GDV 2 – Theorie Übung 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommer Semester 2019
Übungsgruppe F

Aufgabe 1 Interpolation in verschiedenen Darstellungsformen (5 Punkte)

a) 1 Punkt

$Va = P$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mit Gauß:

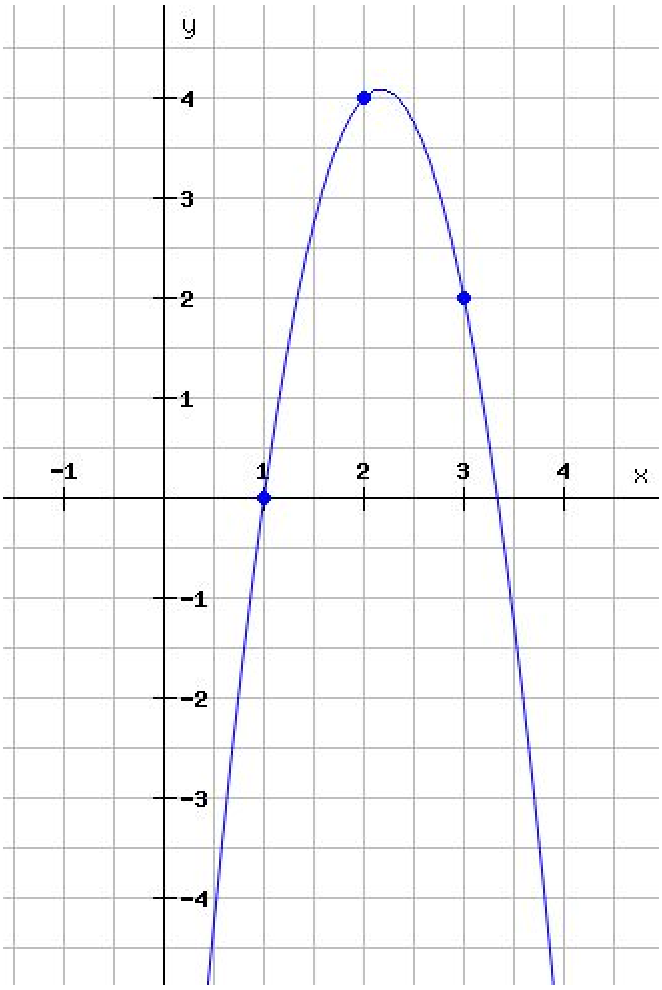
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt
$a_0 = -10$
$a_1 = 13$
$a_2 = -3$

Und das Polynom $P_M(t) = -3t^2 + 13t - 10$

Auswertung weiterer Punkte:

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
P(t)	-10	-4,25	0	2,75	4	3,75	2	-1,25	-6



b) 1 Punkt

$$l_i(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{q} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

$$l_0(t) = \frac{t-3}{1-3} * \frac{t-2}{1-2} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + 3$$

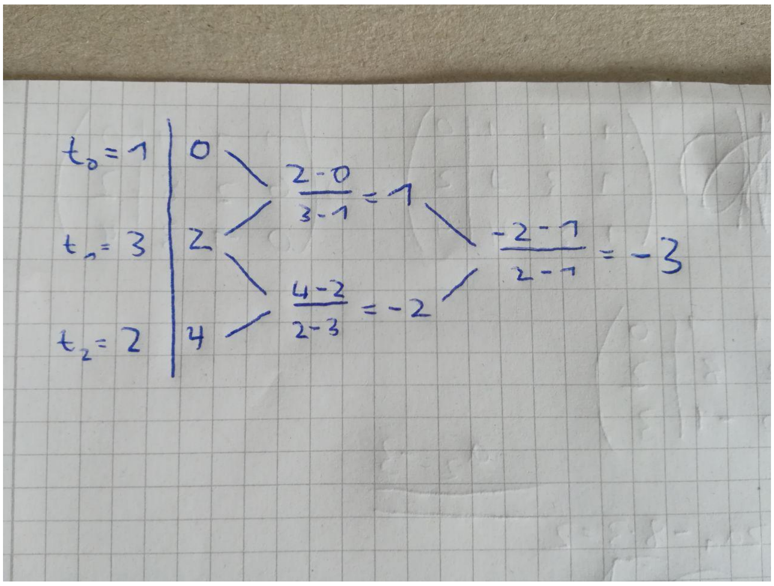
$$l_1(t) = \frac{t-1}{3-1} * \frac{t-2}{3-2} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1$$

$$l_2(t) = \frac{t-1}{2-1} * \frac{t-3}{2-3} = -t^2 + 4t - 3$$

$$P_L(t) = \sum_{i=0}^{q} l_i(t) P_i = -3t^2 + 13t - 10$$

Offensichtlich sind $P_M(t)$ und $P_L(t)$ identisch.

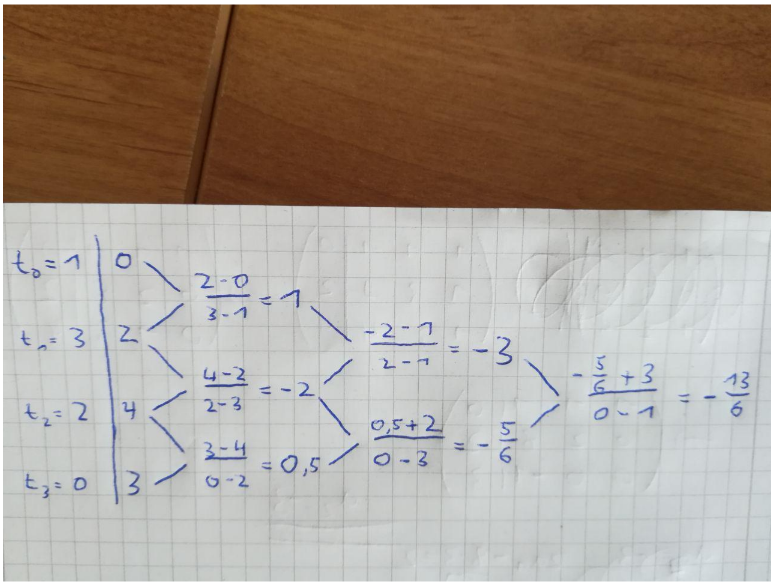
c) 1 Punkt



$P_N(t) = 0 + 1(t - t_0) - 3(t - t_0)(t - t_1) = t - 1 - 3(t-1)(t-3) = -3t^2 + 13t - 10$
Das Polynom $P_N(t)$ ist identisch $P_M(t)$ und $P_L(t)$.

d) 2 Punkte

Die Newton-Darstellung lässt sich am einfachsten erweitern, da man dem Dreiecksschema ohne viel Aufwand eine neue Stützstelle hinzufügen kann.



$$P_N(t) = -3t^2 + 13t - 10 - \frac{13}{6}(t-1)(t-3)(t-2) = -\frac{13}{6}t^3 + 10t^2 - \frac{65}{6}t + 3$$

Aufgabe 2 Bernstein-Bézier-Darstellung (5 Punkte)

Moritz Fuchs Alexander Jäger Amon Ditzinger John Kalkhof

a) 2 Punkte

Übung 2

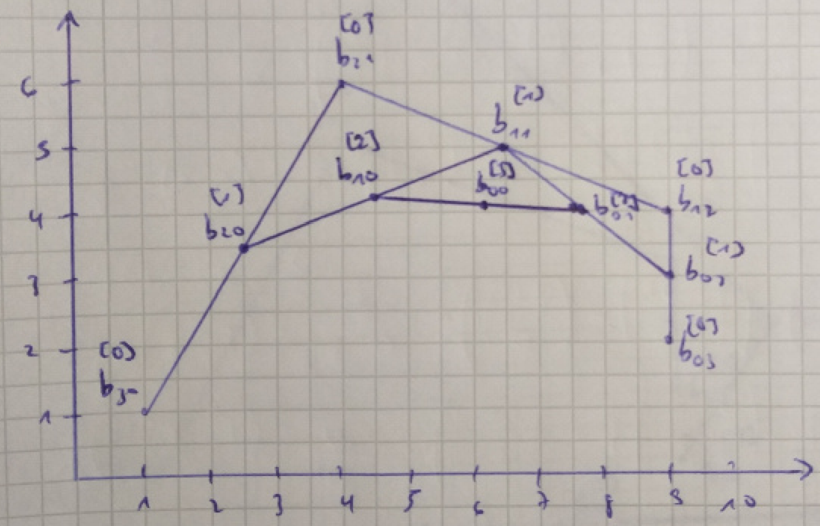
Nr 2 a) $t \in [0,2]$ und $\varepsilon = 1$ $\cancel{\frac{(2-\varepsilon)\cdot a + \varepsilon \cdot b}{2}}$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} b_{30}^{[0]}$, $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} b_{21}^{[0]}$, $\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix} b_{12}^{[0]}$, $\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix} b_{03}^{[0]}$

$> \begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\end{pmatrix} b_{20}^{[1]}$, $> \begin{pmatrix}6{,}5\\5\end{pmatrix} b_{11}^{[1]}$, $> \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} b_{02}^{[1]}$

$> \begin{pmatrix}4{,}5\\ \cancel{5{,}5}\ 4{,}25\end{pmatrix} b_{10}^{[2]}$, $> \begin{pmatrix}7{,}75\\4\end{pmatrix} b_{01}^{[2]}$

$> \begin{pmatrix}6{,}125\\ \cancel{6{,}25}\ 4{,}125\end{pmatrix} \cdot b_{00}^{[3]}$



Moritz Fuchs Alexander Jäger Amon Ditzinger John Kalkhof

Übung 2

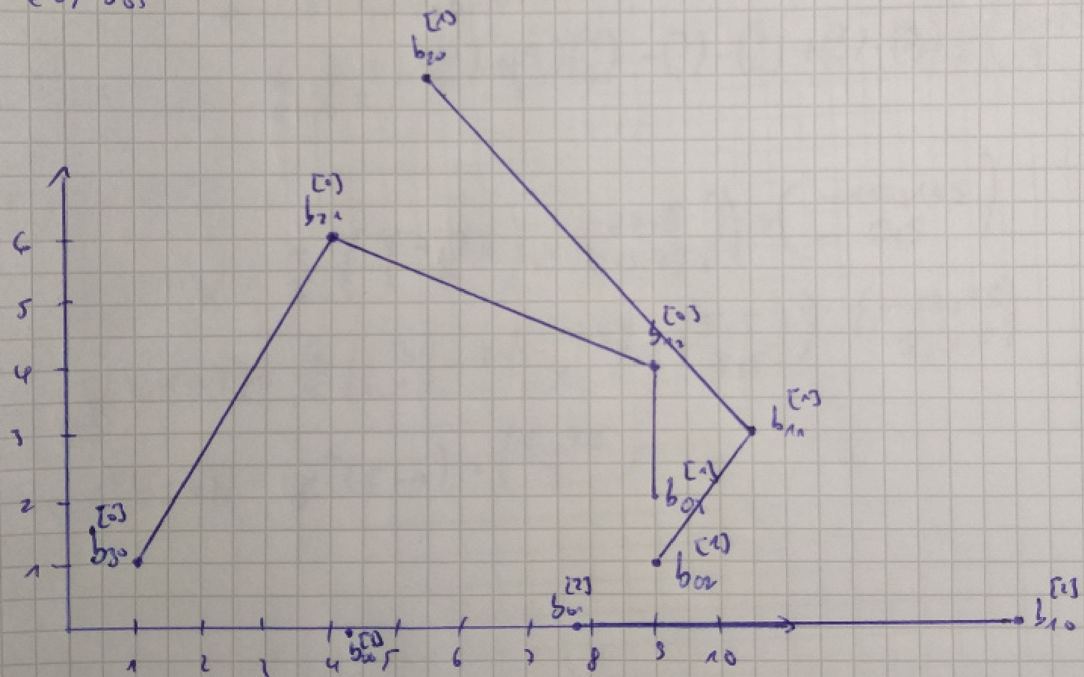
Nr 2 d) $f \in [0,2]$ und $\varepsilon = 3$ $\qquad \dfrac{-a+3b}{2}$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} b_{30}^{[0]} \quad \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} b_{21}^{[0]} \quad \begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix} b_{12}^{[0]} \quad \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix} b_{03}^{[0]}$$

$$\begin{pmatrix}5{,}5\\8{,}5\end{pmatrix} b_{20}^{[1]} \quad \begin{pmatrix}11{,}5\\3\end{pmatrix} b_{11}^{[1]} \quad \begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix} b_{02}^{[1]}$$

$$\begin{pmatrix}14{,}5\\0{,}25\end{pmatrix} \cdot b_{10}^{[2]} \quad \begin{pmatrix}7{,}75\\0\end{pmatrix} \cdot b_{01}^{[2]}$$

$$\begin{pmatrix}4{,}375\\-0{,}125\end{pmatrix} b_{00}^{[3]}$$



b) 1 Punkt

Moritz Fuchs Alexander Jäger Amon Ditzinger John Kalkhof

c) 2 Punkte

GDV2 Übung 2

Nr 2 e) für $\varepsilon = 1$

$$p'(\varepsilon = 1) = \frac{3}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 7,75 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,25 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4,875 \\ -0,375 \end{pmatrix}$$

$$p''(\varepsilon = 1) = \frac{6}{4} \cdot \left(\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6,5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2,25 \\ -5,25 \end{pmatrix}$$

$$p'''(\varepsilon) = \frac{1}{(b-a)^i} \cdot \frac{9!}{(9-i)!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} \cdot b_{i-k,k}^{[9-1]}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{1} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (-1)^{3-k} \cdot b_{3-k,k}^{[0]}$$

$$p'''(\varepsilon = 1) = \frac{6}{8} \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6,75 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für $\varepsilon = 3$

$$p'(\varepsilon = 3) = \frac{3}{2} \left(\begin{pmatrix} 7,75 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14,5 \\ 0,25 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -10,125 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$p''(\varepsilon = 3) = \frac{6}{4} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 11,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5,5 \\ 8,5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -12,75 \\ 5,25 \end{pmatrix}$$

$$p'''(\varepsilon = 3) = p'''(\varepsilon = 1) = \begin{pmatrix} 6,75 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Approximation in Bernstein-Bézier-Darstellung (4 Punkte)

Moritz Fuchs Alexander Jäger Amon Ditzinger John Kalkhof

a) 1 Punkt

GDV2 Übung 2 Nr 3

a) $B_{ij}(t) = \frac{q!}{i!\,j!}\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^i\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^j \qquad i+j=q$

t	0	0,25	0,75	1
B_{20}	~~0~~ 1	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
B_{11}	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
B_{02}	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	1

$B_{20}(t) = (1-t)^2\,(t)^0 \qquad B_{20}(0) = 1\cdot 0^0 = 1 \quad \lim_{t\to 0}$

$B_{11}(t) = 2(1-t)t$

$B_{02}(t) = (1-t)^0\cdot t^2$

A: Jeweils 3 Kontrollpolygone und 3 Bernstein Polynome

b) $d_0 = P(0) = \cancel{1\cdot}\, b_{20}$

$d_1 = P(0{,}25) = \frac{9}{16} b_{20} + \frac{3}{8} b_{11} + \frac{1}{16} b_{02}$

$d_2 = P(0{,}75) = \frac{1}{16} b_{20} + \frac{3}{8} b_{11} + \frac{9}{16} b_{02}$

$d_3 = P(1) = b_{02}$

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \end{pmatrix}$$

b) 1 Punkt

Siehe Bild darüber

c) 1 Punkt

A3

c)

$$B^T \cdot d = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{9}{16} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

$$d^* = \begin{pmatrix} d_0 + \frac{9}{16} d_1 + \frac{1}{16} d_2 \\ \frac{3}{8} d_1 + \frac{3}{8} d_2 \\ \frac{1}{16} d_1 + \frac{9}{16} d_2 + d_3 \end{pmatrix}$$

$$B^* = B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{9}{16} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}32 & 0{,}23 & 0{,}07 \\ 0{,}23 & 0{,}28 & 0{,}23 \\ 0{,}07 & 0{,}23 & 1{,}32 \end{pmatrix}$$

$$(B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}83 & -0{,}81 & 0{,}03 \\ -0{,}81 & 4{,}3 & -0{,}81 \\ 0{,}03 & -0{,}81 & 0{,}83 \end{pmatrix} \cdot d^* = b$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}83(d_0 + \frac{9}{16} d_1 + \frac{1}{16} d_2) - 0{,}81(\frac{3}{8} d_1 + \frac{3}{8} d_2) + 0{,}03(\frac{1}{16} d_1 + \frac{9}{16} d_2 + d_3) \\ -0{,}81(\quad " \quad) + 4{,}3(\quad " \quad) - 0{,}81(\quad " \quad) \\ 0{,}03(\quad " \quad) - 0{,}81(\quad " \quad) + 0{,}83(\quad " \quad) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}83 d_0 + 0{,}2 d_1 - 0{,}2 d_2 + 0{,}03 d_3 \\ -0{,}81 d_0 + 1{,}33 d_1 + 1{,}33 d_2 - 0{,}81 d_3 \\ 0{,}03 d_0 - 0{,}2 d_1 + 0{,}20 d_2 + 0{,}83 d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \end{pmatrix}$$

$$b_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}14 \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}31 \\ 3{,}33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5{,}32 \\ 6{,}65 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14{,}63 \\ 5{,}78 \end{pmatrix}$$

$$b_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 5{,}74 \end{pmatrix}$$

d) 1 Punkt

Aufgabe 4 B-Splines vom Grad 2 (6 Punkte)

a) 1 Punkt

b) 1 Punkt

c) 1 Punkt

d) 1 Punkt

e) 2 Punkte