, avremmo avuto aliasing e l'annullamento dello spettro!

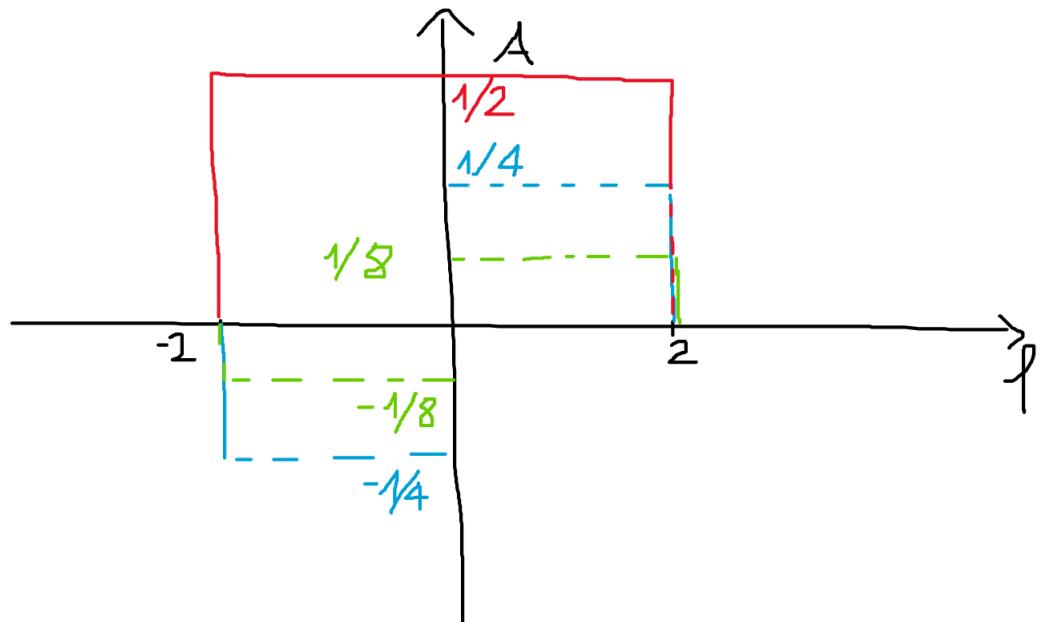


Figure 44: $V_1(f) = U(f)H_1(f)$ in verde, con $U(f)$ in blu e $H_1(f)$ in rosso.

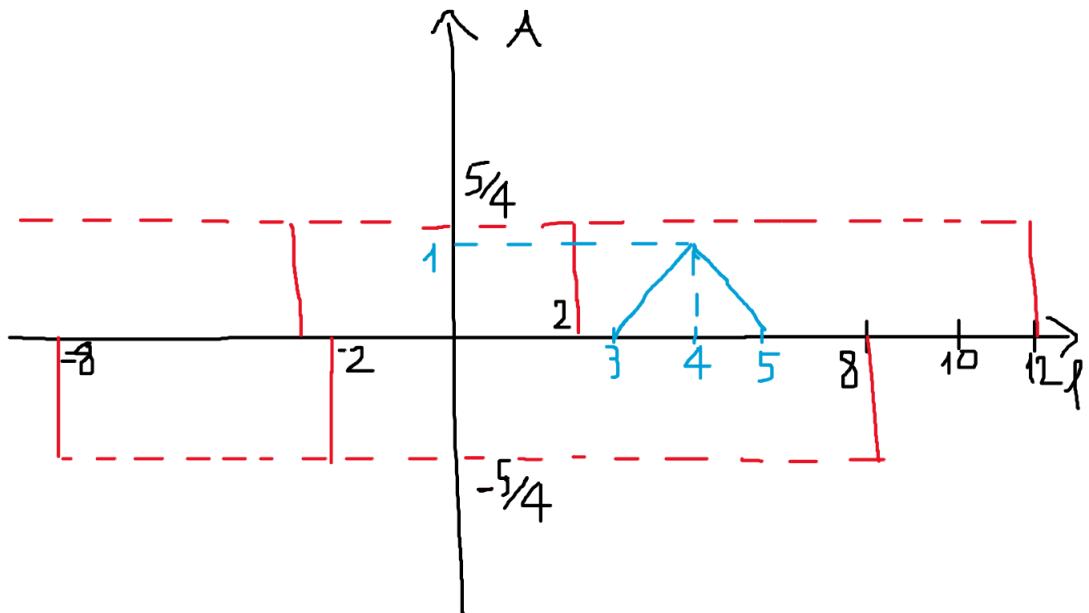


Figure 45: $V_c(f)$ ottenuto campionando $v_1(t)$ a $f_c = 10\text{Hz}$ (rosso); $H_2(f)$ in blu; $V(f)$ in verde.

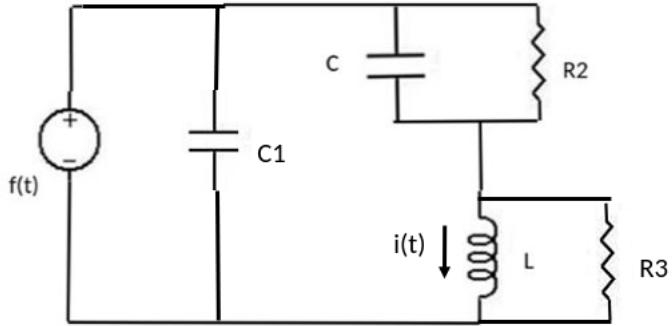


Figure 46: Circuito per il segnale $e^{-|t|}$.

- Consideriamo il segnale $f(t) = e^{-|t|}$. Si tratta di un segnale di energia, in quanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = [e^{2t}]_{-\infty}^0 - [e^{-2t}]_0^{+\infty} = 1 < +\infty$$

La trasformata di Fourier risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-j2\pi f)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{(-1-j2\pi f)t} dt = \\ &= \frac{1}{1-j2\pi f} [e^{(1-j2\pi f)t}]_{-\infty}^0 + \frac{1}{-1-j2\pi f} [e^{(-1-j2\pi f)t}]_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{1-j2\pi f} + \frac{1}{1+j2\pi f} \end{aligned}$$

Infatti, la funzione è scomponibile in un esponenziale causale e uno anticausale. Il segnale ha banda infinita, pertanto **non è ricostruibile perfettamente dopo il campionamento**. Supponiamo di applicare il segnale in ingresso (di tensione) al circuito elettrico in Figura 46. Come segnale di uscita, siamo interessati alla corrente $i(t)$ nell'induttore. Notiamo che possiamo trascurare il condensatore C_1 , in quanto la tensione $f(t)$ è applicata al ramo di nostro interesse con i due paralleli. Svolgiamo i calcoli per i paralleli, usando la notazione delle impedenze complesse:

$$\begin{aligned} Z_{CR_2}(s) &= \frac{R_2 X_C(s)}{X_C(s) + R_2} = \frac{\frac{R_2}{sC}}{\frac{1}{sC} + R_2} = \frac{R_2}{1 + sCR_2} \\ Z_{LR_3}(s) &= \frac{R_3 X_L(s)}{R_3 + X_L(s)} = \frac{sLR_3}{R_3 + sL} \end{aligned}$$

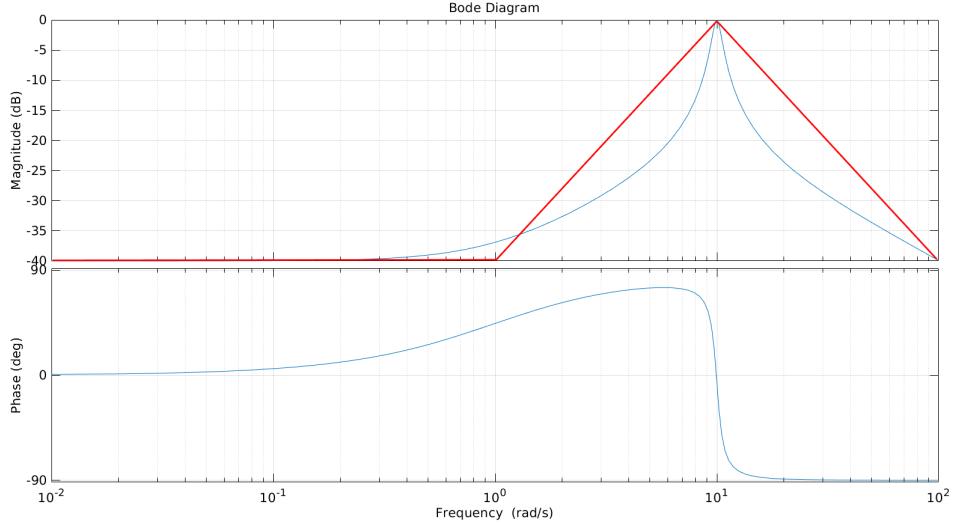


Figure 47: Diagramma di Bode per il circuito di Figura 46 (in rosso il diagramma asintotico).

La tensione ai capi del parallelo di nostro interesse é data, per la regola del partitore di tensione, da:

$$V_L(s) = V_{R_3}(s) = \frac{Z_{LR_3}(s)}{Z_{LR_3}(s) + Z_{CR_2}(s)} F(s)$$

La corrente di interesse risulta, nel dominio di Laplace:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V_L(s)}{X_L(s)} = \frac{1}{X_L(s)} \frac{Z_{LR_3}(s)}{Z_{LR_3}(s) + Z_{CR_2}(s)} F(s) \\ &= \frac{1}{sL} \frac{\frac{sLR_3}{R_3+sL}}{\frac{sLR_3(1+sCR_2)+R_2(R_3+sL)}{(1+sCR_2)(R_3+sL)}} F(s) = \frac{1}{sL} \frac{sLR_3(1+sCR_2)}{sLR_3(1+sCR_2) + R_2(R_3+sL)} F(s) = \\ &= \frac{R_3(1+sCR_2)}{sLR_3(1+sCR_2) + R_2(R_3+sL)} F(s) = \frac{sCR_2R_3 + R_3}{s^2LCR_2R_3 + sL(R_3 + R_2) + R_2R_3} F(s) = \\ &= \frac{R_3(1+sR_2C)}{R_2R_3 \left(LCs^2 + sL \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + 1 \right)} = \frac{(1+sR_2C)}{R_2 \left(LCs^2 + sL \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + 1 \right)} = H(s)F(s) \end{aligned}$$

Assumiamo i valori numerici $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 1k\Omega$, $C = 10mF$, $L = 1H$, ottenendo quindi:

$$H(s) \approx \frac{s+1}{100 \left(\frac{s^2}{100} + \frac{s}{100} + 1 \right)}$$

Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento é riportato in Figura 47. Ricordiamo che il diagramma di Bode rappresenta le ampiezze in decibel, pertanto l'andamento del

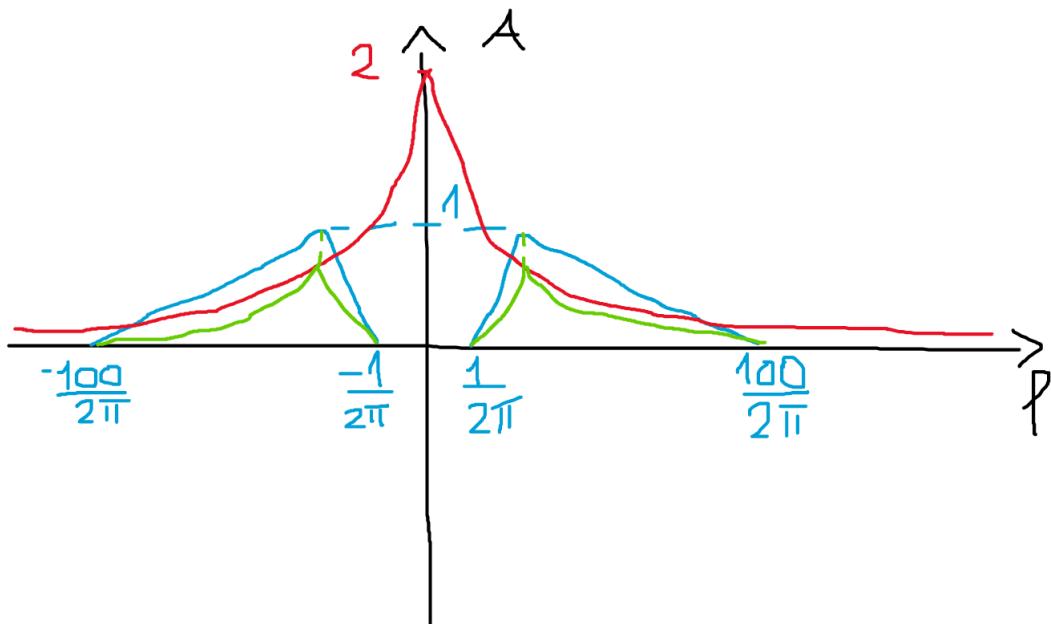


Figure 48: Spettri di frequenza per la funzione $e^{-|t|}$ e il circuito in Figura 46 (filtro in blu, segnale in ingresso in rosso, spettro uscente in verde).

modulo delle ampiezze è di tipo esponenziale (potenze di 10)! Per semplicità, supponiamo di approssimare il filtro con una funzione simil-triangolo che mantenga la stessa ampiezza di picco. Consideriamone la versione replicata anche per le frequenze negative, ottenendo così il filtro in Figura 48. Il segnale così ottenuto ha banda limitata pari a 100 Hz, pertanto può essere campionato a frequenza f_c e poi ricostruito con un filtro $H_{ric}(f)$ secondo questi requisiti:

$$f_c > 200\text{Hz}$$

$$H_{ric}(f) = \frac{1}{f_c} \Pi \left(\frac{t}{2f_L} \right)$$

$$100 < f_L < f_c - 100$$