Метод конечных элементов

Калинин Е.И.

7 марта, 2022

1 Общее уравнение

Исходное уравнение

$$-\nabla \cdot (k(\vec{x}) \nabla u(\vec{x})) + u(\vec{x}) = f(\vec{x}). \tag{1}$$

Домножаем (1) на набор пробных функции $\phi_i(\vec{x})$. Далее интегрируем по области решения D:

$$-\int_D [\nabla \cdot (k(\vec{x}) \nabla u(\vec{x}))]\, \phi_i(\vec{x})\, dD + \int_D [u(\vec{x})]\, \phi_i(\vec{x})\, dD = \int_D [f(\vec{x})]\, \phi_i(\vec{x})\, dD. \tag{2}$$

Для преобразования первого интеграла воспользуемся следствием из теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int_D \left[\nabla \cdot \vec{f}\right] g\, dD = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial n} g\, d\gamma - \int_D \vec{f} \cdot \nabla g\, dD \tag{3}$$

Тогда

$$\int_D k(\vec{x}) \nabla u(\vec{x}) \cdot \nabla \phi_i(\vec{x})\, dD - \int_\Gamma k(\vec{x}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \phi_i(\vec{x})\, d\gamma + \int_D u(\vec{x}) \phi_i(\vec{x})\, dD = \int_D f(\vec{x}) \phi_i(\vec{x})\, dD. \tag{4}$$

Далее рассмотрим аппроксимация функций в виде разложения по базизсным функциям (которые равны пробным)

$$u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(\vec{x}). \tag{5}$$

Пока будем рассматривать задачу с условиями первого рода и поэтому ограничимся теми phi_i, которые равны нулю на границах. И не будем аппроксимировать коэффициент диффузии $k(\vec{x})$. Подставляя (5) в (4) получим в матричной записи (i - строки, j - столбцы)

$$(\mathrm{S} + \mathrm{M})\, u = \mathrm{M} f. \tag{6}$$

С симметричными матрицами масс и жёсткости вида

$$\mathrm{M}_{ij} = \int_D \phi_j(\vec{x}) \phi_i(\vec{x})\, dD \tag{7}$$

$$\mathrm{S}_{ij} = \int_D \nabla \phi_j(\vec{x}) \cdot \nabla \phi_i(\vec{x})\, dD \tag{8}$$

2 Одномерный случай, линейный базис

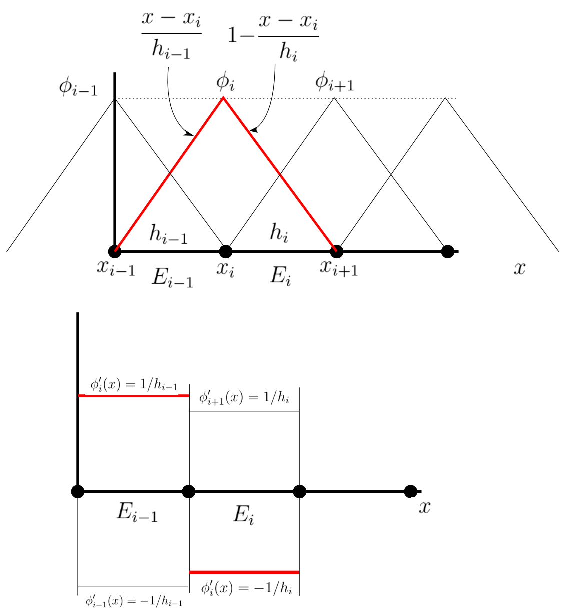

Рис. 1: Базис и его произвдоные в одномерном случае

$$\mathrm{M}_{i,i} = \int_D \phi_i \phi_i \, d(E_{i-1} + E_i) = \frac{h_{i-1} + h_i}{3} \tag{9}$$

$$\mathrm{M}_{i,i-1} = \int_D \phi_{i-1} \phi_i \, d(E_{i-1}) = \frac{h_{i-1}}{6} \tag{10}$$

Пусть k постоянна внутри конечного элемента (конечнообъёмная аппроксимация):

$$\mathrm{S}_{i,i} = \int_D k \phi'_i \phi'_i \, d(E_{i-1} + E_i) = \frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{k_i}{h_i} \tag{11}$$

$$\mathrm{S}_{i,i-1} = \int_D k \phi'_{i-1} \phi'_i \, d(E_{i-1}) = -\frac{k_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{12}$$

3 Якобиан

$$x_i \approx \frac{\partial x_i(\vec{\xi})}{\partial \xi_j} \xi_j \tag{13}$$

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i(\vec{\xi})}{\partial \xi_j} \tag{14}$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = (J^{-1})^T \frac{\partial f(\vec{\xi})}{\partial \xi_j} \tag{15}$$

$$\int_D f(\vec{x}) \, dD = \int_\Omega f(\vec{\xi}) |J| d\Omega \tag{16}$$