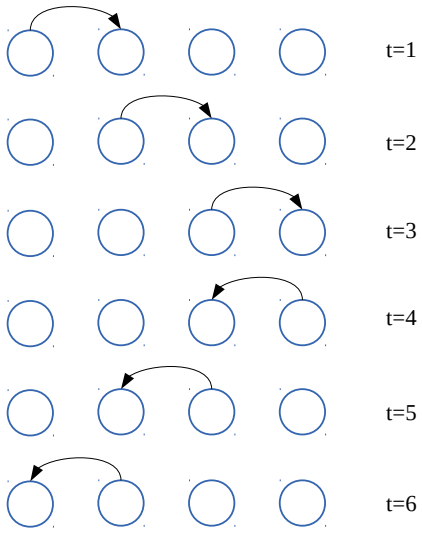
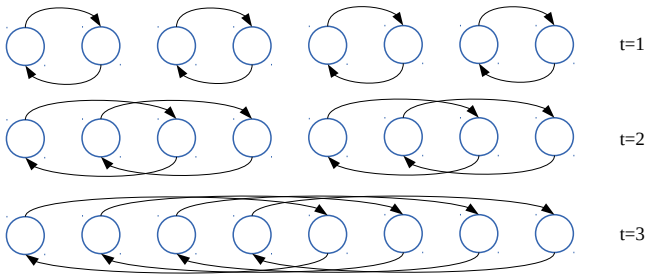
Algoritmi e Strutture Dati
02/09/2013

Esercizio 1

Per quanto riguarda il numero di messaggi, è ovvio che ogni segreto deve essere spedito almeno una volta; quindi sono necessari almeno $\Omega(n)$ messaggi. Un possibile algoritmo è il seguente: al turno i-esimo, la persona i spedisce un messaggio alla persona successiva $i+1$, fino al turno $n-1$; al turno ni, la persona n-esima spedisce un messaggio alla persona precedente $n-1$, la quale spedisce un messaggio alla persona $n-2$, e così via fino al turno $2n-2$ dove la persona 2 spedisce un messaggio alla persona 1, come visualizzato nella figura seguente:



Vengono quindi spediti $2n-2$ messaggi totali in $2n-2$ turni. Ogni messaggio contiene ovviamente tutti i segreti appresi dal mittente fin a quel momento. Questo significa che dal punto di vista del numero di messaggi, $O(n)$ è un limite superiore e quindi l'algoritmo proposto è ottimale.
Sebbene sia possibile ridurre il numero di turni permettendo ai due flussi di messaggi di partire parallelamente, è possibile migliorare l'algoritmo facendo comunicare tutte le persone, come illustrato nella figura seguente:



L'idea è la seguente: dopo il primo turno, tutte le coppie conoscono i segreti di entrambi i membri delle coppie. Dopo il secondo turno, tutte i quartetti conoscono i segreti di tutti i membri dei quartetti, e così via. In altre parole, $O(\log n)$ turni sono sufficienti per comunicare tutti i segreti, al costo aumentato di $O(n \log n)$ messaggi.
Per quanto riguarda un limite inferiore, si consideri un singolo segreto: all'inizio del primo turno, il segreto è noto solo ad un nodo; all'inizio del secondo turno, può essere noto al massimo a due nodi; al terzo turno, può essere noto al massimo quattro nodi; quindi $\Omega(\log n)$ è un limite inferiore al numero di turni, e questo algoritmo è ottimale da questo punto di vista.

Esercizio 2

Sappiamo già che l'albero è un albero binario di ricerca. È necessario provare le quattro proprietà che definiscono gli alberi Red-Black. Si verifica una volta sola che la radice sia nera, per poi chiamare una procedura ricorsivaa che calcola la profondità nera e verifica che i figli dei nodi rossi siano neri. La proprietà che i nodi **NIL** siano neri si considera automaticamente verificata.

La procedura ricorsiva verifyRBRec(T, h) ritorna una coppia di valori; il primo indica l'altezza nera della foglia più profonda in T, mentre il secondo indica se T rispetta le regole sull'altezza nera e sui figli rossi.

```
boolean verifyRB(TREE T)
    if T.color = RED then
        return false
    (h, b) = verifyRBRec(TREE T, 0)
    return b
```

```
(int, boolean) verifyRBRec(TREE T, int h)
    if T = nil then
        return (h, true)
    if T.color = RED and (T.left.color = RED or T.right.color = RED) then
        return (h, false)
    nh = h + iif(T.color = BLACK, 1, 0)
    (h_L, b_L) = verifyRBRec(T.left, nh)
    (h_R, b_R) = verifyRBRec(T.right, nh)
    if not(b_L and b_R) then
        return (h, false)
    if h_L ≠ h_R then
        return (h, false)
    return (h_L, true)
```

La complessità è ovviamente $O(n)$.

Esercizio 3

È possibile semplicemente eseguire una visita in ampiezza per calcolare le distanze dal nodo r e poi verificare quanti di questi nodi ha distanza minore o uguale a d. La visita in ampiezza ha costo $O(m + n)$.

```
int count(GRAPH G, NODE r, int d)
    int count = 0
    int[] erdős = new int[1 ... G.n]
    NODE[] p = new NODE[1 ... G.n]
    erdos(G, r, erdős, p)
    for i = 1 to G.n do
        if erdős[i] ≤ d then
            count = count + 1
    return count
```

Esercizio 4

Utilizziamo la programmazione dinamica per il calcolo e calcoliamo il numero di modi $DP[x][i]$ con cui è possibile ottenere un valore x con i primi i dadi:

$$DP[x][i] = \begin{cases} \sum_{j=1}^{F[i]} DP[x-j][i-1] & x > 0 \text{ and } i > 0 \\ 1 & x = 0 \text{ and } i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti, incluso } x < 0 \end{cases}$$

L'idea è la seguente: si considera i primi i dadi, e si considerano tutti i possibili valori che possono essere ottenuti dal dado i-esimo: da 1 a $F[i]$, sommando insieme tutti i possibili modi con cui è possibile ottenere il valore restante con un dado in meno.

Il problema di questa versione è che conta tutte le possibili permutazioni; per ovviare a questo problema, è necessario assicurarsi che le selezioni dei numeri avvengano in ordine, ovvero che non sia mai possibile ottenere un tiro di dado inferiore al tiro precedente. In questo modo non sarà possibile generare alcuna permutazione.
Per ottenere questo, è necessario aggiungere un terzo parametro m, che indica il valore massimo del dado che può essere considerato, che deve essere più alto o uguale dei valori già ottenuti:

$$DP[x][i][m] = \begin{cases} \sum_{j=m}^{F[i]} DP[x-j][i-1][j] & x > 0 \textbf{ and } i > 0 \\ 1 & x = 0 \textbf{ and } i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti, incluso } x < 0 \end{cases}$$

Questa versione e quella successiva assume che i dadi siano ordinati in ordine crescente di numero di facce, altrimenti un valore alto come prima scelta impedisce di scegliere nei dadi successivi.
Da questa formulazione è facile ottenere una versione basata su memoization.

```
int diceRec(int[] F, int i, int x, int m, int[][][] T)
if x == 0 and i == 0 then
    return 1
else if x > 0 and i > 0 then
    if DP[x][i][m] < 0 then                                  % Memoization check
        DP[x][i][m] = 0
        for j = m to F[i] do
            DP[x][i][m] = DP[x][i][m] + diceRec(F, i − 1, x − j, j, DP)
    return DP[x][i][m]
else
    return 0
```

```
int dice(int[] F, int n, int X)
M = max(F, n)
int[][][] DP = new int[1 . . . n][1 . . . X][1 . . . M] = {−1}
return diceRec(F, n, X, 1, DP)
```

Il costo è pari a $O(nXM^2)$, dove M è il dado con il maggior numero di facce. Questo perchè ci sono nXM celle da riempire, ognuna delle quali viene riempita con costo $O(M)$.

Una soluzione alternativa è basata sulla seguente funzione ricorsiva:

$$DP[x][i][m] = \begin{cases} DP[x-m][i-1][m] + DP[x][i][m+1] & i > 0 \wedge x > 0 \textbf{ and } m < F[i] \\ DP[x-m][i-1][m] & i > 0 \wedge x > 0 \textbf{ and } m = F[i] \\ 1 & x = 0 \textbf{ and } i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'idea è la seguente: come sopra, si considera il dado i-esimo e si cerca di ottenere il valore x, con il terzo parametro m che indica il valore minimo del dado che può essere considerato, che deve essere più alto o uguale dei valori già ottenuti.
Se $m < F[i]$, ci sono ancora dadi e c'è un valore $x > 0$ da ottenere, è possibile scegliere fra: selezionare il valore m per il dado i-esimo, togliendo tale valore da x e considerando quindi cosa succede con $i - 1$ dadi; oppure considerare il dado i innalzando il valore di m. Tali valori vanno sommati. Se $m = F[i]$, il secondo caso non è possibile. I casi base restano uguali.
Una versione memoized di questa equazione ricorsiva conduce ad una complessità di $O(nXM)$, migliore di un fattore M rispetto alla versione precedente.