Trasformata di Laplace

Università di Verona, Corso di Sistemi

Anno Accademico 2019-2020, docenti prof. Paolo Fiorini e dott. Bogdan Maris

Indice

1 Trasformata di Laplace unilatera 2
2 Codice Matlab per il calcolo simbolico della trasformata di Laplace 11
3 Uso della trasformata di Laplace per sistemi LTI causali — analisi nel dominio complesso 12
4 Antitrasformata di Laplace (unilatera) 17
5 Codice Matlab per il calcolo simbolico dell'antitrasformata di Laplace 24

1 Trasformata di Laplace unilatera

La trasformata di Laplace è uno strumento matematico che permette di trasformare le equazioni differenziali in equazioni algebriche (vedi 3).

Definizione 1.1 (Trasformata di Laplace unilatera) *Sia $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, una funzione ottenuta come somma di una funzione di variabile reale a valori reali o a valori complessi, localmente sommabile su $[0, \infty)^*$, e di un insieme finito di segnali polinomiali. Definiamo* trasformata di Laplace unilatera *del segnale v la funzione complessa a valori complessi $V : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*

$$V(s) := \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

In generale viene indicata come $\mathscr{L}\left[v(t)\right](s)$ per mettere in risalto la sua dipendenza dalla funzione v e nel testo viene spesso citata con l'abbreviazione 'TdL'.
Pur imponendo la condizione di sommabilità locale della funzione v, l'integrale che compare nella definizione può comunque divergere per certi valori di $s \in \mathbb{C}$ e si rende quindi necessario definire una regione del piano complesso per cui l'integrale è ben definito, cioè

$$\left| \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t \right| < \infty$$

Definizione 1.2 (Regione di convergenza) *L'insieme di tutti i valori complessi $s \in \mathbb{C}$ per cui l'integrale presente nella definizione 1.1 è convergente si definisce* regione di convergenza *(RdC).*

Si può dimostrare che RdC è sempre un semipiano dei aperto dei complessi del tipo

$$\mathrm{RdC} = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{Re}(s) > \alpha\}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è chiamata *ascissa di convergenza* (Figura 2).
Il teorema seguente dimostra questo risultato per una combinazione lineare di esponenziali complesse che è sufficiente a coprire la maggior parte delle situazioni che incontreremo durante il corso di 'Sistemi'.

Teorema 1.1 (Regione di convergenza della trasformata di Laplace unilatera di una combinazione lineare di funzioni esponenziali) *Sia una combinazione lineare di esponenziali del tipo*

$$v(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$$

dove $\lambda = \sigma_i + j\omega_i \in \mathbb{C}$. Allora la regione di convergenza di $\mathscr{L}\left[v(t)\right](s)$ è un semipiano destro RdC $= \{s \in \mathbb{C} \mid \mathcal{Re}(s) > \alpha\}$ tale per cui si ha che $\alpha > \mathcal{Re}(\lambda_i)$, per $i = 1, \dots, n$.

Dimostrazione La trasformata di $v(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$ è

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} e^{-st}\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{0^-}^{\infty} e^{\lambda_i t} e^{-st}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$^*\int_a^b |v(t)|\mathrm{d}t < \infty$ per ogni $a, b \in 0, \infty)$

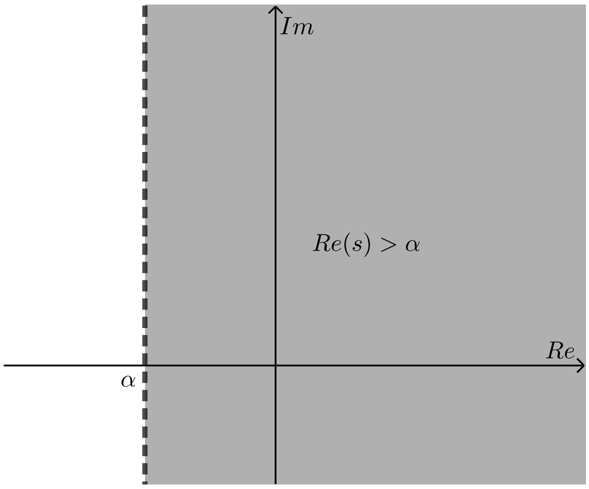

Figura 1 Regione di convergenza come semipiano.

Prendiamo quindi un generico i e poniamo $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ e $s = \sigma + j\omega$. Allora per un qualsiasi $i = 1, \ldots, n$ il modulo dell'integrale è

$$\left|\int_{0^-}^{\infty} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t\right| = \left|\int_{0^-}^{\infty} e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t} \mathrm{d}t\right|$$
$$= \left|\left(\frac{e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega}\Bigg|_{0^-}^{\infty}\right)\right|$$

che corrisponde a

$$\left|\lim_{t\to\infty} \frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t} e^{(j\omega_i - j\omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} - \frac{1}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega}\right|$$

che converge per $\sigma_i - \sigma < 0$ cioè $\sigma_i < \sigma$; ma poiché $\sigma = \mathcal{R}e(s)$ abbiamo che l'integrale è ben definito per ogni $s \in \mathbb{C}$ per cui $\mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(\lambda_i),\ i = 1, \ldots, n \quad \square$

Osservazione 1.1 I sistemi BIBO stabili sono tali per cui la RdC contiene l'asse immaginario, cioè $j\omega \in \text{RdC},\ \omega \in \mathbb{R}$.
Infatti l'ascissa di convergenza è il più piccolo numero complesso per cui $\mathcal{R}e(\lambda_i) < \alpha,\ i = 1, \ldots, n$. poiché $\mathcal{R}e(\lambda_i) < 0$, consegue che esiste sempre un $\alpha \in \mathbb{R}$ la cui parte reale è minore di 0 ma maggiore della parte reale di ogni λ_i.

Osservazione 1.2 Alla funzione nel dominio del tempo $v(t), t \in \mathbb{R}$ la trasformata di Laplace (unilatera) associa la funzione nel dominio dei complessi $V(s), s \in \mathbb{C}$

$$v(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} V(s)$$

1.1 Proprietà della trasformata di Laplace

In questo paragrafo useremo alternativamente una delle notazioni $\mathscr{L}[v(t)]$ oppure $V(s)$, in base al contesto.

1. **Linearità** Se v_1, v_2 ammettono TdL, rispettivamente V_1 e V_2, allora anche $av_1(t) + bv_2(t)$ ammette TdL e si ha

$$\mathscr{L}[av_1(t) + bv_2(t)] = aV_1(s) + bV_2(s) \tag{1.1}$$

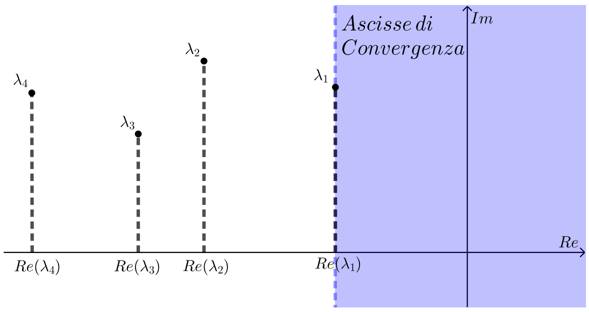

Figura 2 RdC della trasformata di Laplace unilatera di una funzione combinazione lineare di esponenziali

la cui *ascissa di convergenza* è $\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, dove α_1, α_2 sono rispettivamente le ascisse di convergenza di $V_1(s)$ e $V_2(s)$.

2. **Traslazione nel dominio del tempo — time shifting** Se $v(t)$ ammette TdL, allora anche $v(t-\tau)$ (Figura 3), $\tau > 0$, ammette TdL ed essa corrisponde a

$$\mathscr{L}\left[v(t-\tau)\right](s) = e^{-s\tau}\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) \tag{1.2}$$

L'ascissa di convergenza non cambia.

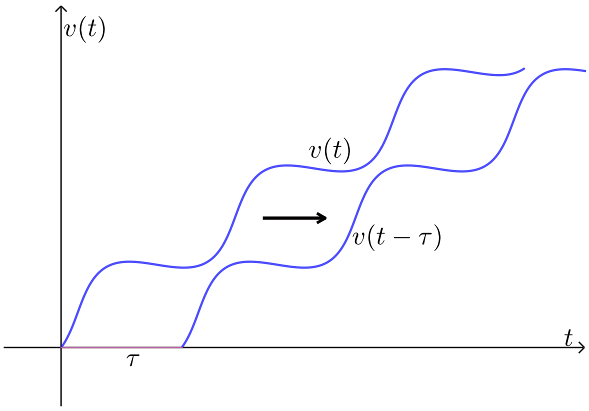

Figura 3 Esempio di traslazione nel tempo di un segnale per $\tau > 0$

Dimostrazione

$$\mathscr{L}\left[v(t-\tau)\right](s) = \int_{0^-}^{\infty} v(t-\tau)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{\tau^-}^{\infty} v(t-\tau)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Dove abbiamo cambiato l'estremo d'integrazione poiché $v(t-\tau) = 0$ per $t - \tau < 0$, cioè per $t < \tau$ (vedi figura 3). Operiamo la sostituzione $x = t - \tau$, $t = x + \tau$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ con $t \to \tau^- \Rightarrow x \to 0^-$ e $t \to \infty \Rightarrow x \to \infty$, ottenendo

$$= \int_{0^-}^{\infty} v(x)e^{-s(x+\tau)}\mathrm{d}x = e^{-s\tau}\int_{0^-}^{\infty} v(x)e^{-sx}\mathrm{d}x = e^{-s\tau}\mathscr{L}\left[v(t)\right](s)$$

□

3. **Traslazione nel dominio dei complessi (oppure molteplicazione per una funzione esponenziale) — frequency shifting** Se $v(t)$ ammette TdL, allora anche $e^{\lambda t}v(t)$ ammette TdL e si ha

$$\mathscr{L}\left[e^{\lambda t}v(t)\right] = V(s-\lambda) \tag{1.3}$$

con ascissa di convergenza $\alpha = \alpha_0 + \Re e(\lambda)$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[e^{\lambda t}v(t)\right](s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{\lambda t}v(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{t(\lambda-s)}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-(s-\lambda)t}\mathrm{d}t \\ &= \mathscr{L}\left[v(t)\right](s-\lambda)\end{aligned}$$

$\square$

4. **Cambiamento di scala** Se $v(t)$ ammette TdL allora anche $v(rt)$, $r \in \mathbb{R}$ ammette TdL e si ha

$$\mathscr{L}\left[v(rt)\right] = \frac{1}{r}V(\frac{s}{r}) \tag{1.4}$$

con ascissa di convergenza $\alpha = r\alpha_0$

Dimostrazione

$$\mathscr{L}\left[v(rt)\right](s) = \int_{0^-}^{\infty} v(rt)e^{-st}\mathrm{d}t$$

Operiamo la sostituzione $x = rt, t = \frac{x}{r}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{t}$ ottenendo

$$= \frac{1}{r}\int_{0^-}^{\infty} v(x)e^{-s\frac{x}{r}}\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\int_{0^-}^{\infty} v(x)e^{-\frac{s}{r}x}\mathrm{d}x = \frac{\mathscr{L}\left[v(t)\right]\left(\frac{s}{r}\right)}{r}$$

$\square$

5. **Proprietà della derivata** Se $v(t)$ ammette TdL e esiste finito $v(0^-) = \lim_{t\to 0^-} v(t)$ allora anche la sua derivata i-esima ammette TdL e si ha

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^{(i)}v(t)}{dt^{(i)}}\right] = s^iV(s) - \sum_{k=0}^{i-1}\left.\frac{d^{(k)}v(t)}{dt^{(k)}}\right|_{t=0^-}(s^{i-1-k}) \tag{1.5}$$

con ascissa di convergenza $\alpha \leq \alpha_0$

Dimostrazione Per la derivata di primo ordine abbiamo

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}\ v(t)}{\mathrm{d}t}\right](s) = \int_{0^-}^{\infty} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\ v(t)}{\mathrm{d}t}}_{f'(t)}\underbrace{e^{-st}}_{g(t)}\mathrm{d}t$$

che integrando per parti diventa

$$\begin{aligned}&= \left.v(t)e^{-st}\right|_{0^-}^{\infty} - \left(-s\int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to\infty} v(\epsilon)e^{-s\epsilon} - \lim_{\mu\to 0^-} v(\mu)e^{-s\mu} + s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) \\ &= sV(s) - v(0^-)\end{aligned}$$

Per la derivata seconda abbiamo, ricorsivamente, che

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}\right](s) = \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right)\right](s) &= s\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}(v)}{\mathrm{d}t}\right](s) - \left.\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^-} \\ &= s(s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) - v(0^-)) - \left.\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^-} \\ &= s^2V(s) - sv(0^-) - \left.\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^-}\end{aligned}$$

Lo studente è invitato a dimostrare la formula (1.5) per induzione. $\square$

6. **Moltiplicazione per una funzione polinomiale** Se $v(t)$ ammette TdL allora anche $t^i v(t),\ i \in \mathbb{Z}$ ammette TdL e si ha

$$\mathscr{L}\left[t^i v(t)\right] = (-1)^i \, \frac{\mathrm{d}^{(i)} V(s)}{\mathrm{d}s^{(i)}} \tag{1.6}$$

L'ascissa di convergenza non cambia.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[tv(t)\right](s) &= \int_{0^-}^{\infty} tv(t)e^{-st}\mathrm{d}t = -\int_{0^-}^{\infty} v(t)(-te^{-st})\mathrm{d}t \\ &= -\int_{0^-}^{\infty} v(t)\frac{\partial(e^{-st})}{\partial s}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\right) \quad \text{(regola di Leibniz)} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}\left[v(t)\right]\end{aligned}$$

Lo studente è invitato a dimostrare la formula (1.6) per induzione. □

7. **Integrazione nel dominio del tempo** Se $v(t)$ ammette TdL allora anche la funzione $\Psi(t) = \int_{0^-}^{t} v(\tau)d\tau$ ammette TdL e si ha

$$\mathscr{L}\left[\int_{0^-}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{V(s)}{s} \tag{1.7}$$

con ascissa di convergenza $\alpha = \max\{0, \alpha_0\}$, dove α_0 è l'ascissa di convergenza di $\mathscr{L}\left[v(t)\right]$.

Dimostrazione Sia $v_1(t) = \int_{0^-}^{t} v(\tau)d\tau$. Allora $v_1'(t) = v(t)$ e $v_1(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(\tau)d\tau = 0$ Abbiamo:
$\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[v_1'(t)\right](s) \overset{Propr.5}{=} s\mathscr{L}\left[v_1'(t)\right](s) - v_1(0^-) =$
$\overset{v_1(0^-)=0}{=} s\mathscr{L}\left[\int_{0^-}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$
Quindi:

$$\mathscr{L}\left[\int_{0^-}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{V(s)}{s} \tag{1.8}$$

□

8. **Integrazione nel dominio dei complessi**
Se esiste $\lim_{t\to 0^-} \dfrac{v(t)}{t}$ allora

$$\mathscr{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_{s}^{\infty} \mathscr{L}\left[v(t)\right](\zeta)\ d\zeta \tag{1.9}$$

Dimostrazione

$$\int_{s}^{\infty} \mathscr{L}\left[v(t)\right](\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{s}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-t\zeta}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\zeta = \int_{0^-}^{\infty} v(t)\left(\int_{s}^{\infty} e^{-t\zeta}\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}t$$

e l'integrale sotto parentesi corrisponde a

$$-\frac{e^{-t\zeta}}{t}\bigg|_{\zeta=s}^{\infty} = \frac{e^{-st}}{t} - \lim_{\epsilon\to\infty}\frac{e^{-t\epsilon}}{t} = \frac{e^{-st}}{t}$$

e quindi

$$= \int_{0^-}^{\infty} v(t) \left(\int_{s}^{\infty} e^{-t\zeta} \mathrm{d}\zeta \right) \mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} \frac{v(t)}{t} e^{-st} \mathrm{d}t = \mathscr{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s)$$

□

9. **Teorema del valore iniziale** Se $v(t)$ ammette TdL e esiste finito $\lim_{t\to 0^-} v(t)$, allora

$$\lim_{t\to 0^-} v(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) \tag{1.10}$$

Dimostrazione Sappiamo che

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right](s) = s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) - \lim_{t\to 0^-} v(t)$$

Passiamo al limite da entrambi i lati

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right](s) &= \lim_{s\to\infty} \left(s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) - \lim_{t\to 0^-} v(t)\right) \\ &= \lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) - \lim_{t\to 0^-} v(t) \end{aligned}$$

e mostriamo come $\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right](s) = 0$ il che porta alla tesi.

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right](s) &= \lim_{s\to\infty} \left(\lim_{\epsilon\to\infty,\ \mu\to 0^-} \int_{\mu}^{\epsilon} \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} e^{-st} \mathrm{d}t \right) \\ &= \lim_{\epsilon\to\infty,\ \mu\to 0^-} \int_{\mu}^{\epsilon} \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left(\lim_{s\to\infty} e^{-st}\right)}_{=0} \mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

10. **Teorema del valore finale** Se $v(t)$ ammette TdL e esiste finito $\lim_{t\to\infty} v(t)$, allora

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0^+} s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) \tag{1.11}$$

Dimostrazione Sappiamo che

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right](s) = s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) - \lim_{t\to 0^-} v(t)$$

Passiamo al limite da entrambi i lati

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0^+} \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right](s) &= \lim_{s\to 0^+} \left(s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) - \lim_{t\to 0^-} v(t)\right) \\ &= \lim_{s\to 0^+} s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) - \lim_{t\to 0^-} v(t) \qquad (1) \end{aligned}$$

A sinistra abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right](s) &= \lim_{s\to 0^+}\int_{0^-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{s\to 0^+}\left(\lim_{\epsilon\to\infty,\ \mu\to 0^-}\int_{\mu}^{\epsilon}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to\infty,\ \mu\to 0^-}\int_{\mu}^{\epsilon}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\underbrace{(\lim_{s\to 0^+}e^{-st})}_{=1}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon\to\infty,\ \mu\to 0^-}\left(v(t)\Big|_{\mu}^{\epsilon}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}v(t) - \lim_{t\to 0^-}v(t)
\end{aligned}$$

Facendo un semplice cambio di variabile alla fine. La (1) diventa quindi

$$\begin{gathered}
\lim_{t\to\infty}v(t) - \lim_{t\to 0^-}v(t) = \lim_{s\to 0^+}s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) - \lim_{t\to 0^-}v(t) \\
\lim_{t\to\infty}v(t) = \lim_{s\to 0^+}s\mathscr{L}\left[v(t)\right](s)
\end{gathered}$$

□

11. **Convoluzione nel dominio del tempo** Se $u(t), v(t)$ sono due funzioni causali (cioè nulle per $t < 0$) che ammettono TdL, allora il loro prodotto di convoluzione $(u * v)(t)$ ammette TdL e si ha

$$\mathscr{L}\left[(u*v)(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[u(t)\right](s)\cdot\mathscr{L}\left[v(t)\right](s) \tag{1.12}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[(u*v)(t)\right] &= \int_{0^-}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u(\lambda)v(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&\overset{u(t)=0,t<0}{=} \int_{0^-}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty}u(\lambda)v(t-\lambda)e^{-st}\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda \qquad (u(\lambda)<0,\ \lambda<0) \\
&= \int_{0^-}^{\infty}u(\lambda)\int_{0^-}^{\infty}v(t-\lambda)e^{-st}\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

Operiamo la sostituzione $x = t - \lambda$, $t = x + \lambda$, $dt = dx$ ottenendo

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[(u*v)(t)\right] &= \int_{0^-}^{\infty}u(\lambda)\int_{0^-}^{\infty}v(x)e^{-s(x+\lambda)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{0^-}^{\infty}u(\lambda)e^{-s\lambda}\mathrm{d}\lambda\int_{0^-}^{\infty}v(x)e^{-sx}\mathrm{d}x \\
&= \mathscr{L}\left[u(t)\right](s)\cdot\mathscr{L}\left[v(t)\right](s)
\end{aligned}$$

□

1.2 Trasformate notevoli

Esempio 1.1 (Impulso)

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$$

Dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema del campionamento/riproducibilità dell'impulso.

Esempio 1.2 (Gradino)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\delta_{-1}(t)\right] &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to\infty,\ \mu\to 0^-}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_{t=\mu}^{\epsilon}\right)\\ &= \lim_{\mu\to 0^-}\frac{e^{-s\mu}}{s} - \lim_{\epsilon\to\infty}\frac{e^{-s\epsilon}}{s} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Esempio 1.3 (Impulso ritardato)

$$\mathscr{L}\left[\delta(t-\tau)\right] = e^{-s\tau}\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] \overset{\text{Es. 1.1}}{=} e^{-s\tau}$$

Esempio 1.4 (Esponenziale complessa causale)

$$\mathscr{L}\left[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right] = \mathscr{L}\left[\delta_{-1}(t)\right](s-\lambda) \overset{(1.3)}{=} \frac{1}{s-\lambda}$$

Esempio 1.5 (Esponenziale complessa causale moltiplicata per una funzione polinomiale)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{t^\ell}{\ell!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right] &\overset{(1.1)}{=} \frac{1}{\ell!}\mathscr{L}\left[t^\ell e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right] \overset{(1.5)}{=} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\frac{\mathrm{d}^{(\ell)}}{\mathrm{d}s^{(\ell)}}\mathscr{L}\left[e^{\lambda t}\delta_{-1}(1)\right]\\ &= \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\frac{\mathrm{d}^{(\ell)}}{\mathrm{d}s^{(\ell)}}\left(\frac{1}{s-\lambda}\right) = \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\frac{\ell!(-1)^\ell}{(s-\lambda)^{\ell+1}} = \frac{1}{(s-\lambda)^{\ell+1}}\end{aligned}$$

Esempio 1.6 (Trasformate di funzioni esponenziali complesse)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[te^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right] &= \frac{1}{(s-\lambda)^2}\\ \mathscr{L}\left[\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right] &= \frac{1}{(s-\lambda)^3}\\ \mathscr{L}\left[\frac{t}{\ell!}\delta_{-1}(t)\right] &= \frac{1}{s^{\ell+1}}\\ \mathscr{L}\left[t^\ell\delta_{-1}(t)\right] &= \frac{\ell!}{s^{\ell+1}}\\ \mathscr{L}\left[e^{-\lambda t}\delta_{-1}(t)\right] &= \frac{1}{(s+\lambda)}\end{aligned}$$

Esempio 1.7 (Funzione coseno $\cos(t)$) : ricordiamo che il coseno è descritto analiticamente anche usando la formula di Eulero, il che semplifica notevolmente i calcoli

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\right] &= \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right] + \mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}\right]\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{s+\cancel{j\omega}+s-\cancel{j\omega}}{s^2+\omega^2}\Big) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

Esempio 1.8 (Funzione seno $\sin(t)$**)** : come per il coseno, usiamo la formula di Eulero per riscrivere il seno

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right] &= \frac{1}{2j}\Big(\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right]-\mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}\right]\Big)\\ &= \frac{1}{2j}\Big(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\Big)\\ &= \frac{1}{2j}\Big(\frac{\cancel{s}+j\omega-\cancel{s}+j\omega}{s^2+\omega^2}\Big) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

Segnale	Trasformata $\mathcal{L}$	Segnale	Trasformata $\mathcal{L}$
A	$\frac{A}{s}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$A\delta(t-t_0)$	Ae^{-st_0}	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$A\delta_{-1}(t)$	$\frac{A}{s}$	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$	$\frac{A}{s-\lambda}$	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$A\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$	$\frac{A}{(s-\lambda)^{l+1}}$		

Tabella 1 Le principali trasformate notevoli di Laplace

1.3 Tabella riassuntiva delle proprietà della trasformata di Laplace

Proprietà	$v(t)$	$\mathscr{L}[v(t)]$
Linearità	$\mathscr{L}[a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)]$	$a_1 \mathscr{L}[v_1(t)] + a_2 \mathscr{L}[v_2(t)]$
Ritardo temporale	$v(t-\tau)$	$e^{-s\tau} V(s)$
Spostamento di frequenza	$e^{\lambda t} v(t)$	$V(s-\lambda)$
Cambiamento di scala	$v(rt)$	$\frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right)$
Derivata n-esima	$\frac{d^i v(t)}{dt^i}$	$s^i \mathscr{L}[v(t)] - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big\vert_{t=0^-} s^{i-1-k}$
Moltiplicazione per funzione polinomiale	$t^i v(t)$	$(-1)^i \cdot \frac{d^i v(s)}{ds^i}$
Integrale nel tempo	$\int_{0^-}^{t} V(\tau) d\tau$	$\frac{V(s)}{s}$
Integrale nel dominio complesso	$\frac{v(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} V(s) ds$
Valore iniziale	$\lim_{t\to 0^-} v(t)$	$\lim_{s\to\infty} sV(s)$
Valore finale	$\lim_{t\to\infty} v(t)$	$\lim_{s\to 0^+} sV(s)$
Convoluzione temporale	$[v_1 * v_2](t)$	$V_1(s) \cdot V_2(s)$

2 Codice Matlab per il calcolo simbolico della trasformata di Laplace

Con il calcolo simbolico in Matlab si possono ottenere le formule della trasformata di Laplace.

```
syms a t s
%trasformata di Laplace della funzione esponenziale
f = exp(-a*t);
laplace(f)
%trasformata di Laplace del impulso
laplace(dirac(t-3),t,s) %t e s le variabili (tempo e complessi)
```

Il risultato di questo script è:

```
ans =

1/(a + s)
```

```
ans =

exp(-3*s)
```

3 Uso della trasformata di Laplace per sistemi LTI causali — analisi nel dominio complesso

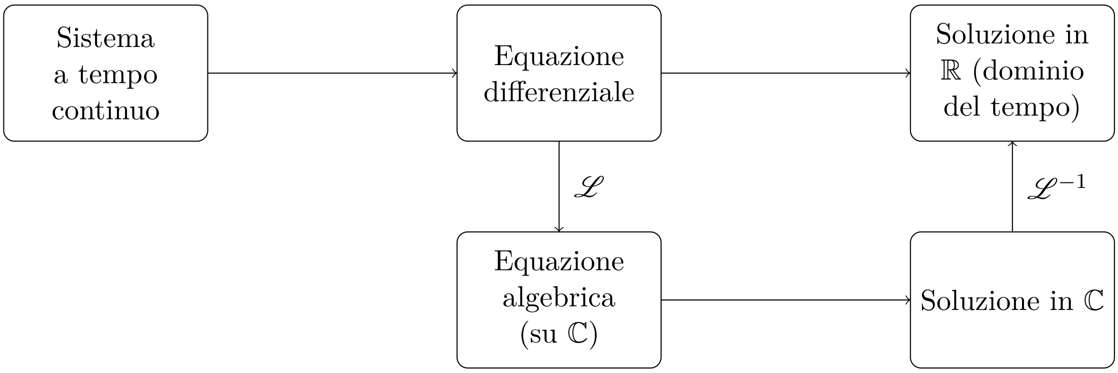

Figura 4 Utilizzo della trasformata di Laplace per la soluzione di sistemi a tempo continuo. Utilizzando la trasformata di Laplace si trasforma un'equazione differenziale in una algebrica la cui soluzione è molto più semplice; una volta risolta quest'ultima, utilizzando l'antitrasformata di Laplace si giunge alla soluzione dell'originario sistema nel dominio del tempo.

Dato un sistema LTI causale rappresentato da un'equazione differenziale del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i v(t)}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{\mathrm{d}^i u(t)}{\mathrm{d}t^i} \tag{3.1}$$

con $n \geq m$, e l'ingresso $u(t) = u(t)\delta_{-1}(t)$ ($u(t) = 0$ per $t < 0$).
Siano le $n - 1$ condizioni iniziali sull'uscita $v(t)$:

$$v(0^-), \frac{\mathrm{d}\ v(0^-)}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}\ v(0^-)}{\mathrm{d}t^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL, allora si può dimostrare che anche $v(t)$ ammette TdL ($v(t)$ ristretto per $t \geq 0$.
Attraverso l'uso della trasformata di Laplace, si può passare dalla rappresentazione del sistema come equazione differenziale a una rappresentazione algebrica, facilitando il calcolo della soluzione che è l'uscita $v(t)$. Questa è la principale utilità della trasformata di Laplace per l'analisi dei sistemi LTI.
Usando la notazione $U(s), V(s)$ rispettivamente per le trasformate di $u(t)$ e $v(t)$ e applicando la proprietà della derivata della trasformata di Laplace unilatera (1.5) all'equazione (3.1) otteniamo:

$$
\begin{aligned}
& a_n \left[s^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \left.\frac{\mathrm{d}^k v(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0^-} (s^{n-1-k}) \right] \\
& + a_{n-1} \left[s^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \left.\frac{\mathrm{d}^k v(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0^-} (s^{n-2-k}) \right] + \cdots + a_0 V(s) \\
= & b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \cdots + b_0 U(s)
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\begin{aligned}
& \overbrace{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)}^{d(s)} V(s) \\
& \overbrace{- a_n v(0^-) s^{n-1} - \left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \left.\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^-} \right) s^{n-2} - \cdots - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \left.\frac{\mathrm{d}^k v(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0^-} \right)}^{p(s)} \\
& = \overbrace{(b_m s^m + \cdots + b_0)}^{n(s)} U(s)
\end{aligned}
$$

E quindi

$$d(s)V(s) - p(s) = n(s)U(s)$$

Possiamo esprimere $V(S)$:

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} U(s) + \frac{p(s)}{d(s)} \tag{3.2}$$

Osservazione 3.1 $n(s) = b_m s^m + \cdots + b_0$ è un polinomio in s di grado m, cioè $\deg n(s) = m$, e dipende solo dai coefficienti associati all'ingresso e alle sue derivate, nella parte destra di (3.1).

Osservazione 3.2 $d(s) = a_n s^n + \cdots + a_0$ è un polinomio in s di grado n, cioè $\deg d(s) = n$. È proprio il polinomio caratteristico associato all'equazione (3.1).

Osservazione 3.3 $p(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left(\sum_{j=k+1}^{n} a_{j+1} \left.\frac{\mathrm{d}^{n-j} v(t)}{\mathrm{d}t^{n-j}}\right|_{t=0^-} \right)$ è un polinomio in s di grado al più $n-1$, cioè $\deg p(s) \leq n-1$, il quale include le condizioni iniziali.

Osservazione 3.4 La funzione razionale $p(s)/d(s)$ dipende soltanto dalle condizioni iniziali del sistema e dai coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ del polinomio caratteristico, cioè associati all'uscita e sue derivate. Rappresenta quindi la TdL della risposta libera.

$$V_\ell(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

Osservazione 3.5 La funzione razionale $n(s)/d(s)U(s)$ dipende solo dal sistema e dall'ingresso (ed infatti non compare $p(s)$ dove sono incluse le condizioni iniziali). Rappresenta quindi la TdL della risposta forzata.

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} U(s)$$

3.1 Funzione di trasferimento

L'espressione $n(s)/d(s)$ (che poi viene moltiplicata per $U(s)$ nella trasformata di Laplace della risposta forzata $V_f(s)$) rappresenta la TdL della risposta impulsiva $h(t)$ come vedremo di seguito.

Definizione 3.1 (Funzione di trasferimento) *La funzione*

$$H(s) := \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \tag{3.3}$$

è definita funzione di trasferimento del sistema *e rappresenta la trasformata di Laplace della risposta impulsiva $h(t)$.*

Il legame tra la funzione di trasferimento e risposta impulsiva del sistema è evidente se si ricorda che la risposta forzata nel dominio del tempo corrisponde alla convoluzione dell'ingresso con la risposta impulsiva, $v_f(t) = [u * h](t)$. Ne consegue che

$$V_f(s) = \mathscr{L}\left[v_f(t)\right] = \mathscr{L}\left[(u*h)(t)\right] \overset{(1.12)}{=} U(s)H'(s)$$

E abbiamo visto che $V_f(s) = (n(s)/d(s))U(s)$ il che implica $H'(s) = n(s)/d(s) = H(s)$.
Ricordiamo la formula della risposta impulsiva:

$$h(t) = d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} d_{i,\ell}\frac{t^\ell}{l!}e^{\lambda_i t}\delta_{-1}(t) \tag{3.4}$$

Trasformiamo con Laplace (3.4):

$$H(s) = \mathscr{L}\left[h(t)\right] = d_0 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1}\frac{d_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \tag{3.5}$$

L'ascissa di convergenza è $\alpha = max\{Re(\lambda_i) : \exists l t.c. d_{i,l} \neq 0\}$.
La dimostrazione della formula (3.4) segue però il passaggio inverso (vedi 4.4) ma per fare questo vedremo prima l'antitrasformata di Laplace (sezione 4).

Esempio 3.1 Sia un sistema LTI a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}^3 v(t)}{\mathrm{d}t^3} + \frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

con ingresso nullo a 0, e $n-1$ condizioni iniziali. Trasformando otteniamo

$$s^3V(s) - s^2v(0^-) - s\frac{\mathrm{d}v(0^-)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^2v(0^-)}{\mathrm{d}t^2} + s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{\mathrm{d}v(0^-)}{\mathrm{d}t} = sU(s)$$

$$V(s)(s^3+s^2) = sU(s) + s^2v(0^-) + s\frac{\mathrm{d}v(0^-)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2v(0^-)}{\mathrm{d}t^2} + sv(0^-) + \frac{\mathrm{d}v(0^-)}{\mathrm{d}t}$$

$$V(s) = \frac{s}{s^3+s^2}U(s) + \frac{s^2v(0^-) + s\left(\frac{\mathrm{d}v(0^-)}{\mathrm{d}t} + v(0^-)\right) + \frac{\mathrm{d}^2v(0^-)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}v(0^-)}{\mathrm{d}t}}{s^3+s^2}$$

e quindi
$n(s) = s$
$d(s) = s^3 + s^2$

$p(s) = s^2 v(0^-) + s\left(\frac{\mathrm{d}v(0^-)}{\mathrm{d}t} + v(0^-)\right) + \frac{\mathrm{d}^2 v(0^-)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}v(0^-)}{\mathrm{d}t}$.
In particolare

$$H(s) = \frac{s}{s^3 + s^2} = \frac{1}{s^2 + s}$$

La funzione di trasferimento è una funzione razionale con il numeratore di grado minore o uguale al denominatore, oppure strettamente minore per i sistemi strettamente propri. Infatti se il sistema è proprio, cioè se espresso come equazione differenziale (3.1) si ha che $n \geq m$ allora, $H(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i / \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ sarà tale per cui il polinomio del numeratore è di grado inferiore o uguale a quello del denominatore. Fattorizzando i polinomi otteniamo

$$H(s) = \frac{b_m (s-\beta_1)^{\nu_1} (s-\beta_2)^{\nu_2} \cdots (s-\beta_q)^{\nu_q}}{a_n (s-\alpha_1)^{\mu_1} (s-\alpha_2)^{\mu_2} \cdots (s-\alpha_r)^{\mu_r}}$$

con $q \leq m,\ r \leq n,\ \nu_1 + \cdots + \nu_q = m,\ \mu_1 + \cdots + \mu_r = n$. I numeri $\beta_1, \ldots, \beta_q$ sono detti *zeri* della funzione di trasferimento, mentre i numeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sono detti *poli* (e sono le radici $\lambda_i, i = 1, \ldots, r$ dell'equazione carattersitica) — vedi definizioni 3.2 e 3.3.
Possiamo anche scrivere la funzione di trasferimento come

$$H(s) = \frac{n^*(s)}{(s-\alpha_1)^{\mu_1} (s-\alpha_2)^{\mu_2} \cdots (s-\alpha_r)^{\mu_r}}$$

con $n^*(s) = n(s)/a_n = (b_m (s-\beta_1)^{\nu_1} (s-\beta_2)^{\nu_2} \cdots (s-\beta_q)^{\nu_q})/a_n$.
Alternativamente,

$$H(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

con $K = b_m/a_n$ e le radici possibilmente ripetute più volte, un numero di volte pari alle rispettive molteplicità algebriche, sia al numeratore che al denominatore.
Definiamo ora formalmente zeri e poli di una funzione razionale.

Definizione 3.2 (Zero di una funzione razionale) *Definiamo zero di una funzione razionale $H(s)$ un qualsiasi complesso $\beta \in \mathbb{C}$ tale per cui $H(\beta) = 0$ (gli zeri sono quindi radici di $n(s)$).*

Diciamo anche che $\beta \in \mathbb{C}$ è uno zero di molteplicità algebrica μ per $H(s)$ se

$$\lim_{s \to \beta} \frac{1}{(s-\beta)^{\mu}} H(\beta) \neq 0$$

ma

$$\lim_{s \to \beta} \frac{1}{(s-\beta)^{\mu-1}} H(\beta) = 0$$

Definizione 3.3 (Polo di una funzione razionale) *Definiamo polo di una funzione razionale $H(s)$ un qualsiasi complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ tale per cui $H(s)$ tende ad infinito per s che tende a α.*

Diciamo anche che $\alpha \in \mathbb{C}$ è un polo di molteplicità algebrica μ per $H(s)$ se

$$\lim_{s \to \alpha} (s-\alpha)^{\mu} H(\alpha) \neq \infty$$

ma

$$\lim_{s \to \alpha} (s-\alpha)^{\mu-1} H(\alpha) = \infty$$

3.1.1 Riducibilità, BIBO stabilità

Essendo la funzione di trasferimento una funzione razionale è possibile che essa presenti dei fattori comuni al numeratore e denominatore (nel caso in cui alcuni zeri coincidono ad alcuni poli); in tal caso è possibile semplificare la funzione eliminando tali fattori in comune fino a giungere ad una forma irriducibile $\overline{n(s)}/\overline{d(s)}$ tale per cui ogni polo è diverso da ogni zero.
Le radici di $\overline{n(s)}$ sono gli zeri di $H(s)$, mentre le radici di $\overline{d(s)}$ sono poli di $H(s)$: risulta chiaro quindi che gli zeri di $H(s)$ siano un sottoinsieme delle radici di $n(s)$ (perché alcune potrebbero essere state eliminate durante la semplificazione della funzione), e che i poli di $H(s)$ sono un sottoinsieme delle radici di $d(s)$ (discorso analogo). Gli insiemi, sia per gli zeri che per i poli, coincidono solo se $H(s)$ è irriducibile quando in forma $n(s)/d(s)$. Tenuto in mente questo, vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.1 *Sia $H(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema LTI a tempo continuo descritto da un'equazione differenziale, e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \leq n$ i suoi poli dopo eventuali semplificazioni. Allora si ha che il sistema è BIBO stabile se e solo se*

$$\mathcal{R}e(\lambda_i) < 0, \ \ i = 1, \ldots, r$$

Cioè il sistema è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $H(s)$ giacciono nel semipiano sinistro dei complessi.

Osservazione 3.6 Le eventuali semplificazioni della funzione di trasferimento sono il motivo per cui nel dominio del tempo la risposta impulsiva è funzione di un sottoinsieme dei modi elementari presenti nella risposta libera, avendo alcuni modi eventualmente pesati con coefficiente nullo. Infatti, le radici di $d(s)$, il denominatore di $H(s)$, prima di un'eventuale semplificazione, non sono altro che le radici del polinomio caratteristico dell'equazione differenziale e quindi i valori che compaiono nei modi elementari della risposta libera. Le radici di $\overline{d(s)}$, il denominatore di $H(s)$ in forma irriducibile dopo le semplificazioni, sono i valori che compaiono nei modi elementari pesati con coefficiente non nullo nella risposta impulsiva nel dominio del tempo $h(t)$, dopo l'antitrasformata (vedi paragrafo 4). Tutti i fattori semplificati sono i modi elementari che nella risposta impulsiva sono pesati con coefficiente nullo. Dato che non si ha sempre un'eventuale semplificazione, i modi elementari non pesati con coefficiente nullo di $h(t)$ formano un sottoinsieme dei modi elementari di v_ℓ, e coincidono solo se tutti i fattori al numeratore e denominatore di $H(s)$ sono distinti.
Concludendo, rispetto all'osservazione 4.2 del capitolo 'Sistemi a tempo continuo', dove si parlava della convergenza dei modi elementari, utilizzando la trasfomata di Laplace ci riferiamo semplicemente alle radici di polinomi e siccome $\{$ poli di $H(s)$ $\} \subseteq \{$zeri di $d(s)$ $\}$ abbiamo che la stabilità asintotica implica la BIBO stabilità ma non viceversa.

Osservazione 3.7 Per far diventare BIBO stabile un sistema instabile, posso associare ai poli λ_i con $Re(\lambda_i > 0$ degli zeri $z_i = \lambda_i$ che andranno ad eliminare i modi non convergenti nella risposta impulsiva.

Esempio 3.2 Sia un sistema LTI definito dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} - 3v(t) = \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} - 6u(t)$$

Il polinomio caratteristico è $P(s) = s^2 - 2s - 3$ con radici $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. La risposta libera ha quindi modi $m_1(t) = e^{3t}$ e $m_2(t) = e^{-t}$ e il sistema non è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^2 - 2s - 3} = \frac{(s-3)(s+2)}{(s-3)(s+1)} = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1}$$

Per cui, antitrasformando (vedi paragrafo 4), otteniamo $h(t) = \delta(t) + e^{-t}\delta_{-1}(t)$ ed è BIBO stabile. Questo avviene poiché l'unica radice con parte reale non negativa viene semplificata nella funzione di trasferimento.

Esempio 3.3 (Studio della stabilità di tre sistemi lineari:)

$$\begin{aligned}
&S_1\colon \dot{v}(t) - 3v(t) = \ddot{u}(t) - 5\dot{u}(t) + 4u(t)\\
&S_2\colon \ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t) = \ddot{u}(t) - 4\dot{u}(t) + 3u(t)\\
&S_3\colon \dddot{v}(t) + 7\ddot{v}(t) - 2\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) - 4u(t)
\end{aligned}$$

e studiamone la stabilità. Le radici dei sistemi omogenei associati sono in ordine:

$$S_1\colon \lambda_1 = 3 \qquad S_2\colon \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \qquad S_3\colon \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$$

e, dopo aver applicato la TdL, le funzioni di trasferimento

$$S_1\colon H(s) = \frac{(s-1)(s-4)}{s-3} \qquad S_2\colon H(s) = \frac{(s-3)(s-1)}{(s+2)(s+1)} \qquad S_3\colon H(s) = \frac{(s+4)(s-1)}{(s+3)(s+2)(s-1)}$$

Per lo studio della stabilità asintotica ci concentriamo sulle radici dei sistemi omogenei associati: essi sono asintoticamente stabili se ogni λ_i ha parte reale negativa, quindi solo S_2 risulta esserlo.
Per la stabilità BIBO invece è necessario prima semplificare le funzioni di trasferimento e poi studiarne i poli rimanenti, i quali devono avere tutti parte reale negativa, quindi in questo caso solo S_3 risulta esserlo, oltre ovviamente a S_2, che essendo asintoticamente stabile è anche BIBO stabile.
Ricapitolando, S_1 non possiede alcun tipo di stabilità, S_2 è asintoticamente stabile (e quindi anche BIBO stabile), mentre S_3 è solamente BIBO stabile.

4 Antitrasformata di Laplace (unilatera)

La principale importanza della trasformata di Laplace è quella di essere usata per trasformare problemi nel dominio dei reali, in particolare sistemi a tempo continuo rappresentati da equazioni differenziali, in problemi più semplici nel dominio dei complessi la cui risoluzione possa essere poi usata per ricavare la soluzione nel dominio iniziale del tempo (vedi Fig. 4). Per passare dal dominio complesso al dominio del tempo utilizzeremo l'antitrasformata di Laplace di $V(s)$ e ricaveremo $v(t)$.

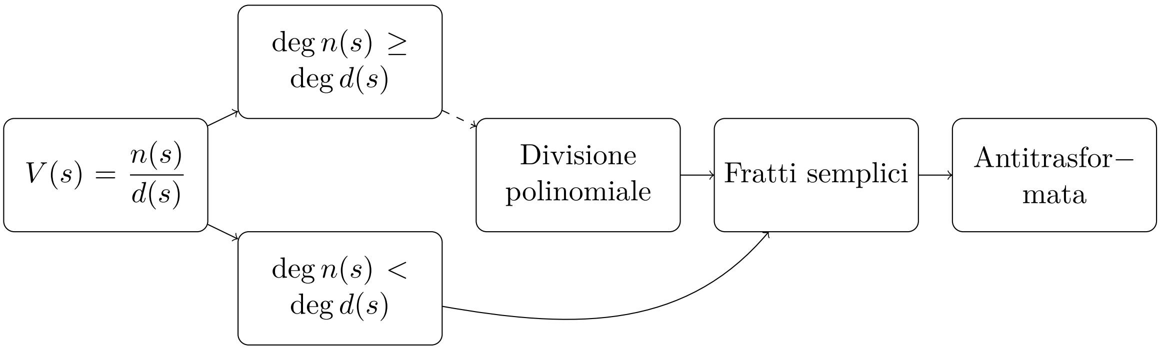

Figura 5 Procedura di antitrasformazione di una funzione razionale $V(s)$.

Sotto opportune ipotesi, è dimostrabile che l'operatore $\mathscr{L}$ è invertibile; in particolare, è invertibile per tutte le funzioni razionali a coefficienti complessi e quindi tutte le funzioni ottenute a partire dalla trasformazione di equazioni differenziali — quelle a cui siamo interessati nel nostro corso.
In virtù della linearità della trasformata di Laplace il calcolo di $\mathscr{L}^{-1}$ (l'antitrasformata di Laplace) per questa categoria di funzioni diviene particolare semplice, come vedremo di seguito.

Supponiamo di avere una funzione razionale $V(s) = n(s)/d(s)$, con $n(s), d(s)$ polinomi complessi, $\deg p(s) > 0$ e $\deg d(s) > 0$, che senza perdità di generalità possiamo assumere in forma irriducibile. Per semplicità di spiegazione†, consideriamo i due casi:
1. $\deg n(s) = \deg d(s)$
2. $\deg n(s) < \deg d(s)$

La differenza è che nel primo caso prima procediamo ad una divisione polinomiale, mentre nel secondo no (vedi Fig. 5).

4.1 Divisione polinomiale

Se siamo nel primo caso, allora la divisione polinomiale tra $n(s)$ e $d(s)$ produce:

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + K \tag{4.1}$$

dove $\deg r(s) < \deg d(s)$ (ed è quindi una funzione strettamente propria) e $K \in \mathbb{C}$. In virtù della linearità della trasformata di Laplace abbiamo che:

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{r(s)}{d(s)}\right] + \mathscr{L}^{-1}[K] \tag{4.2}$$

Ricordiamo che:

$$\mathscr{L}^{-1}[K] = K\delta(t) \tag{4.3}$$

L'equazione 4.2 diventa:

†Questo poiché per mostrare come trovare l'antitrasformata è più facile considerare il primo caso distinto dal secondo, aggiungendo il passaggio di divisione polinomiale, non eseguito nel secondo caso: questo non è strettamente necessario poiché funzionerebbe anche con $\deg n(s) < \deg d(s)$.

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{r(s)}{d(s)}\right] + K\delta(t) \tag{4.4}$$

Osservazione 4.1 (Comparsa di delta di Dirac nella risposta impulsiva) Se $V(s)$ è una funzione propria ma non strettamente propria, cioè $\deg n(s) = \deg d(s)$, facendo la divisione dei due polinomi otteniamo il termine costante K che antitrasformato (4.3) genera l'impulso che compare nella risposta totale, come abbiamo già visto nel capitolo 'Sistemi a tempo continuo'.

Esempio 4.1 Supponiamo di avere la funzione razionale propria ma non strettamente propria

$$V(s) = \frac{2x^2 + 4x - 3}{x^2 - x - 1}$$

Se procediamo con la divisione polinomiale otteniamo

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2x^2 & 4x & -3 & x^2 & -x & -1 \\ \hline 2x^2 & -2x & -2 & 2 & & \\ / & 6x & -1 & & & \end{array}$$

e quindi

$$V(s) = \frac{6x - 1}{x^2 - x - 1} + 2$$

la cui antitrasformata sarà

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6x-1}{x^2-x-1}\right] + \mathscr{L}^{-1}[2] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6x-1}{x^2-x-1}\right] + 2\delta(t)$$

4.2 Decomposizione in frazioni semplici

Una volta che abbiamo ricondotto la nostra funzione razionale $V(s)$ alla forma in (4.1) (oppure non abbiamo eseguito alcuna divisione polinomiale), dobbiamo ulteriormente manipolare $r(s)/d(s)$ per poter calcolare facilmente l'antitrasformata. Ricordiamo innanzitutto come essa sia una funzione razionale strettamente propria, cioè $\deg r(s) < \deg d(s)$, con forma:

$$\frac{r(s)}{d(s)} = \frac{r(s)}{(s-\alpha_1)^{\mu_1} \dots (s-\alpha_r)^{\mu_r}} \tag{4.5}$$

Possiamo quindi, usando la tecnica della decomposizione in frazioni semplici, riscriverla come:

$$\frac{r(s)}{d(s)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell=0}^{\mu_i - 1} \frac{c_{i,\ell}}{(s-\alpha_i)^{\ell+1}} \tag{4.6}$$

Ricordiamo, come già visto nei capitoli precedenti e nell'equazione (4.5), che r rappresenta il numero totale di radici distinte, μ_i rappresenta la molteplicità di ciascun radice α_i.

Esempio 4.2 Possiamo scrivere la seguente funzione razionale strettamente propria (qui già in forma raccolta):

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s-2)(s+1)^2(s+5)}$$

come

$$V(s) = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+5)}$$

con $A = c_{1,0},\ B = c_{2,0},\ C = c_{2,1},\ D = c_{3,0}$.

Per ricavare le costanti $c_{i,\ell}$ possiamo semplicemente risolvere il sistema derivante dall'uguagliare le due forme (4.5) e (4.6).
Un metodo alternativo, più veloce, consiste nel ricavare le costanti a partire dalla seguente formula

$$c_{i,\ell} = \lim_{s \to \alpha_i} \frac{\mathrm{d}^{\mu_i - \ell - 1}\left((s-\alpha_i)^{\mu_i} \dfrac{r(s)}{d(s)} \right)}{\mathrm{d}s^{\mu_i - \ell - 1}} \tag{4.7}$$

Esempio 4.3 Supponiamo di avere la funzione razionale:

$$V(s) = \frac{s - 20}{(s+4)(s-2)}$$

Vogliamo manipolarla fino a giungere alla forma:

$$V(s) = \frac{c_{1,0}}{s+4} + \frac{c_{2,0}}{s-2}$$

Possiamo trovare i due coefficienti risolvendo l'uguaglianza:

$$\frac{c_{1,0}}{s+4} + \frac{c_{2,0}}{s-2} = \frac{s-20}{(s+4)(s-2)}$$

Poniamo $c_{1,0} = A$ e $c_{2,0} = B$. A sinistra abbiamo:

$$\frac{A(s-2) + B(s+4)}{(s+4)(s-2)} = \frac{(A+B)s + (4B - 2A)}{(s+4)(s-2)}$$

e abbiamo quindi che

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ 4B - 2A &= -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1 - B \\ 4B - 2 + 2B &= -20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A &= 1 - B \\ 6B &= -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

E allora

$$V(s) = \frac{4}{s+4} + \frac{-3}{s-2}$$

Potevamo anche usare la formula (4.7) per calcolare i coefficienti.

$$A = c_{1,0} = \lim_{s \to -4} \cancel{(s+4)} \frac{s-20}{\cancel{(s+4)}(s-2)} = \lim_{s \to -4} \frac{s-20}{s-2} = \frac{-24}{-6} = 4$$

con $\mu_1 = 1$ e quindi: $\dfrac{\mathrm{d}^{\mu_1 - \ell - 1}}{\mathrm{d}s^{\mu_1 - \ell - 1}} = \dfrac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}s^0}$

$$B = c_{2,0} = \lim_{s \to 2} \cancel{(s-2)} \frac{s-20}{(s+4)\cancel{(s-2)}} = \lim_{s \to 2} \frac{s-20}{s+4} = \frac{-18}{6} = -3$$

Osservazione 4.2 (Poli di molteplicità uno) Come abbiamo visto nell'esempio precedente, la formula (4.7) , nel caso $\mu_i = 1, i = \{1, ..., n\}$ diventa:

$$c_{i,0} = c_i = \lim_{s \to \alpha_i} \frac{r(s)}{d(s)}(s - \alpha_i)$$

Esempio 4.4 Scomponiamo la funzione razionale

$$V(s) = \frac{4s^2 - 3s + 5}{(s-1)^2(s+2)}$$

in

$$V(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

Usiamo la formula (4.7). Abbiamo che $\mu_1 = 2$, e quindi

$$\begin{aligned}
A = c_{1,0} &= \lim_{s \to 1} \frac{\mathrm{d}\left(\cancel{(s-1)^2}\dfrac{4s^2-3s+5}{\cancel{(s-1)^2}(s+2)}\right)}{\mathrm{d}s} = \lim_{s \to 1} \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{4s^2-3s+5}{s+2}\right)}{\mathrm{d}s} \\
&= \lim_{s \to 1} \frac{(8s-3)(s+2) - 4s^2 + 3s - 5}{(s+2)^2} = \frac{5 \cdot 3 - 4 + 3 - 5}{9} = 1 \\
B = c_{1,1} &= \lim_{s \to 1} \cancel{(s-1)^2}\frac{4s^2-3s+5}{\cancel{(s-1)^2}(s+2)} = \lim_{s \to 1} \frac{4s^2-3s+5}{s+2} = \frac{6}{3} = 2
\end{aligned}$$

Mentre $\mu_2 = 1$, e allora

$$C = c_{2,0} = \lim_{s \to -2} \cancel{(s+2)}\frac{4s^2-3s+5}{(s-1)^2\cancel{(s+2)}} = \lim_{s \to -2} \frac{4s^2-3s+5}{(s-1)^2} = \frac{16+12+5}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

E quindi

$$V(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{3}{s+2}$$

4.3 Antitrasformata

Una volta che ci siamo ricondotti alla forma

$$V(s) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell=0}^{\mu_r} \frac{c_{i,\ell}}{(s-\alpha_i)^{\ell+1}} + K$$

l'antitrasformata è facile: avendo già determinato in (4.3) l'antitrasformata di K, rimane solo da determinare $\mathscr{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell=0}^{\mu_i - 1} c_{i,\ell}/(s-\alpha_i)^{\ell+1}\right]$.
Per la linearità della trasformata (1.1) abbiamo

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,\ell}}{(s-\alpha_i)^{\ell+1}}\right] = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell=0}^{\mu_i-1} c_{i,\ell}\, \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha_i)^{\ell+1}}\right] \tag{4.8}$$

Da esempio 1.5 abbiamo che

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha_i)^{\ell+1}}\right] = \frac{t^\ell}{\ell!} e^{\alpha_i t} \delta_{-1}(t)$$

E allora la (4.8) diventa

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=0}^{\mu_i-1}\frac{c_{i,\ell}}{(s-\alpha_i)^{\ell+1}}\right]=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=0}^{\mu_i-1}c_{i,\ell}\,\frac{t^\ell}{\ell!}e^{\alpha_i t}\delta_{-1}(t) \tag{4.9}$$

Esempio 4.5 Riprendendo l'esempio 4.4, antitrasformiamo $V(s)$. Abbiamo che

$$V(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{3}{s+2}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[V(s)] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+2\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]+3\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]\\ &= e^t\delta_{-1}(t)+2te^t\delta_{-1}(t)+3e^{-2t}\delta_{-1}(t)\\ &= (e^t+2te^t+3e^{-2t})\delta_{-1}(t)\end{aligned}$$

4.4 Antitrasformata della fuzione di trasferimento

Ritornando alla formula (3.4) che non è stata ancora dimostrata in modo formale, scriviamo l'espressione della funzione di trasferimento:

$$H(s)=\frac{n^*(s)}{(s-\lambda_1)^{\mu_1}(s-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(s-\lambda_r)^{\mu_r}}$$

dove $\lambda_1,...,\lambda_r$ sono le radici del polinomio caratteristico.
La risposta impulsiva si ottiene applicando l'antitrasformata di Laplace della decomposizione in frazioni semplici di $H(s)$ e quindi otteniamo (3.4):

$$h(t)=d_0\delta(t)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=0}^{\mu_i-1}d_{i,\ell}\frac{t^\ell}{l!}e^{\lambda_i t}\delta_{-1}(t)$$

Ricordiamo che $d_0\neq 0$ soltanto per i sistemi propri ma non strettamente propri $(n=m)$. Infatti, quando il grado del numeratore $n^*(s)$ è n, bisogna dividerlo al denominatore ottenendo un polinomio di grado 0 (cioè una costante) che antitrasformato genera un'impulso.

Esempio 4.6 (Esercizio svolto)
Risolviamo il seguente sistema dato da un'equazione differenziale e dalle condizioni iniziali. L'ingresso del sistema è $u(t)$ mentre l'uscita è $v(t)$:

$$\begin{cases}\ddot v(t)-5\dot v(t)+4v(t)=\dot u(t)-3u(t)\\ \dot v(0^-)=1\\ v(0^-)=0\\ u(t)=e^t\delta_{-1}(t).\end{cases}$$

La trasformata di Laplace del sistema è

$$\begin{gathered}
\big(s^2V(s) - sv(0^-) - \dot{v}(0^-)\big) - 5\big(sV(s) - v(0^-)\big) + 4V(s) = \big(sU(s) - u(0^-)\big) - 3U(s) \\
s^2V(s) - 1 - 5sV(s) + 4V(s) = sU(s) - 3U(s) \\
(s^2 - 5s + 4)V(s) = 1 + (s-3)U(s) \\
V(s) = \frac{1}{(s-1)(s-4)} + \frac{s-3}{(s-1)(s-4)}U(s),
\end{gathered}$$

dove possiamo riconoscere le funzioni

$$V_\ell(s) = \frac{1}{(s-1)(s-4)} \qquad H(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s-4)} \qquad U(s) = \mathcal{L}\big[u(t)\big] = \frac{1}{s-1}.$$

Da qui per trovare la risposta finale si procede accorpando $V(s)$ in un'unica frazione

$$\begin{aligned}
V(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-4)} + \frac{s-3}{(s-1)(s-4)} \cdot \frac{1}{s-1} \\
&= \frac{2(s-2)}{(s-4)(s-1)^2} = F(s) \\
&= \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}
\end{aligned}$$

e risolvendo mediante il metodo dei fratti semplici i coefficienti

$$\begin{aligned}
A &= (s-4)F(s)\big|_{s=4} = \left.\frac{2(s-2)}{(s-1)^2}\right|_{s=4} = \frac{4}{9} \\
B &= \frac{d}{ds}\Big((s-1)^2F(s)\Big)\Big|_{s=1} = 2\frac{d}{ds}\left(\frac{s-2}{s-4}\right)\Big|_{s=1} = 2\left.\frac{-2}{(s-4)^2}\right|_{s=1} = -\frac{4}{9} \\
C &= (s-1)^2F(s)\big|_{s=1} = \left.\frac{2(s-2)}{s-4}\right|_{s=1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

si ottiene la risposta totale nei complessi

$$V(s) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{s-4} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}.$$

che, antitrasformato con Laplace, fornisce la risposta totale del sistema:

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[V\big(s\big)\big](t) = \big(\tfrac{4}{9}e^{4t} - \tfrac{4}{9}e^{t} + \tfrac{2}{3}te^{t}\big)\delta_{-1}(t).$$

Come si può notare il risultato è differente da quello calcolato nel tempo (senza la TdL), ma questo non va confuso per un errore: i risultati possibili sono infatti somme di fratti semplici linearmente indipendenti e per questo la risposta del sistema può presentarsi in più forme.

4.5 Riassunto

Caso 1. Se la nostra funzione $V(s) = n(s)/d(s)$ è tale per cui $\deg n(s) \geq \deg d(s)$ allora ci riconduciamo alla forma

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + q(s)$$

tramite la divisione polinomiale e poi troviamo che

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[V(s)] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{r(s)}{d(s)} + q(s)\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{r(s)}{d(s)}\right] + \mathscr{L}^{-1}[q(s)] \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=0}^{\mu_r} c_{i,\ell}\,\frac{t^\ell}{\ell!}e^{\alpha_i t}\delta_{-1}(t) + b_1\delta(t) + \cdots + b_k\frac{\mathrm{d}^{(k-1)}\delta(t)}{\mathrm{d}t^{(k-1)}}\end{aligned} \tag{4.10}$$

dove $k = \deg q(s)$.

Caso 2. Se abbiamo che $\deg n(s) < \deg d(s)$ allora non eseguiamo nessuna divisione polinomiale e non abbiamo alcun fattore impulsivo ($q(s) = 0$). Si ha quindi che

$$\mathscr{L}^{-1}[V(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{r(s)}{d(s)}\right] = \sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=0}^{\mu_r} c_{i,\ell}\,\frac{t^\ell}{\ell!}e^{\alpha_i t}\delta_{-1}(t) \tag{4.11}$$

5 Codice Matlab per il calcolo simbolico dell'antitrasformata di Laplace

```
%primo esempio: antitrasformata di una funzione semplice

syms s t
Vs = 1/(s+3);
ilaplace(Vs)

ans =

exp(-3*t)

%secondo esempio per fattorizzare un polinomio
factor(s^3 + 12*s^2+44*s + 48)

ans =

[ s + 6, s + 2, s + 4]

%terzo esempio
Fs = (3*s^2 + 4*s +5)/(s^3 + 12*s^2+44*s + 48);
ilaplace(Fs)

ans =

(9*exp(-2*t))/8 - (37*exp(-4*t))/4 + (89*exp(-6*t))/8

%notate come le soluzioni dell'equazione caratteristica compaiono nei
%modi elementari
```