Algoritmi e Strutture Dati - 24/01/2017

Esercizio 1

L'equazione di ricorrenza della funzione crazy() è la seguente:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2 & n > 1 \\ 1 & n \leq 1 \end{cases}$$

È facile vedere che $T(n) = \Omega(n^2)$; proviamo a dimostrare che $T(n) = O(n^2)$.

- Caso base: $n = 1$, $T(n) = 1 \leq cn^2 = c$, ovvero $c \geq 1$.
- Ipotesi induttiva: $\forall n' < n : T(n') \leq c(n')^2$
- Passo induttivo:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2 \\ &\leq 2c\lfloor n/4 \rfloor^2 + c\lfloor n/2 \rfloor^2 + n^2 \\ &\leq 2cn^2/16 + cn^2/4 + n^2 \\ &= 3/8cn^2 + n^2 \leq cn^2 \end{aligned}$$

  L'ultima disequazione è vera per $c \geq 8/5$.

  Abbiamo quindi dimostrato che $T(n) = \Theta(n^2)$, con $c \geq 8/5$ e $m = 1$.

Esercizio 2

Il problema proposto è quello della bi-colorazione di un grafo, che è possibile se e solo se il grafo è bipartito. La bi-colorazione può essere ottenuta facilmente tramite una visita DFS:

```
boolean good-bad-guys(GRAPH G)
    int[] C = new int[1 ... G.n] = {−1}                % Initialized to −1
    foreach u ∈ G.V() do
        if C[u] < 0 then
            if not dfsVisit(G, u, 0, C) then
                return false
    return true
```

```
boolean dfsVisit(GRAPH G, int u, int c, int[] C)
    C[u] = c
    foreach v ∈ G.adj(u) do
        if C[v] < 0 then
            if not dfsVisit(G, v, 1 − c, C) then
                return false
        else if C[v] = c then
            return false
    return true
```

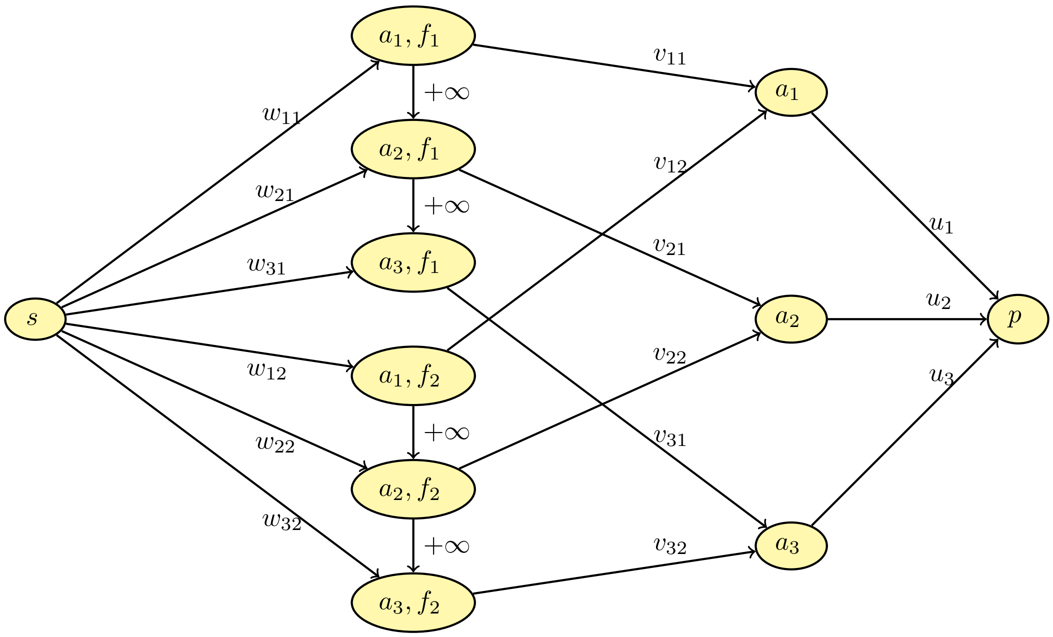
Esercizio 3

Creiamo una rete di flusso contenente una sorgente s, un nodo (a_i, f_j) per ogni coppia (anno i-esimo, foresta j-esima), un nodo a_i per ogni anno, e un nodo pozzo p.

- Aggiungiamo un arco fra la sorgente e ogni nodo (a_i, f_j), con capacità w_{ij} ad indicare gli alberi che maturano in un anno.

- Per ogni foresta j, creiamo un arco fra ogni nodo (a_i, f_j) e ogni nodo (a_{i+1}, f_j), per indicare che gli alberi maturati nell'anno i-esimo possono essere usati nell'anno successivo; la capacità può essere messa a $+\infty$, oppure può essere pari alla somma degli alberi maturati in quell'anno e in quelli precedenti.
- Aggiungiamo un arco ogni coppia (a_i, f_j) e l'anno a_i, con capacità v_{ij}, ad indicare il numero massimo di archi che possono essere tagliati nell'anno i-esimo nella foresta j-esima
- Aggiungiamo un arco fra ogni anno a_i e il pozzo p. con capacità u_i, ad indicare il numero massimo di alberi che possono essere tagliati in un dato anno

Un esempio per $n = 2$ foreste e $m = 3$ anni è presente in figura:



Il numero di nodi è $|V| = nm + m + 2$, il numero di archi è $|E| = 2nm + m$; un limite superiore al flusso massimo è $O(U)$, dove $U = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Il costo computazionale è quindi $O(nmU)$.
Il numero di alberi che devono essere tagliati per ogni anno e per ogni foresta si trova sugli archi $(a_i, f_j) \rightarrow a_i$.

Esercizio 4

Data una stringa di input S, l'esercizio può essere risolto in tempo $\Theta(n^3)$ utilizzando la programmazione dinamica o memoization, utilizzando questa formulazione ricorsiva:

$$DP[i][j] = \begin{cases} 1 & i \geq j \\ 1 & i < j \wedge DP[i+1][j-1] = 1 \wedge S[i] = S[j] \\ \min_{i \leq k < j}\{DP[i][k] + DP[k+1][j]\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$DP[i][j]$ contiene il numero di stringhe palindrome che costituiscono la sottostringa $S[i \ldots j]$. Nel caso la sottostringa sia vuota oppure lunga 1 carattere, è palindroma e quindi il numero di stringhe palindrome è pari a 1. Se la sottostringa $S[i+1 \ldots j-1]$ è palindroma e

$S[i] = S[j]$, allora anche la stringa $S[i, j]$ è palindroma e il numero di stringhe palindrome è pari a 1. Altrimenti, si spezza la stringa in un punto qualsiasi e si restituisce il minimo numero di palindrome dato dalla somma delle palindrome contenuta nelle due sottostringhe.

```
int countPalyndrome(ITEM[] S, int n)
    int[][] DP = new int[0...n][0...n] = {+∞}                    % Initialized to +∞
    return cpRec(S, 1, n, DP)
```

```
int cpRec(ITEM[] S, int i, int j, int[][] DP)
    if i ≥ j then
        return 1
    if cpRec(S, i+1, j-1, DP) = 1 and S[i] == S[j] then
        return 1
    if DP[i][j] == +∞ then
        for k = i to j-1 do
            DP[i][j] = min(DP[i][j], cpRec(S, i, k, DP) + cpRec(S, k+1, j, DP))
    return DP[i][j]
```

La matrice DP viene inizializzata con valori $+\infty$, ad indicare che non sono stati calcolati e pronti per essere utilizzati come valori iniziali per il calcolo del minimo. La chiamata iniziale è countPalyndrome$(S, 1, n, D)$ e restituisce il numero minimo di stringhe palindrome che compongono il codice.
Esiste una soluzione alternativa, che utilizza un vettore DP invece che una matrice. $DP[j]$ contiene il minimo numero di sottostringhe palindrome necessarie per costitire il prefisso j-esimo di S, ovvero la sottostringa $S[1 \ldots j]$. $DP[j]$ può essere calcolato nel modo seguente:

$$DP[j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \min_{1 \leq i \leq j \wedge palyndrome(S,i,j)=\textbf{true}} \{DP[i-1]+1\} & i > 0 \end{cases}$$

dove $palyndrome(S, i, j)$ è una funzione che restituisce **true** se la stringa contenuta in $S[i \ldots j]$ è palindroma, di costo $O(n)$.
L'idea è la seguente: si considerano tutte le sottostringhe palindrome che terminano in j. Queste sottostringhe contano per uno nella somma finale. Per ognuna di esse, si considera il prefisso restante una volta rimosse, e si prende il numero minimo di palindrome che costituiscono uno di tali prefissi.

```
int countPalyndrome(ITEM[] S, int n)
    int[] DP = new int[0...n]
    DP[0] = 0
    for j = 1 to n do
        DP[j] = +∞
        for i = 1 to j do
            if palyndrome(S, i, j) then
                DP[j] = max(DP[i-1] + 1, DP[j])
    return DP[n]
```

La complessità resta $O(n^3)$, in quanto per ognuno degli n elementi del vettore, bisogna considerare un numero $O(n)$ di possibili suddivisioni della stringa, per ognuna delle quali bisogna eseguire palyndrome di costo $O(n)$.
Ma è possibile fare di meglio, con un po' di pre-elaborazione. Sia P una matrice booleana tale che $P[i][j] = \textbf{true}$ se la sottostringa $S[i \ldots j]$ è palindroma. P può essere calcolata in tempo in tempo $\Theta(n^2)$ nel modo seguente:

$$DP[i][j] = \begin{cases} \textbf{true} & i \geq j \\ DP[i+1][j-1] \wedge S[i] = S[j] & i < j \end{cases}$$

Tradotto in codice, l'algoritmo è il seguente:

```
int countPalyndrome(ITEM[] S, int n)
    int[][] P = new int[1...n][1...n] = {−1}                % Initialized
    int[] DP = new int[0...n]
    DP[0] = 0
    for j = 1 to n do
        DP[j] = +∞
        for i = 1 to j do
            if palyndrome(S, i, j, P) then
                DP[j] = min(DP[i − 1] + 1, DP[j])
    return DP[n]
```

```
int palyndrome(ITEM[] S, int i, int j, int[][] P)
    if i ≥ j then
        return 1
    if P[i][j] < 0 then
        P[i][j] = iif(palyndrome(S, i + 1, j − 1, P) == 1 and S[i] == S[j],1,0)
    return P[i][j]
```

Questo algoritmo ha complessità $\Theta(n^2)$. Si noti il fatto che gli indici i devono essere calcolati dal più grande al più piccolo, per assicurarsi che i valori richiesti siano già calcolati.