# GDV2 Übungsblatt 2 (20 Punkte)



## Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1 Kubische B-Splines und de Boor Algorithmus (6 Punkte)

Eine kubische Spline-Kurve hinsichtlich der Knoten

$$x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 3$$

sei gegeben durch die B-Spline-Darstellung

$$\mathbf{S}(t) = B^{\,3}_{-3}(t)\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} + B^{\,3}_{-2}(t)\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + B^{\,3}_{-1}(t)\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + B^3_0(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + B^3_1(t)\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + B^3_2(t)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

mit $t \in [0,3]$.

a) Berechnen Sie zu den gegebenen Knoten die B-Spline Basisfunktion $B^3_{-2}(t)$ unter Verwendung des Rekursionsschemas von de Boor & Cox:

$$B_i^q(t) = \begin{cases} \frac{t-x_i}{x_{i+q}-x_i}\, B_i^{q-1}(t) & \substack{x_i<x_{i+q} \\ x_{i+1}=\ldots=x_{i+q+1}} \\ \frac{t-x_i}{x_{i+q}-x_i}\, B_i^{q-1}(t) + \frac{x_{i+q+1}-t}{x_{i+q+1}-x_{i+1}}\, B_{i+1}^{q-1}(t) & \substack{x_i<x_{i+q} \\ x_{i+1}<x_{i+q+1}} \\ \frac{x_{i+q+1}-t}{x_{i+q+1}-x_{i+1}}\, B_{i+1}^{q-1}(t) & \substack{x_i=\ldots=x_{i+q} \\ x_{i+1}<x_{i+q+1}} \end{cases}$$

Machen Sie sich dabei zunächst anhand eines Dreiecksschemas klar, welche $B_i^q(t)$ in der Rekursion benötigt werden. Stellen Sie dann mit aufsteigendem $q$ die Basisfunktionen $B_i^q(t)$ auf und skizzieren Sie diese in einen Graphen. (Für jedes $q$ einen eigenen Graphen.)

*Hinweis*: es gilt $B_i^0 = 0$ für $i < 0$.

**3 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

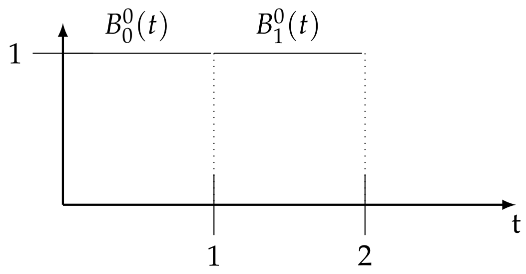
$B^3_{-2}(t)$ hat folgende Abhängigkeiten:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & B^0_{-2}(t) \\
 & & B^1_{-2}(t) & \\
 & B^2_{-2}(t) & & B^0_{-1}(t) \\
B^3_{-2}(t) & & B^1_{-1}(t) & \\
 & B^2_{-1}(t) & & B^0_0(t) \\
 & & B^1_0(t) & \\
 & & & B^0_1(t)
\end{array}$$

$B^0_{-2}(t)$ und $B^0_{-1}(t)$ sind per Definition 0, wodurch auch $B^1_{-2}(t)$ 0 ist. Die B-Spline Basisfunktionen vom Grad 0 sind:

$$B_0^0(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

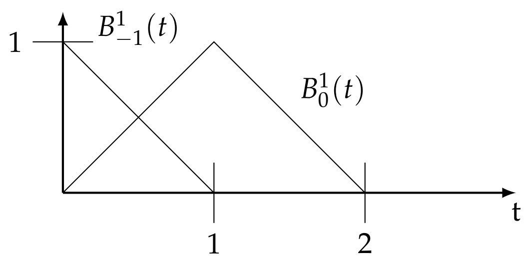
$$B_1^0(t) = \begin{cases} 1 & t \in [1,2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Die B-Spline Basisfunktionen vom Grad 1 berechnen sich wie folgt:

$$B_{-1}^1(t) = \frac{x_1 - t}{x_1 - x_0} B_0^0(t) = (1-t)B_0^0(t) = \begin{cases} 1-t & t \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

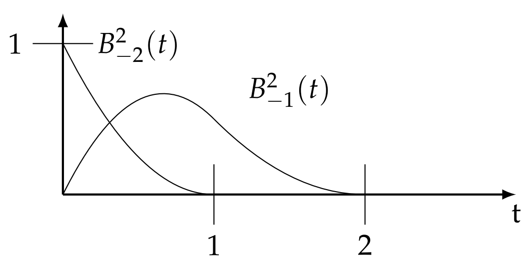
$$B_0^1(t) = \frac{t - x_0}{x_1 - x_0} B_0^0(t) + \frac{x_2 - t}{x_2 - x_1} B_1^0(t) = tB_0^0 + (2-t)B_1^0(t) = \begin{cases} t & t \in [0,1) \\ 2-t & t \in [1,2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Die B-Spline Basisfunktionen vom Grad 2 berechnen sich dann durch:

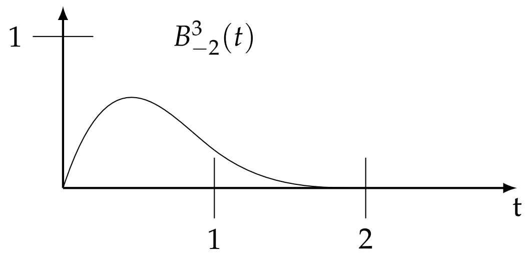
$$B_{-2}^2(t) = \frac{x_1 - t}{x_1 - x_{-1}} B_{-1}^1(t) = (1-t)B_{-1}^1(t) = \begin{cases} (1-t)^2 & t \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B_{-1}^2(t) &= \frac{t - x_{-1}}{x_1 - x_{-1}} B_{-1}^1(t) + \frac{x_2 - t}{x_2 - x_0} B_0^1(t) = tB_{-1}^1 + (1 - \frac{t}{2})B_0^1(t) \\ &= \begin{cases} 2t - \frac{3}{2}t^2 & t \in [0,1) \\ 2 - 2t + \frac{1}{2}t^2 & t \in [1,2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$



Schließlich kann $B^3_{-2}(t)$ berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
B^3_{-2}(t) &= \frac{t-x_{-2}}{x_1-x_{-2}}B^2_{-2}(t) + \frac{x_2-t}{x_2-x_{-1}}B^2_{-1}(t) = tB^2_{-2}(t) + (1-\frac{t}{2})B^2_{-1}(t) \\
&= \begin{cases} t(1-t)^2 + (1-\frac{t}{2})(2t-\frac{3}{2}t^2) & t \in [0,1) \\ (1-\frac{t}{2})(2-2t+\frac{1}{2}t^2) & t \in [1,2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 3t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{7}{4}t^3 & t \in [0,1) \\ 2-3t+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{4}t^3 & t \in [1,2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$




b) Berechnen Sie den Wert $\mathbf{S}(\xi)$ für $\xi = 1.5$ unter Verwendung des de Boor-Algorithmus. Geben Sie hierbei die Gewichte $\lambda^{[\ell]}_{0,i}(\xi)$ sowie alle Einträge $\mathbf{b}^{[\ell]}_i$ des zugehörigen Dreiecksschemas an. Geben Sie eine graphische Darstellung Ihrer Berechnungen (alle Punkte $\mathbf{b}^{[\ell]}_i$ und $C_S$ beinhaltend).

**3 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

Da $\xi = 1.5 \in [1,2] = [x_j, x_{j+1}] = [x_1, x_2]$ ist $j = 1$. Aus $q = 3$ folgt $i = -2, -1, 0, 1$. Im Dreiecksschema werden dann folgende Werte berechnet:

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & * & b^{[0]}_{-2} & & & \\
 & & \lambda^{[1]}_{0,-1} & & & b^{[1]}_{-1} & & \\
 & \lambda^{[2]}_{0,0} & & * & b^{[0]}_{-1} & & b^{[2]}_{0} & \\
\lambda^{[3]}_{0,1} & & \lambda^{[1]}_{0,0} & & & b^{[1]}_{0} & & b^{[3]}_{1} \\
 & \lambda^{[2]}_{0,1} & & * & b^{[0]}_{0} & & b^{[2]}_{1} & \\
 & & \lambda^{[1]}_{0,1} & & & b^{[1]}_{1} & & \\
 & & & * & b^{[0]}_{1} & & &
\end{array}
$$

Mit $\lambda^{[\ell]}_{0,i}(t) = \frac{x_{i+q+1-\ell} - t}{x_{i+q+1-\ell} - x_i}$, $t = \xi = 1.5$ und $q = 3$ ergeben sich folgende Werte auf der linken Seite des Dreiecksschemas:

$$
\begin{array}{cccc|}
 & & & * \\
 & & \lambda^{[1]}_{0,-1} = \frac{1}{4} & \\
 & \lambda^{[2]}_{0,0} = \frac{1}{4} & & * \\
\lambda^{[3]}_{0,1} = \frac{1}{2} & & \lambda^{[1]}_{0,0} = \frac{1}{2} & \\
 & \lambda^{[2]}_{0,1} = \frac{3}{4} & & * \\
 & & \lambda^{[1]}_{0,1} = \frac{3}{4} & \\
 & & & *
\end{array}
$$

Mit $a = b_{-2}$, $b = b_{-1}$, $c = b_0$, $d = b_1$ berechnet sich die rechte Seite dann wie folgt:

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & * & a & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & & \frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b & & \\
 & \frac{1}{4} & & * & b & & \begin{aligned}&\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}a+\tfrac{3}{4}b)+\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c)\\ &= \tfrac{1}{16}a+\tfrac{9}{16}b+\tfrac{3}{8}c\end{aligned} & \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c & & \frac{1}{32}a+\frac{15}{32}b+\frac{15}{32}c+\frac{1}{32}d \\
 & \frac{3}{4} & & * & c & & \begin{aligned}&\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c)+\tfrac{1}{4}(\tfrac{3}{4}c+\tfrac{1}{4}d)\\ &= \tfrac{3}{8}b+\tfrac{9}{16}c+\tfrac{1}{16}d\end{aligned} & \\
 & & \frac{3}{4} & & & \frac{3}{4}c+\frac{1}{4}d & & \\
 & & & * & d & & &
\end{array}
$$

Dies ergibt speziell die folgende, rechte Seite:

$$\mathbf{b}_{-2}^{[0]} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{-1}^{[1]} = \begin{pmatrix}4.25\\0.75\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{-1}^{[0]} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_{0}^{[2]} = \begin{pmatrix}2.94\\0.94\end{pmatrix}$$

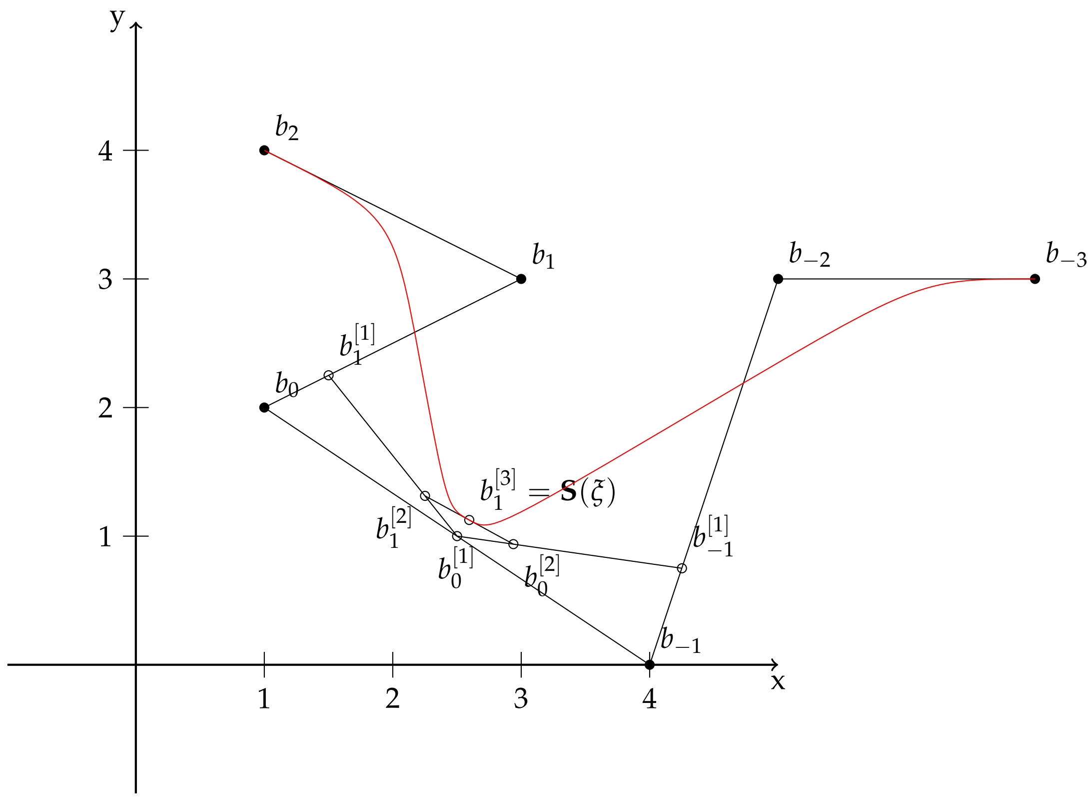
$$\mathbf{b}_{0}^{[1]} = \begin{pmatrix}2.5\\1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_{1}^{[3]} = \begin{pmatrix}2.59\\1.13\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{0}^{[0]} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_{1}^{[2]} = \begin{pmatrix}2.25\\1.31\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{1}^{[1]} = \begin{pmatrix}1.5\\2.25\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{1}^{[0]} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

Skizze:



## Aufgabe 2 Bernstein-Bézier-Tensorprodukte (7 Punkte)

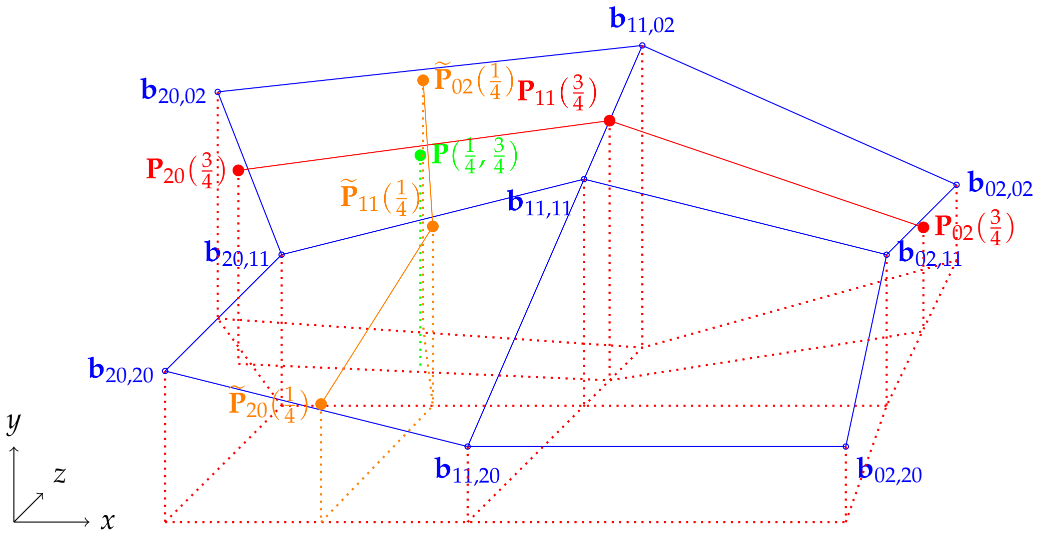
a) Gegeben sei ein biquadratischer BB-Patch

$$\mathbf{P}(u,v) = \sum_{i_0+j_0=2} \sum_{i_1+j_1=2} B_{i_0j_0}(u) \cdot B_{i_1j_1}(v) \cdot \mathbf{b}_{i_0j_0,i_1j_1}$$

mit univariaten Bernstein Polynomen in $u \in [0,1]$ und in $v \in [0,1]$.

Folgende Kontrollpunkte spannen das Patch auf:

| $i_0j_0$ / $i_1j_1$ | 20 | 11 | 02 |
|---|---|---|---|
| 02 | $\begin{pmatrix}-3\\3\\7\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}6\\1\\9\end{pmatrix}$ |
| 11 | $\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}7\\2\\4\end{pmatrix}$ |
| 20 | $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}8\\1\\0\end{pmatrix}$ |




Wenden Sie den Algorithmus von de Casteljau an, um $\mathbf{P}$ im Punkt $(u,v) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ auszuwerten. Zeichnen Sie anschließend die resultierenden Punkte der $(q+2)$ de Casteljau Auswertungen in die Skizze ein.

**3 Punkte**

### Lösungsvorschlag

Wir werten den Patch zuerst für $v = \frac{3}{4}$ und $i_0 + j_0 = 2$ aus, wobei $\lambda_0 = 1 - v = 0.25$. Wir formulieren die Gleichung also folgenderweise um und bestimmen zuerst die innere Summe:

$$\mathbf{P}(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \sum_{i_0+j_0=2} \sum_{i_1+j_1=2} B_{i_0j_0}(\frac{1}{4}) \cdot B_{i_1j_1}(\frac{3}{4}) \cdot \mathbf{b}_{i_0j_0,i_1j_1}$$
$$= \sum_{i_0+j_0=2} B_{i_0j_0}(\frac{1}{4}) \underbrace{\sum_{i_1+j_1=2} B_{i_1j_1}(\frac{3}{4}) \cdot \mathbf{b}_{i_0j_0,i_1j_1}}_{\mathbf{P}_{i_0j_0}(\frac{3}{4})}$$
$$\mathbf{P}_{i_0j_0}(\frac{3}{4}) = \sum_{i_1+j_1=2} B_{i_1j_1}(\frac{3}{4}) \cdot \mathbf{b}_{i_0j_0,i_1j_1} \quad \text{für } i_0+j_0=2$$

Für $\mathbf{P}_{20}(\frac{3}{4})$ (siehe Skizze) lautet die Gleichung also:

$$\mathbf{P}_{20}(\frac{3}{4}) = \sum_{i_1+j_1=2} B_{i_1j_1}(\frac{3}{4}) \cdot \mathbf{b}_{20,i_1j_1} = B_{20}(\frac{3}{4}) \cdot \mathbf{b}_{20,20} + B_{11}(\frac{3}{4}) \cdot \mathbf{b}_{20,11} + B_{02}(\frac{3}{4}) \cdot \mathbf{b}_{20,02}$$

Mit dem de Casteljau-Algorithmus erhalten wir die Lösung:

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} & & \\
 & \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}-2.13\\2.56\\5.44\end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_0 = 0.25 \\
 & \begin{pmatrix}-2.5\\2.75\\6.25\end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix}-3\\3\\7\end{pmatrix} & &
\end{array}$$

Auf gleiche Weise lassen sich die Punkte auf den anderen Parameterkurven berechnen und wir erhalten

$$\mathbf{P}_{20}(0.75) = \begin{pmatrix}-2.13\\2.56\\5.44\end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_{11}(0.75) = \begin{pmatrix}3\\3.44\\4.88\end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_{02}(0.75) = \begin{pmatrix}6.5\\1.38\\6.56\end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir den endgültigen Punkt, indem wir die äußere Summe mittels de Casteljau auswerten:

$$\mathbf{P}(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \sum_{i_0+j_0=2} B_{i_0j_0}(\frac{1}{4})\, \mathbf{P}_{i_0j_0}(\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix}0.34\\2.82\\5.3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2.13\\2.56\\5.44\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-0.84\\2.78\\5.3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\3.44\\4.88\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0.34\\2.82\\5.3\end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_0 = 0.75$$

$$\begin{pmatrix}3.88\\2.92\\5.3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6.5\\1.38\\6.56\end{pmatrix}$$

Wird die Doppelsumme anders aufgelöst (Auswertung zuerst mit $u = 0.25$), so ergeben sich folgende Punkte (siehe Skizze)

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{20}(0.25) = \begin{pmatrix}1.06\\1.56\\0\end{pmatrix} \qquad \widetilde{\mathbf{P}}_{11}(0.25) = \begin{pmatrix}1\\2.38\\4\end{pmatrix} \qquad \widetilde{\mathbf{P}}_{02}(0.25) = \begin{pmatrix}-0.19\\3.25\\6.75\end{pmatrix}$$

b) Gegeben sei ein Bernstein-Bézier-Tensorprodukt (biquadratisch)

$$P(u,v) = \sum_{i_0+j_0=2} \sum_{i_1+j_1=2} B_{i_0j_0}(u) B_{i_1j_1}(v) b_{i_0j_0,i_1j_1}, \quad u,v \in [0,1] \times [0,1]$$

wobei die $b_{i_0j_0,i_1j_1}$ gegeben sind als

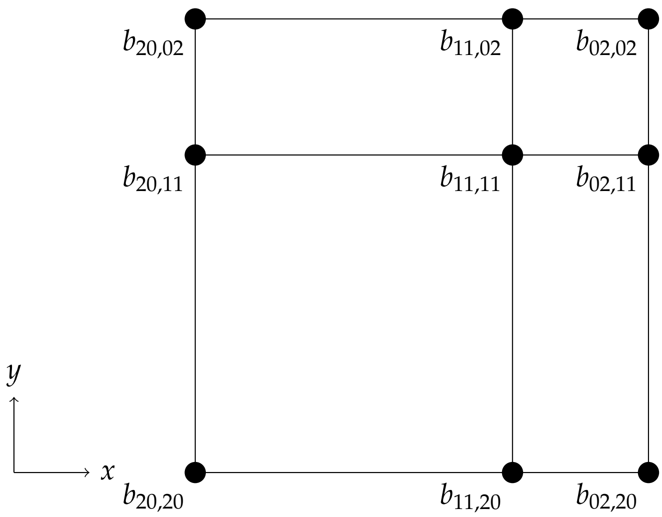
$$b_{20,02} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_{11,02} = \begin{pmatrix}0.7\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_{02,02} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$b_{20,11} = \begin{pmatrix}0\\0.7\\0\end{pmatrix}, \quad b_{11,11} = \begin{pmatrix}0.7\\0.7\\0\end{pmatrix}, \quad b_{02,11} = \begin{pmatrix}1\\0.7\\0\end{pmatrix},$$

$$b_{20,20} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad b_{11,20} = \begin{pmatrix}0.7\\0\\0\end{pmatrix}, \quad b_{02,20} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Führen Sie einen Unterteilungsschritt aus, so dass $P$ bezüglich der vier verfeinerten Tensorprodukte über $[0,0] \times [\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ , $[0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]$ , $[\frac{1}{2},0] \times [1,\frac{1}{2}]$ , $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \times [1,1]$ dargestellt wird.

Zeichnen Sie die neu erzeugten Kontrollpunkte in das Gitter ein.




**2 Punkte**

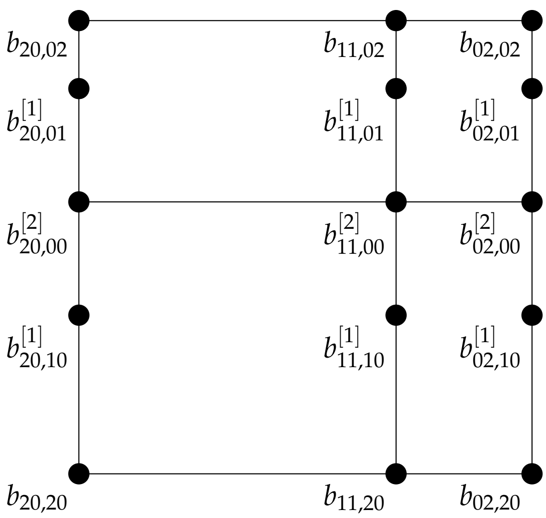
**Lösungsvorschlag**

Wir führen zunächst $q+1$-mal den deCasteljau-Algorithmus für festes $v_0 = 0.5$ und alle $u_{ij} = j/q$, mit $i + j = q$ aus:

$$u_{20}: \quad b^{[1]}_{20,10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[1]}_{20,01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.85 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[2]}_{20,00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

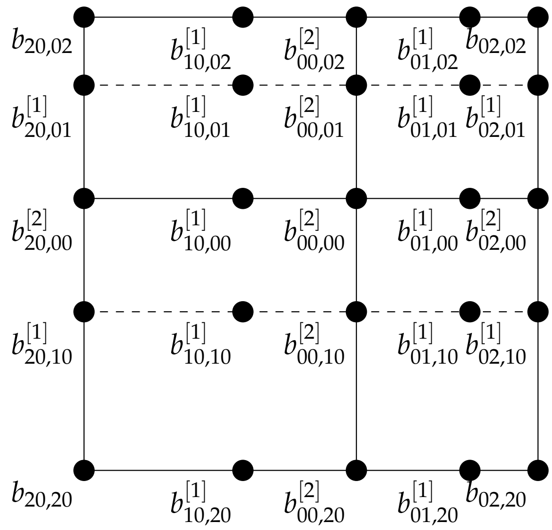
$$u_{11}: \quad b^{[1]}_{11,10} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[1]}_{11,01} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.85 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[2]}_{11,00} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{02}: \quad b^{[1]}_{02,10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[1]}_{02,01} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.85 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[2]}_{02,00} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$




Nun müssen wir $2q+2$-mal de Casteljau für festes $u_0 = 0.5$ und alle Reihen von (neu erzeugten) Kontrollpunkten durchführen:

$$
\begin{aligned}
b_{ij,20}: &\quad b^{[1]}_{10,20} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[1]}_{01,20} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[2]}_{00,20} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
b^{[1]}_{ij,10}: &\quad b^{[1]}_{10,10} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[1]}_{01,10} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[2]}_{00,10} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.35 \\ 0 \end{pmatrix} \\
b^{[2]}_{ij,00}: &\quad b^{[1]}_{10,00} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[1]}_{01,00} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[2]}_{00,00} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
b^{[1]}_{ij,01}: &\quad b^{[1]}_{10,01} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.85 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[1]}_{01,01} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.85 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[2]}_{00,01} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.85 \\ 0 \end{pmatrix} \\
b_{ij,02}: &\quad b^{[1]}_{10,02} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[1]}_{01,02} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{[2]}_{00,02} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$




c) Das **4-Punkte-Schema** von Dyn, Gregory & Levin berechnet ausgehend von einer (geordneten) Menge von Werten

$$\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^d, \; i = 0, \cdots, n,$$

(mit $\mathbf{P}_{-1} := \mathbf{P}_n, \mathbf{P}_{n+1} := \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n+2} := \mathbf{P}_1$) eine neue Menge von Werten nach der Vorschrift

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}_{2i} &:= \mathbf{P}_i, \\
\widetilde{\mathbf{P}}_{2i+1} &:= -\frac{1}{16}\mathbf{P}_{i-1} + \frac{9}{16}\mathbf{P}_i + \frac{9}{16}\mathbf{P}_{i+1} - \frac{1}{16}\mathbf{P}_{i+2}, \quad i = 0, \cdots, n
\end{aligned}
$$

(vergleichbar dem Chaikin-Algorithmus bzw. dem Verfeinerungsschema nach Cohen & Schumaker aus der Vorlesung).

Bestimmen Sie die Punkt-, Kanten- und Flächen-Masken (an den regulären Punkten mit Valenz $k = 4$) der Tensor-Produkt-Verallgemeinerung des univariaten 4-Punkte-Schemas.

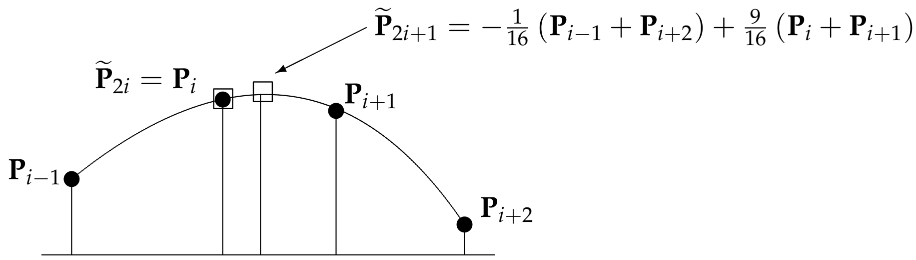
Sie können analog wie am kubischen $C^2$-Unterteilungsschema aus der Vorlesung gezeigt vorgehen. Sie müssen keine Regeln für irreguläre Punkte aufstellen.

**2 Punkte**

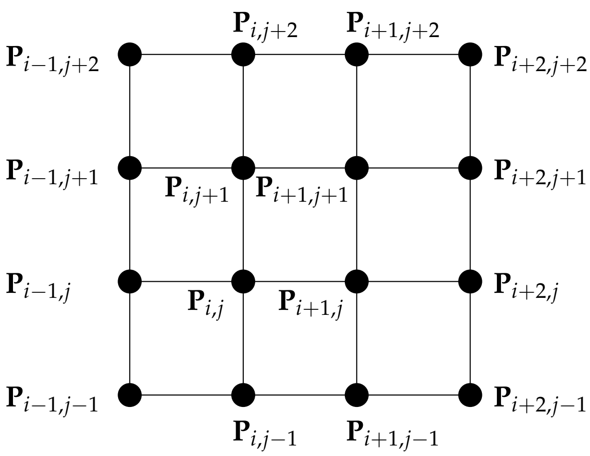
**Lösungsvorschlag**

3 Fälle: Punkt-Masken, Kanten-Masken und Flächen-Masken

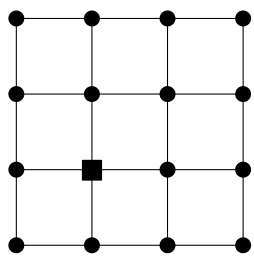
univariates Schema:




Das Tensorschema verwendet folgende Punkte:

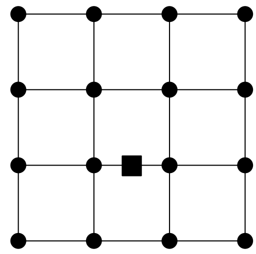



Da die Interpolationseigenschaft erhalten bleiben soll, ergibt sich die einfache Punktmaske



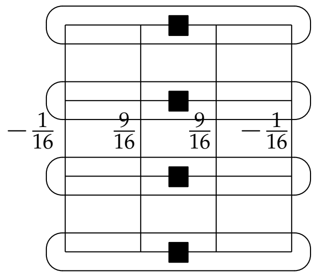
$$\widetilde{\mathbf{P}}_{2i,2j} = \mathbf{P}_{i,j}$$

Da das Schema auf jeder Kante das univariate Schema wiedergeben sollte, ergibt sich auf jeder Kante die folgende Maske (Kantenmasken)



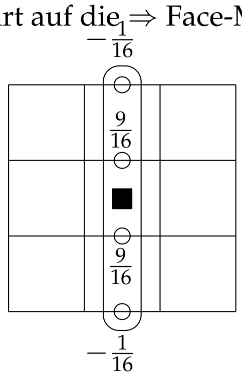
$$\widetilde{\mathbf{P}}_{2i+1,j} = -\tfrac{1}{16}\left(\mathbf{P}_{i-1,j} + \mathbf{P}_{i+2,j}\right) + \tfrac{9}{16}\left(\mathbf{P}_{i,j} + \mathbf{P}_{i+1,j}\right)$$

Für die Flächen-Maske müssen wir das Schema zuerst für alle Reihen von Kontrollpunkten anwenden:

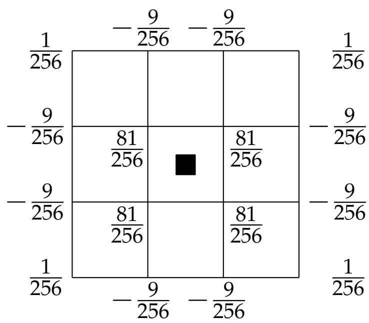



■ : neue Kantenpunkte (festgelegt durch viermaliges Anwenden des univariaten 4-Punkt-Schemas – horizontal)

Dies führt auf die ⇒ Face-Maske:




ausrechnen
⇝
(unten)




<u>Also</u>:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}_{2i+1,2j+1} = &-\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{16}\left(\mathbf{P}_{i-1,j-1} + \mathbf{P}_{i+2,j-1}\right) + \frac{9}{16}\left(\mathbf{P}_{i,j-1} + \mathbf{P}_{i+1,j-1}\right)\right)\\
&+\frac{9}{16}\left(-\frac{1}{16}\left(\mathbf{P}_{i-1,j} + \mathbf{P}_{i+2,j}\right) + \frac{9}{16}\left(\mathbf{P}_{i,j} + \mathbf{P}_{i+1,j}\right)\right)\\
&+\frac{9}{16}\left(-\frac{1}{16}\left(\mathbf{P}_{i-1,j+1} + \mathbf{P}_{i+2,j+1}\right) + \frac{9}{16}\left(\mathbf{P}_{i,j+1} + \mathbf{P}_{i+1,j+1}\right)\right)\\
&-\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{16}\left(\mathbf{P}_{i-1,j+2} + \mathbf{P}_{i+2,j+2}\right) + \frac{9}{16}\left(\mathbf{P}_{i,j+2} + \mathbf{P}_{i+1,j+2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung dieses regulären Schemas auf extra-ordinary vertices nennt man in der Literatur *Kobbelt-Schema*.

## Aufgabe 3 Implizite Oberflächen (7 Punkte)

a) Gegeben sei die implizite Oberfläche

$$f(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 10 = 0$$

und der Strahl

$$r(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Isolieren Sie mittels Intervall-Arithmetik die Nullstelle der Kurve entlang des Strahles. In welchem Teilintervall $[t_0, t_1]$ gibt es genau eine Nullstelle? Starten Sie mit dem Intervall $[-4, 2]$ für $t$. Bestimmen Sie anschließend den Wert für $t$ einer Nullstelle mittels refinements auf eine Nachkommastelle genau.

*Bemerkung:* Berücksichtigen Sie dass in der Intervall-Arithmetik die Potenzen nicht auf die Multiplikation zurückgeführt werden sollten, da die Faktoren hierdurch unabhängig voneinander betrachtet werden würden. Durch eine unabhängige Betrachtung würde zum Beispiel $[-2, 2]^2 = [-2, 2] \cdot [-2, 2] = [-4, 4]$ sein, obwohl für gegebenes $x \in [-2, 2]$ die Werte einer Funktion $f(x) = x^2$ in $[0, 4]$ liegen.

Deshalb werden für Potenzen zusätzliche Regeln definiert:

Für ungerade Potenzen:

$$[a, b]^n = [a^n, b^n]$$

Für gerade Potenzen:

$$\begin{aligned} [a, b]^n &= [a^n, b^n],\ falls\ a \geq 0 \\ [a, b]^n &= [b^n, a^n],\ falls\ b \leq 0 \\ [a, b]^n &= [0, max\{a^n, b^n\}],\ sonst \end{aligned}$$

**3 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

Wir setzen zuerst den Strahl in die Gleichung der Oberfläche ein:

$$\begin{aligned} f(r(t)) &= f(t, t, t) \\ &= t^2 + 2t^2 + 4t^2 - 10 \\ &= 7t^2 - 10 \end{aligned}$$

Wir benötigen ebenfalls die Ableitung:

$$f'(r(t)) = 14t$$

Nun isolieren wir die Nullstelle mittels Intervall-Arithmetik:

$$
\begin{aligned}
f(r([-4,2])) &= 7[-4,2]^2 - 10 \\
&= 7[0,16] + [-10,-10] \\
&= [0,112] + [-10,-10] \\
&= [-10,102] && \text{Null enthalten, Ableitung prüfen} \\
f'(r([-4,2])) &= 14[-4,2] \\
&= [-56,28] && f \text{ nicht monoton, Intervall unterteilen} \\
f(r([-4,-1])) &= 7[-4,-1]^2 - 10 \\
&= 7[1,16] + [-10,-10] \\
&= [7,112] + [-10,-10] \\
&= [-3,102] && \text{Null enthalten, Ableitung prüfen} \\
f'(r([-4,-1])) &= 14[-4,-1] \\
&= [-56,-14] && f \text{ monoton, refinement starten}
\end{aligned}
$$

Im Intervall $[-4,-1]$ besitzt $f$ mindestens eine Nullstelle. $f$ ist in diesem Intervall allerdings auch monoton (Ableitung enthält keine Null) und enthält somit genau eine Nullstelle. Wir starten nun das refinement zur genauen Bestimmung.

$$
\begin{aligned}
f(r(-4)) &= 102 \\
f(r(-1)) &= -3 \\
f(r(-2.5)) &= 33.75 && \text{zwischen -2.5 und -1} \\
f(r(-1.75)) &= 11.438 && \text{zwischen -1.75 und -1} \\
f(r(-1.375)) &= 3.234 && \text{zwischen -1.375 und -1} \\
f(r(-1.1875)) &= -0.129 && \text{zwischen -1.375 und -1.1875} \\
f(r(-1.28125)) &= 1.491 && \text{zwischen -1.28125 und -1.1875} \\
f(r(-1.234375)) &= 0.666 && \text{zwischen -1.234375 und -1.1875}
\end{aligned}
$$

Das refinement liefert die Nullstelle im Intervall $[-1.234375, -1.1875]$. An der Nullstelle ist der Parameter t = $-1.2$ (auf eine Nachkommastelle genau).

b) Implizite Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ teilen den Raum $\mathbb{R}^3$ in ein Inneres $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathbf{p}) < 0\}$ und Äußeres $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathbf{p}) > 0\}$. Die Nullstellenmenge $K = f^{-1}(0) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathbf{p}) = 0\}$ beschreibt eine Oberfläche.

Welche Körper werden durch folgende Funktionen beschrieben?

i) $f_1(x,y,z) = z - y$
die Ebene $y = z$ durch den Ursprung

ii) $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4$
ein Zylinder mit Radius 2 entlang der $z$-Achse durch den Ursprung

iii) $f_3(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 - 4$
eine Kugel mit dem Mittelpunkt $(2,3,2)^T$ und dem Radius 2

iiii) $f_4(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2 - 1$
eine in $y$-Richtung gestaucht und in $z$-Richtung gestreckte Kugel (Ellipsoid)

Geben Sie außerdem für jede Funktion eine Formel für die Oberflächennormale der dargestellten Oberfläche an.

**2 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

Die Normalen berechnen sich durch den Gradienten der Impliziten Funktion $\nabla f(x,y,z)$. Das Symbol $\nabla$ ist der Nabla Operator, der hier über die partiellen Ableitungen in alle drei Richtungen das Gradientenfeld bestimmt.

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

i) $\nabla f_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) $\nabla f_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

iii) $\nabla f_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-4 \\ 2y-6 \\ 2z-4 \end{pmatrix}$

iiii) $\nabla f_4(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 4z \end{pmatrix}$

Die Oberflächennormale entspricht dann für jeden Punkt $\mathbf{p} = (x,y,z)$, welcher auf der Oberfläche liegt $f(\mathbf{p}) = 0$, dem Gradienten. Wobei die Oberflächennormale nicht definiert ist falls $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$. Dies ist hier für $f_1$ bis $f_4$ für keinen Oberflächenpunkt ($f(\mathbf{p}) = 0$) der Fall.

c) Die Vereinigung $\cup$, der Schnitt $\cap$ und die Differenz $\setminus$ zweier Flächen impliziert durch die Funktionen $f_1$ und $f_2$ sind bestimmt durch:

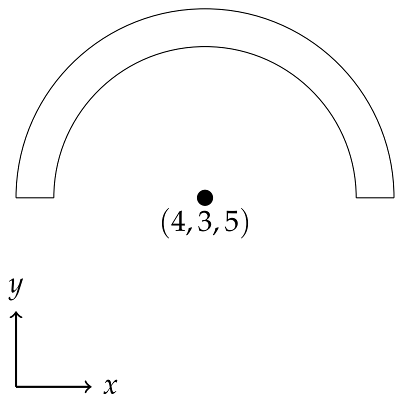
$$\cup(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = \mathbf{min}\{f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)\}$$
$$\cap(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = \mathbf{max}\{f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)\}$$
$$\setminus(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = \mathbf{max}\{f_1(x,y,z), -f_2(x,y,z)\}$$

Nutzen Sie diese Operationen um folgende Volumenelemente zu beschreiben.

i) Eine Halbkugel mit Radius 2 und Mittelpunkt in $(4,3,5)$.

ii) Eine runde Schale mit Innenradius 4 und Außenradius 5. Wie der folgenden Zeichnung zu entnehmen ist die Schale um den Punkt $(4,3,5)$ orientiert. Oben-Richtung ist $y$. Sie können hierfür beliebig Zwischenfunktionen definieren.

*Hinweis:* Beachten Sie dass bei der Kombination von Funktionen nicht nur wichtig ist wie die Oberfläche ($f(\mathbf{p}) = 0$) durch die Funktion definiert ist, sondern insbesondere auch wie das Innere ($f(\mathbf{p}) < 0$) und das Äußere ($f(\mathbf{p}) > 0$) durch die Funktion definiert ist.




**2 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

i) Die Halbkugel ergibt sich durch den Schnitt der Kugel um den Punkt $(4, 3, 5)$ und einer beliebigen Ebene welche den Punkt $(4, 3, 5)$ enthält.
$f(x, y, z) = \mathbf{max}\{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 4, -(y-3)\}$

ii) Wir erstellen drei Hilfsfunktionen.

Eine Innen-nach-Außen gekehrte Kugel mit Radius 4 und Mittelpunkt $\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$:

$$f_1(x, y, z) = -(x-4)^2 - (y-3)^2 - (z-5)^2 + 16$$

Eine normale Kugel mit Radius 5 und Mittelpunkt $\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$:

$$f_2(x, y, z) = (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 - 25$$

Eine $xz$-Ebene durch $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ mit dem Inneren oberhalb der Ebene:

$$f_3(x, y, z) = -(y-3)$$

Die Halbschale ist die Vereinigung aller Funktionen:

$$f(x, y, z) = \mathbf{max}\{f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)\}$$