

Esercizio 1

Sia (u, v) l'arco con peso $w - 1$. Questo arco deve assolutamente far parte dello minimum spanning tree. Tutti gli altri archi possono essere selezionati con una qualunque visita in profondità o in ampiezza, tanto hanno peso uguale.

L'algoritmo lavora nel modo seguente:

- si cerca l'arco (u, v) con peso $w - 1$; questo può essere scritto con codice di costo $O(m + n)$, qui sotto assumo semplicemente che questa coppia di nodi sia data in input
- si fa partire una visita a partire dal nodo u , assicurandosi di seguire sempre per primo l'arco u, v
- si prosegue la visita normalmente (qui implementata come una BFS).

edros(GRAPH G , NODE u , NODE v , NODE[] p)

```
visited = new boolean[1 .. G.n]
foreach  $x \in G.V()$  do
    visited[x] = false
QUEUE  $S$  = Queue()
 $S.enqueue(u)$ 
 $S.enqueue(v)$ 
 $p[u] = \text{nil}$ 
 $p[v] = u$ 
visited[u] = true
visited[v] = true
while not  $S.isEmpty()$  do
    NODE  $x = S.dequeue()$ 
    foreach  $y \in G.adj(x)$  do
        if not visited[y] then
            visited[y] = true
             $p[y] = x$ 
             $S.enqueue(y)$ 
```

% Il nodo y non è già stato scoperto

Esercizio 2

È sufficiente modificare l'algoritmo per le componenti connesse visto a lezione:

int[] connectedK(GRAPH G , int k)

```
int[] visited = new BOOLEAN[1 .. G.n]
foreach  $u \in G.V()$  do
    visited[u] = false
return ccdfs( $G, visited, s, k$ )

ccdfs(GRAPH  $G$ , boolean[] visited[], NODE  $u$ , int  $k$ )
    if  $k == 0$  then
        return false
    visited[u] = true
    foreach  $v \in G.adj(u)$  do
        if not visited[v] then
            if not ccdfs( $G, visited, v, k - 1$ ) then
                return false

return true
```

La complessità è pari a $O(n + \min\{m, k^2\})$, in quanto è necessario pagare $O(n)$ per l'inizializzazione di *visited*, e poi visitare al più k nodi, ognuno dei quali può avere al più k archi (se ne avesse $k + 1$, prima o poi questi verrebbero visitati, e l'algoritmo terminerebbe prima)

Esercizio 3

Il problema può essere risolto con tecnica greedy. Ordiniamo i segmenti in senso non decrescente rispetto alla lunghezza, in modo che il segmento 1 abbia lunghezza minima e il segmento n lunghezza massima. Procediamo quindi a tagliare prima il segmento più corto, poi quello successivo e così via finché possibile (cioè fino a quando la lunghezza residua ci consente di ottenere almeno un'altro segmento). Lo pseudocodice può essere descritto in questo modo

```

int maxSegments(int[]  $V$ , int  $n$ , int  $L$ )


---


    sort( $V$ ,  $n$ )
    int  $i = 1$ 
    while  $i \leq n$  and  $L \geq V[i]$  do
         $L = L - V[i]$ 
         $i = i + 1$ 
    return  $i - 1$ 

```

Notate che una soluzione ottima può essere descritta come un insieme S , sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$, costituito dagli indici dei segmenti le cui richieste vengono soddisfatte, dopo che il vettore è stato ordinato. Ovviamente, dovrà risultare che

$$\sum_{i \in S} V[i] \leq L$$

Per dimostrare la correttezza, dobbiamo dimostrare le seguenti proprietà:

- **Sottostruttura ottima:** sia S una soluzione ottima per il problema, e sia $x \in S$. È possibile vedere che $S - \{x\}$ è una soluzione ottima per uno sfilatino di lunghezza $L - V[x]$, grazie alla tecnica del taglia e cuci: per assurdo, se fosse possibile trovare un sottoinsieme S' tale che $|S'| > |S - \{x\}|$ e $\sum_{y \in S'} V[y] \leq L - V[x]$, allora l'insieme $S' \cup \{x\}$ avrebbe cardinalità superiore a $|S|$, sempre rispettando la lunghezza dello sfilatino. Quindi S non sarebbe ottima, contraddizione.
- **Scelta greedy:** Dato un problema di dimensione n , vogliamo dimostrare che esiste una soluzione ottima che contiene il segmento più piccolo m (memorizzato nell'indice 1, quando il vettore è ordinato). Sia S una soluzione ottima; possono darsi due casi, $m \in S$ (nel qual caso la nostra tesi è banalmente dimostrata), oppure $m \notin S$. Sia x un qualunque elemento di S ; sia $S' = S - \{x\} \cup \{m\}$. Ovviamente,

$$\sum_{i \in S'} V[i] \leq L$$

in quanto $V[m] \leq V[x]$ dato che m è il segmento più corto (o uno dei segmenti più corti), e $|S| = |S'|$, quindi S' ha la stessa cardinalità di S ed è ottimale.

L'operazione di ordinamento può essere fatta in tempo $O(n \log n)$. Il successivo ciclo while ha costo $O(n)$ nel caso peggiore. Il costo complessivo dell'algoritmo risulta quindi $O(n \log n)$.

Esercizio 4

I due problemi sono molto simili, ma questo non può essere risolto tramite la stessa tecnica greedy di cui sopra. Ad esempio, si consideri un insieme di monete da 1, 2, 2, 2 centesimi ed un IMU da pagare da 6 centesimi. È ovvio che la soluzione esiste, ed è data da 2, 2, 2; ma scegliere sempre e comunque la moneta 1 porta all'impossibilità di pagare la cifra esatta.

Utilizziamo quindi la programmazione dinamica. Date le prime i monete e una tassa t da pagare, il numero massimo di monete $M[i, t]$ può essere calcolato nel modo seguente:

$$M[i][t] = \begin{cases} -\infty & i = 0 \wedge t > 0; \text{ oppure} \\ -\infty & t < 0; \text{ oppure} \\ 0 & t = 0; \text{ oppure} \\ \max(M[i-1][t], M[i-1][t - V[i]] + 1) & i > 0 \end{cases}$$

La logica è la seguente: restituisco $-\infty$ se ho ancora resta da dare ($t > 0$), ma non ho più monete a disposizione ($i > 0$); oppure, restituisco $-\infty$ se il resto che devo dare è minore di zero (il che significa che in precedenza ho usato una moneta troppo grande); oppure,

restituisco 0 se non devo dare più alcun resto; oppure, restituisco il massimo fra due possibilità: non utilizzare la moneta i -esima oppure la utilizza, aumentando di 1 il numero di monete usate.

Il codice può essere scritto nel modo seguente:

```
int maxResto(int[]  $V$ , int  $i$ , int  $t$ , int[][]  $M$ )
    if  $i == 0$  and  $t > 0$  then
        return  $-\infty$ 
    if  $t < 0$  then
        return  $-\infty$ 
    if  $t == 0$  then
        return 0
    if  $M[i][t] == \perp$  then
         $M[i][t] = \max(\text{maxResto}(V, i - 1, t, M), \text{maxResto}(V, i - 1, t - V[i], M) + 1)$ 
    return  $M[i][t]$ 
```

La chiamata iniziale sarà $\text{maxResto}(V, n, T)$. La complessità risultante sarà pari a $O(nT)$