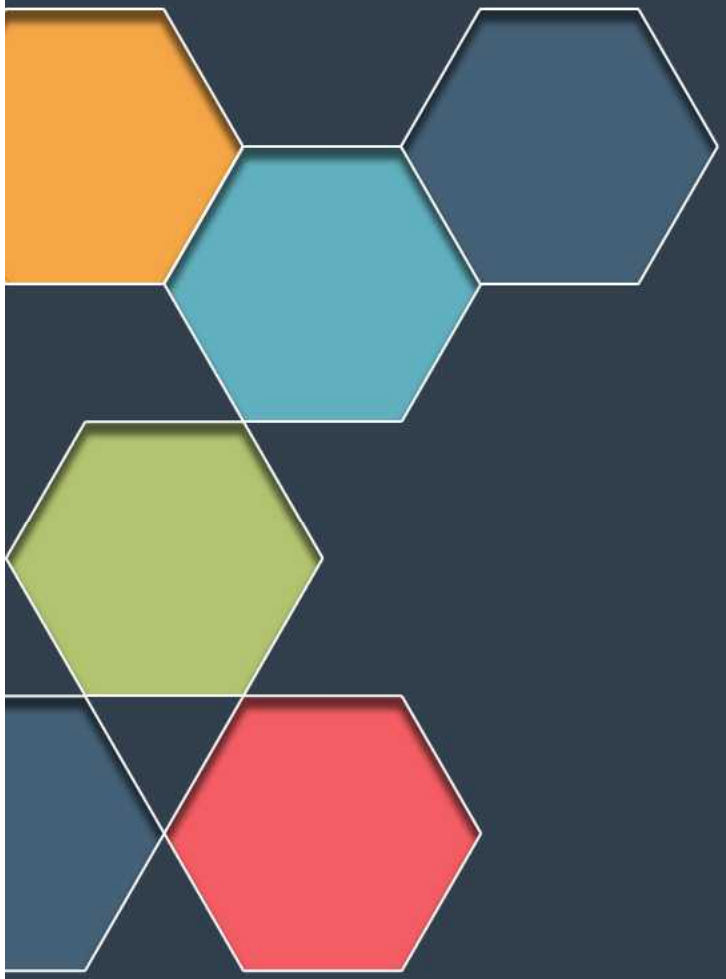


제3장 게임트리

학습 목표

- 미니맥스 알고리즘을 살펴본다.
- 알파베타 가지치기 알고리즘을 이해한다.

이번 장에서 다루는 게임의 조건

- 이번 장에서는 게임을 위한 프로그램을 작성하는 문제를 생각해보자. 설명을 단순화하기 위해 우리는 다음과 같은 속성을 가진 게임만 고려할 것이다. 바둑이나 체스가 여기에 속한다.

- 두 명의 경기자 - 경기자들이 연합하는 경우는 다루지 않는다.
- 제로섬(zero sum) 게임 - 한 경기자의 승리는 다른 경기자의 패배이다. 협동적인 승리는 없다.
- 차례대로 수를 두는 게임만을 대상으로 한다. (순차적인 게임)

인공지능과 게임

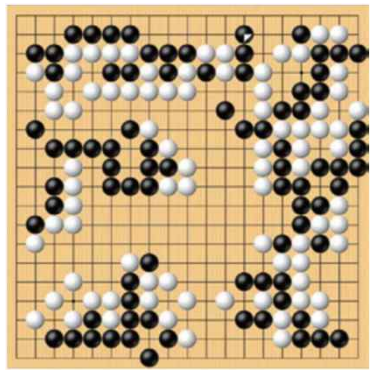
- 게임은 예전부터 인공지능의 매력적인 연구 주제였다.
- Tic-Tac-Toe나 체스, 바둑과 같은 게임은 추상적으로 정의할 수 있고 지적 능력과 연관이 있는 것으로 생각되었다.
- 이들 게임은 비교적 적은 수의 연산자들을 가진다. 연산의 결과는 엄밀한 규칙으로 정의된다.

바둑에서 나타나는 모든 경우의 수

- 바둑판에는 돌을 놓을 수 있는 곳이 19×19=361이다. 한 곳에는 흰돌(white) 또는 검은돌(black) 또는 비워놓을 수 있다(empty). 따라서 각 361개의 점마다 최대 3가지의 선택이 있다. 따라서 발생할 수 있는 상태의 상한은 다음과 같다.

$$3 \times 3 \times 3 \times \ldots = 3^{361}$$

- 관련 논문에서 정확하게 계산해 보면 2.1×10^{170} 정도의 숫자라고 한다. 이것은 엄청난 숫자로써 우주에 존재하는 원자의 개수로 믿어지는 숫자인 10^{80}보다도 훨씬 많다. 따라서 완벽한 탐색은 불가능하다.



게임의 정의

- 2인용 게임
- 두 경기자를 MAX와 MIN으로 부르자.
- 항상 MAX가 먼저 수를 둔다고 가정한다.

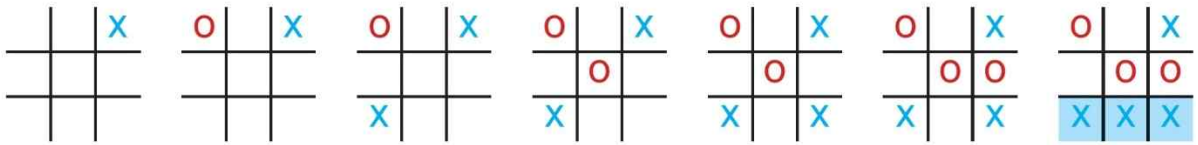


그림 3-1 Tic-Tac-Toe 게임

Tic-Tac-Toe의 게임 트리

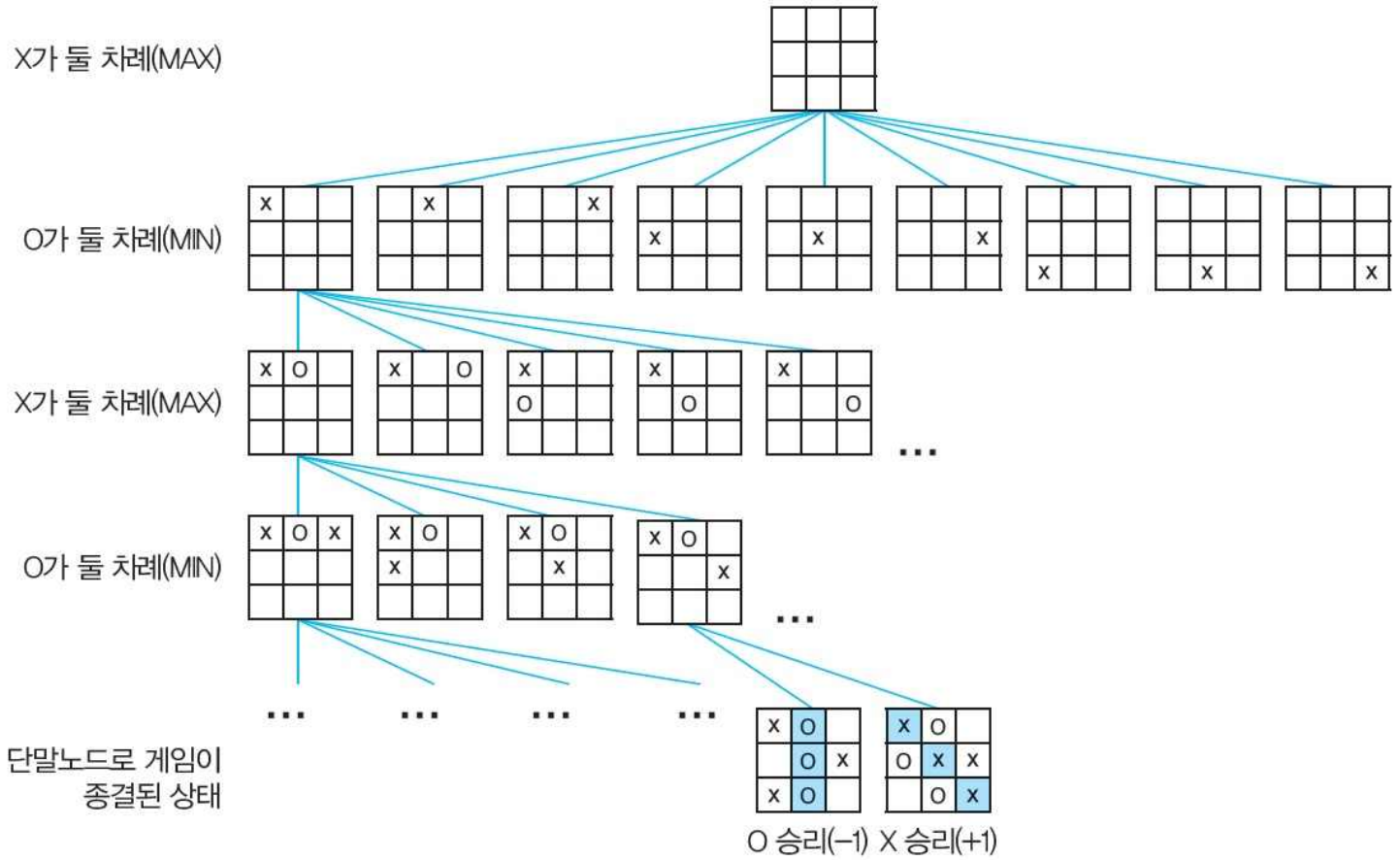


그림 3–2 틱택토 게임의 게임 트리(일부)

Tic-Tac-Toe 게임 트리의 크기

- Tic-Tac-Toe의 게임 트리는 크기가 얼마나 될까?

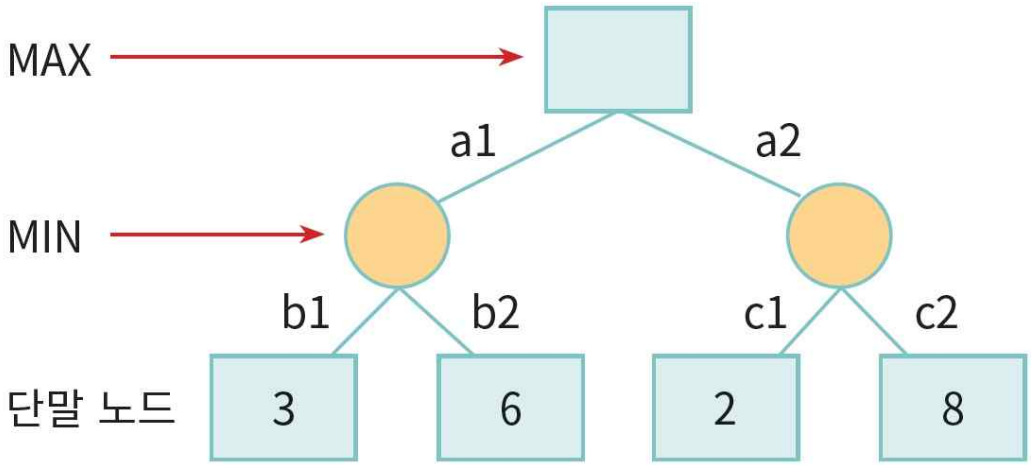
- Tic-Tac-Toe 게임 보드는 3×3 크기를 가지고 있고 한 곳에 가능한 수는 ×, 0, 빈칸의 3개이고 9칸이 있으므로 가능한 상태의 수는

  $3 \times 3 \times 3 \times \ldots \times 3 = 3^9 = 19{,}683$

- 하지만 대칭이나 반사를 제외하면 서로 다른 상태는 5,478 개 뿐이다.

02 미니맥스 알고리즘

- 안전하게 하려면 상대방이 최선의 수를 둔다고 생각하면 된다.
- 두 수만에 게임이 끝나는 경우를 가정하면



미니맥스(minimax) 알고리즘

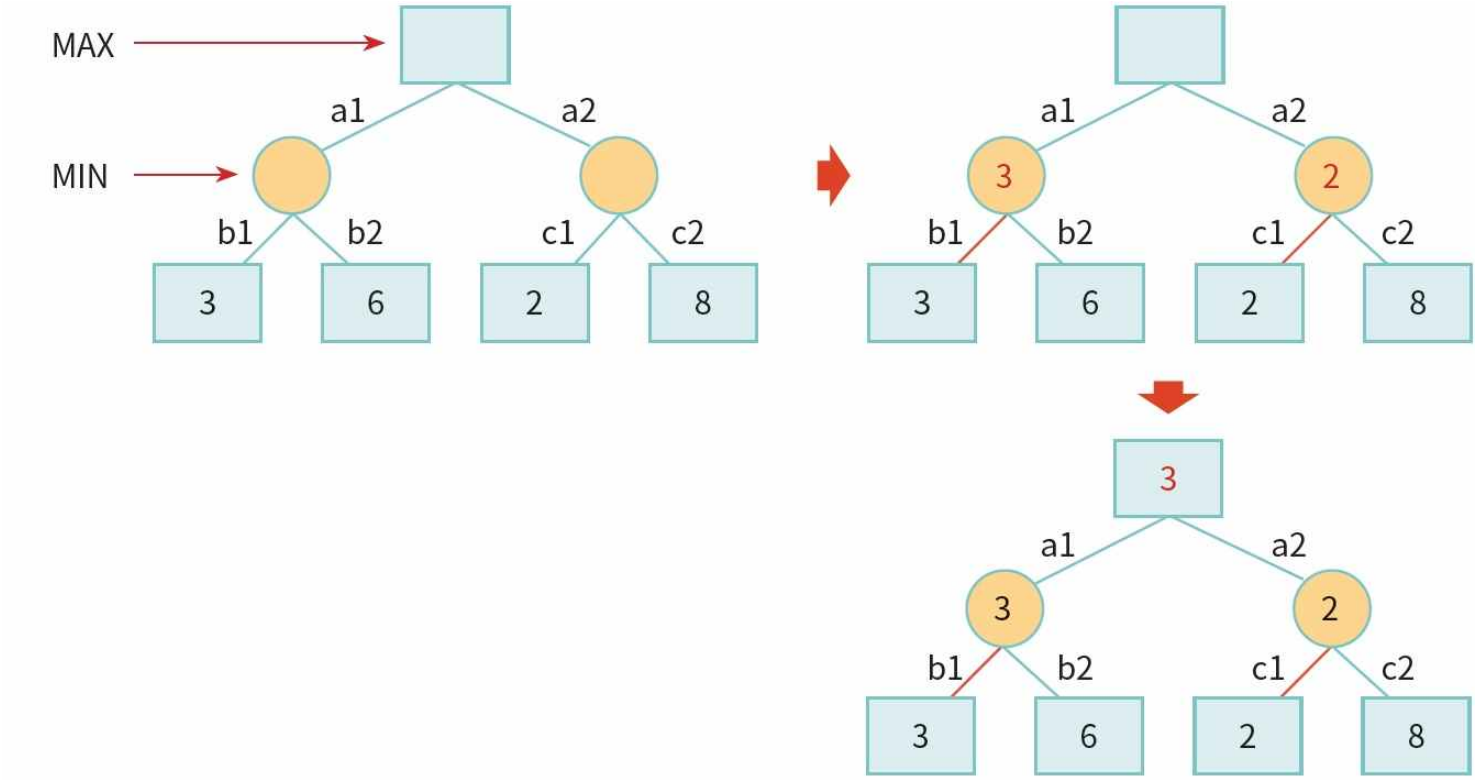


그림 3-4 미니맥스 알고리즘

틱택토 게임에서의 미니맥스

종료되기 몇 수 전의 경우를 가정하면:

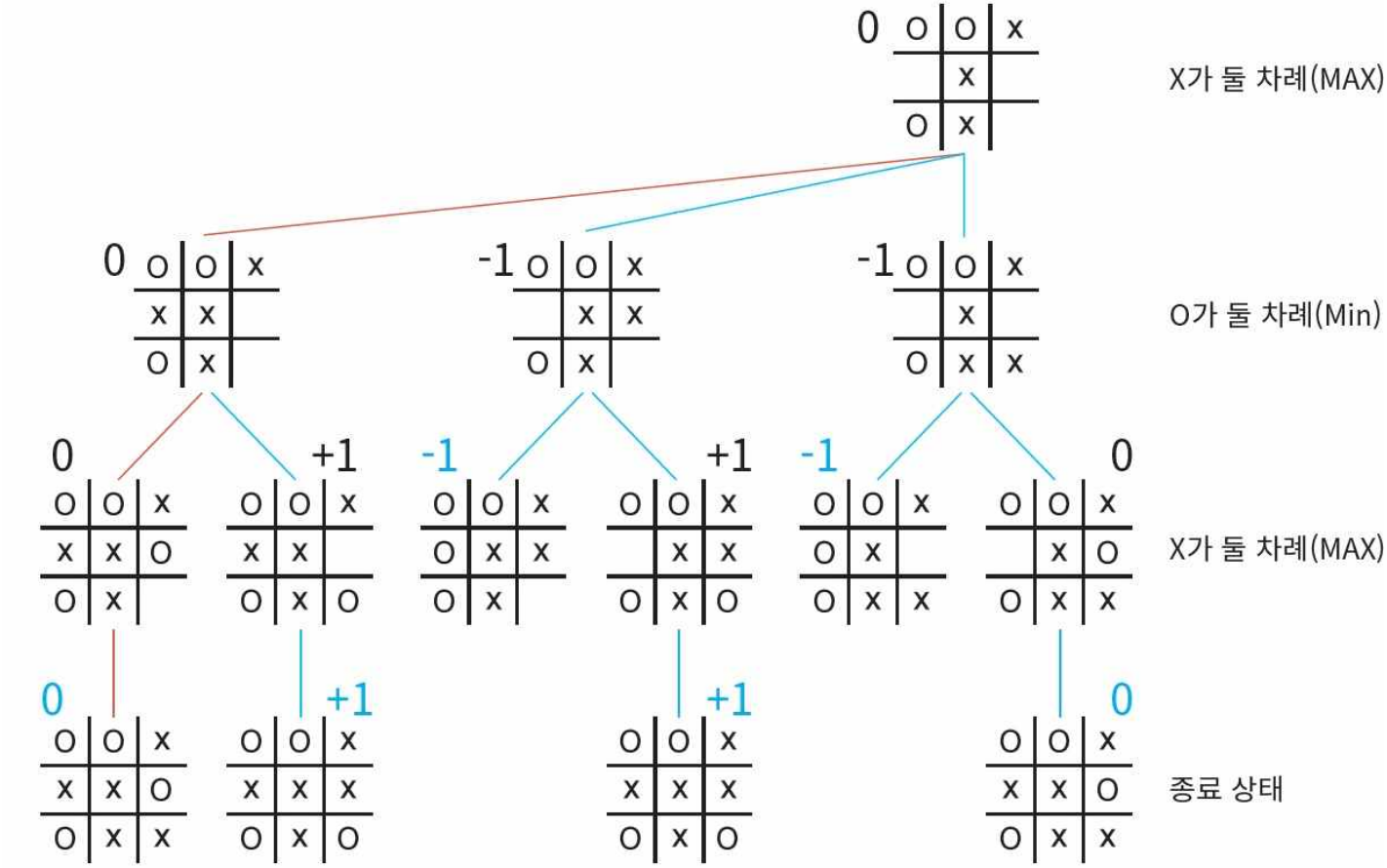
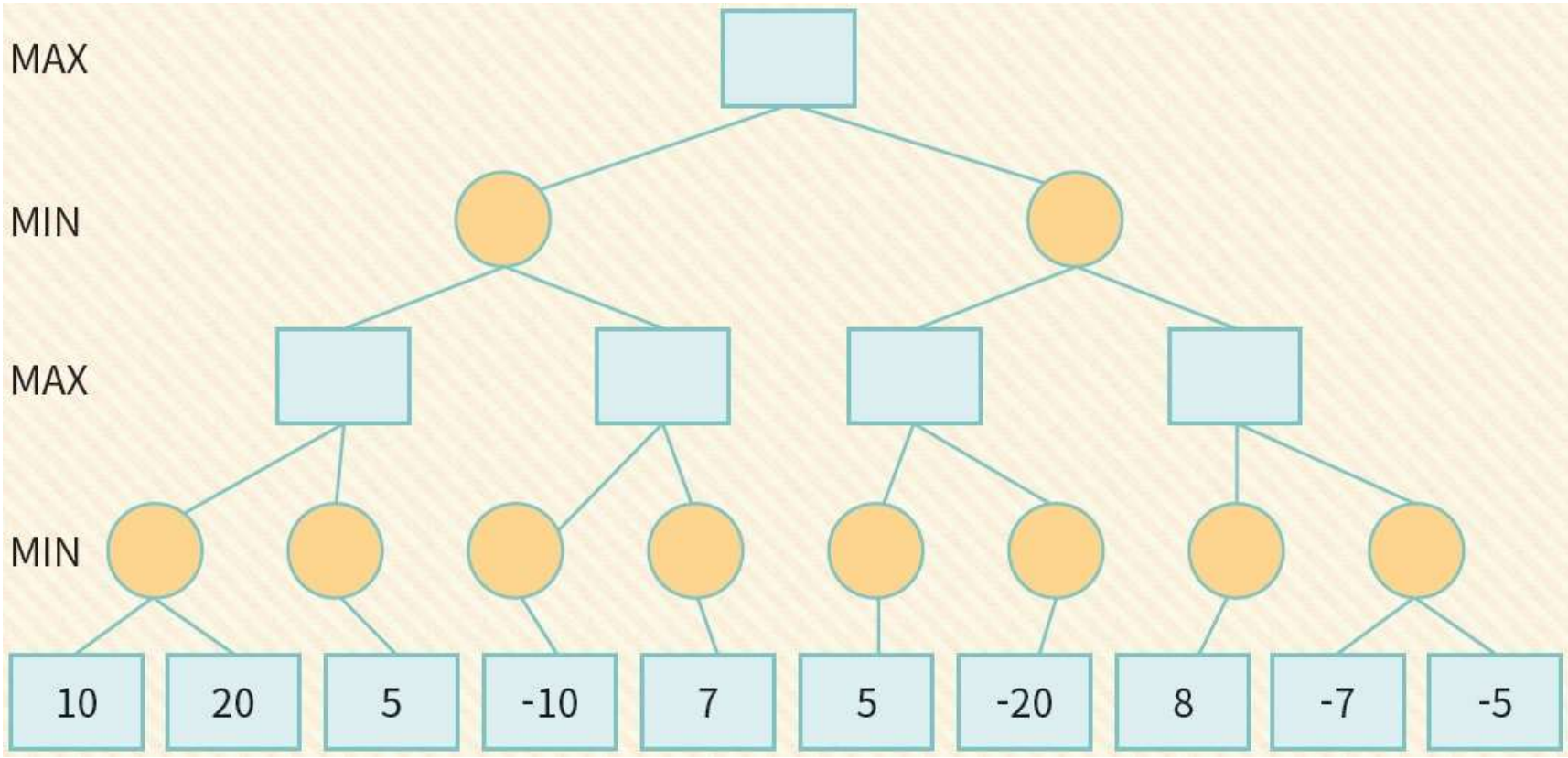


그림 3–5 틱택토 게임에서 미니맥스 알고리즘

Lab: 미니맥스 알고리즘 실습



미니맥스 알고리즘


```
function minimax(node, depth, maxPlayer)
    if depth == 0 or node가 단말 노드 then
        return node의 휴리스틱 값
    if maxPlayer then
        value ← −∞
        for each child of node do
            value ← max(value, minimax(child, depth − 1, FALSE))
        return value
    else   // 최소화 노드
        value ← +∞
        for each child of node do
            value ← min(value, minimax(child, depth − 1, TRUE))
        return value
```

미니맥스 알고리즘의 분석

- 완결성: 미니맥스 알고리즘은 완결될 수 있다. 유한한 탐색 트리 안에 해답이 존재하면 반드시 찾는다.
- 최적성: 미니맥스 알고리즘은 최적의 알고리즘이다.
- 시간 복잡도: 만약 트리의 최대 깊이가 m이고 각 노드에서의 가능한 수가 b개라면, 미니맥스 알고리즘의 시간 복잡도는 $O(b^m)$이다.
- 공간 복잡도: 기본적으로 깊이 우선 탐색이므로 공간 복잡도는 $O(bm)$ 이다.

Tic-Tac-Toe 구현


```
# 보드는 1차원 리스트로 구현한다.
game_board = [' ', ' ', ' ',
              ' ', ' ', ' ',
              ' ', ' ', ' ']


# 비어 있는 칸을 찾아서 인덱스를 리스트로 반환한다.
def empty_cells(board):
    cells = []
    for x, cell in enumerate(board):
            if cell == ' ':
                cells.append(x)
    return cells

# 비어 있는 칸에는 놓을 수 있다.
def valid_move(x):
    return x in empty_cells(game_board)
```

Tic-Tac-Toe 구현


```
# 위치 x에 놓는다.
def move(x, player):
    if valid_move(x):
        game_board[x] = player
        return True
    return False

# 현재 게임 보드를 그린다.
def draw(board):
    for i, cell in enumerate(board):
        if i%3 == 0:
            print('\n----------------')
        print('|', cell , '|', end='')
    print('\n----------------')

# 보드의 상태를 평가한다.
def evaluate(board):
    if check_win(board, 'X'):
        score = 1
    elif check_win(board, 'O'):
        score = -1
    else:
        score = 0
    return score
```

Tic-Tac-Toe 구현


```
# 1차원 리스트에서 동일한 문자가 수직선이나 수평선, 대각선으로 나타나면
# 승리한 것으로 한다.
def check_win(board, player):
    win_conf = [
        [board[0], board[1], board[2]],
        [board[3], board[4], board[5]],
        [board[6], board[7], board[8]],
        [board[0], board[3], board[6]],
        [board[1], board[4], board[7]],
        [board[2], board[5], board[8]],
        [board[0], board[4], board[8]],
        [board[2], board[4], board[6]],
    ]
    return [player, player, player] in win_conf

# 1차원 리스트에서 동일한 문자가 수직선이나 수평선, 대각선으로 나타나면
# 승리한 것으로 한다.
def game_over(board):
    return check_win(board, 'X') or check_win(board, 'O')
```

```
# 미니맥스 알고리즘을 구현한다.
# 이 함수는 순환적으로 호출된다.
def minimax(board, depth, maxPlayer):
    pos = -1
    # 단말 노드이면 보드를 평가하여 위치와 평가값을 반환한다.
    if depth == 0 or len(empty_cells(board)) == 0 or game_over(board):
        return -1, evaluate(board)

    if maxPlayer:
        value = -10000  # 음의 무한대
        # 자식 노드를 하나씩 평가하여서 최선의 수를 찾는다.
        for p in empty_cells(board):
            board[p] = 'X'                  # 보드의 p 위치에 'X'을 놓는다.

            # 경기자를 교체하여서 minimax()를 순환호출한다.
            x, score = minimax(board, depth-1, False)
            board[p] = ' '                  # 보드는 원 상태로 돌린다.
            if score > value:
                value = score               # 최대값을 취한다.
                pos = p                     # 최대값의 위치를 기억한다.
    else:
        value = +10000  # 양의 무한대
        # 자식 노드를 하나씩 평가하여서 최선의 수를 찾는다.
        for p in empty_cells(board):
            board[p] = 'O'                  # 보드의 p 위치에 'O'을 놓는다.

            # 경기자를 교체하여서 minimax()를 순환호출한다.
            x, score = minimax(board, depth-1, True)
            board[p] =  ' '                 # 보드는 원 상태로 돌린다.
            if score < value:
                value = score               # 최소값을 취한다.
                pos = p                     # 최소값의 위치를 기억한다.
    return pos, value      # 위치와 값을 반환한다.
```

Tic-Tac-Toe 구현


```
player='X'
# 메인 프로그램
while True:
    draw(game_board)
    if len(empty_cells(game_board)) == 0 or game_over(game_board):
        break
    i, v = minimax(game_board, 9, player=='X')
    move(i, player)
    if player=='X':
        player='O'
    else:
        player='X'

if check_win(game_board, 'X'):
    print('X 승리!')
elif check_win(game_board, 'O'):
    print('O 승리!')
else:
    print('비겼습니다!')
```

실행결과


```
---------------
|  ||  ||  |
---------------
|  ||  ||  |
---------------
|  ||  ||  |
---------------

---------------
| X ||  ||  |
---------------
|  ||  ||  |
---------------
|  ||  ||  |
---------------

---------------
| X ||  ||  |
---------------
|  || O ||  |
---------------
|  ||  ||  |
---------------
...
---------------
| X || X || O |
---------------
| O || O || X |
---------------
| X || O || X |
---------------
비겼습니다!
```

Lab

- minimax 프로그램을 인간과 컴퓨터가 대결하는 것으로 변경하라.

알파베타 가지치기

- 미니맥스 알고리즘에서 형성되는 탐색 트리 중에서 상당 부분은 결과에 영향을 주지 않으면서 가지들을 쳐낼 수 있다.
- 이것을 알파베타 가지치기라고 한다.
- 탐색을 할 때 알파값과 베타값이 자식 노드로 전달된다. 자식 노드에서는 알파값과 베타값을 비교하여서 쓸데없는 탐색을 중지할 수 있다.
- MAX는 알파값만을 업데이트한다. MIN은 베타값만을 업데이트한다.

알파 베타 방법

- 알파값과 베타값을 기억하면서 절단을 수행해 가는 모든 과정
- MAX 노드의 알파값 :

  자식 노드의 전달값 중 현재까지 가장 큰 값

  - 알파 절단 규칙 :

    조상 MAX 노드의 알파값보다 작거나 같은 베타값을 갖는 MIN 노드 아래에서는 탐색을 중단.
- MIN 노드의 베타값 :

  자식 노드의 전달값 중 현재까지 가장 작은 값

  - 베타 절단 규칙 :

    조상 MIN 노드의 베타값보다 크거나 같은 알파값을 갖는 MAX 노드 아래에서는 탐색을 중단.

알파베타 알고리즘


```
function alphabeta(node, depth, α, β, maxPlayer)
    if depth == 0 or node가 단말 노드 then
        return node의 휴리스틱 값
    if maxPlayer then              // 최대화 경기자
        value ← −∞
        for each child of node do
            value ← max(value, alphabeta(child, depth−1, α, β, FALSE))
            α ← max(α, value)
            if α ≥ β then
                break //이것이 β 컷이다.
        return value
    else                           // 최소화 경기자
        value ← +∞
        for each child of node do
            value ← min(value, alphabeta(child, depth−1, α, β, TRUE))
            β ← min(β, value)
            if α ≥ β then
                break //이것이 α 컷이다.
        return value
```

현재 노드의 최대값이 부모 노드의 값(β)보다 크게 되면 더 이상 탐색할 필요가 없음

현재 노드의 최소값이 부모 노드의 값(α)보다 작게 되면 더 이상 탐색할 필요가 없음

04 알파베타 가지치기

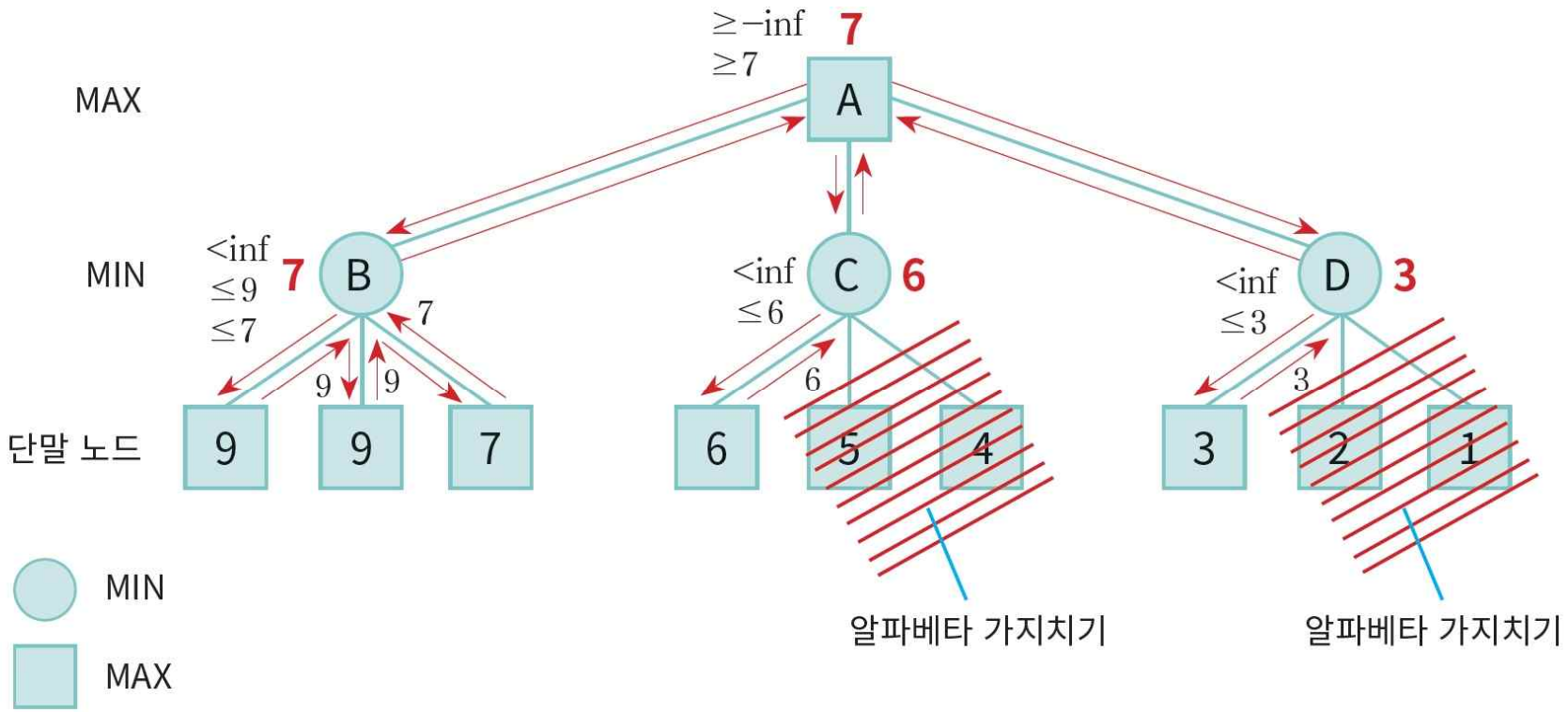


그림 3–6 알파베타 가지치기

알파베타 알고리즘

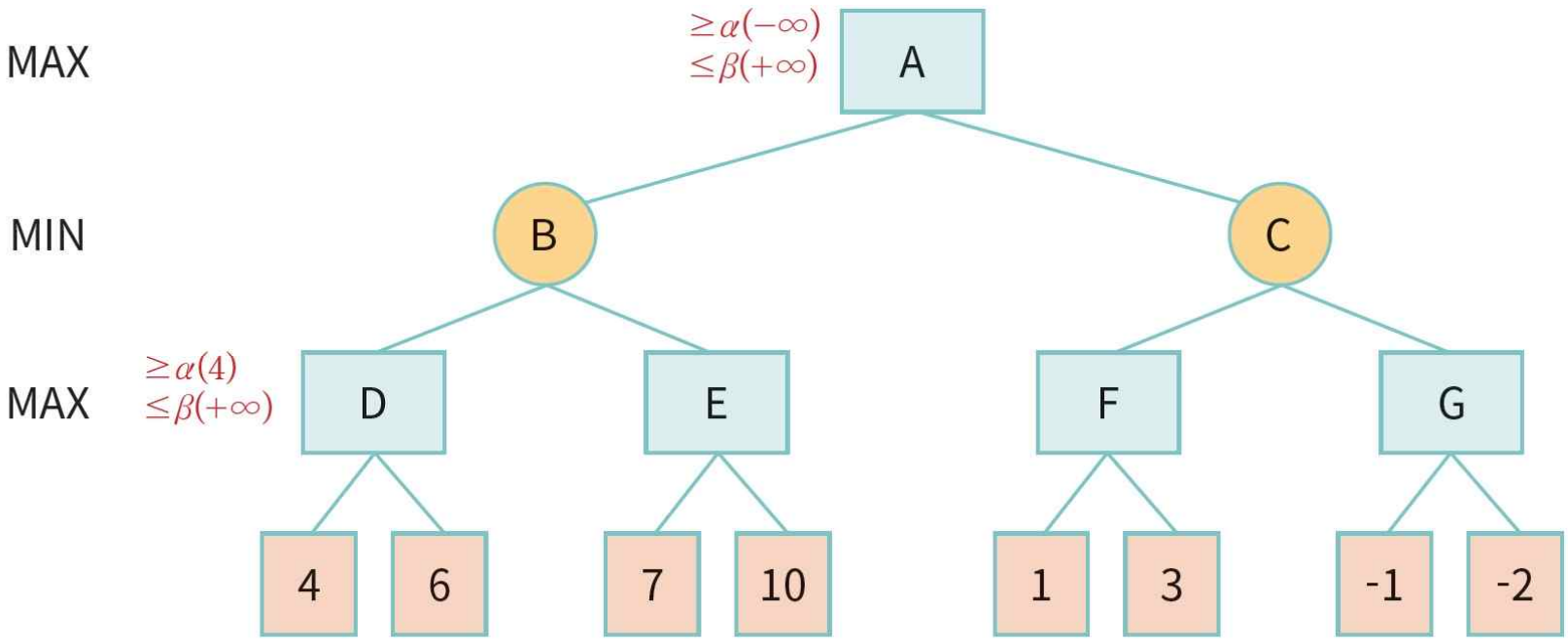


그림 3-7 알파베타 가지치기 알고리즘 I

알파베타 알고리즘

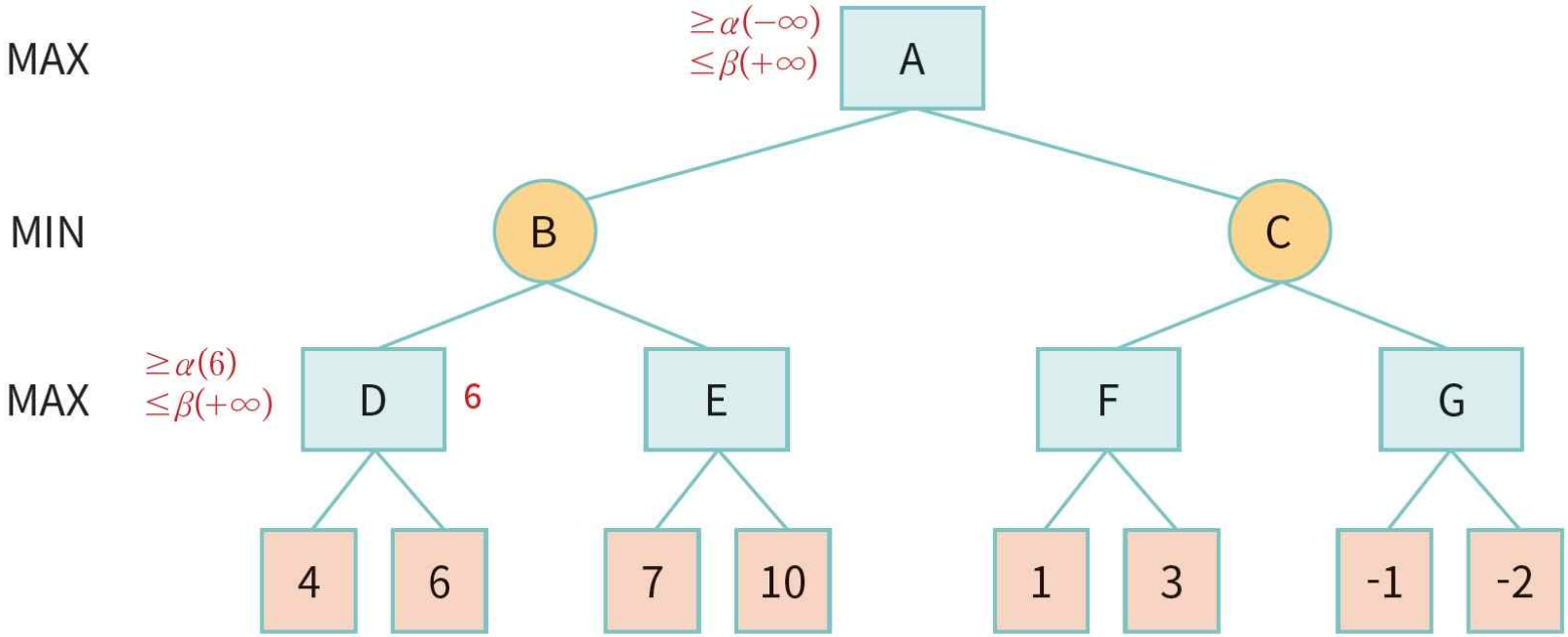


그림 3-8 알파베타 가지치기 알고리즘 II

알파베타 알고리즘

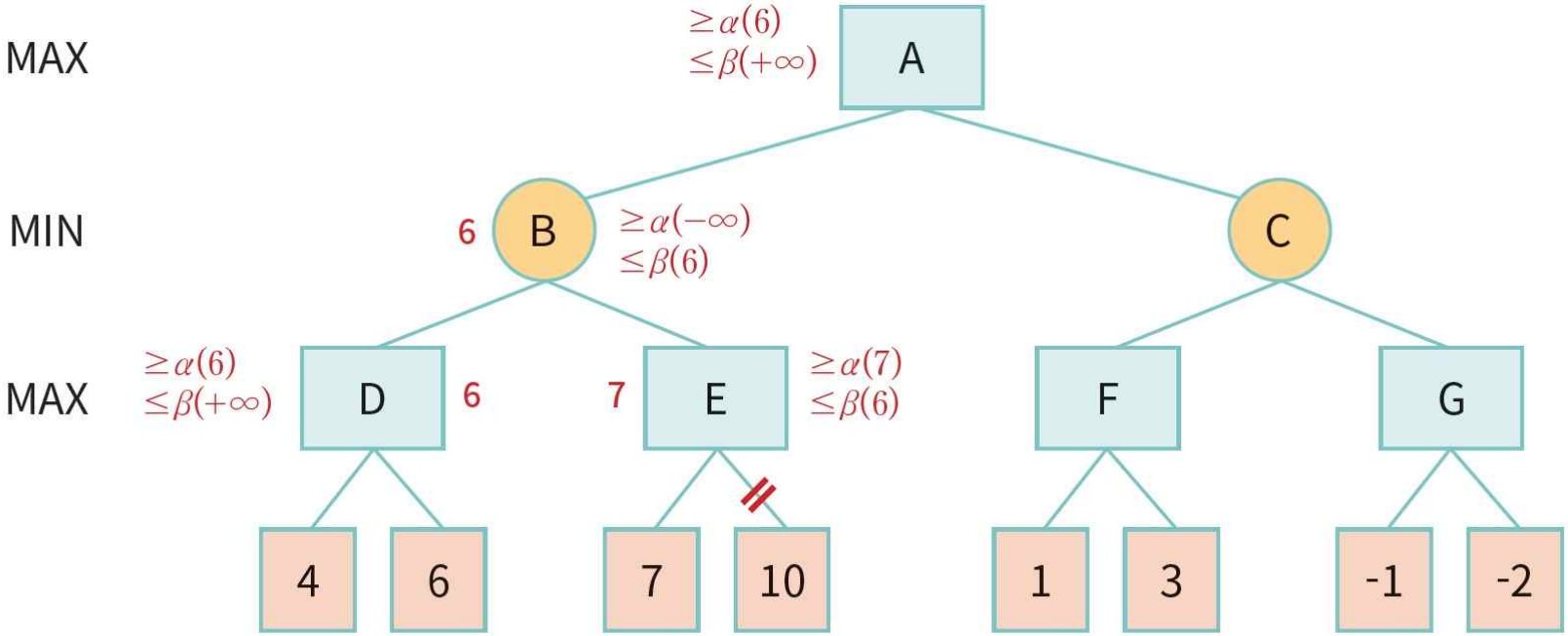


그림 3–9 알파베타 가지치기 알고리즘 III

알파베타 알고리즘

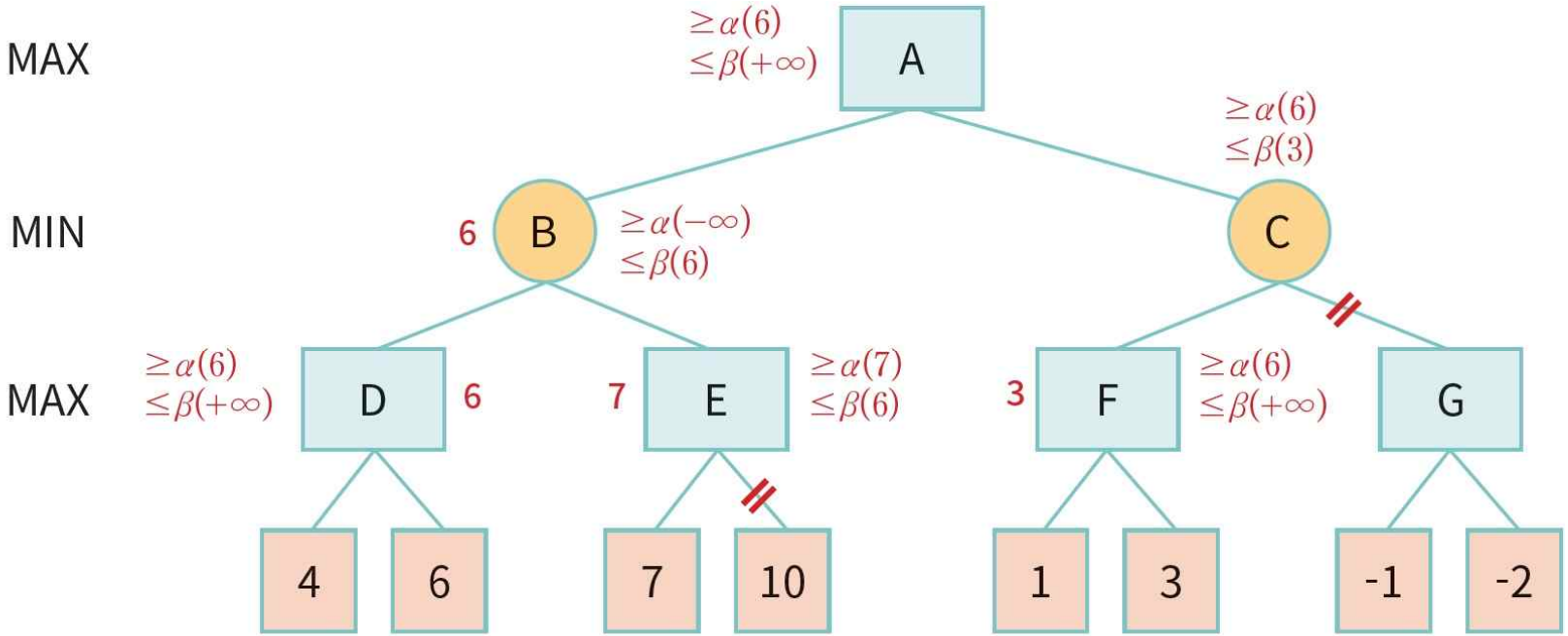
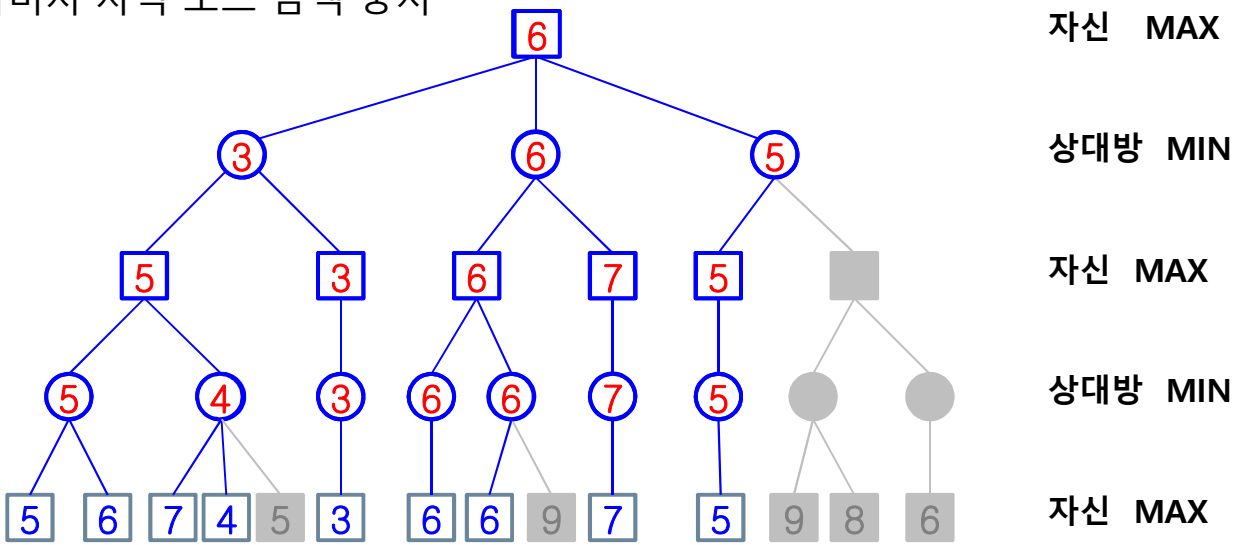


그림 3–10 알파베타 가지치기 알고리즘 IV

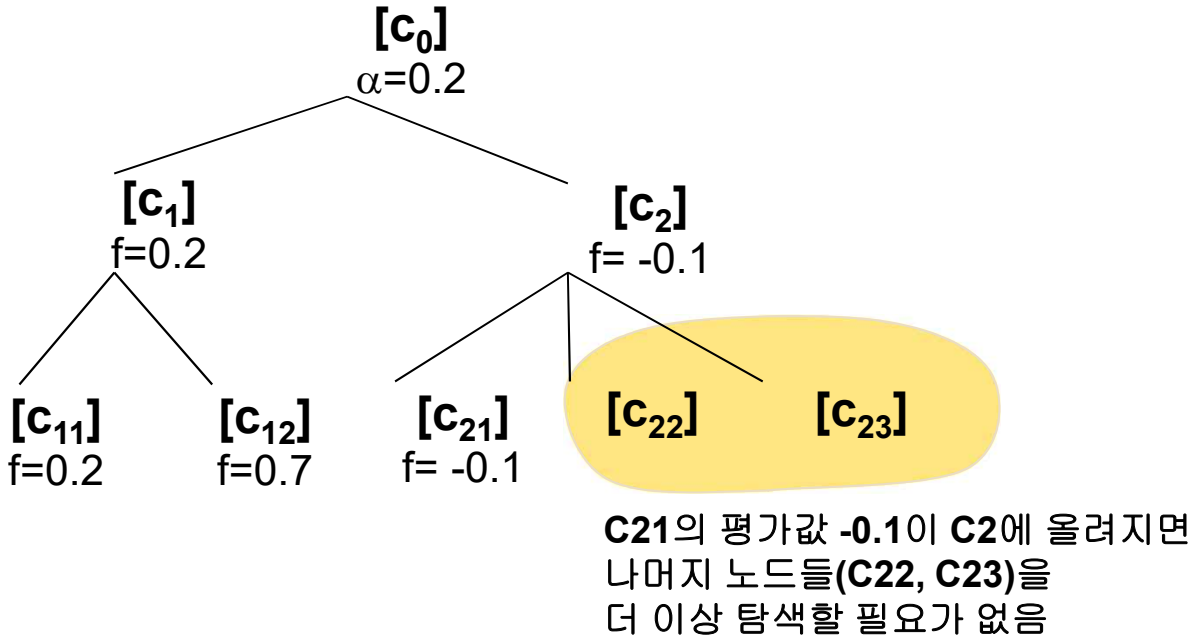
α-β 가지치기 (prunning)

- 검토해 볼 필요가 없는 부분을 탐색하지 않도록 하는 기법
- 깊이 우선 탐색으로 제한 깊이까지 탐색을 하면서, MAX 노드와 MIN 노드의 값 결정
  - **α-자르기(cut-off) :** MIN 노드의 현재값이 부모노드(MAX)의 현재 값보다 작거나 같으면, 나머지 자식 노드 탐색 중지
  - **β-자르기 :** MAX 노드의 현재값이 부모노드(MIN)의 현재 값보다 같거나 크면, 나머지 자식 노드 탐색 중지

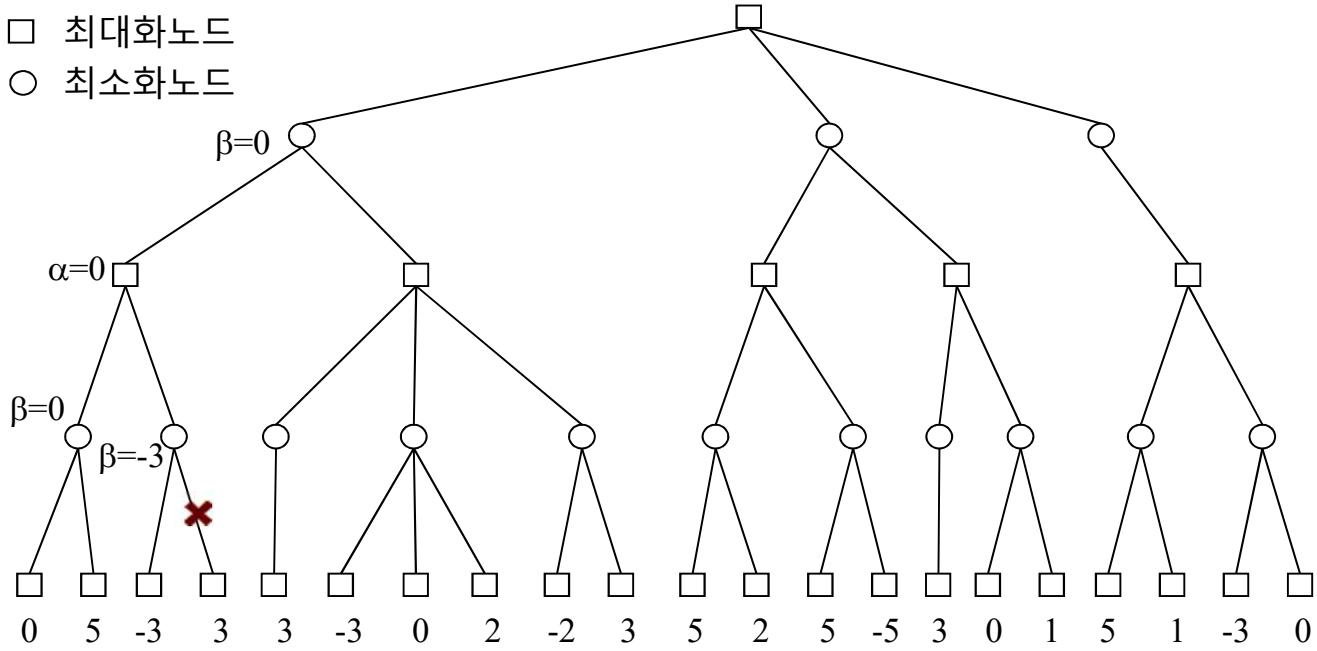


간단한 형태의 α-β 가지치기 예

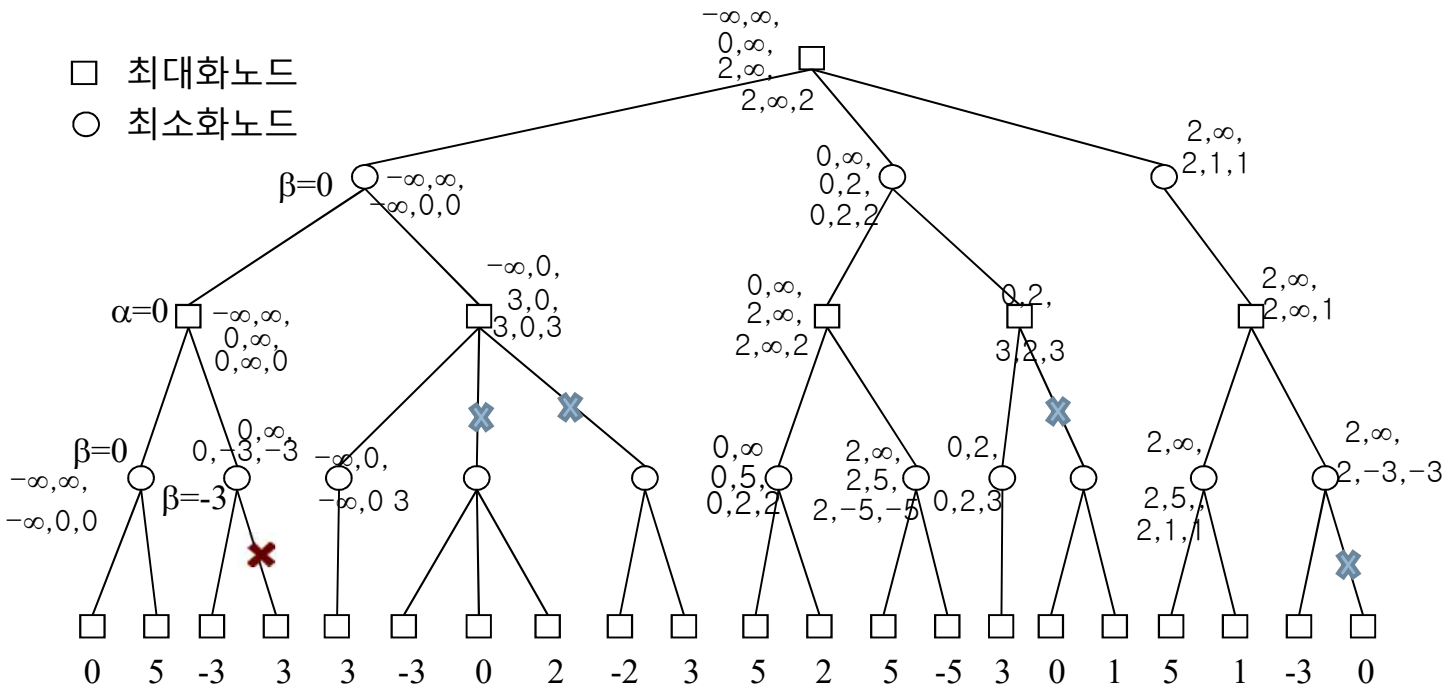
- 알파베타 가지치기
  - 최대화 노드에서 가능한 최대의 값(알파 α)과 최소화의 노드에서 가능한 최소의 값(베타 β)를 사용한 게임 탐색법
  - 제한된 깊이를 정하고 기본적으로 DFS로 탐색 진행



<u>가지치기가 일어나는 법칙</u>:
1. 어떤 최소화노드의 베타값이 자신보다 상위(선조노드)에 있는 어떤 최대화 노드의 알파값보다 작거나 같을 때, 이 최소화 노드는 가지치기 된다.
2. 어떤 최대화노드의 알파값이 자신보다 상위(선조노드)에 있는 어떤 최소화 노드의 베타값보다 크거나 같을 때, 이 최대화 노드는 가지치기 된다.
3. 최상위의 최대화노드의 알파값은 최종적으로 올려진 값(backed-up value)로 주어진다.



<u>가지치기가 일어나는 법칙</u>:
1. 어떤 최소화노드의 베타값이 자신보다 상위(선조노드)에 있는 어떤 최대화 노드의 알파값보다 작거나 같을 때, 이 최소화 노드는 가지치기 된다.
2. 어떤 최대화노드의 알파값이 자신보다 상위(선조노드)에 있는 어떤 최소화 노드의 베타값보다 크거나 같을 때, 이 최대화 노드는 가지치기 된다.
3. 최상위의 최대화노드의 알파값은 최종적으로 올려진 값(backed-up value)로 주어진다.



(알파값, 베타값, 리턴값)

05 불완전한 결정

- 미니맥스 알고리즘은 탐색 공간 전체를 탐색하는 것을 가정한다. 하지만 실제로는 탐색 공간의 크기가 무척 커서 우리는 그렇게 할 수 없다. 실제로는 적당한 시간 안에 다음 수를 결정하여야 한다. 어떻게 하면 될까?
- 이때는 탐색을 끝내야 하는 시간에 도달하면 탐색을 중단하고 탐색 중인 상태에 대하여 휴리스틱 평가 함수(evaluation function)를 적용해야 한다. 즉 비단말 노드이지만 단말 노드에 도달한 것처럼 생각하는 것이다.

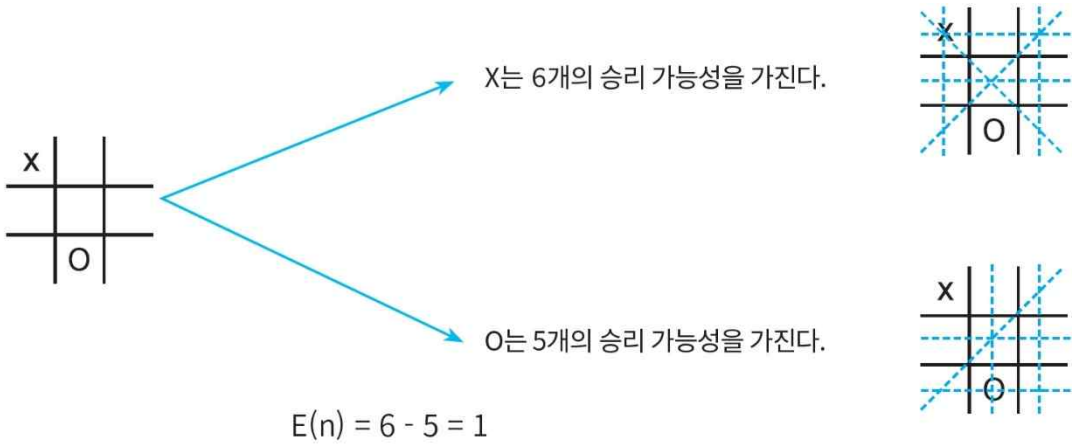


그림 3-11 평가 함수

실습: 본문의 미니맥스 버전의 틱택토 프로그램을 알파베타 가지치기 버전으로 변경하여 성능을 비교테스트하라.


```
function alphabeta(node, depth, α, β, maximizingPlayer)
    if depth = 0 or node가 단말 노드 then
        return node의 휴리스틱 값
    if maximizingPlayer then          // 최대화 경기자
        value ← −∞
        for each child of node do
            value ← max(value, alphabeta(child, depth−1, α, β, FALSE))
            α ← max(α, value)
            if α ≥ β then
                break //이것이 β 컷이다.
        return value
    else                              // 최소화 경기자
        value ← +∞
        for each child of node do
            value ← min(value, alphabeta(child, depth−1, α, β, TRUE))
            β ← min(β, value)
            if α ≥ β then
                break //이것이 α 컷이다.
        return value
```

Summary

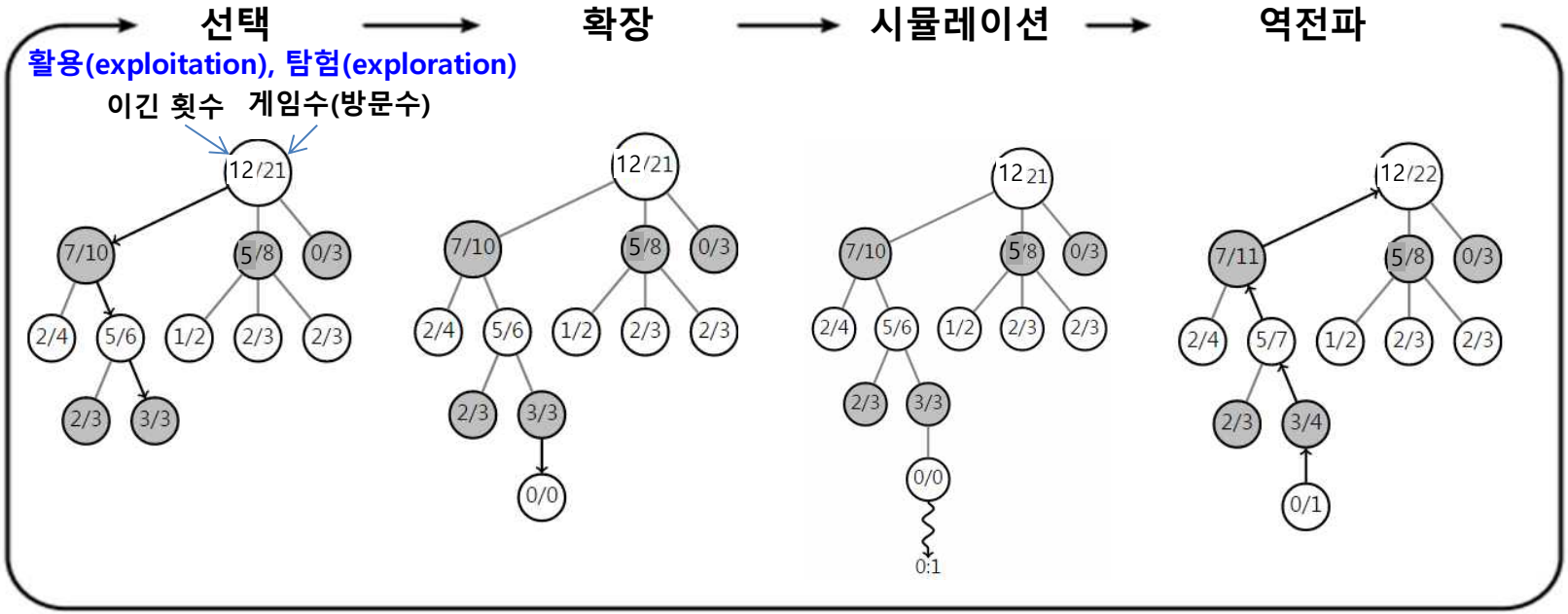
- 게임에서는 상대방이 탐색에 영향을 끼친다. 이 경우에는 미니맥스 알고리즘을 사용하여 탐색을 진행할 수 있다. 미니맥스 알고리즘은 상대방이 최선의 수를 둔다고 가정하는 알고리즘이다.
- 두 명의 경기자 MAX와 MIN이 있으며, MAX는 평가 함수값이 최대인 자식 노드를 선택하고 MIN은 평가 함수값이 최소인 자식 노드를 선택한다.
- 탐색 트리의 어떤 부분은 제외하여도 결과에 영향을 주지 않는다. 이것을 알파베타 가지치기(alpha-beta pruning)라고 한다.

게임에서의 탐색

❖ 몬테카를로 트리 탐색(Monte Carlo Tree Search, MCTS)

- 탐색 공간(search space)을 **무작위 표본추출**(random sampling)을 하면서, **탐색트리**를 **확장**하여 가장 좋아 보이는 것을 선택하는 휴리스틱 탐색 방법
- 4단계를 반복하여 **시간이 허용하는 동안** 트리 확장 및 시뮬레이션

  선택(selection)
  → **확장(expansion) : 일정조건(예, 시도횟수)을 만족하는 수에 대한 노드를 만듦**
  → **시뮬레이션(simulation) : 몬테카를로 시뮬레이션**
  → **역전파(back propagation) : 단말에서 루트까지 승패 결과를 역방향으로 갱신**



게임에서의 탐색

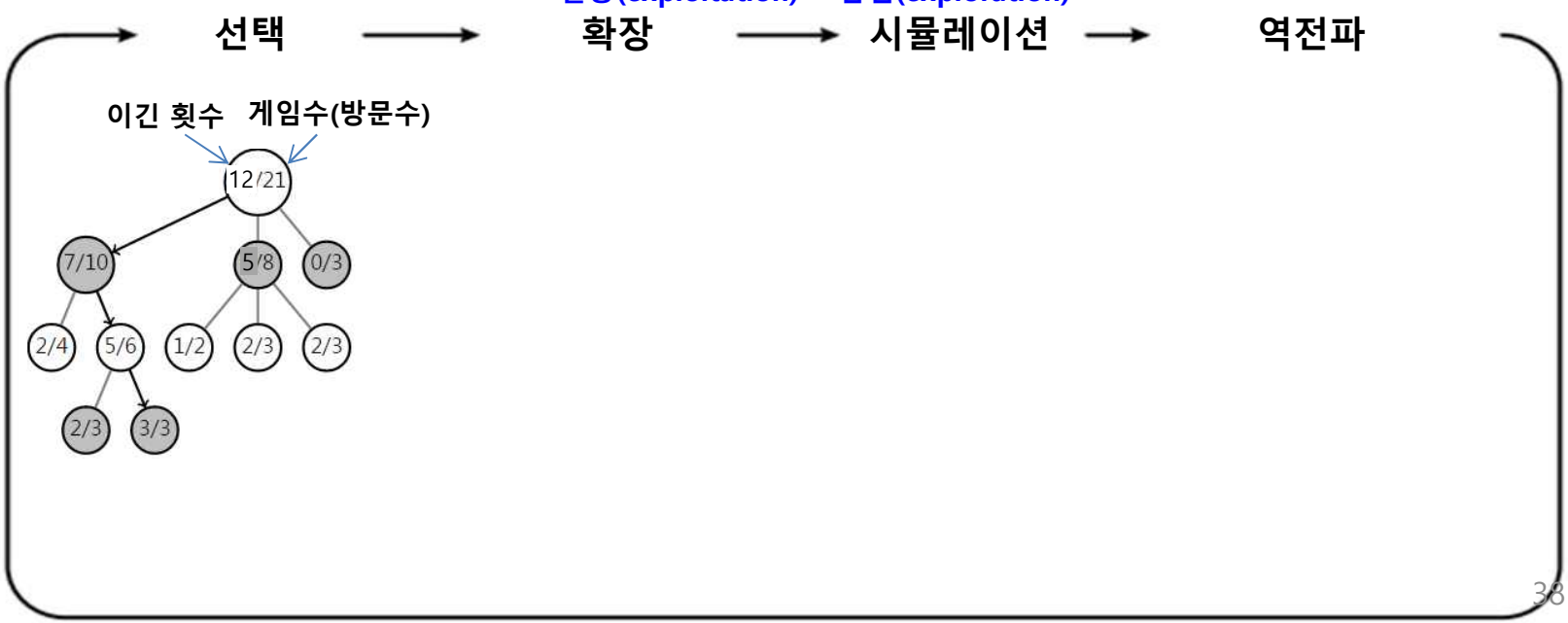
❖ 몬테카를로 트리 탐색 – cont.

- **선택(selection)** : **트리 정책(tree policy)** 적용
  - 루트노드에서 시작
  - 정책에 따라 자식 노드를 선택하여 단말노드까지 내려 감
    - **승률(높은것)**과 **노드 방문횟수(적은것)**를 고려하여 선택
    - **UCB**(Upper Confidence Bound) **정책 :** UCB가 큰 것 선택

$$\frac{Q(v')}{N(v')} + c\sqrt{\frac{2\ln N(v)}{N(v')}}$$

활용(exploitation) 탐험(exploration)

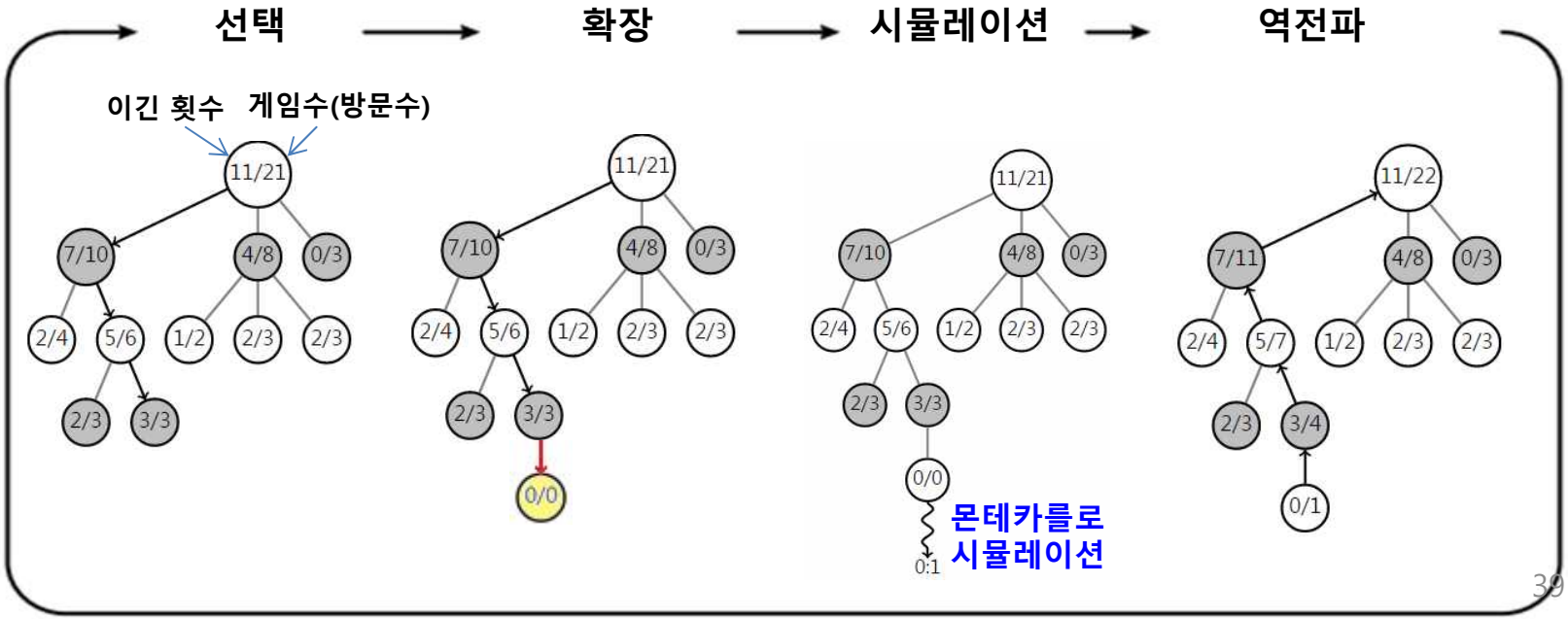
v : 부모노드, v' : 자식노드
$N(v)$: 방문 횟수
$Q(v)$: 점수 (이긴 횟수)



게임에서의 탐색

❖ 몬테카를로 트리 탐색 – cont.

- **확장(expansion)**
  - 단말노드에서 **트리 정책**에 따라 노드 추가
    - 예. **일정 횟수이상 시도된 수**(move)가 있으면 해당 수에 대한 **자식 노드 추가**
- **시뮬레이션(simulation)**
  - **기본 정책(default policy)**에 의한 **몬테카를로 시뮬레이션** 적용
  - **무작위 선택**(random moves) 또는 **약간 똑똑한 방법**으로 **게임 끝날 때까지 진행**
- **역전파(backpropagation)**
  - 단말 노드에서 루트 노드까지 올라가면서 승점 반영

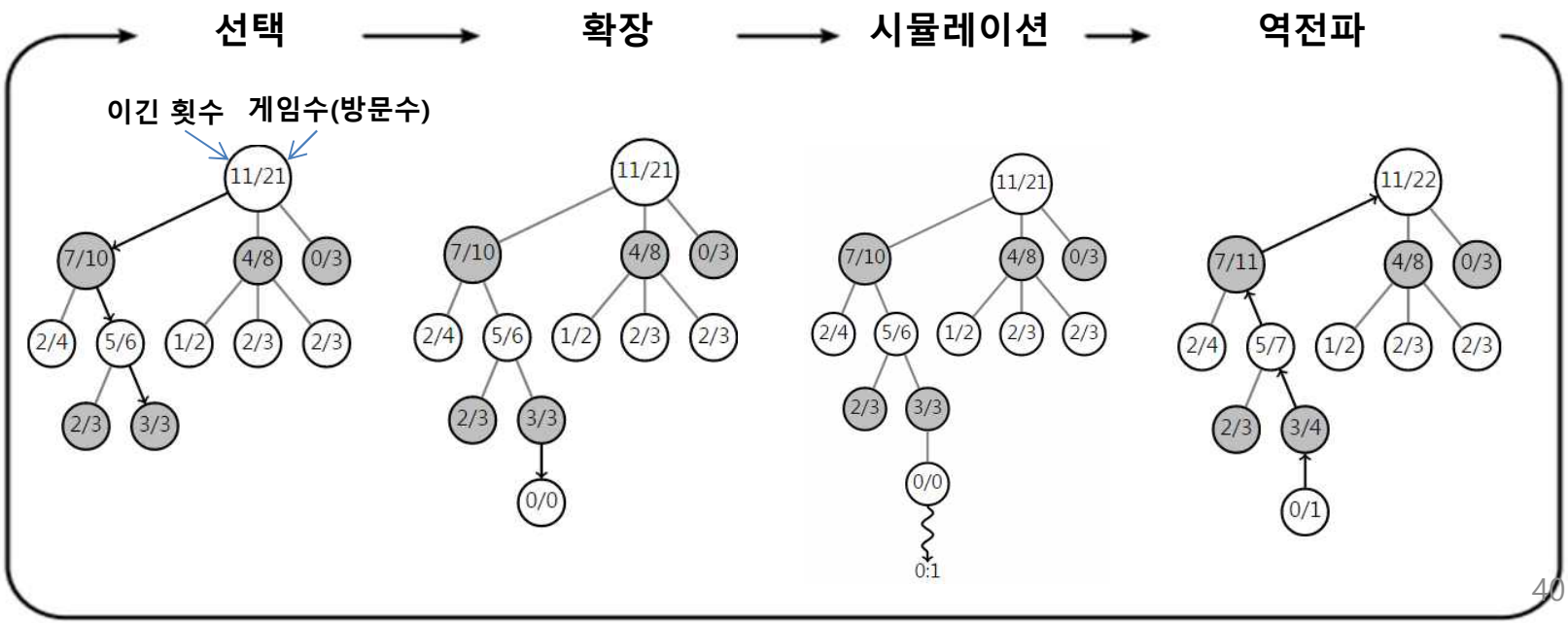


몬테카를로 트리 탐색

❖ 몬테카를로 트리 탐색 – cont.

- **루트에서 다음 선택 방법**
  - 가장 **승률**이 높은, 루트의 자식 노드 선택
  - 가장 **빈번**하게 방문한, 루트의 자식 노드 선택
  - **승률**과 **빈도**가 가장 큰, 루트의 자식 노드 선택
    없으면, 조건을 만족하는 것이 나올 때까지 탐색 반복
  - 자식 노드(루트의 손자)의 Upper C**onfidence Bound값의 최소값이 가장 큰**, 루트의 자식 노드 선택

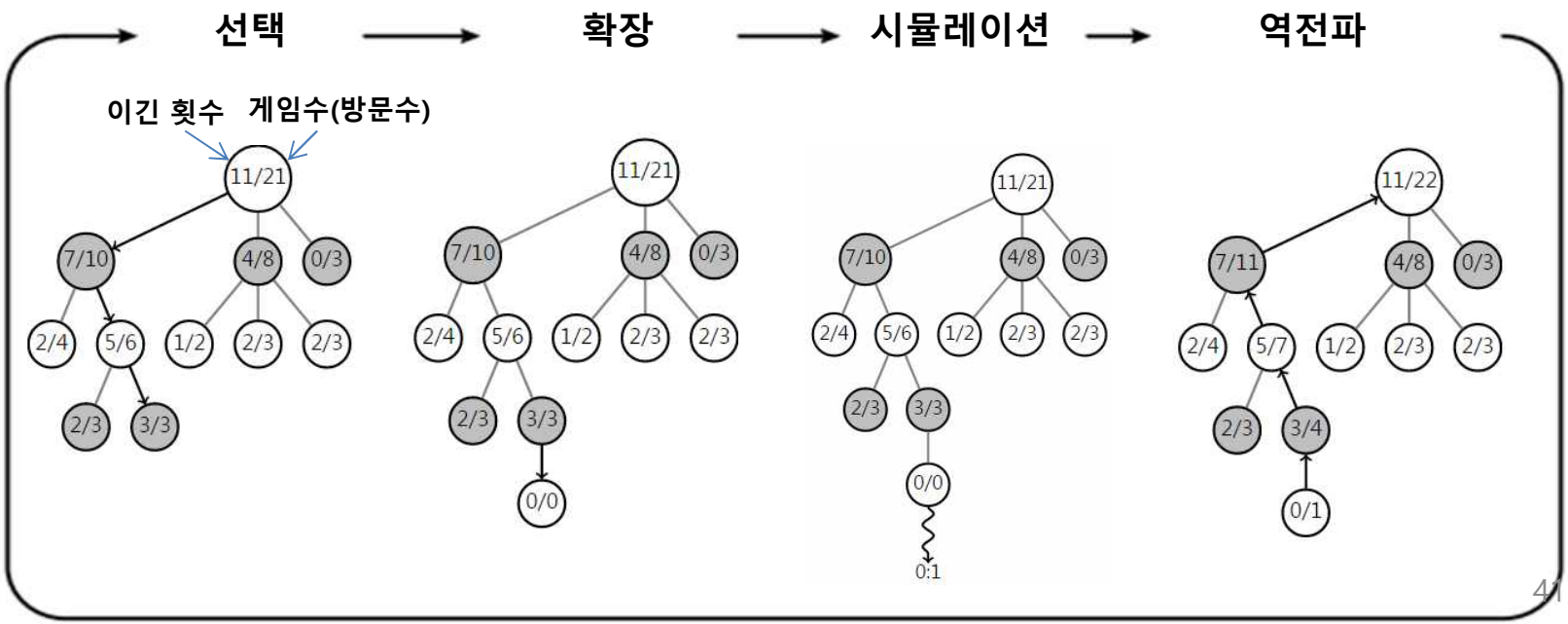
$$\frac{Q(v')}{N(v')} + c\sqrt{\frac{2\ln N(v)}{N(v')}}$$



몬테카를로 트리 탐색

❖ 몬테카를로 트리 검색 – cont.

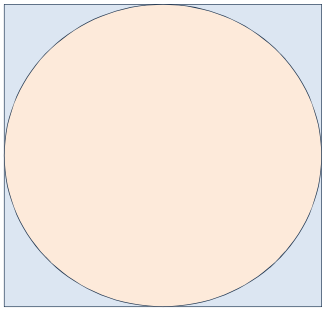
- 판의 형세판단을 위해 **휴리스틱**을 사용하는 **대신**, 가능한 많은 수의 **몬테카를로 시뮬레이션** 수행
- 일정 조건을 만족하는 부분은 **트리**로 구성하고, 나머지 부분은 **몬테카를로 시뮬레이션**
  - 가능성이 높은 수(move)들에 대해서 노드를 생성하여 트리의 탐색 폭을 줄이고, 트리 깊이를 늘리지 않기 위해 몬테카를로 시뮬레이션을 적용
  - **탐색 공간 축소**

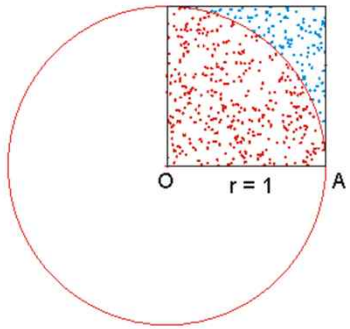


게임에서의 탐색

❖ **몬테카를로 시뮬레이션 (Monte Carlo Simulation)**

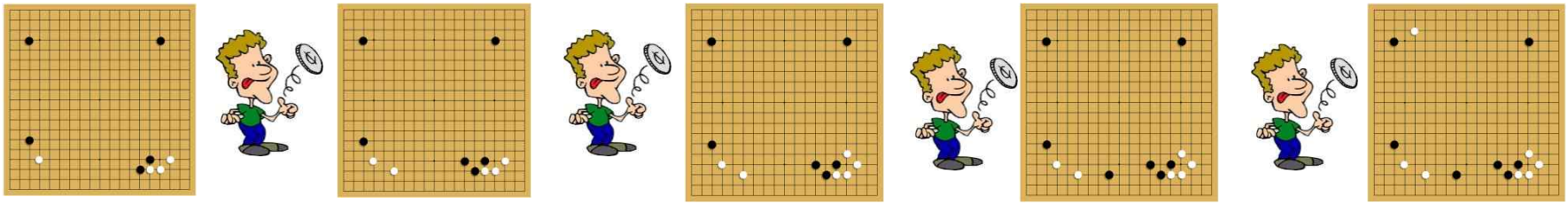
- MCTS 4단계 중 평가(Play out) 단계
- 특정 **확률 분포**로부터 **무작위 표본**(random sample)을 생성하고,
- 이 표본에 따라 **행동**을 하는 과정을 반복하여 결과를 확인하고,
- 이러한 결과확인 과정을 반복하여 최종 결정을 하는 것





한변의 길이가 2인 정사각영에 내접한 원이 있을때 사각형 안에 임의의 점을 발생시키면 원안에 있을 확률: 원의 면적/사각형의 면적

$$\frac{\text{원 안의 샘플 개수}}{\text{전체 샘플의 개수}} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$



❖ 몬테카를로 트리 탐색에서 방문할 자식 노드를 선택할 때 사용하는 UCB는 어떤 대상에 대해서 우호적인지 왜 그러한지 설명하시오.

Q & A