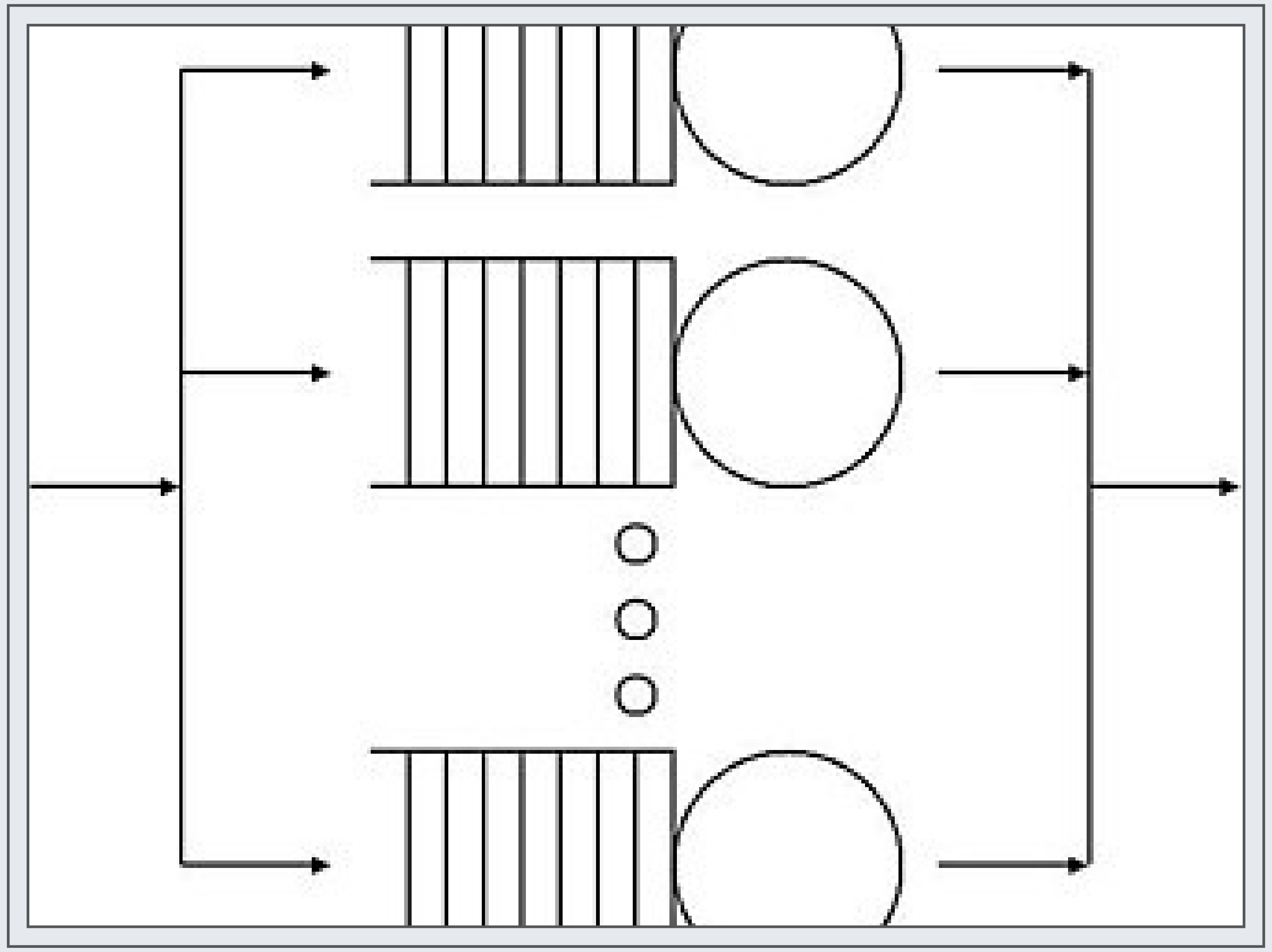
# Presentasi
# SISTEM ANTRIAN

**Dosen Pengajar: Eza Rahmanita, ST.**

Universitas Trunojoyo Madura | Sistem Informasi | 2023

# Latar Belakang



## Latar Belakang

Definisi Sistem Antrian. Sistem antrian adalah himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pelayanannya.

Jaringan antrian adalah sistem di mana antrian tunggal dihubungkan oleh jaringan perutean. Dalam gambar ini, server diwakili oleh lingkaran, antrian dengan serangkaian persegi panjang, dan jaringan perutean dengan panah. Dalam studi tentang jaringan antrian, seseorang biasanya mencoba untuk mendapatkan distribusi keseimbangan jaringan, meskipun dalam banyak aplikasi, studi tentang keadaan transien merupakan hal yang mendasar.

# Rumusan Masalah

Bayangkan situasi berikut ini:

- Para pembelanja yang berdiri di depan konter di supermarket.
- Mobil-mobil yang menunggu di lampu merah.
- Pasien yang menunggu di klinik rawat jalan
- Pesawat yang menunggu lepas landas di bandar udara.
- Mesin-mesin rusak yang menunggu untuk diperbaiki oleh petugas perbaikan mesin

## Rumusan Masalah 1

Menunggu adalah bagian dari kehidupan sehari-hari kita dan yang kita harapkan hanyalah agar antrian ini dapat dikurangi.

## Rumusan Masalah 2

pengurangan waktu menunggu merupakan tema yang menarik untuk dianalisis, tetapi tidak berarti analisis antrian hanya membahas waktu menunggu

## Rumusan Masalah 3

Memecahkan model-model ini adalah untuk menentukan ciri-ciri yang mengukur kinerja sebuah sistem sehingga informasi yang diperoleh dapat dipergunakan dalam mencari rancangan yang optimal untuk sarana pelayanan yang bersangkutan.

# TEORI ANTRIAN

Pada suatu sistem antrian, pelanggan datang dengan rate kedatangan diketahui. Pelanggan tersebut akan dilayani oleh salah satu dari pelayan yang tersedia. Bila semuanya sibuk, pelanggan harus antri sampai ada salah satu pelayan yang tersedia (Kalau tempat antrian belum penuh. Bila penuh, pelanggan tersebut ditolak).

Unsur-unsur dasar dari model antrian bergantung pada faktor-faktor berikut ini:

1. Distribusi kedatangan (kedatangan tunggal atau kelompok)
2. Distribusi waktu pelayanan (pelayanan tunggal atau kelompok)
3. Rancangan sarana pelayanan (stasiun serial, paralel, atau jaringan)
4. Peraturan pelayanan (FCFS, LCFS, SIRO) dan prioritas pelayanan
5. Ukuran antrian (terhingga atau tidak terhingga)
6. Sumber pemanggilan (terhingga atau tidak terhingga)
7. Perilaku manusia (perpindahan, penolakan, atau pembatalan)

# Komponen Proses Antrian

## Kedatangan

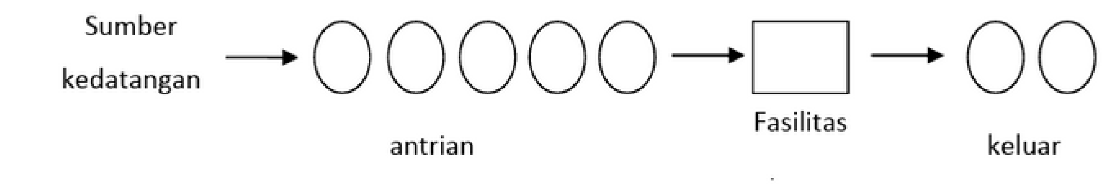
Setiap masalah antrian melibatkan kedatangan, misalnya orang, mobil, atau panggilan telepon untuk dilayani. Unsur ini sering dinamakan proses input yang meliputi sumber kedatangan dan cara terjadinya kedatangan yang umumnya merupakan proses random.

## Pelayan

Timbulnya antrian terutama tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan. Penentu antrian lain (aturan keputusanyang menjelaskan cara melayani pengantri, misalnya, datang awal dilayani dulu yang lebih dikenal dengan singkatan FCFS, datang terakhir dilayani dulu LCFS, berdasar prioritas, berdasar janji, dll.

## Antri

Pelayan atau mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih fasilitas pelayanan. Contohnya pada sebuah check out counter dari suatu supermarket terkadang hanya ada 1 pelayan, tetapi bisa juga diisi seorang kasir dengan pembantunya untuk memasukkan barang-barang ke kantong plastik. Disamping itu, perlu diketahui cara pelayanan dirampungkan, yang kadang-kadang merupakan proses random.



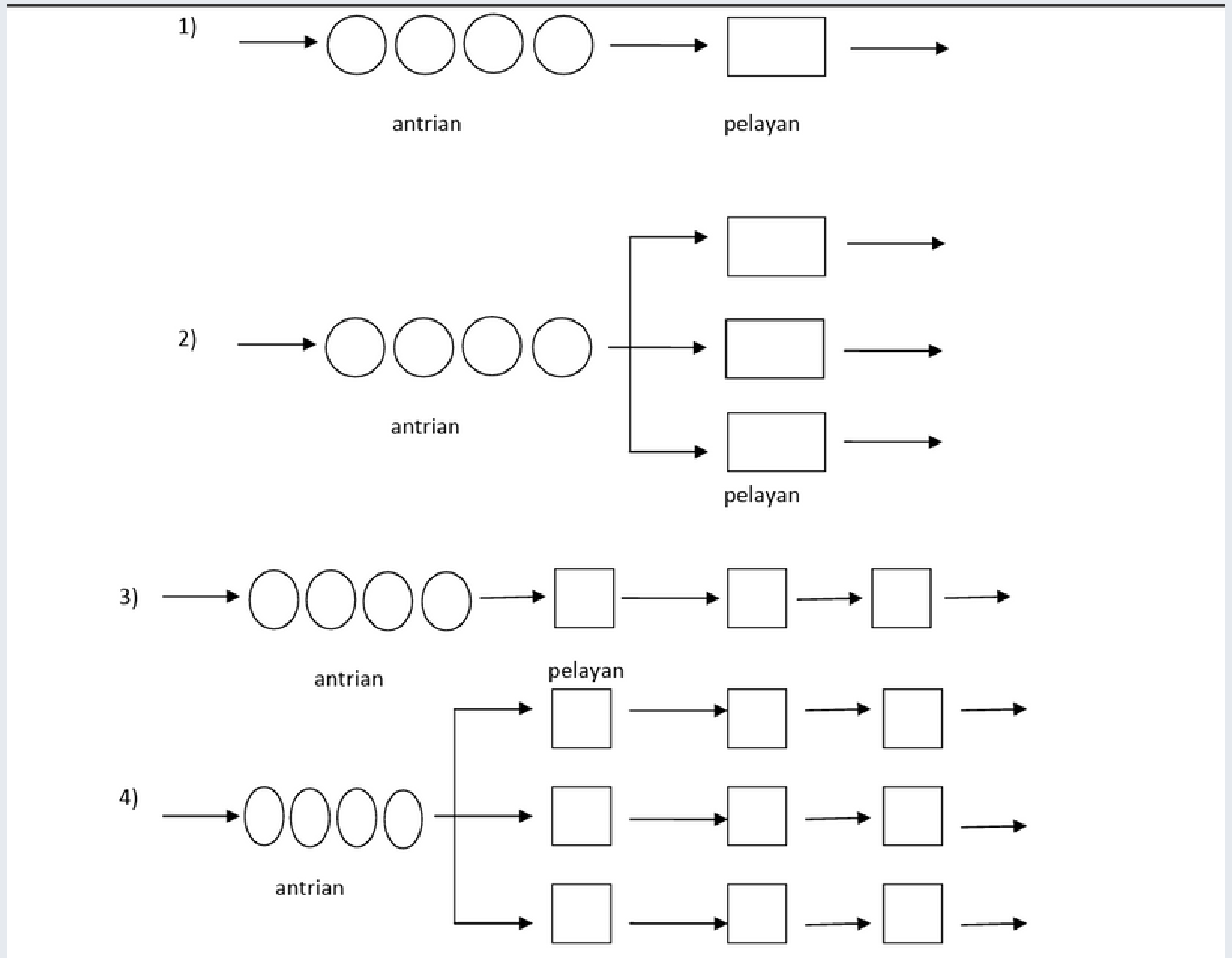
Gambar 1. Komponen Proses Antrian

**Struktur Dasar Proses Antrian**

Proses antrian pada umumnya dikelompokkan ke dalam empat struktur dasar menurut sifat-sifat fasilitas pelayanan, yaitu:

- Satu saluran satu tahap
- Banyak saluran satu tahap
- Satu saluran banyak tahap
- Banyak saluran banyak tahap

Keempat kelompok ini ditunjukkan pada gambar disamping:



# KERANGKA KEPUTUSAN & MODEL MASALAH ANTRIAN

Ciri-ciri operasi yang akan dipelajari adalah:

Pn = probabilita n pengantri dalam sistem

L = rata-rata banyaknya pengantri dalam sistem

Lq = rata-rata banyaknya pengantri dalam antrian

W = rata-rata waktu menunggu dalam sistem (antri + pelayanan)

Po atau I = proporsi waktu nganggur pelayan (tidak ada pengantri)

**Biaya Menunggu**

Minimumkan $\in ( C ) = I\,Ci + W\,Cw$

Keterangan:

$\in ( C )$ = total expected cost untuk tingkat pelayanan tertentu

I = waktu nganggur pelayan yang diharapkan

Ci = biaya nganggur pelayan per unit waktu

W = waktu menunggu yang diharapkan untuk semua kedatangan

Cw = biaya menunggu pengantri per unit waktu.

## Distribusi Kedatangan

$$P\ (x) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!}\text{, dimana}$$

x = banyaknya kedatangan
P (x) = probabilita kedatangan
$\lambda$ = rata-rata tingkat kedatangan
e = dasar logaritma natural, yaitu 2,71828
x ! = x (x-1) (x-2) . . . 1. (dibaca x faktorial)

## Distribusi waktu pelayanan

$f\ (t) = \mu\ e^{-\mu t}$, dimana t = waktu pelayanan
f (t) = probabilitas yang berhubungan dengan t
$\mu$ = rata-rata tingkat pelayanan
$1/\mu$ = rata-rata waktu pelayanan
e = dasar logaritma natural, yaitu 2,71828

**Model Kelahiran Murni**

Pn (t) = ( $\lambda$t )$^n$ e $^{-\lambda t}$, n = ( kelahiran murni )

**Model Kematian Murni**

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n}\, e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

$$P_n(t) = 1 - \sum_{n=1}^{N} P_n(t)$$

## NOTASI KENDALL

Terdapat banyak variasi yang mungkin dari model antrian. Ciri-ciri dari masing masing model akan diringkas dalam notasi kendall yang diperluas.

Notasi itu dituliskan: [a / b / c / d / e / f]

Notasi kendall yang asli adalah: [a / b / c ]

Keterangan:

a = distribusi kedatangan

b = distribusi keberangkatan atau waktu pelayanan, untuk a dan b,

- M menunjukkan Poisson,
- Ek menunjukkan Erlang, dan
- D menunjukkan Deterministik atau Konstan.

## MODEL ANTRIAN SATU SALURAN SATU TAHAP [M/M/1]

Pada model ini kedatangan dan keberangkatan mengikuti distribusi Poisson dengan tingkat 1 dan μ, terdapat satu pelayan, kapasitas pelayanan dan sumber kedatangan tak terbatas.

Untuk menentukan operating characteristics atau ciri-ciri operasi, dapat dilakukan dengan mudah setelah diperoleh probabilitas n pengantri dalam sistem (Pn). Melalui penurunan matematik yang cukup panjang, dalam kondisi steady state dapat ditunjukkan bahwa $Pn = (1 - R)\,R^n$, dimana $R = \lambda/\mu \leqslant 1$ dan n = 0, 1, 2, ....

Bertolak dari rumus itu dapat diperoleh ciri-ciri operasi lain, seperti:

1. Probabilitas terdapat k atau lebih pengantri dalam sistem adalah $P_{n \geq k} = R^k$.
2. Rata-rata banyaknya pengantri dalam sistem
   $$L = \sum_{n=0}^{\infty} nPn = \frac{R}{1-R}$$
3. Rata-rata banyaknya pengantri yang sedang antri
   $$L_q = \frac{R^2}{1-R}$$
4. Rata-rata waktu menunggu dalam sistem
   $$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$
5. Rata-rata waktu antri
   $$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$
6. Proporsi waktu nganggur pelayan
   $P_a$ atau I = 1-R

Notasi yang sering mncul:

1. $\lambda$ = jumlah rata -rata pelanggan yang datang per satuan waktu
2. $\mu$ = jumlah rata-rata pelanggan yang dilayani per satuan waktu
3. $P_0$ = probabilitas tidak ada pelangan dalam sistem
4. Pw = p = faktor penggunaan pelayanan ( proporsi waktu pelayan ketika sibuk)
5. Pn = probalitas bahwa n satuan ( kedatangan ) dalam sistem = rata-rata jumlah satuan dalam antrian ( rata-rata panjang antrian )
6. Ls = Jumlah rata-rata dalam sistem
7. Lq = Jumlah rata-rata dalam antrian
8. Wq = rata-rata waktu tunggu dalam
9. Ws = rata-rata waktu tunggu sistem
10. n = jumlah pelanggan dalam sistem
11. s = jumlah faselitas pelayan

# Contoh & Penjelasannya

Sistem PABX dengan S saluran, call masuk dengan rate l per menit. Rata-rata lama bicara adalah m menit (atau rate pelayanan = 1/m per menit = m per menit )

Customer = call
Server = saluran
State = banyaknya saluran sibuk
Banyaknya server = S
Banyaknya tempat antri = o
Rate pelanggan = l
Rate pelayanan = m

Pn= Probabilitasnya ada n pelanggan dalam sistem
1 pelayan = 2 pelanggan / menit
2 pelayan = 2x2 pelanggan / menit
3 pelayan = 3x2 pelanggan / menit

# Rumus & Penyelesaiannya

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \quad ; P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda x \lambda}{\mu x 2\mu} P_0 = \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda x \lambda x \lambda}{\mu x 2\mu x 3\mu} P_0 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

:

:

:

Berlaku :

$$P_S = \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0$$

P0 + P1 + .........+ Ps = 1

$$P_0\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S\right) = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Misalkan:

rate kedatangan = 1 call / menit → λ = 1

rata – rata lama bicara = 2 menit → µ m = ½

banyaknya saluran = 5 → S = 5

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} 2^n} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} 2^n} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120}} = \frac{15}{109} \longrightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

= P1 = 1 / ½ x 0,137

= 2,74

$$; P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda x \lambda}{\mu x 2\mu} P_0 = \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} P_0$$ = $(\lambda/\mu)^2$ x 1/2 x $P_0$ = $(1/2)^2$ x 1/2 x 0,137 = 0,017

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda x \lambda x \lambda}{\mu x 2\mu x 3\mu} P_0 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$ = $(\lambda/\mu)^3$ x 1/6 x $P_0$ = 1/8 x 1/6 x 0,137 = 0,00283

$$P_4 = \frac{\lambda}{4\mu} P_4 = \frac{\lambda x \lambda x \lambda x \lambda}{\mu x 2\mu x 3\mu x 4} P_0 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$ = 1/16 x 1/24 x 0.137 = 0,0356

$$P_5 = \frac{\lambda}{5\mu} P_5 = \frac{\lambda x \lambda x \lambda x \lambda x \lambda}{\mu x 2\mu x 3\mu x 4\mu x 5} P_0 = \frac{1}{5!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 P_0 = \frac{1}{120} \times \frac{1}{32} \times 0{,}137 = 0{,}0000417$$

# Contoh I & Penjelasannya

Rata – rata banyaknya saluran sibuk

$$= 0 \times P_0 + 1 \times P_1 + \ldots + S \times P_S$$

$$= \sum_{n=0}^{S} nPn = \ldots\ldots\ldots (0 \text{ x } P_0 + 1 \text{ x } P_1 + 2 \text{ x } P_2 + 3 \text{ x } P_4 + 4 \text{ x } P_5 + 5 \text{ x } P_5) = 2,924$$

$$Utilisasi PABX = \frac{rata-rata banyaknya yang sibuk}{banyaknya yang tersedia} = \frac{\overset{2,924}{\ldots}}{5} = \cdots\%$$

Berapa % call yang tidak dapat dilayani ?

Call ditolak =semua saluran PABX sibuk

= berada pada state S

Prob. ditolak = prob. pada state S = PS

Proporsiditolak = PS = .......x 100 % = .....% = 0,000142 x 100% = 0,0417%

GOS : Grade of Service

# Contoh II & Penjelasannya

- Usaha Warnet punya 3 komputer
- Penyewa datang dengan rate 2 / jam
- Rata –rata lama sewa 1 jam
- Bila semua komputer sibuk, yang mau menunggu paling banyak 2 penyewa. Selebihnya pergi

State :banyaknya penyewa di Warnet

P0 =..., P1 = ..., P2 = ..., P3 = ..., P4 =..., P5 = ...

- Rata ratabanyaknya yang antri

  = 1 x P4 + 2 x P5

  = ...........

- Rata – rata lama antri

$$= \frac{banyaknyayangantri}{ratekedatan\ gan} = \frac{\cdots}{2}$$

$$= \ldots\ldots\ldots jam$$

- Utilisasi komputer

$$= \frac{rata - ratabanyak\ nyakompute\ ryangsibuk}{banyaknyak\ omputer}$$

Tarifsewa = 1000/jam

1 hari buka 8 jam

Rata –rata pendapatan dalam satu hari

= banyaknya yang dapat dilayani dalam 1 hari x 1000

= (1 – $P_5$ ) x 2 x 8 x 1000

Jadi, banyaknya yg menunggu = lama tunggu x rate kedatangan

- Banyaknya komputer yang sibuk: 0 x Po + 1 x P1 + 2 x P2 + 3 x P3 = 24 / 29

$P1 = \frac{\lambda}{\mu} Po = 2 \times \frac{1}{3} = 0{,}6$ ; $P2 = \frac{\lambda}{2!\,\mu^2} Po = (2)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 0{,}6$ ; $P3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 Po = (2)^3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$

$= 0{,}440$

$P4 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 Po = (16) \times 1/24 \times 1/3 = 0{,}770$ ; $P5 = \frac{1}{5!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 Po = \frac{1}{120} \times (2)^5 \times \frac{1}{3} = 0{,}0858$

State :banyaknya penyewa di Warnet

P0 = 3/29, P1 = 6/29, P2 = 3/29, P3 = 4/29,

P4 = 2/29, P5 = 4/145

- Rata ratabanyaknya yang antri

= 1 x P4 + 2 x P5

= 2/29 + 9/145 = 18 / 145 = 0,124138

- Rata – rata lama antri

$$= \frac{banyaknyayangantri}{ratekedatangan} = \frac{18/145}{2}$$

$$= \frac{36}{145}\ jam = 0{,}248276$$

- Utilisasi komputer

$$= \frac{rata-ratabanyaknyakomputeryangsibuk}{banyaknyakomputer}$$

$$= \frac{0xP0 + 1xP1 + 2xP2 + 3xP3 + 4xP4 + 5xP5}{3} = 11{,}71$$

Tarifsewa = 1000/jam

1 hari buka 8 jam

Rata –rata pendapatan dalam satu hari

= banyaknya yang dapat dilayani dalam 1 hari x 1000

= $(1 - P_5) \times 2 \times 8 \times 1000$

= 0,142 x 2 x 8 x 1000 = 2272

Jadi, banyaknya yg menunggu = lama tunggu x rate kedatangan = 2 ( x ) = 1 jam x 2 jam = x = 1

# Contoh III & Penjelasannya

Diberi fasilitas TV sehingga semua mau nunggu.
Harga TV Rp. 1.000.000,00 dapat dipakai 2 tahun.
1 tahun = 250 hari.
Apakah menguntungkan?

Dengan TV, pendapatan/tahun $= 2 \times 8 \times 1000 \times 250 = 4.000.000$

biaya TV/tahun $= \underline{500.000}$ –

$= 3.500.000$

- Tanpa TV = 8 x 1000 x 250 = 2.000.000 – 250.000 = 1.750.000

Bila pendapatan / tahun dengan TV > tanpa TV
→ menguntungkan

# Contoh IV & Penjelasannya

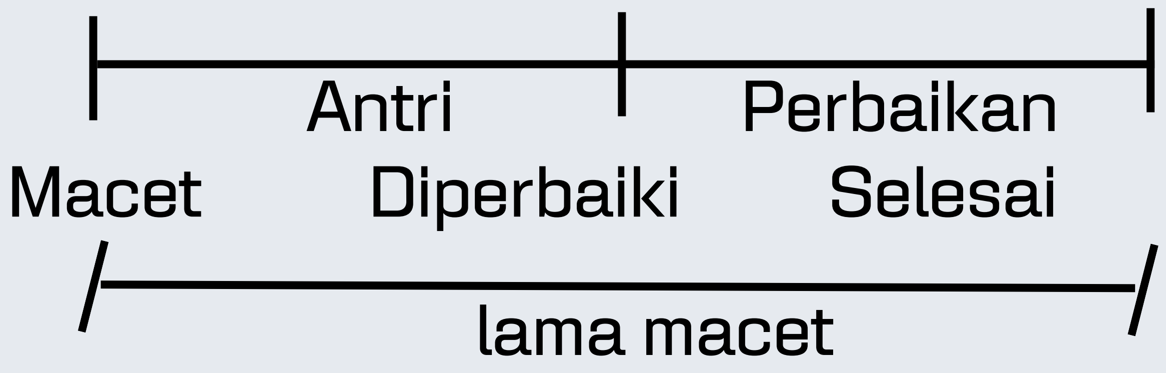
- Pabrik punya 5 mesin.
- Tiap mesin rata-rata mengalami kemacetan 2 kali tiap jam.
- Ada dua mekanik yang bertugas. Rata-rata lama perbaikan kemacetan adalah 5 menit

Dik: $\lambda$ (Laju Kedatangan) = 5 mesin / jam

$\mu$ (Laju Pelayanan) = $\frac{1}{5}$ perbaikan / menit

$s = 2$

Rata – rata lama macet tiap mesin



P0 = 1 / 1+λ/4 = 1 / 1+5/⅕ = 1/26

$P1 = \frac{\lambda}{\mu} Po = 2 \times \frac{1}{26} = 0{,}6$ ; $P2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \times \frac{1}{2!} \times Po = (10)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{26} = 19{,}2$ ; $P3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 Po = (10)^3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{26}$

$= 64{,}12$

$P4 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 Po = (10)^4 \times 0{,}041 \times 0{,}384$ ; $P5 = \frac{1}{5!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 Po = \frac{1}{120} \times (10)^5 \times \frac{1}{26} = 31{,}54$

$= 0{,}770$

Rata-rata banyaknya yang antri

= 1xP4 + 2xP5

= 157,4 + 63,08 = 220,48

Rata – rata lama antri

$= \frac{\text{banyaknya yang antri}}{\text{rate kedatangan}}$

$= \frac{220{,}48}{5}$ 44,096

Lama macet = lama antri + lama perbakan

= 44,0,96 + 5

= 49,096

Rata – rata banyaknya mesin yg beroperasi pada tiap saat

= banyaknya mesin – rata2 banyaknya mesin mace

= $5 - ( 0 \times P_0 + 1 \times P_1 + 2 \times P_2 + 3 \times P_3 + 4 \times P_4 + 5 \times P_5$

= 5 - 276,108 = -271,108

# Penutup

- Teoriantrianmemberikan model-model untuk menganalisis pengoperasian sarana pelayanan dimana kedatangan dan / atau keberangkatan pelanggan terjadi secara acak.
- Pertanyaan terbesar tentang teori antrian adalah seberapa baiknya teori-teori ini dalam praktek.
- Batasan yang dikenakan oleh analisis matematis tampaknya sulit menemukan aplikasi nyata yang sesuai dengan model ini. Bagaimana pun juga, banyak aplikasi antrian yang berhasil telah dilaporkan sepanjang tahun.

# Tugas

Penumpang kereta api datang pada sebuah loket dengan tingkat rata-rata 20 per jam. Misalkan secara rata-rata setiap penumpang dilayani 2 menit dan waktu layanan mengikuti distribusi eksponential. Berapa rata-rata banyaknya yang antri dan rata-rata lama antrian?

# Terima Kasih

Giraldo Stevanus | Universitas Trunojoyo Madura | Sistem Informasi | 2023