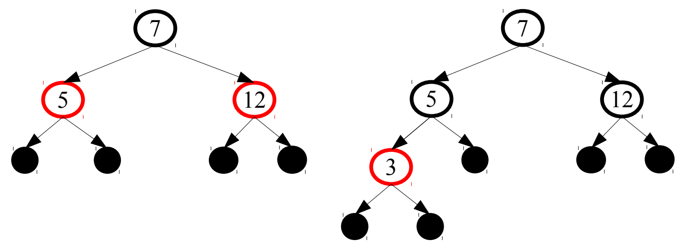
Algoritmi e Strutture Dati
07/01/2014

Esercizio 1

La complessità dell'algoritmo è $O(n \log^2 n)$, in quanto si tratta di tre cicli annidati, dove il primo è eseguito n volte, mentre i due cicli interni sono eseguiti ognuno $O(\log n)$ volte.

Esercizio 2

Si consideri l'albero della figura a sinistra qui sotto e si consideri l'inserimento della chiave 3. La chiave viene inserita a sinistra del 5, colorata di rosso. Ma poiché 5 è colorato di rosso, ci ritroviamo nel caso (3) della procedura di inserimento. Il padre e zio vengono colorati di nero, e il problema si sposta alla radice, che viene colorata di rosso. Poichè la radice ora è rossa, ma non ha padri, ci ritroviamo nel caso 1 e la radice viene colorata di rosso. L'altezza nera è ora pari a 2.



Esercizio 3

Parte 1: La prima parte si risolve modificando una visita in ampiezza, evitando di visitare stanze in cui ci siano mostri.

```
erdos(GRAPH G, NODE s, int[] erdős, NODE[] p, boolean[] M)
    QUEUE S = Queue()
    S.enqueue(s)
    foreach u ∈ G.V() − {s} do
        erdős[u] = ∞
    erdős[s] = 0
    while not S.isEmpty() do
        NODE u = S.dequeue()
        foreach v ∈ G.adj(u) do                          % Esamina l'arco (u, v)
            if erdős[v] == ∞ and not M[u] then            % Il nodo u non è già stato scoperto e non c'è mostro
                erdős[v] = erdős[u] + 1
                S.enqueue(v)
```

Il valore cercato si trova in erdos$[d]$. Sarebbe possibile migliorare ulteriormente l'algoritmo bloccando la ricerca quando si raggiunge d; in ogni caso, la ricerca nel caso pessimo richiede $O(m + n)$.

Parte 2: In questo caso, invece, è possibile utilizzare l'algoritmo di Dijsktra definendo i pesi in modo adeguato. Il peso degli archi è pari a 1 se il nodo di destinazione contiene un mostro, è pari a 0 altrimenti. La complessità risultante è pari a $O(n^2)$ o $O(m \log n)$, a seconda della struttura di dati utilizzata.

Esercizio 4

È sufficiente utilizzare una soluzione greedy che ordina i libri per altezza (costo $O(n \log n)$) e poi piazza i libri in ordine decrescente, utilizzando uno scaffale fino a quando questo contiene ancora libri. Il costo totale è dominato dall'ordinamento.

Dimostriamo informalmente la correttezza. Si consideri una soluzione ottima e si consideri il libro l_1 di altezza massima, e sia s_1 lo scaffale in cui si trova. Si consideri ora il secondo libro l_2 in ordine di altezza, e sia s_2 lo scaffale in cui si trova. Se $s_1 \neq s_2$, ci sono due possibilità:

- Se lo scaffale s_1 non è pieno (contiene meno di L libri), si sposti il libro l_2 nello scaffale s_1; l'altezza dello scaffale s_1 non cambia, in quanto $y[l_2] \leq y[l_1]$ e l_1 resta nello scaffale s_1; può diminuire l'altezza dello scaffale s_2, in quanto abbiamo rimosso un libro.

- Altrimenti, si effettui uno scambio fra il libro l_2 e un libro l_x contenuto in s_1, tale che $l_x \neq l_1$. L'altezza dello scaffale s_1 non cambia, in quanto $y[l_2] \leq y[l_1]$ e l_1 resta nello scaffale s_1; può diminuire l'altezza dello scaffale s_2, in quanto $y[l_x] \leq y[l_2]$.

Tuttavia, essendo la soluzione iniziale ottima, la soluzione ottenuta in questo modo può avere costo al più uguale a quella ottima, e quindi essere ottima anch'essa.
Abbiamo così ottenuto una soluzione ottima in cui due libri più alti sono nello stesso scaffale; ripetendo il procedimento di scambio, si può ottenere una soluzione ottima in cui uno scaffale contiene i primi L libri più alti .
Si consideri ora il sottoproblema ottenuto considerando i restanti $n - L$ libri, e si riapplichi il procedimento; questo mostra che una qualunque soluzione ottima può essere trasformata nella soluzione proposta nel codice seguente.

```
int altezza(int[] y, int n, int L)
    sort(y, n)
    int altezza = 0
    int left = 0
    for i = n downto 1 do
        if left == 0 then
            { Aggiungi libro a nuovo scaffale }
            altezza = altezza + y[i]
            left = L
        left = left − 1
    return altezza
```