Algoritmi e Strutture Dati - Prima provetta
03/05/12

Esercizio 1

Utilizzando il master theorem, è facile vedere che $T(n) = \Theta(\sqrt{n}\log n)$.
Dimostriamolo per sostituzione, partendo da $T(n) = O(\sqrt{n}\log n)$.
Coinvolgendo il logaritmo, il caso base è fra quelli problematici:

$$T(1) = 1 \not\leq c\log 1 = 0$$

Per questo motivo, consideriamo i valori i compresi fra 2 e 7, estremi inclusi; $\lfloor i/4 \rfloor$ in questo caso è pari a 0 o 1; scriviamo quindi

$$T(i) = 2T(\lfloor i/4 \rfloor) + \sqrt{i} = 2 + \sqrt{i} \leq c\sqrt{i}\log i \qquad \forall i : 2 \leq i \leq 7$$

da cui si ottiene:

$$c \geq \frac{2+\sqrt{i}}{\sqrt{i}\log i} \qquad \forall i : 2 \leq i \leq 7$$

Per $i = 8$, $\lfloor i/4 \rfloor$ è pari a 2 e rientra nei casi base già risolti. Possiamo quindi fermarci a 7.
Nel passo induttivo, dobbiamo dimostrare che $T(n) \leq c\sqrt{n}\log n$ e supponiamo che la relazione $T(n') \leq c\sqrt{n'}\log n'$ sia già stata dimostrata per $2 \leq n' < n$.

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 2c\sqrt{\lfloor n/4 \rfloor}\log\lfloor n/4 \rfloor + \sqrt{n} \\
&\leq 2c\sqrt{n/4}\log n/4 + \sqrt{n} \\
&= c\sqrt{n}\log n/4 + \sqrt{n} \\
&= c\sqrt{n}(\log n - \log 4) + \sqrt{n} \\
&= c\sqrt{n}\log n - 2c\sqrt{n} + \sqrt{n} \leq c\sqrt{n}\log n
\end{aligned}$$

L'ultima disequazione è soddisfatta se $c \geq 1/2$. Poiché questa disequazione per c e tutte quelle derivanti dal caso base sono di tipo $\geq$, è sufficiente prendere il valore più alto fra questi valori come valore per c.
Consideriamo ora $T(n) = \Omega(\sqrt{n}\log n)$. Il caso base è simile a quello precedente:

$$T(i) = 2T(\lfloor i/4 \rfloor) + \sqrt{i} = 2 + \sqrt{i} \geq c\sqrt{i}\log i \qquad \forall i : 2 \leq i \leq 7$$

da cui si ottiene:

$$c \leq \frac{2+\sqrt{i}}{\sqrt{i}\log i} \qquad \forall i : 2 \leq i \leq 7$$

Nel passo induttivo, dobbiamo dimostrare che $T(n) \geq c\sqrt{n}\log n$ e supponiamo che la relazione $T(n') \geq c\sqrt{n'}\log n'$ sia già stata dimostrata per $2 \leq n' < n$.

$$\begin{aligned}
T(n) &\geq 2c\sqrt{\lfloor n/4 \rfloor}\log\lfloor n/4 \rfloor + \sqrt{n} \\
&\approx 2c\sqrt{n/4}\log n/4 + \sqrt{n} \\
&= c\sqrt{n}\log n/4 + \sqrt{n} \\
&= c\sqrt{n}(\log n - \log 4) + \sqrt{n} \\
&= \sqrt{n}(c\log n - 2c + 1) \geq c\sqrt{n}\log n
\end{aligned}$$

L'ultima disequazione è vera per $c \leq 1/2$, il che è compatibile con gli altri estremi trovati per i casi base.

Esercizio 2

In generale, per evitare di dover fare una visita a partire da tutti i nodi per vedere se i cammini arrivano a v, si può utilizzare il grafo trasposto (costruibile in tempo $O(m+n)$, vedi libro e appunti) e considerare una visita che parta da v.

Si effettua una visita a partire dal nodo v sul grafo trasposto G^T (in tempo $O(m+n)$), utilizzando per esempio l'algoritmo che abbiamo scritto per identificare le componenti connesse; v è di tipo "roma" se e solo se tutti i nodi sono stati visitati a partire da v.

```
boolean isRoma(GRAPH G^T, NODE v)
    boolean[] id = new int[1 ... G^T.n]
    foreach u ∈ G^T.V() do
        id[u] = 0
    ccdfs(G^T, 1, v, id)
    foreach u ∈ G^T.V() do
        if id[u] == 0 then
            return false
    return true
```

Per la seconda parte, è ovviamente possibile ripetere la procedura isRoma() a partire da ogni nodo, con un costo computazionale $O(n(m+n)) = O(mn)$; ma è comunque possibile risolvere il problema in $O(m+n)$, sempre operando sul grafo trasposto.
Si effettui una visita in profondità toccando tutti i nodi del grafo trasposto, utilizzando il meccanismo di discovery/finish time. Sia v l'ultimo nodo ad essere chiuso. Si utilizzi ora la procedura roma(G^T, v) definita sopra; se otteniamo **true**, allora esiste un nodo Roma. Altrimenti, non esiste alcun nodo Roma in G. La dimostrazione è per assurdo. Supponiamo che esista un nodo w Roma; possono darsi due casi:

- se w è stato scoperto prima di v, allora v è un discendente di w e deve essere stato chiuso prima di w, assurdo;
- se v è stato scoperto prima di w, allora possono darsi due casi:
  - w è un discendente di v; ma allora anche v è Roma, perchè v può raggiungere w e da esso tutti gli altri nodi; assurdo.
  - w non è un discendente di v; non esiste quindi un cammino di da v a w, e quindi v viene chiuso prima di w, assurdo.

Per scrivere il codice, utilizziamo la procedura topsort() definita nei lucidi.

```
boolean Roma(GRAPH G^T)
    STACK S = topsort(G^T)
    NODE v = S.pop()
    return isRoma(G^T, v)
```

La procedura risultante è $O(m+n)$.

Esercizio 3

Si ordini il vettore e si considerino le somme degli elementi i e $n-i+1$, con $1 \leq i \leq n/2$. Se sono tutti uguali, si ritorna **true**, altrimenti si ritorna **false**. Il costo dell'algoritmo è dominato dall'ordinamento, ed è quindi $O(n \log n)$.
Dimostrazione: supponiamo per assurdo che esista un insieme di coppie che rispetti le condizioni per restituire **true**, in cui l'elemento maggiore M sia associato ad un elemento M' diverso dal minore m ($m < M'$). Quindi il minore m è associato ad un elemento m' diverso dal massimo M ($m' < M$). Allora $m + m' < M + M'$, il che contraddice l'ipotesi che tale insieme di coppie rispetti le condizioni per restituire **true**.
L'algoritmo consiste quindi nel scegliere il minore e il maggiore, e confrontarli con i secondi minori e maggiori, i terzi minori e maggiori, e così via.

```
boolean checkPairs(int[] A, int n)
    sort(A, n)
    int pairSum = A[1] + A[n]
    for i = 2 to n/2 do
        if A[i] + A[n - i + 1] ≠ pairSum then
            return false
    return true
```

Una soluzione più efficiente, in tempo $O(n)$, è la seguente: si calcola

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n} A[i]}{n/2}$$

S rappresenta il valore che deve avere la somma delle coppie. A questo punto si può utilizzare una hash table inserendo tutti i valori come chiavi. Per ogni valore $A[i]$, si cerca $S - A[i]$; se uno dei valori è assente, allora il vettore non può essere partizionato nel modo richiesto. Assumendo che la tabella hash sia ben dimensionata, il costo di ogni operazione su di essa è $O(1)$ e quindi il costo totale é O(n).

```
boolean checkPairs(int[] A, int n)
  int tot = sum(A, n)                          % Sum all elements, O(n)
  real pairSum = tot/(n/2)
  if pairSum ≠ ⌊pairSum⌋ then
    return false
  SET set = Set()                              % Based on a hash table
  for i = 1 to n do
    set.insert(A[i])
  for i = 1 to n do
    if not set.contains(pairSum − A[i]) then
      return false
  return true
```

Esercizio 4

Da un certo punto di vista, il problema è simile a quello del resto, in cui però non è richiesto di dare il resto esatta, ma il maggior resto possibile. In realtà, il problema è più simile a quello chiamo SubsetSum.
Il massimo valore $X[i][w]$ che può essere ottenuto con i primi $i \leq n$ valori e tale per cui $X[i][w]$ è minore di w è pari a:

$$X[i][w] = \begin{cases} 0 & i = 0 \vee w = 0 \\ -\infty & i > 0 \wedge w < 0 \\ \max\{X[i-1][w], X[i][w - V[i]] + V[i] & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La soluzione al problema si trova in $X[n][W]$; è possibile calcolare X tramite il seguente algoritmo basato su memoization:

```
int sum(int[] V, int i, int w, int[][] X)
  if i == 0 or w == 0 then
    return 0
  if w < 0 then
    return −∞
  if X[i][w] = ⊥ then
    X[i][w] = max{sum(X, i − 1, w), sum(X, i, w − V[i]) + V[i]}
  return X[i][w]
```

È possibile ottenere x tramite il seguente algoritmo:

```
int[] getsum(int[] V, int n, int W, int[][] X)
    int[] x = new int[1...n]
    for j = 1 to n do
        x[i] = 0
    int i = n
    while i > 0 do
        if X[i, W − V[i]] + V[i] > X[i − 1, W] then
            x[i] = x[i] + 1
            W = W − V[i]
        else
            i = i − 1
    return x
```

La complessità è $O(nW)$.