GDV 2 – Theorie Übung 5

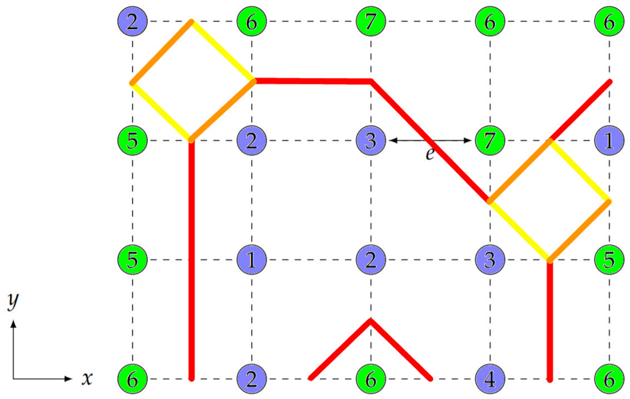
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommer Semester 2019
Übungsgruppe F

Aufgabe 1 Marching Cubes (3 Punkte)

a) 1 Punkt

Alle blauen Punkte sind innen, alle grünen außen. Die roten Linien sind die eindeutigen Kanten / Zellen und die Zellen mit den orangenen und gelben Linien sind uneindeutig. Hierbei kann entweder orange oder gelb gewählt werden.



b) 1 Punkt

c) 1 Punkt

Aufgabe 2 Emissions-Absorptions Model (6 Punkte)

Aufgabe 3 Bernstein-Bezier Dreiecke (6 Punkte)

a) 1.5 Punkte

Für z_0:

$$\lambda_0(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{0}{32} = 0$$

$$\lambda_1(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$\lambda_2(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{8}{32} = \frac{2}{4}$$

$B_{ijk}(z_0)$ wir für z_0 wie folgt berechnet $\frac{q!}{i!j!k!}\lambda_0^i\lambda_1^j\lambda_2^k$. Aus $\lambda_0 = 0$ er gibt sich:

$$p(z_0) = B_{030}(z_0)b_{030} + B_{021}(z_0)b_{021} + B_{012}(z_0)b_{012} + B_{003}(z_0)b_{003} = \frac{27}{64}13 + \frac{27}{64}6 + \frac{9}{64}2 + \frac{1}{64}4 = \frac{535}{64} = 8.359375$$

Daraus folgt:

$$\chi_p(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{535}{64} \end{pmatrix}$$

Für z_1:

$$\lambda_0(z_1) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1(z_1) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_1 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_2(z_1) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & z_1 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$B_{ijk}(z_1)$ wir für z_1 wie folgt berechnet $\frac{q!}{i!j!k!}\lambda_0^i\lambda_1^j\lambda_2^k$. Es gibt sich:

$$p(z_1) = \frac{1}{64}8 + \frac{3}{64}6 + \frac{6}{64}4 + \frac{3}{64}0 + \frac{12}{64}6 + \frac{12}{64}0 + \frac{1}{64}13 + \frac{6}{64}6 + \frac{12}{64}2 + \frac{8}{64}4 = \frac{227}{64}$$

Daraus folgt:

$$\chi_p(z_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \frac{227}{64} \end{pmatrix}$$

b) 1.5 Punkte

$$\tilde{\lambda}_0(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{0}{32} = 0$$

$$\tilde{\lambda}_1(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{0}{32} = 0$$

$$\tilde{\lambda}_2(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 1$$

Daraus Folgt dass alle $\tilde{B}_{ijk} = 0$ wenn nicht $k = 3$:

$$\tilde{p}(z_0) = \tilde{B}_{003}(z_0)b_{003} = 4$$

$$\tilde{\chi}_p(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_0(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 0$$

$$\hat{\lambda}_1(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 1$$

$$\hat{\lambda}_2(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 0$$

Daraus Folgt dass alle $\hat{B}_{ijk} = 0$ wenn nicht $j = 3$:

$$\hat{p}(z_0) = \hat{B}_{030}(z_0)b_{030} = 13$$

$$\hat{\chi}_p(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0^*(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 1$$

$$\lambda_1^*(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 0$$

$$\lambda_2^*(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 0$$

Daraus Folgt dass alle $B^*_{ijk} = 0$ wenn nicht $i = 3$:

$$p^*(z_0) = B^*_{030}(z_0)b_{030} = 13$$

$$\chi^*_p(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

c) 1.5 Punkte

$$\lambda_0(\tilde{v}_2) = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1(\tilde{v}_2) = 1$$

$$\lambda_2(\tilde{v}_2) = -\frac{1}{2}$$

Durch die C^0 Bedingung:

$$\tilde{b}_{300} = b_{300} = 8, \tilde{b}_{210} = b_{210} = 6, \tilde{b}_{120} = b_{120} = 0, \tilde{b}_{030} = b_{030} = 13$$

Die C^1 Bedingung gibt uns:

$$\tilde{b}_{201} = 0.5b_{300} + b_{210} - 0.5b_{201} = 8$$

$$\tilde{b}_{111} = 0.5b_{210} + b_{120} - 0.5b_{111} = 0$$

$$\tilde{b}_{021} = 0.5b_{120} + b_{030} - 0.5b_{021} = 10$$

d) 1.5 Punkte

Die Koeffizienten gegeben durch die C^0 Bedingung ändern sich nicht im Vergleich zu Aufgabenteil c). Die Änderung sind:

$$\lambda_0(\tilde{v}_2) = \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1(\tilde{v}_2) = 0$$

$$\lambda_2(\tilde{v}_2) = -\frac{1}{2}$$

Die C^1 Bedingung gibt uns:

$$\tilde{b}_{201} = 1.5b_{300} - 0.5b_{201} = 10$$

$$\tilde{b}_{111} = 1.5b_{210} - 0.5b_{111} = 6$$

$$\tilde{b}_{021} = 1.5b_{120} - 0.5b_{021} = -3$$

Aufgabe 4 Splines auf Triangulierungen (5 Punkte)

Das Baryzentrum lässt sich durch das Arithmetisches Mittel der Eckpunkte ermitteln: $\overline{v} = \frac{1}{3} * (v_0 + v_1 + v_2)$

Wir können also die C^1 Bedingung für die Koeffizienten von T_2 ($b_{ijk} := b_{ijk}^{T_0}$) ergibt:

$$\overline{b}_{111}^{T_2} = \lambda_0(v_2)b_{201} + \lambda_1(v_2)b_{111} + \lambda_2(v_2)b_{102}$$

Dies stellt einfach ein Minidreieck innerhalb des Dreiecks mit gleichen Seitenverhältnissen da. Daraus Folgt für erste gesuchte Koeffizienten:

$$b_{102} = \frac{1}{3}(b_{111} + b_{201} + \overline{b}_{111}^{T_2})$$

Daraus lassen sich auch die Beziehung für die anderen gesuchten Koeffizienten herleiten $b_{102}^{T_1} = b_{012}^{T_0}$ und $b_{102}^{T_2} = b_{021}^{T_1}$.

Jetzt benennen wir die gesuchten Koeffizienten folgender massen um ($x := b_{102}^{T_0} = b_{012}^{T_2}, y := b_{102}^{T_2}, z := b_{102}^{T_1}$) um deren beziehung zu einander besser dazu stellen. Daraus ergibt nach der C^1 Bedingung über T_0 und T_2 für y :

$$y = \lambda_0(v_2)x + \lambda_1(v_2)z + \lambda_2(v_2)\overline{v}$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\overline{v} = \frac{1}{3}(x + y + z)$$