Питання

1. Нехай x — розв'язок задачі Коші
$$\begin{cases} \dot{x} = -\nabla f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$
де $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладка функція. Що ви знаєте про поведінку $x(t)$ при $t \to +\infty$? Відповідь обгрунтуйте.

2. Нехай x — розв'язок задачі Коші
$$\begin{cases} \dot{x} = -\nabla f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$
де $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладка опукла функція. Що ви знаєте про поведінку $x(t)$ при $t \to +\infty$? Відповідь обгрунтуйте.

3. Нехай x — розв'язок задачі Коші
$$\begin{cases} \dot{x} = -\nabla f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$
де $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладка μ-сильно опукла функція. Що ви знаєте про поведінку $x(t)$ при $t \to +\infty$? Відповідь обгрунтуйте.

4. (Важка кулька) Нехай x — розв'язок задачі Коші
$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} = -\nabla f(x), \\ x(0) = x_0, \ \ \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$
де $a > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладка опукла функція. Що ви знаєте про поведінку $x(t)$ при $t \to +\infty$? Відповідь обгрунтуйте.

5. (Важка кулька) Нехай x — розв'язок задачі Коші
$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\sqrt{\mu}\dot{x} = -\nabla f(x), \\ x(0) = x_0, \ \ \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$$
де $\mu > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладка μ-сильно опукла функція. Що ви знаєте про поведінку $x(t)$ при $t \to +\infty$? Відповідь обгрунтуйте.

6. Субградієнтний метод. Оцінки для опуклих функцій.

7. Субградієнтний метод. Оцінки для сильно опуклих функцій.

8. Субградієнтний метод. Крок Б.Т. Поляка.

9. Децентралізований субградієнтний метод.

10. ADMM. Доведіть $O(1/k)$-оцінку.

11. Градієнтний спуск для L-гладкої опуклої функції (доведіть $O(1/k)$-оцінку).

12. Нижня оцінка для методів першого порядку на класі L-гладких опуклих функцій.

13. Градієнтний спуск для L-гладкої μ-сильно опуклої функції. Варіант з $\lambda = \frac{1}{L}$.

14. Градієнтний спуск для L-гладкої μ-сильно опуклої функції. Варіант з $\lambda = \frac{1}{\mu+L}$.

15. Нижня оцінка для методів першого порядку на класі L-гладких μ-сильно опуклих функцій.

16. Прискорений градієнтний метод Ю.Є. Нестерова (доведіть $O(1/k^2)$-оцінку).

17. Метод умовного градієнта (доведіть $O(1/k)$-оцінку).

18. Нижня оцінка для методу умовного градієнта на класі L-гладких опуклих функцій, заданих на опуклих компактах.

19. Метод проекції градієнта.

20. Доведіть, що для гладкої задачі опуклого програмування $f \to \min_C$ має місце:

$$f(x) = \min_C f \quad \Leftrightarrow \quad x \in C \ \wedge \ (\nabla f(x), y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in C.$$

21. Доведіть, що для гладкої задачі опуклого програмування $f \to \min_C$ має місце:

$$f(x) = \min_C f \quad \Leftrightarrow \quad x = P_C\left(x - \lambda \nabla f(x)\right), \ \ \lambda > 0.$$

22. Для L-гладкої функції f доведіть нерівність

$$f(y) \leq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{L}{2}\left\|y - x\right\|^2.$$

23. Для L-гладкої функції f доведіть нерівність

$$f(y) \leq f(x) - \frac{1}{2L}\left\|\nabla f(x)\right\|^2,$$

де $y = x - \frac{1}{L}\nabla f(x)$.

24. Для гладкої опуклої функції f доведіть нерівність

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x).$$

25. Для гладкої опуклої функції f доведіть нерівність

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq 0.$$

26. Для гладкої μ-сильно опуклої функції f доведіть нерівність

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{\mu}{2}\left\|x - y\right\|^2.$$

27. Для гладкої μ-сильно опуклої функції f доведіть нерівність

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \mu\left\|x - y\right\|^2.$$

28. Для L-гладкої опуклої функції f доведіть нерівність

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \frac{1}{2L}\left\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\right\|^2.$$

29. Для L-гладкої опуклої функції f доведіть нерівність
$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \frac{1}{L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2.$$

30. Для L-гладкої μ-сильно опуклої функції f доведіть нерівність
$$(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \frac{\mu}{\mu + L} \|x - y\|^2 + \frac{1}{\mu + L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2.$$

31. Субдиференціал, субградієнт.

32. Субдиференціал функції $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

33. Субдиференціал функції $f(x) = \max_{1 \leq k \leq m} \{(a_k, x) - b_k\}$.

34. Субдиференціал функції $f(x) = \max_{1 \leq k \leq m} f_k(x)$.

35. Субдиференціал функції
$$f(x) = \|Ax - b\|_1,$$
де $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|_1$ — ℓ_1-норма в $\mathbb{R}^m$.

36. Субдиференціал функції
$$f(x) = \|Ax - b\|_\infty,$$
де $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|_\infty$ — ℓ_∞-норма в $\mathbb{R}^m$.

37. Нехай (a_n), (b_n) — послідовності невід'ємних чисел, що задовольняють рекурентну нерівність: $a_{n+1} \leq a_n - b_n$. Покажіть, що (a_n) збіжна та $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$.

38. Нехай (a_n), (b_n) — послідовності невід'ємних чисел такі, що $a_{n+1} \leq a_n + b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Покажіть, що існує границя $\lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

39. Нехай (a_n) — послідовність додатніх чисел, що задовольняють рекурентну нерівність: $a_{n+1} \leq a_n - \delta a_n^2$, де $\delta > 0$. Покажіть, що $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

40. Нехай X та Y — метричні простори. Доведіть, що напівнеперервне зверху відображення $f : X \to 2^Y$ із замкненими значеннями є замкненим.

41. Нехай X та Y — метричні простори. Доведіть, що коли простір Y компактний, то замкнене відображення $f : X \to 2^Y$ напівнеперервне зверху.

42. Теорема Какутані про нерухому точку.

43. Рівновага Неша.

44. Нехай функція $\phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервна, Y — компакт. Покажіть, що відображення $f : X \to 2^Y$, задане співвідношенням
$$f(x) = \left\{ \bar{y} \in Y : \phi(x, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} \phi(x, y) \right\},$$
замкнене (X, Y — метричні простори).