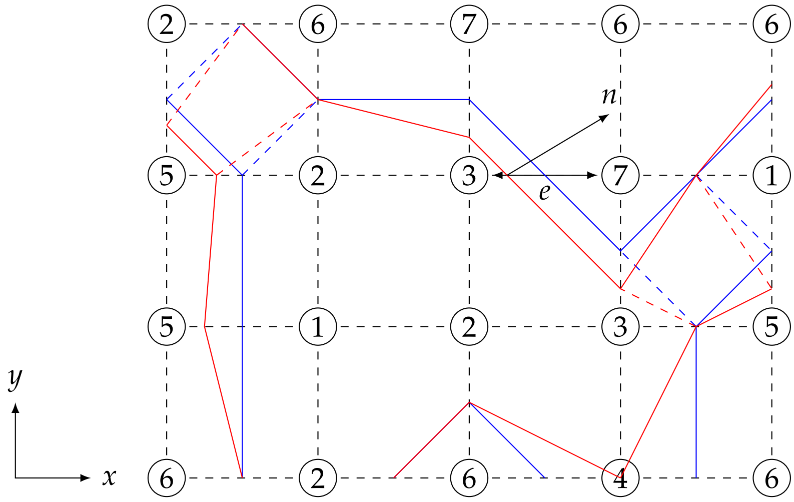
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 Marching Cubes (3 Punkte)

Gegeben seien folgende Gitterpunkte mit Dichtewerten:



Bemerkung: Werten Sie Gitterpunkte mit Dichtewerten $\leq \rho$ als Innen und Dichtewerten $> \rho$ als Außen.

a) Zeichnen Sie die Tesselierung zum Isowert $\rho = 4$, wenn **nicht** linear interpoliert wird, sondern lediglich Kantenmittelpunkte verwendet werden. Markieren Sie dabei auch uneindeutige Zellen.

1 Punkt

b) Zeichnen Sie nun die Tesselierung zum Isowert $\rho = 4$, wenn auf den Kanten linear interpoliert wird. Markieren Sie dabei auch uneindeutige Zellen.

1 Punkt

c) Berechnen Sie die Normale zum Schnittpunkt auf der Kante e. Berechnen Sie dazu den Gradienten an den Gitterpunkten der Kante durch zentrale Differenzen. Interpolieren Sie anschließend beide Gradienten linear über die Kante, passend zum Schnittpunkt. Die Schrittweite einer Zelle sei 1.

1 Punkt

Lösungsvorschlag

Sei zur linken der Kante e der Gitterpunkt (i, j) und zur rechten $(i + 1, j)$ Der Gradient des linken Gitterpunktes berechnet sich mit zentraler Differenz durch

$$\nabla f_L = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x}(i, j) \\ \frac{\delta}{\delta y}(i, j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 f_{i+1,j} - 0.5 f_{i-1,j} \\ 0.5 f_{i,j+1} - 0.5 f_{i,j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Der Gradient des rechten Gitterpunktes berechnet sich mit zentraler Differenz durch

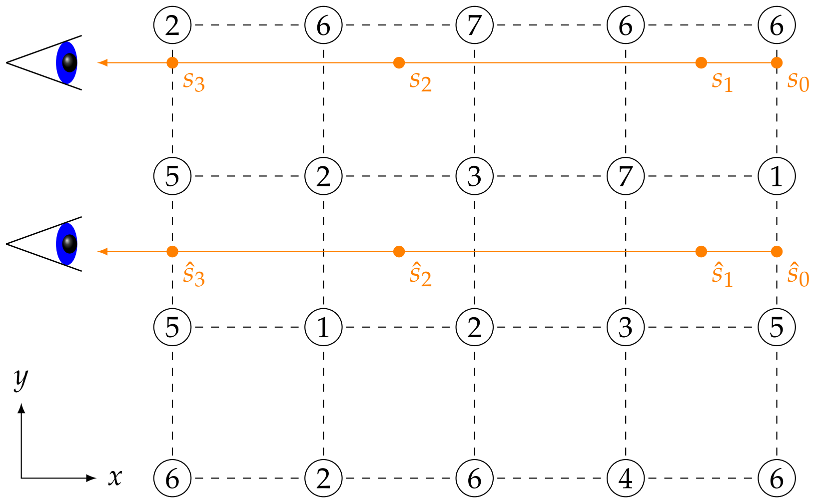
$$\nabla f_R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Anteile des interpolierten Schnittpunktes fließt der linke Gitterpunkt zu $\frac{3}{4}$ und der rechte zu $\frac{1}{4}$ in die Normale des Schnittpunktes ein:

$$\nabla f_{\text{Schnittpunkt}} = \begin{pmatrix} 1.625 \\ 2.25 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 Emissions-Absorptions Model (6 Punkte)

Es sei das selbe Gitter wie in Aufgabe 1 gegeben. Berechnen Sie die Intensität $I(s_3)$ und $I(\hat{s}_3)$ für beide eingezeichneten Strahlen nach dem *compositing scheme* des Emissions-Absoptions-Modell.



Die Position der Abtastpunkte ist als (x, y) Wert im 2D Gitter gegeben:

$$s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.75 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.75 \end{pmatrix}, s_1 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.75 \end{pmatrix}, s_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

$$\hat{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \hat{s}_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \hat{s}_1 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \hat{s}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Wobei der Quellterm und Absorptionsterm für ein Gitterpunkt ij folgendermaßen aus dem Dichtewert ρ berechnet werden sollen (Die Dichtewerte sind in der Skizze angegeben):

$$q_{ij} = \frac{{\rho_{ij}}^2}{10}, \ \kappa_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{10}$$

Die Hintergrundbeleuchtung ist gegeben als:

$$I(s_0) = I(\hat{s}_0) = 0.5$$

Hinweis: Sie müssen zunächst den Quellterm und Absorptionsterm der Abtastpunkte s_1,s_2 und s_3 (bzw. $\hat{s}_1$,$\hat{s}_2$ und $\hat{s}_3$) durch bilineare Interpolation bestimmen.

6 Punkte

Lösungsvorschlag

Erster Strahl:

$$q(s_1) = 0.25 \cdot (0.5 \cdot \frac{7^2}{10} + 0.5 \cdot \frac{1^2}{10}) + 0.75 \cdot (0.5 \cdot \frac{6^2}{10} + 0.5 \cdot \frac{6^2}{10}) = 3.325$$
$$q(s_2) = 0.25 \cdot (0.5 \cdot \frac{2^2}{10} + 0.5 \cdot \frac{3^2}{10}) + 0.75 \cdot (0.5 \cdot \frac{6^2}{10} + 0.5 \cdot \frac{7^2}{10}) = 3.35$$
$$q(s_3) = 0.25 \cdot (1 \cdot \frac{5^2}{10} + 0 \cdot \frac{2^2}{10}) + 0.75 \cdot (1 \cdot \frac{2^2}{10} + 0 \cdot \frac{6^2}{10}) = 0.925$$

$$\kappa(s_1) = 0.25 \cdot (0.5 \cdot \frac{7}{10} + 0.5 \cdot \frac{1}{10}) + 0.75 \cdot (0.5 \cdot \frac{6}{10} + 0.5 \cdot \frac{6}{10}) = 0.55$$
$$\kappa(s_2) = 0.25 \cdot (0.5 \cdot \frac{2}{10} + 0.5 \cdot \frac{3}{10}) + 0.75 \cdot (0.5 \cdot \frac{6}{10} + 0.5 \cdot \frac{7}{10}) = 0.55$$
$$\kappa(s_3) = 0.25 \cdot (1 \cdot \frac{5}{10} + 0 \cdot \frac{2}{10}) + 0.75 \cdot (1 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{6}{10}) = 0.275$$

$$I(s_0) = c_0$$
$$I(s_1) = I(s_0) \cdot T_1 + c_1$$
$$I(s_2) = I(s_1) \cdot T_2 + c_2$$
$$I(s_3) = I(s_2) \cdot T_3 + c_3$$

$$c_0 = 0.5$$
$$c_1 = 3.325 \cdot \sqrt{(2.75 - 2.75)^2 + (4 - 3.5)^2} = 1.6625$$
$$c_2 = 3.35 \cdot \sqrt{(2.75 - 2.75)^2 + (3.5 - 1.5)^2} = 6.7$$
$$c_3 = 0.925 \cdot \sqrt{(2.75 - 2.75)^2 + (1.5 - 0)^2} = 1.3875$$

$$T_1 = \exp(-0.55 \cdot \sqrt{(2.75 - 2.75)^2 + (4 - 3.5)^2}\ ) = 0.7227$$
$$T_2 = \exp(-0.55 \cdot \sqrt{(2.75 - 2.75)^2 + (3.5 - 1.5)^2}\ ) = 0.333$$
$$T_3 = \exp(-0.275 \cdot \sqrt{(2.75 - 2.75)^2 + (1.5 - 0)^2}\ ) = 0.6622$$

$$I(s_0) = 0.5$$
$$I(s_1) = 0.5 \cdot 0.7227 + 1.6625 = 2.0238$$
$$I(s_2) = 2.0238 \cdot 0.333 + 6.7 = 7.3738$$
$$I(s_3) = 7.3738 \cdot 0.6622 + 1.3875 = 6.2701$$

Zweiter Strahl:

$$q(\hat{s}_1) = 0.5 \cdot (0.5 \cdot \frac{3^2}{10} + 0.5 \cdot \frac{5^2}{10}) + 0.5 \cdot (0.5 \cdot \frac{7^2}{10} + 0.5 \cdot \frac{1^2}{10}) = 2.1$$
$$q(\hat{s}_2) = 0.5 \cdot (0.5 \cdot \frac{1^2}{10} + 0.5 \cdot \frac{2^2}{10}) + 0.5 \cdot (0.5 \cdot \frac{2^2}{10} + 0.5 \cdot \frac{3^2}{10}) = 0.45$$
$$q(\hat{s}_3) = 0.5 \cdot (1 \cdot \frac{5^2}{10} + 0 \cdot \frac{1^2}{10}) + 0.5 \cdot (1 \cdot \frac{5^2}{10} + 0 \cdot \frac{2^2}{10}) = 2.5$$

$$\kappa(\hat{s}_1) = 0.5 \cdot (0.5 \cdot \frac{3}{10} + 0.5 \cdot \frac{5}{10}) + 0.5 \cdot (0.5 \cdot \frac{7}{10} + 0.5 \cdot \frac{1}{10}) = 0.4$$
$$\kappa(\hat{s}_2) = 0.5 \cdot (0.5 \cdot \frac{1}{10} + 0.5 \cdot \frac{2}{10}) + 0.5 \cdot (0.5 \cdot \frac{2}{10} + 0.5 \cdot \frac{3}{10}) = 0.2$$
$$\kappa(\hat{s}_3) = 0.5 \cdot (1 \cdot \frac{5}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10}) + 0.5 \cdot (1 \cdot \frac{5}{10} + 0 \cdot \frac{2}{10}) = 0.5$$

$$I(\hat{s}_0) = \hat{c}_0$$
$$I(\hat{s}_1) = I(\hat{s}_0) \cdot \hat{T}_1 + \hat{c}_1$$
$$I(\hat{s}_2) = I(\hat{s}_1) \cdot \hat{T}_2 + \hat{c}_2$$
$$I(\hat{s}_3) = I(\hat{s}_2) \cdot \hat{T}_3 + \hat{c}_3$$

$$\hat{c}_0 = 0.5$$
$$\hat{c}_1 = 2.1 \cdot \sqrt{(1.5-1.5)^2 + (4-3.5)^2} = 1.05$$
$$\hat{c}_2 = 0.45 \cdot \sqrt{(1.5-1.5)^2 + (3.5-1.5)^2} = 0.9$$
$$\hat{c}_3 = 2.5 \cdot \sqrt{(1.5-1.5)^2 + (1.5-0)^2} = 3.75$$

$$\hat{T}_1 = \exp(-0.4 \cdot \sqrt{(1.5-1.5)^2 + (4-3.5)^2}\ ) = 0.741$$
$$\hat{T}_2 = \exp(-0.2 \cdot \sqrt{(1.5-1.5)^2 + (3.5-1.5)^2}\ ) = 0.6705$$
$$\hat{T}_3 = \exp(-0.5 \cdot \sqrt{(1.5-1.5)^2 + (1.5-0)^2}\ ) = 0.4724$$

$$I(\hat{s}_0) = 0.5$$
$$I(\hat{s}_1) = 0.5 \cdot 0.741 + 1.05 = 1.4205$$
$$I(\hat{s}_2) = 1.4205 \cdot 0.6705 + 0.9 = 1.8523$$
$$I(\hat{s}_3) = 1.8523 \cdot 0.4724 + 3.75 = 4.6251$$

Aufgabe 3 Bernstein-Bézier Dreiecke (6 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck T mit den Eckpunkten

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Weiterhin betrachten wir die funktionale Oberfläche

$$\mathbf{X}_p(z) = \begin{pmatrix} z \\ p(z) \end{pmatrix}, \quad z \in T$$

wobei

$$p(z) = \sum_{i+j+k=3} B_{ijk}(z)\, b_{ijk}.$$

Die BB-Koeffizienten sind gegeben als

$$\begin{array}{llllll} b_{300} = 8 & b_{210} = 6 & b_{201} = 4 & b_{120} = 0 & b_{111} = 6 & b_{102} = 0 \\ b_{030} = 13 & b_{021} = 6 & b_{012} = 2 & & & \\ b_{003} = 4 & & & & & \end{array}$$

a) Werten Sie die Oberfläche an $z_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ aus. Wie lauten die Koordinaten der Punkte $\mathbf{X}_p(z_0)$ und $\mathbf{X}_p(z_1)$?

Hinweis: Sie müssen zunächst die baryzentrischen Koordinaten von z_0 und z_1 bestimmen.

1.5 Punkte

Lösungsvorschlag

$$\lambda_0(z_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\lambda_1(z_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = 0.75$$
$$\lambda_2(z_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = 0.25$$

$$\lambda_0(z_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = 0.25$$
$$\lambda_1(z_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_1 & v_2 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = 0.25$$
$$\lambda_2(z_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & z_1 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = 0.5$$

Lösungsvorschlag

Mit den aus a) bestimmten baryzentrischen Koordinaten erhalten wir folgende de Casteljau-Pyramide für den Punkt z_0:

$$\begin{array}{llll}
b_{003}^{[0]} = 4 & & & \\
b_{102}^{[0]} = 0 & b_{012}^{[0]} = 2 & & \\
b_{201}^{[0]} = 4 & b_{111}^{[0]} = 6 & b_{021}^{[0]} = 6 & \\
b_{300}^{[0]} = 8 & b_{210}^{[0]} = 6 & b_{120}^{[0]} = 0 & b_{030}^{[0]} = 13
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
b_{002}^{[1]} = 2.5 & & \\
b_{101}^{[1]} = 4.5 & b_{011}^{[1]} = 5 & \\
b_{200}^{[1]} = 5.5 & b_{110}^{[1]} = 1.5 & b_{020}^{[1]} = 11.25
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
b_{001}^{[2]} = 4.375 & \\
b_{100}^{[2]} = 2.25 & b_{010}^{[2]} = 9.6875
\end{array}$$

$$b_{000}^{[3]} = 8.3594$$

Für den Punkt z_1 erhalten wir:

$$\begin{array}{llll}
b_{003}^{[0]} = 4 & & & \\
b_{102}^{[0]} = 0 & b_{012}^{[0]} = 2 & & \\
b_{201}^{[0]} = 4 & b_{111}^{[0]} = 6 & b_{021}^{[0]} = 6 & \\
b_{300}^{[0]} = 8 & b_{210}^{[0]} = 6 & b_{120}^{[0]} = 0 & b_{030}^{[0]} = 13
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
b_{002}^{[1]} = 2.5 & & \\
b_{101}^{[1]} = 2.5 & b_{011}^{[1]} = 4 & \\
b_{200}^{[1]} = 5.5 & b_{110}^{[1]} = 4.5 & b_{020}^{[1]} = 6.25
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
b_{001}^{[2]} = 2.875 & \\
b_{100}^{[2]} = 3.75 & b_{010}^{[2]} = 4.6875
\end{array}$$

$$b_{000}^{[3]} = 3.5469$$

Wir erhalten also

$$\mathbf{X}_p(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8.3594 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_p(z_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3.5469 \end{pmatrix}$$

b) Führen Sie mit den Berechnungen aus b) einen Basiswechsel des BB-Polynoms für z_0 durch. Bestimmen Sie also

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(z) &\text{ mit } z \in [v_0, v_1, z_0]\,, \\
\hat{p}(z) &\text{ mit } z \in [v_0, z_0, v_2] \text{ und} \\
p^*(z) &\text{ mit } z \in [z_0, v_1, v_2]\,.
\end{aligned}$$

1.5 Punkte

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}(z) &= \widetilde{B}_{300}b_{300} + \widetilde{B}_{210}b_{210} + \widetilde{B}_{201}b_{200}^{[1]} + \widetilde{B}_{120}b_{120} + \widetilde{B}_{111}b_{110}^{[1]} \\
&\quad + \widetilde{B}_{102}b_{100}^{[2]} + \widetilde{B}_{030}b_{030} + \widetilde{B}_{021}b_{020}^{[1]} + \widetilde{B}_{012}b_{010}^{[2]} + \widetilde{B}_{003}b_{000}^{[3]} \\
\hat{p}(z) &= \hat{B}_{300}b_{300} + \hat{B}_{210}b_{200}^{[1]} + \hat{B}_{201}b_{201} + \hat{B}_{120}b_{100}^{[2]} + \hat{B}_{111}b_{101}^{[1]} \\
&\quad + \hat{B}_{102}b_{102} + \hat{B}_{030}b_{000}^{[3]} + \hat{B}_{021}b_{001}^{[2]} + \hat{B}_{012}b_{002}^{[1]} + \hat{B}_{003}b_{003} \\
p^*(z) &= B^*_{300}b_{000}^{[3]} + B^*_{210}b_{010}^{[2]} + B^*_{201}b_{001}^{[2]} + B^*_{120}b_{020}^{[1]} + B^*_{111}b_{011}^{[1]} \\
&\quad + B^*_{102}b_{002}^{[1]} + B^*_{030}b_{030} + B^*_{021}b_{021} + B^*_{012}b_{012} + B^*_{003}b_{003}
\end{aligned}$$

c) Gegeben sei ein zweites Dreieck

$$\widetilde{T} = [v_0, v_1, \widetilde{v}_2] = \left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}\right],$$

welches die Kante $[v_0, v_1]$ mit T teilt und ein zweites BB-Polynom

$$\widetilde{p}(z) = \sum_{i+j+k=3} \widetilde{B}_{ijk}(z)\, \widetilde{b}_{ijk} \ , z \in \widetilde{T}.$$

Berechnen Sie die BB-Koeffizienten $\widetilde{b}_{ijk}$ von $\widetilde{p}(z)$, die sich bei einem <u>C^1-stetigen</u> Übergang ergeben.

1.5 Punkte

$$\lambda_0\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} = 0.5 \qquad \lambda_1\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} = 1 \qquad \lambda_2\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} = -0.5$$

Durch die C^0-Bedingung ergibt sich:

$$\widetilde{b}_{300} = b_{300} = 8 \qquad \widetilde{b}_{210} = b_{210} = 6 \qquad \widetilde{b}_{120} = b_{120} = 0 \qquad \widetilde{b}_{030} = b_{030} = 13$$

Durch die C^1-Bedingung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}_{201} &= 0.5b_{300} + 1b_{210} + -0.5b_{201} = 8 \\
\widetilde{b}_{111} &= 0.5b_{210} + 1b_{120} + -0.5b_{111} = 0 \\
\widetilde{b}_{021} &= 0.5b_{120} + 1b_{030} + -0.5b_{021} = 10
\end{aligned}$$

d) Nun sei

$$\widetilde{T} = [v_0, v_1, \widetilde{v}_2] = \left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}\right].$$

Berechnen Sie ebenfalls die BB-Koeffizienten $\widetilde{b}_{ijk}$ von $\widetilde{p}(z)$, die sich bei einem C^1-stetigen Übergang ergeben. Was verändert sich gegenüber Aufgabenteil c) ?

1.5 Punkte

Die BB-Koeffizienten des C^0-Übergangs bleiben unverändert.

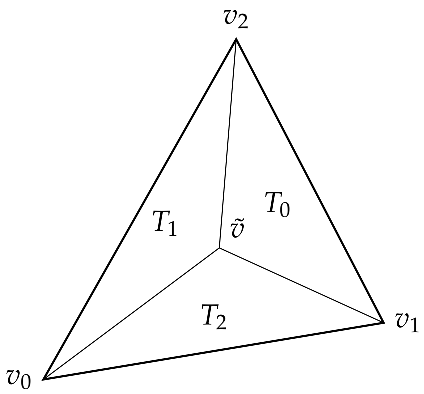
$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 1.5 \qquad \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -0.5$$

Da $\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ ergeben sich weniger Abhängigkeiten. Für den C^1-Übergang gilt:

$$\begin{aligned} \widetilde{b}_{201} &= 1.5 b_{300} + -0.5 b_{201} = 10 \\ \widetilde{b}_{111} &= 1.5 b_{210} + -0.5 b_{111} = 6 \\ \widetilde{b}_{021} &= 1.5 b_{120} + -0.5 b_{021} = -3 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Splines auf Triangulierungen (5 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck T mit Eckpunkten $[v_0, v_1, v_2]$. Sei nun T mittels eines Clough-Tocher-Splits in die drei Mikro-Dreiecke $T_0 := [v_1, v_2, \tilde{v}]$, $T_1 := [v_2, v_0, \tilde{v}]$, und $T_2 := [v_0, v_1, \tilde{v}]$ unterteilt, siehe auch Folie 48 (entspricht PDF-Seite 60) in Foliensatz 7:



Seien weiterhin alle „schwarzen" (siehe Folie 48) Koeffizienten auf den C^1-Ringen um v_0, v_1 und v_2 für einen kubischen Spline bestimmt (z.B. Interpolation der Ableitungen und Tangenten im Eckpunkt, analog PN-Triangles), sowie die „blauen" Koeffizienten (z.B. durch Interpolation einer Ableitung über die Kanten).

Wie bestimmen sich nun die „roten" Koeffizienten auf dem C^1-Ring um $\tilde{v}$, damit über alle Kanten im Inneren von T die C^1-Bedingungen erfüllt sind?

Hinweis: bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten von v_i bezüglich T_i. Verwenden Sie die C^1-Bedingungen von Folien 40 und 41.

5 Punkte

Lösungsvorschlag

Der Zentroid (Baryzentrum) bestimmt sich zu $\tilde{v} = \frac{1}{3}\sum_i v_i$. Betrachten wir o.B.d.A. die zwei Mikro-Dreiecke $T_2 = [v_0, v_1, \tilde{v}]$ und $T_1 = [v_2, v_0, \tilde{v}]$.

Die baryzentrischen Koordinaten von v_2 bezüglich T_2 kann man anhand der Skizze bestimmen. Sie lauten $(-1, -1, 3)$:

$$\tilde{v} = \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + v_2)$$
$$v_2 = -v_0 - v_1 + 3\tilde{v}$$

Die C^1-Bedingung für den Koeffizienten $\tilde{b}_{111} := b_{111}^{\{T_1\}}$ auf T_1 ergibt nun, mit $b_{ijk} := b_{ijk}^{\{T_2\}}$:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{111} &= \lambda_0(v_2)b_{201} + \lambda_1(v_2)b_{111} + \lambda_2(v_2)b_{102} \\ &= -b_{201} - b_{111} + 3b_{102}\end{aligned}$$

Umstellen nach b_{102} ergibt

$$b_{102} = \frac{1}{3}(\tilde{b}_{111} + b_{111} + b_{201}),$$

analog für $b_{102}^{\{T_1\}} = b_{012}^{\{T_0\}}$ sowie $b_{102}^{\{T_0\}} = b_{012}^{\{T_2\}}$.

(Falls man es nicht direkt sieht, Bezeichnungen umbenennen, so dass sich die Konfiguration aus Folie 40 aus Foliensatz 7 ergibt, und dann Folie 41 verwenden. Falls wir die Mikrodreiecke geschickter gewählt hätten, also $T_2 := [v_0, \tilde{v}, v_1], T_1 := [v_0, \tilde{v}, v_2]$, hätten wir die Formeln der C^1-Bedingungen auch direkt anwenden können ...)

Benennen wir jetzt $a := b_{102}^{\{T_2\}} = b_{012}^{\{T_1\}}, b := b_{102}^{\{T_1\}}, c := b_{102}^{\{T_0\}}$, dann ergibt die C^1-Bedingung z.B. über T_2 und T_1, für b, und mit dem mit $\tilde{v}$ assozierten Koeffizienten (b_{003} der Mikro-Dreiecke T_i, $i = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned}b &= \lambda_0(v_2)a + \lambda_1(v_2)c + \lambda_2(v_2)b_{003} \\ &= -a - c + 3b_{003}\end{aligned}$$

Umstellen nach b_{003} ergibt wieder die gesuchte Beziehung:

$$b_{003} = \frac{1}{3}(a + b + c).$$