Proyecto Final Métodos Numéricos

Carlos Giovanny Encinia González

26 de diciembre 2021

Resumen

En la naturaleza existen muchos sistemas que son complejos de describir, un de los fenómenos que más nos interesa estudiar son aquellos relacionados con el clima, hace años el científico del MIT Edward Lorenz, realizo varios estudios sobre el clima y pudo reducir varias ecuaciones parciales a solo 3, las cuales tratan de describir el fenómeno, estas ecuaciones forman un sistema caótico, el cual trataremos en este proyecto.

El siguiente trabajo es el proyecto final de la materia de Métodos Matemáticos, se mostrará como es que usando el método numérico de integración llamado Runge-Kutta de cuarto orden puede ser utilizado para poder simular y resolver las ecuaciones que describen un sistema caótico, en específico el atractor de Lorenz, el atractor de Zhou y el atractor de Rossler. Se dará una breve introducción a lo que describen estas tres ecuaciones diferenciales acopladas, después se resolverán con el método de Runge-Kutta.

Desarrollo

Muchos científicos ponen a la teoría del caos como una de las grandes teorías del último siglo poniéndola a la par de teorías como la relatividad y la cuántica. Todo inicio cuando el Dr. Edward Lorenz se encontraba simulando patrones climáticos [5]

En un inicio Lorenz desarrollo el modelo que describía la atmósfera terrestre en 12 ecuaciones, aunque esto ya estaba muy simplificado Lorenz lo que hizo fue hacer su modelo aún más simple, tomando en cuenta solamente una condición, esta fue la de la convección de un fluido en rotación. Al tomar solamente en cuenta pudo llegar a un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas. [1]

Este sistema de ecuaciones es una versión simplificada de las ecuaciones de convección de Saltzman [3]

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{1}$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz \tag{2}$$

$$\dot{z} = xy - \beta z \tag{3}$$

Donde:

σ representa el cociente entre la viscosidad del fluido y la conductividad térmica.

ρ representa la diferencia de temperatura entre el fondo y la parte superior en donde se encuentra encerrado el fluido.

β representa el cociente entre el largo y el ancho del lugar en donde se encuentra el fluido. [1]

Para obtener una solución numérica se deben elegir ciertos valores para nuestras constantes, Lorenz en su artículo propuso los siguientes valores: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ [3]

Zhou

Después tenemos el sistema de Zhou. que surge a partir del sistema controlado de Lorenz, calculando el Jacobiano del sistema y encontrando los puntos de equilibrio del sistema, podemos obtener las siguientes ecuaciones

$$\dot{x} = a(y - x) \tag{4}$$

$$\dot{y} = bx - xz \tag{5}$$

$$\dot{z} = xy + cz \tag{6}$$

El sistema es caótico cuando $a = 10$, $b = 16$ y $c = -1$ [7]

Los valores iniciales que se tomaran en cuenta serán los mismos que los utilizados en el artículo científico [6] que utiliza el método de Euler para solucionar el sistema de ecuaciones. $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ y $z_0 = 15$

Rossler

Fascinado con el atractor de Lorenz, Rossler comenzó a imaginar su propio atractor, llegando así después de mucho al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{x} = -y - x \tag{7}$$

$$\dot{y} = x + ay \tag{8}$$

$$\dot{z} = b + z(x - c) \tag{9}$$

Rossler experimento con los siguientes parámetros: $a = 0.2$, $b = 0.2$ y $c = 5.7$ [2]

Runge-Kutta

El método de integración que se utilizó, para resolver el sistema acoplado fue el de Runge-Kutta de cuarto orden, este método se llega utilizando un numero de elemento finito de términos de una serie de Taylor, la forma que se consiguió y se aplicó fue la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{10}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{11}$$

$$k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \tag{12}$$

$$k_3 = f(x_i + h/2, y_i + hk_2/2) \tag{13}$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \tag{14}$$

Siendo h la distancia entre cada punto [4]

Cabe mencionar que el sistema de ecuaciones funciona también si vemos a la variable y como un vector.

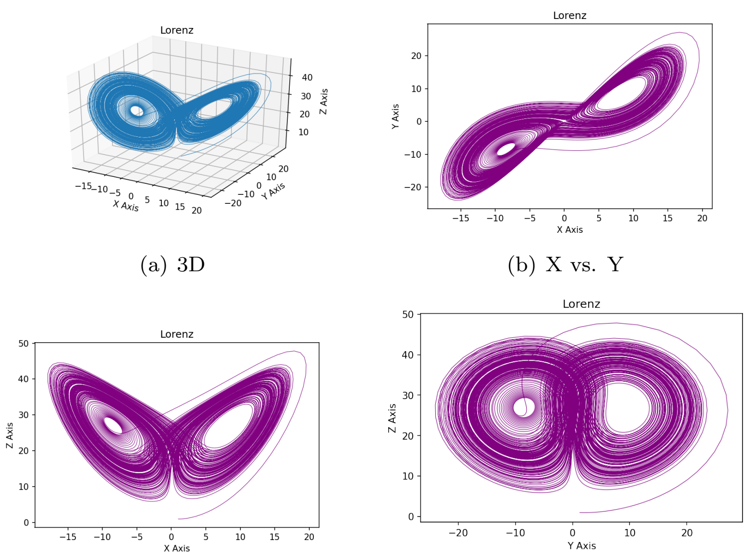
Resultados

Para los tres sistemas de ecuaciones presentados en este documento se utilizo un total de 20000 puntos, y se uso un valor de $h = 0.01$ y $t = 0$, las condiciones iniciales cambiaron para cada sistema. El código se realizó en python y se usaron librerías de este mismo para visualizar los resultados.

Lorenz

Para el sistema de ecuaciones que presenta Lorenz utilizamos valores iniciales de $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ y $z_0 = 1$

En seguida mostramos los resultados obtenidos gráficamente.



(a) 3D

(b) X vs. Y

(c) X vs. Z

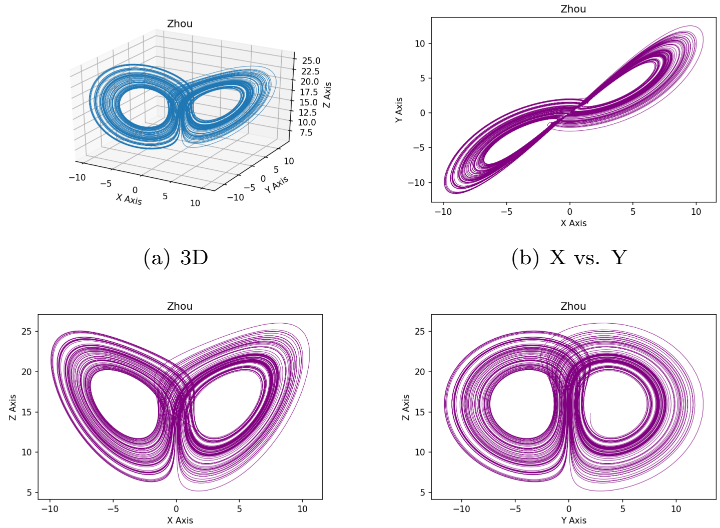
(d) Y vs. Z

Figure 1: Atractor de Lorenz

Zhou

Para Zhou como se ha mencionado antes se utilizaron los siguientes valores iniciales $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ y $z_0 = 15$

En seguida muestro los resultados obtenidos



(a) 3D (b) X vs. Y

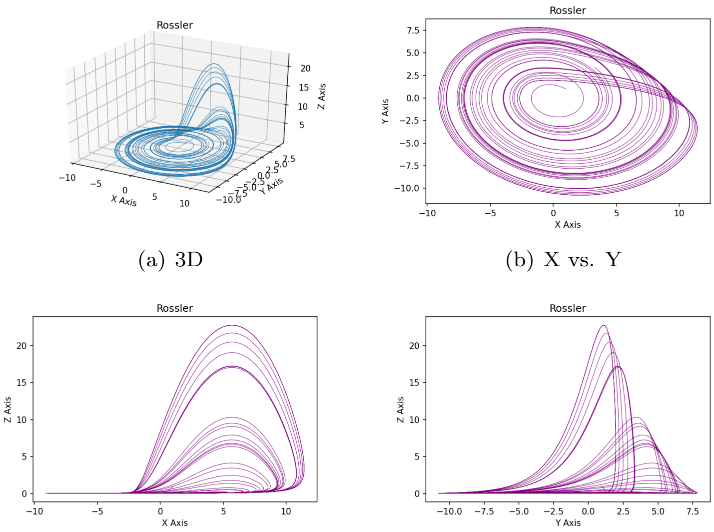
(c) X vs. Z (d) Y vs. Z

Figure 2: Atractor de Zhou

Rossler

Para el atractor de Rossler se usaron estas valores iniciales $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ y $z_0 = 1$

Abajo observamos los datos obtenidos de manera visual.



(a) 3D

(b) X vs. Y

(c) X vs. Z

(d) Y vs. Z

Figure 3: Atractor de Rossler

Conclusiones

En muchas áreas del conocimiento existen múltiples fenómenos que son descritos mediante ecuaciones diferenciales, y muchas veces estas no pueden ser solucionadas de manera analítica, un ejemplo es el mostrado en este documento, si bien hicimos uso de Runge-Kutta y obtuvimos resultados esperados, este método puede ser utilizado en muchas otras cosas, es increíble lo rápido que puede encontrar las soluciones. Es aún posible mejorar el código creado, para futuros proyectos sería interesante aplicar el método en sistemas más complejos, un área en la qué pudiese aplicar, es en sistemas biológicos, en específico en aquellos en los que se involucra el metabolismo de un organismo, dentro de este existen dinámica de reacciones, con metabolitos, y tiende a comportarse como un sistema caótico, tal vez podamos llegar a soluciones interesantes.

References

[1] William Harris. *The Lorenz Attractor: A Portrait of Chaos*. WEB. science.howstuffworks.com/ math-concepts/chaos-theory4.htm. Aug. 2020.

[2] C. Letellier and O. E. Rossler. "Rossler attractor". In: *Scholarpedia* 1.10 (2006). revision #91731, p. 1721. DOI: `10.4249/scholarpedia.1721`.

[3] Edward N. Lorenz. "Deterministic Nonperiodic Flow". In: *Journal of Atmospheric Sciences* 20.7 (1963), pp. 130–141.

[4] Antonio Nieves Hurtado and Federico C. Domínguez Sánchez. *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. Primera edición Ebook. Grupo Editorial Patria, 2014.

[5] Dizikes Peter. *When the Butterfly Effect Took Flight*. WEB. www. technologyreview .com /2011/02/22/196987/when-the-butterfly-effect-took-flight/. Feb. 2011.

[6] Z. Salleh U.A.M. Roslan and A. Kiliçman. "Solving Zhou's Chaotic System Using Euler's Method". In: *Thai Journal of Mathematics* 8.2 (2010), pp. 299–309.

[7] Zhou Wuneng et al. "On dynamics analysis of a new chaotic attractor". In: *Physics Letters A* 372.372 (2008), pp. 5773–5777.