## Abgabemodalitäten

**Abgabetermin:** 30.04.2019 15:00 Uhr.

Die Übungsblätter sollen als Gruppe bearbeitet und abgegeben werden.

Um sich als Gruppe für die Übungen anzumelden bitte bis **Fr, 26.04. 12:00**, eine Email mit den Namen aller Gruppenmitglieder an johannes.fauser@gris.informatik.tu-darmstadt.de senden. Sie werden dann in Moodle als Gruppe gekennzeichnet.

Laden Sie ihre Lösung bitte in Moodle hoch oder geben Sie ihre Lösung **geheftet** handschriftlich zu Beginn der Übung ab. Bei der handschriftlichen Abgabe bitte Name **und** Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder angeben.

Um 3D Daten über das Netzwerk zu streamen, ist es essentiell diese vorher zu quantisieren und zu komprimieren um die Datengröße so weit wie möglich zu reduzieren. In dieser Übung wird die Quantisierung von den Positionen und Normalen von Vertex Daten untersucht.

### Aufgabe 1 Quantisierung von Positionsdaten (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Quantisierung der Positionen von den Vertexdaten genauer verstanden werden. Die original Positionsdaten sind gegeben als $(p_i)_{i=1,\ldots,n}, p_i \in \mathbb{R}^3$. Die *axis-aligned bounding box (AABB)* $(m, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist ein Quader welcher als Hüllkörper der kleinste Quader ist, der die Positionsdaten umschließt und somit räumlich vereinfacht approximiert. Das AABB Volumen $(m, M)$ ist formal definiert durch:

$$(\forall d = 1, 2, 3) m_{id} = \min_{i=1,\ldots,n} p_{id}$$
$$(\forall d = 1, 2, 3) M_{id} = \max_{i=1,\ldots,n} p_{id}$$

Für eine Bitgenauigkeit von $b \in \mathbb{N}$ bits werden die Positionsdaten anhand des AABB Volumen wie folgt quantisiert:

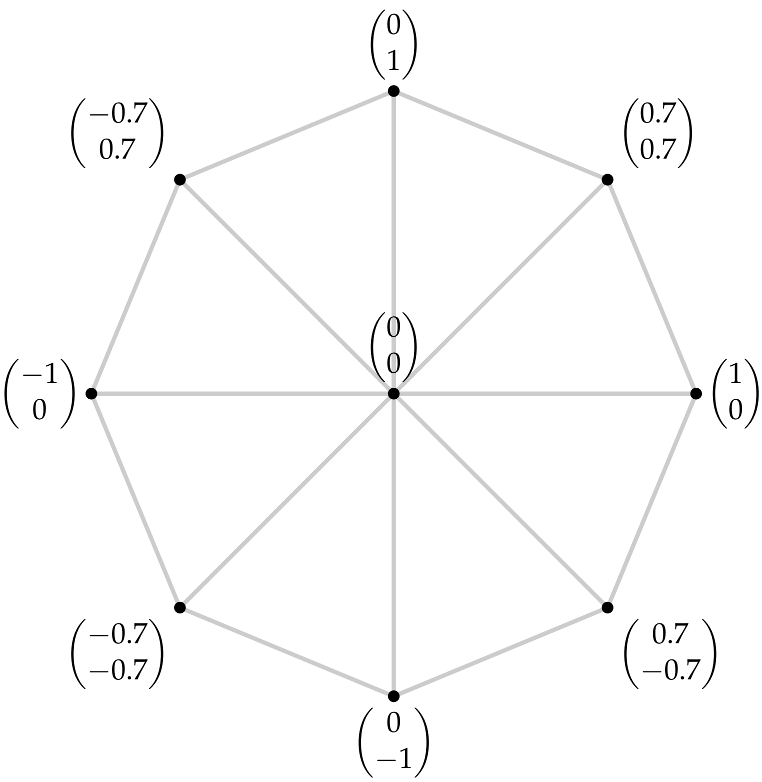
$$q_i \in \mathbf{B}^3, q_{id} := \left\lfloor \frac{p_{id} - m_d}{M_d - m_d} \cdot (2^b - 1) \right\rceil \qquad \mathbf{B} := \{0, 1, \ldots, 2^b - 1\}$$

$\lfloor \cdot \rceil$ *ist die Rundungsfunktion welche eine reelle Zahl zu der nächsten ganzen Zahl* $\mathbb{Z}$ *abbildet.* Offensichtlich ist die Quantisierung aggressiver und verlustbehafteter je weniger Bits $b$ verwendet werden.

Die quantisierten Positionsdaten $(q_i)_{i=1,\ldots,n}$ können dann wieder dekomprimiert werden:

$$p^*_{id} := m_d + \frac{q_{id}}{2^b - 1}(M_d - m_d)$$

a) Berechnen Sie die Quantisierung für das unten definiert Dreiecksnetz jeweils mit der Bitgenauigkeit $b = 2, 3$. Zeichnen Sie anschließend das verlustbehaftete dekomprimierte Dreiecksnetz.




**2 Punkte**

b) Leiten Sie eine Formel zur Fehlerabschätzung her, die anhand des AABB Volumen $(m, M)$ und der Bitgenauigkeit $b$ den Quantisierungsfehler $\left|p_{id}^* - p_{id}\right|$ pro Koordinate abschätzt.

**2 Punkte**

c) Gegeben sei ein CAD Model eines Porsche 911. Das tessellierte Dreiecksnetz besteht aus 100 Millionen Vertices mit dem folgenden AABB Volumen:

$$\left(\begin{pmatrix}-2.25\\-0.9\\-1.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.25\\0.9\\1.25\end{pmatrix}\right)$$

Die Koordinaten des AABB Volumen seien in Metern gegeben.

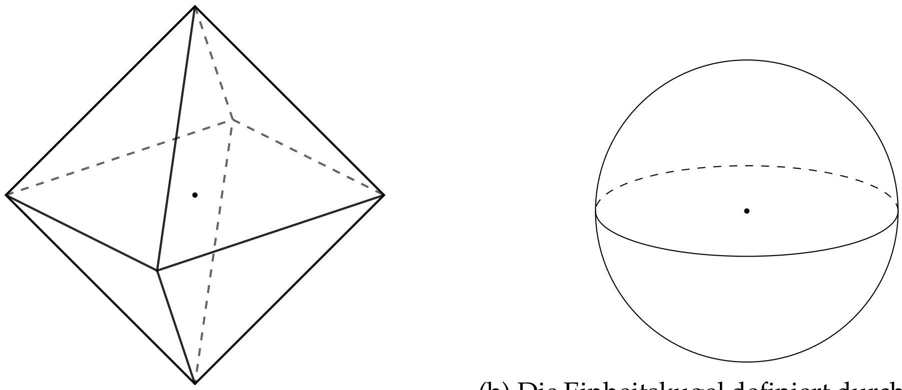
- Welche minimale Bitgenauigkeit ist bei einem maximal erlaubten Fehler von 0,5 Millimetern notwendig?
- Wenn die original Positionsdaten mit 32-bit floats beschrieben sind, wie groß sind die Positionsdaten vorher und wie groß sind die Daten nach der Quantisierung?

**1 Punkt**

## Aufgabe 2 Octahedron Normalen Kompression (5 Punkte)

In der vorherigen Aufgabe wurde die Quantisierung von Positionsdaten untersucht. Nun soll die Quantisierung der dazugehörigen Normalen besprochen werden. Dabei seien die Normalen gegeben als $(n_i)_{i=1,\ldots,n}, n_i \in S^2$ wobei $S^2$ die Oberfläche der Einheitskugel ist (siehe Abbildung 1b), welche wie folgt definiert ist:

$$S^k := \{x \in \mathbb{R}^3 | \, ||x||_k = 1\} \text{ for } k = 1,2$$



(a) Die Einheitskugel definiert durch die Norm $||\cdot||_1$ auf die die Normalen beim Octahedron Verfahren projiziert werden.

(b) Die Einheitskugel definiert durch die Norm $||\cdot||_2$ auf der die Normalen liegen.

Abbildung 1: Die zwei verschiedenen Einheitskugeln jeweils mit der 1- und der 2-Norm.

$||\cdot||_k$ ist die $k$ Norm welche für $k = 1, 2$ jeweils definiert ist als:

$$||x||_1 := |x_1| + |x_2| + |x_3| \qquad\qquad ||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Die Normalenvektoren liegen alle auf der Einheitskugel $S^2$, welche offensichtlich das AABB Volumen $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ hat. Da die Oberfläche 2-dimensional ist, wird zunächst eine entsprechende bijektive Abbildung der Form $S^2 \to s : [-1, 1]^2$ gesucht. Somit muss dann nicht mehr das komplette AABB Volumen der Einheitskugel $S^2$ quantisiert werden, sondern nur noch $[-1, 1]^2$, wobei die Quantisierung genauso erfolgt wie für die Positionsdaten in der vorherigen Aufgabe. Durch den Wegfall der dritten Koordinate werden Speicherplatz und auch Bandbreite bei der Übertragung eingespart.

Für einen Normalenvektor der oberen Halbkugel $n \in S^2, n_3 \geq 0$, kann die dritte Koordinate aus den ersten zweien wie folgt bestimmt werden $n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$.
Dies ist der Ansatz der Octahedron Normalen Kompression, die allerdings auf dem Octahedron $S^1$ operiert (siehe Abbildung 1a). Ein Octahedron ist eine Einheitskugel, die allerdings auf der Norm $||\cdot||_1$ definiert wurde. Die Quantisierung für eine Normale $n_i \in S^2$ erfolgt dann in den folgenden Schritten:

- Die Normale $n_i$ wird auf das Octahedron $S^1$ projiziert, wobei die projizierte Normale als $n_i^*$ bezeichnet wird.
- Für eine Parametrisierung $s$ des Octahedrons $S^1$ wird $p := s(n_i^*)$ berechnet
- Das Ergebnis $p$ wird mit dem AABB Volumen $[-1, +1]^2$ quantisiert.

Das Verfahren soll nun in den folgenden Teilaufgaben hergeleitet werden.

a) Leiten Sie die Formel her, die einen Normalenvektor von der Einheitskugel $S^2$ auf das Octahedron $S^1$ projizieren. D.h. es muss jeweils $\lambda > 0$ bestimmt werden, sodass $\lambda \cdot x \in S^1$ für ein $x \in S^2$ gilt.

**1 Punkt**

b) Wie zu Beginn dieser Aufgabe bereits für die Einheitskugel $S^2$ gezeigt wurde, lässt sich für Normalen der oberen Halbkugel jeweils die dritte Koordinate aus den ersten beiden bestimmen. Leiten Sie die Formel zur Bestimmung der dritten Koordinate aus den ersten zwei Koordinaten für einen Vektor auf der oberen Halbkugel $S^1$ her.

**1 Punkt**

c) Verbinden Sie die Teile aus a) und b) indem Sie die Normalenvektoren der oberen Halbkugel $S_+^2 := \{x \in S^2 \mid x_3 \geq 0\}$ zunächst auf $S_+^1 := \{x \in S^1 \mid x_3 \geq 0\}$ projizieren und anschließend durch wegfallen der dritten Koordinate auf $[-1,+1]^2$ abbilden. Somit erhalten Sie eine Funktion der Form:

$$s_+ : S_+^2 \to [-1,+1]^2$$

Stellen Sie dazu noch die zu $s_+$ linksinverse Funktion $s_+^{-1}$ auf.

**2 Punkte**

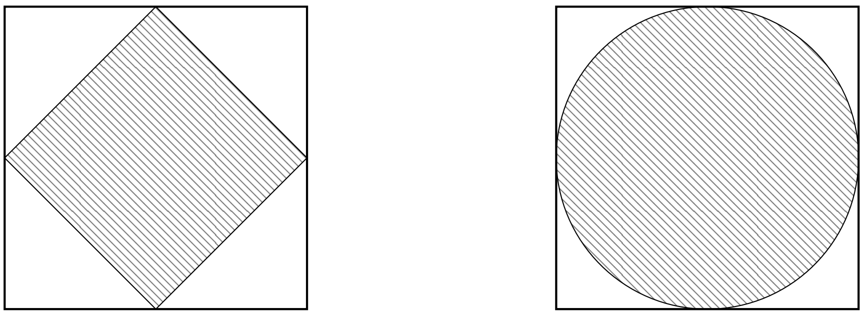
d) Bisher wurde die Kompression nur für die obere Halbkugel $S_+^2$ definiert. Dabei wurde die Parametrisierung $s_+$ hergeleitet. Eine Parametrisierung $s_-$ der unteren Halbkugel $S_-^2 := \{x \in S^2 \mid x_3 < 0\}$ wird komplett analog definiert.

Das Bild von $s^+$ nimmt genau die Hälfte des Wertebereichs ein (siehe Abbildung 2a). Somit können die beiden Funktionen $s_+$ und $s_-$ zu einer bijektiven Funktion $s$ verbunden werden, wenn der Wertebereich von $s_-$ entsprechend transformiert wird.

Leiten Sie dazu eine bijektive Funktion $\pi$ her, die den Wertebereich

$$W = \{x \in [-1,+1]^2 \mid |x_1| + |x_2| < 1\}$$

auf den restlichen Bereich $[-1,+1]^2 \setminus W$ abbildet.



(a) Das Bild der Funktion $S^1 \to [-1,+1]^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(b) Das Bild der Funktion $S^2 \to [-1,+1]^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Abbildung 2: Die schraffierten Flächen markieren jeweils das Bild der Parametrisierungen der oberen Halbkugeln $S_+^1$ und $S_+^2$. Wie man sehen kann nimmt das Bild der Parametrisierung für $S_+^1$ genau die Hälfte des Wertebereichs ein.

**1 Punkt**