

GDV 2 – Theorie Übung 2



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommer Semester 2019
Übungsgruppe F

Aufgabe 1 Interpolation in verschiedenen Darstellungsformen (5 Punkte)

a) 1 Punkt

$$Va = P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a = V^{-1}P:$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt Polynom:

$$P_M(t) = -\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

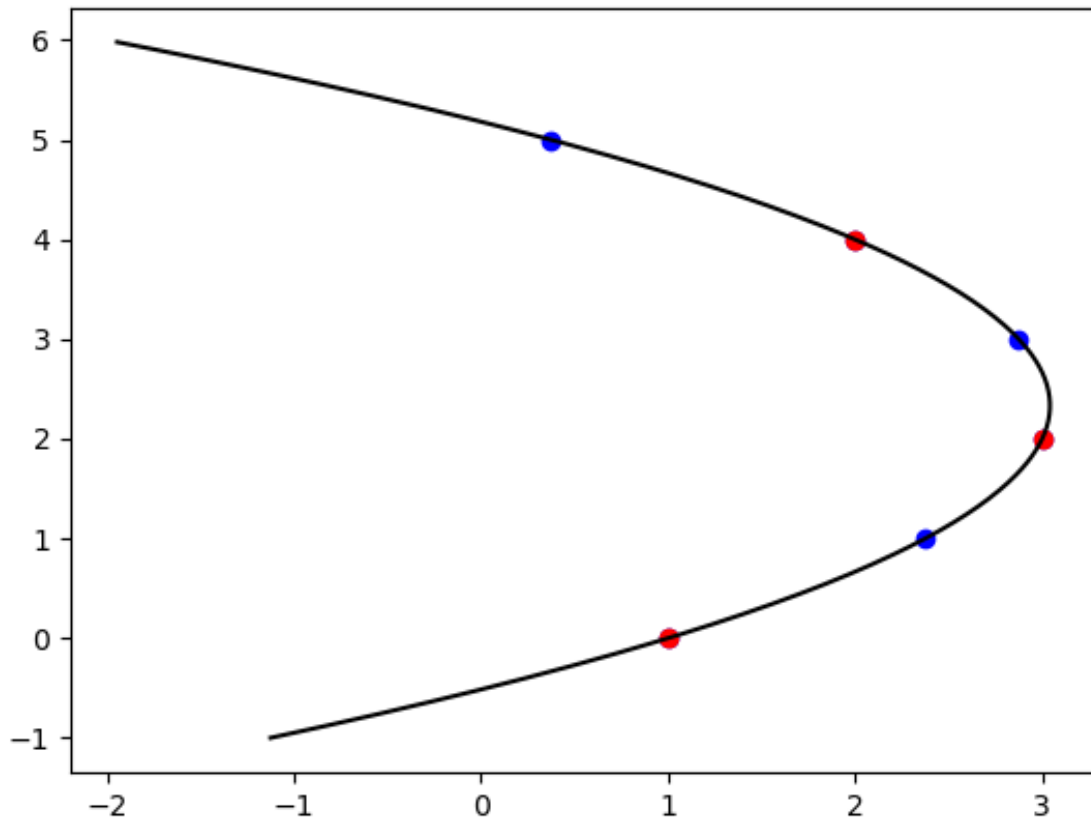
Auswertung weiterer Punkte:

$$P_M(1) = -\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_M(3) = -\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} 9 + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{8} \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P_M(5) = -\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} 25 + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} 5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

In Rot die Originalen Stützstellen. in Blau die neu berechneten.



b) 1 Punkt

$$l_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^q \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

$$l_0(t) = \frac{t-2}{0-2} * \frac{t-4}{0-4} = \frac{t^2 - 6*t + 8}{8}$$

$$l_1(t) = \frac{t-0}{2-0} * \frac{t-4}{2-4} = \frac{t^2 - 4*t}{-4}$$

$$l_2(t) = \frac{t-0}{4-0} * \frac{t-2}{4-2} = \frac{t^2 - 2*t}{8}$$

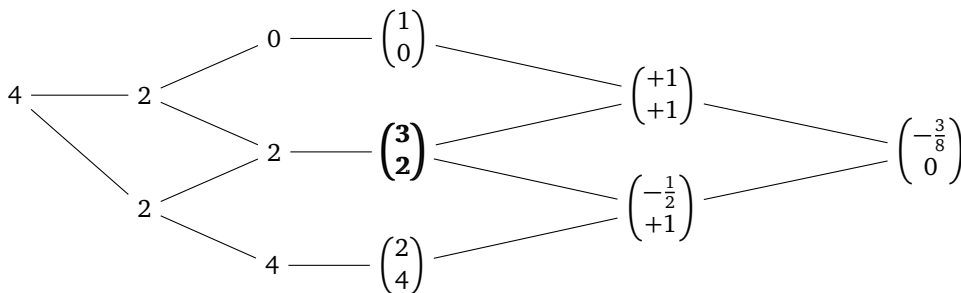
$$P_L(t) = \sum_{i=0}^q l_i(t) P_i$$

$$P_L(t) = \frac{t^2 - 6*t + 8}{8} * \binom{1}{0} + \frac{t^2 - 4*t}{-4} * \binom{3}{2} + \frac{t^2 - 2*t}{8} * \binom{2}{4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\frac{t^2 - 6 * t + 8}{8} + 3 * \frac{t^2 - 4 * t}{-4} + 2 * \frac{t^2 - 2 * t}{8}}{2 * \frac{t^2 - 4 * t}{-4} + 4 * \frac{t^2 - 2 * t}{8}} \right) \\
 &= \left(\frac{\frac{t^2 - 6 * t + 8 - 6t^2 + 24t + 2t^2 - 4t^2}{8}}{\frac{-4t^2 + 16 * t + 4t^2 - 8 * t}{8}} \right) \\
 &= \left(\frac{-3t^2 + 14t + 8}{8t} \right) \\
 &= \left(\frac{-3}{8}t^2 + \frac{7}{4}t + 1 \right)
 \end{aligned}$$

Offensichtlich sind $P_M(t)$ und $P_L(t)$ identisch.

c) 1 Punkt



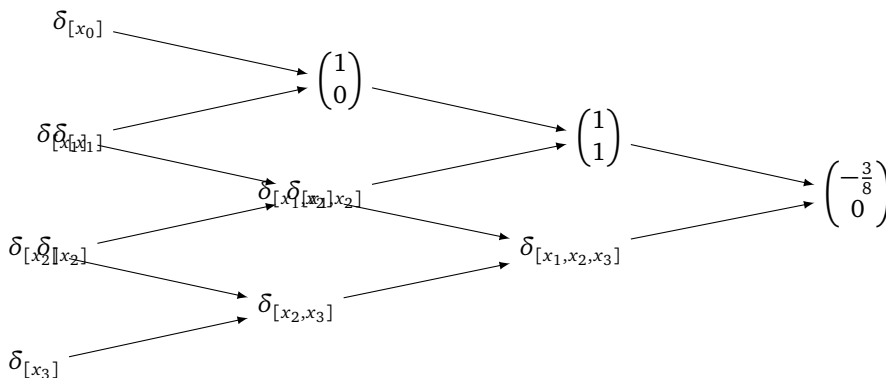
$$P_N(t) = 0 + 1(t - t_0) - 3(t -$$

$$t_0)(t - t_1) = t - 1 - 3(t - 1)(t - 3) = -3t^2 + 13t - 10$$

Das Polynom $P_N(t)$ ist identisch $P_M(t)$ und $P_L(t)$.

d) 2 Punkte

Die Newton-Darstellung lässt sich am einfachsten erweitern, da man dem Dreiecksschema ohne viel Aufwand eine neue Stützstelle hinzufügen kann.



$$P_N(t) = -3t^2 + 13t - 10 - \frac{13}{6}(t - 1)(t -$$

$$3)(t - 2) = -\frac{13}{6}t^3 + 10t^2 - \frac{65}{6}t + 3$$

Aufgabe 2 Bernstein-Bézier-Darstellung (5 Punkte)

a) 2 Punkte

b) 1 Punkt

c) 2 Punkte

Aufgabe 3 Approximation in Bernstein-Bézier-Darstellung (4 Punkte)

a) 1 Punkt

b) 1 Punkt

c) 1 Punkt

d) 1 Punkt

Aufgabe 4 B-Splines vom Grad 2 (6 Punkte)

a) 1 Punkt

b) 1 Punkt

c) 1 Punkt

d) 1 Punkt

e) 2 Punkte
