## Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1 Interpolation in verschiedenen Darstellungsformen (5 Punkte)

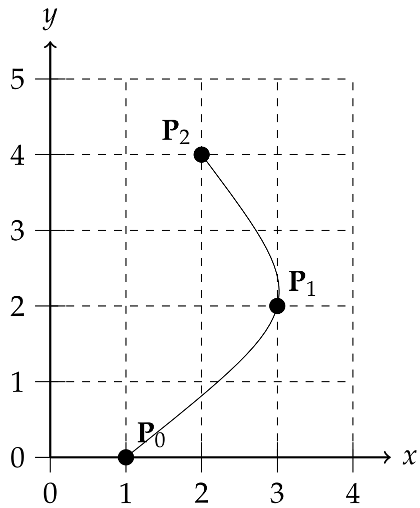
Gegeben seien drei Stützstellen

$$t_0 = 0, t_1 = 2 \text{ und } t_2 = 4$$

mit den Werten

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sowie der Grad $q = 2$.




a) Bestimmen Sie die polynomiale Kurve $\mathbf{P}_M(t) = \sum_{i=0}^{q} \mathbf{a}_i t^i$ (Monom-Darstellung), welche die Werte an den Stützstellen interpoliert. Werten Sie weitere Punkte der Kurve aus und fertigen Sie eine recht genaue Skizze an.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Gesuchtes Polynom ist $\mathbf{P}_M(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2$
Aufstellen des linearen Gleichungssystems aus den Stützstellen und Werten:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_M(t_i)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t_0 + \mathbf{a}_2 t_0^2 \\ \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t_1 + \mathbf{a}_2 t_1^2 \\ \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t_2 + \mathbf{a}_2 t_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen und Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P}_0\\\mathbf{P}_1\\\mathbf{P}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 2 & 4\\1 & 4 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}_0\\\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}_0\\\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-0.75 & 1 & -0.25\\0.13 & -0.25 & 0.13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_0\\\mathbf{P}_1\\\mathbf{P}_2\end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{a}_0 = 1\cdot\mathbf{P}_0 + 0\cdot\mathbf{P}_1 + 0\cdot\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = -0.75\cdot\mathbf{P}_0 + 1\cdot\mathbf{P}_1 + -0.25\cdot\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix}1.75\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = 0.13\cdot\mathbf{P}_0 + -0.25\cdot\mathbf{P}_1 + 0.13\cdot\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_M(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1.75\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix}t^2$$

b) Bestimmen Sie nun die polynomiale Kurve $\mathbf{P}_L(t) = \sum_{i=0}^{q} \ell_i(t)\mathbf{P}_i$ (Lagrange-Darstellung), welche die Werte an den Stützstellen interpoliert. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathbf{P}_M(t)$ und $\mathbf{P}_L(t)$ identisch sind.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Gesuchtes Polynom ist $\mathbf{P}_L(t) = \ell_0(t)\mathbf{P}_0 + \ell_1(t)\mathbf{P}_1 + \ell_2(t)\mathbf{P}_2$

Aufstellung der Lagrange-Basis-Polynome: $\ell_i(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{q} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}$

$$\ell_0 = \frac{(t-2)(t-4)}{(-2)(-4)} = 0.13t^2 + -0.75t + 1$$

$$\ell_1 = \frac{(t-0)(t-4)}{(2)(-2)} = -0.25t^2 + 1t + 0$$

$$\ell_2 = \frac{(t-0)(t-2)}{(4)(2)} = 0.13t^2 + -0.25t + 0$$

Aufstellung des Gesamtpolynoms:

$$\mathbf{P}_L(t) = (0.13t^2 + -0.75t + 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-0.25t^2 + 1t + 0)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + (0.13t^2 + -0.25t + 0)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

Beweis, dass $\mathbf{P}_M(t)$ und $\mathbf{P}_L(t)$ identisch sind durch Umformung:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_L(t) &= (0.13t^2 + -0.75t + 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-0.25t^2 + 1t + 0)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + (0.13t^2 + -0.25t + 0)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \\
&= \left(0.13\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + -0.25\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + 0.13\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right)t^2 \\
&\quad + \left(-0.75\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + -0.25\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right)t \\
&\quad + \left(1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix}0.13\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0.75\\-0.5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.25\\0.5\end{pmatrix}\right)t^2 \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix}-0.75\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0.5\\-1\end{pmatrix}\right)t \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix}1.75\\1\end{pmatrix}t \;+\; \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix}t^2 \\
&= \mathbf{P}_M(t)
\end{aligned}
$$

c) Bestimmen Sie nun die polynomiale Kurve $\mathbf{P}_N(t) = \sum_{i=0}^{q} \omega_i(t)\boldsymbol{\Delta}(t_0, ..., t_i)$ (Newton-Darstellung) mit Hilfe des Dreiecksschemas, welche die Werte an den Stützstellen interpoliert. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathbf{P}_N(t)$, $\mathbf{P}_M(t)$ und $\mathbf{P}_L(t)$ identisch sind.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Gesuchtes Polynom ist $\mathbf{P}_N(t) = \omega_0(t)\Delta(t_0) + \omega_1(t)\Delta(t_0, t_1) + \omega_2(t)\Delta(t_0, t_1, t_2)$.
Da $\Delta(t_0) = \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ können wir den ersten Summanden ignorieren.
Mit der Definition $\omega_i(t) = 1 \cdot (t - t_0) \cdot ... \cdot (t - t_{i-1})$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= 1 \\
\omega_1 &= 1(t-0) = t \\
\omega_2 &= 1(t-0)(t-2) = t(t-2)
\end{aligned}
$$

Das Dreiecksschema liefert:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & 0 & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & & \\
 & 2 & & & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \\
4 & & 2 & \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} \\
 & 2 & & & \begin{pmatrix}-0.5\\1\end{pmatrix} & \\
 & & 4 & \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} & &
\end{array}
$$

Nun kann das Gesamtpolynom aufgestellt werden:

$$\mathbf{P}_N(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} t(t-2)$$

Beweis, dass $\mathbf{P}_N(t)$, $\mathbf{P}_M(t)$ und $\mathbf{P}_L(t)$ identisch sind durch Umformung:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_N(t) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} t(t-2)\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix}\right) t + \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} t^2\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1.75\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} t^2\\ &= \mathbf{P}_M(t) = \mathbf{P}_L(t)\end{aligned}$$

d) Wir nehmen eine vierte Stützstelle $t_3 = 3$ mit Stützpunkt $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ hinzu. Welche der drei obigen Darstellungsformen eignet sich besonders gut, um die neue polynomiale Kurve mit geringem Aufwand aufzustellen? Stellen Sie die Gleichung dieser Kurve in Ihrer gewählten Darstellung auf.

**2 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

Sei $q$ der Grad der neuen gesuchten Lösung (hier 3), dann gilt:

Bei der Monom-Darstellung muss ein lineares und im allgemeinen voll besetztes Gleichungssystem gelöst werden. Die Anzahl der benötigten Operationen (Multiplikationen und Divisionen) zur Lösung einer $n \times n$ Matrix mit LU-Zerlegung ist von der Größenordnung $n^3$. In unserem Beispiel ($n = 4$) sind es also 64 Operationen zur Aufstellung des Polynoms.

Sofern die Basis-Polynome der vorherigen Lösung vorliegen müssen bei der Lagrange-Darstellung $q$ Basis-Polynome um je ein Produkt im Zähler und Nenner erweitert werden ($2q$ Operationen). Weiter muss ein neues Basis-Polynom mit je $q$ Produkten im Zähler und Nenner aufgestellt werden ($2q - 1$ Operationen). Insgesamt ist die Anzahl der benötigten Operationen $4q - 1 = 11$.

Bei der Newton-Darstellung muss das neue $\Delta(t_0, ..., t_q)$ bestimmt werden. Sofern die Ergebnisse des alten Dreiecksschemas noch vorliegen werden dafür $q$ Operationen benötigt.

Somit ist die Newton-Darstellung am besten geeignet, um zu einem vorhandenen Polynom weitere Stützstellen und Werte hinzufügen. Durch Erweitern des Dreiecksschemas erhalten wir:

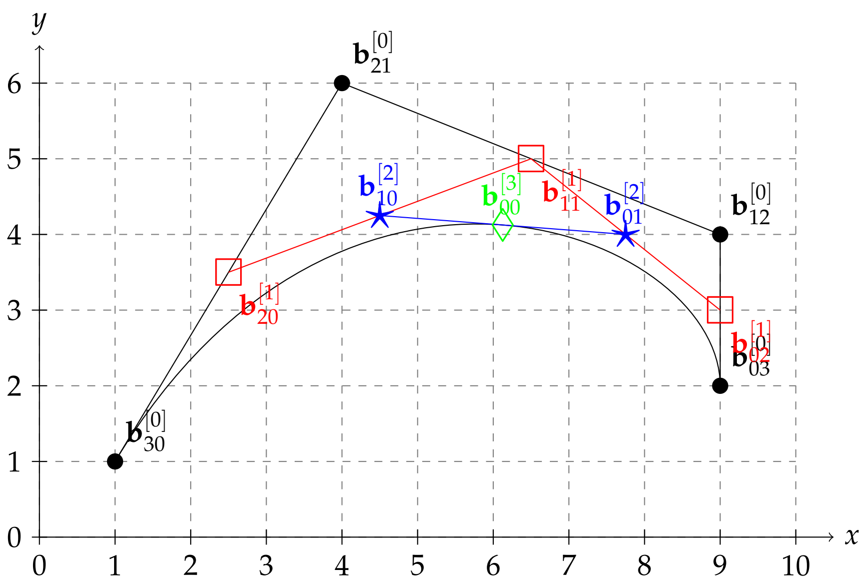
$$
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & 0 & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & & & \\
 & & 2 & & & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & & \\
 & 4 & & 2 & \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} & \\
3 & & 2 & & & \begin{pmatrix}-0.5\\1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}0.96\\0\end{pmatrix} \\
 & 1 & & 4 & \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}2.5\\0\end{pmatrix} & \\
 & & -1 & & & \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} & & \\
 & & & 3 & \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_3 &= 1(t-0)(t-2)(t-4) = t(t-2)(t-4) \\
\mathbf{P}_N(t) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} t(t-2) + \begin{pmatrix}0.96\\0\end{pmatrix} t(t-2)(t-4) \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} t - \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} 2t + \begin{pmatrix}0.96\\0\end{pmatrix} (2 \cdot 4t) \\
&\quad + \begin{pmatrix}-0.38\\0\end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix}0.96\\0\end{pmatrix} (-(2+4)t^2) + \begin{pmatrix}0.96\\0\end{pmatrix} t^3 \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9.42\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}-6.12\\0\end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix}0.96\\0\end{pmatrix} t^3
\end{aligned}
$$

### Aufgabe 2 Bernstein-Bézier-Darstellung (5 Punkte)

Vorgegeben sei die folgende polynomiale Kurve vom Grad 3 in Bernstein-Bézier-Darstellung:

$$
\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} B_{30}(t) + \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} B_{21}(t) + \begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix} B_{12}(t) + \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix} B_{03}(t), \quad t \in [0,2].
$$





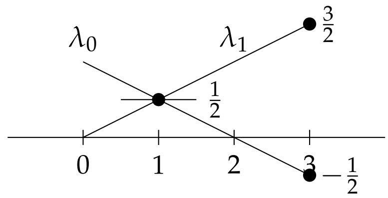
Prof. Dr. Dieter W. Fellner,
M.Sc. Roman Getto,
Johannes Merz

a) Wenden Sie den de Casteljau-Algorithmus für die Stellen $\xi = 1$ und $\xi = 3$ an und geben Sie jeweils eine möglichst genaue Skizze über den Verlauf der Kurve an. Zeichnen Sie ebenfalls die berechneten Punkte $\mathbf{b}_{ij}^{[\ell]}$, $i + j = 3 - \ell$, $\ell = 0, \ldots, 3$ ein.

**2 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

Wir berechnen zuerst die baryzentrischen Koordinaten:

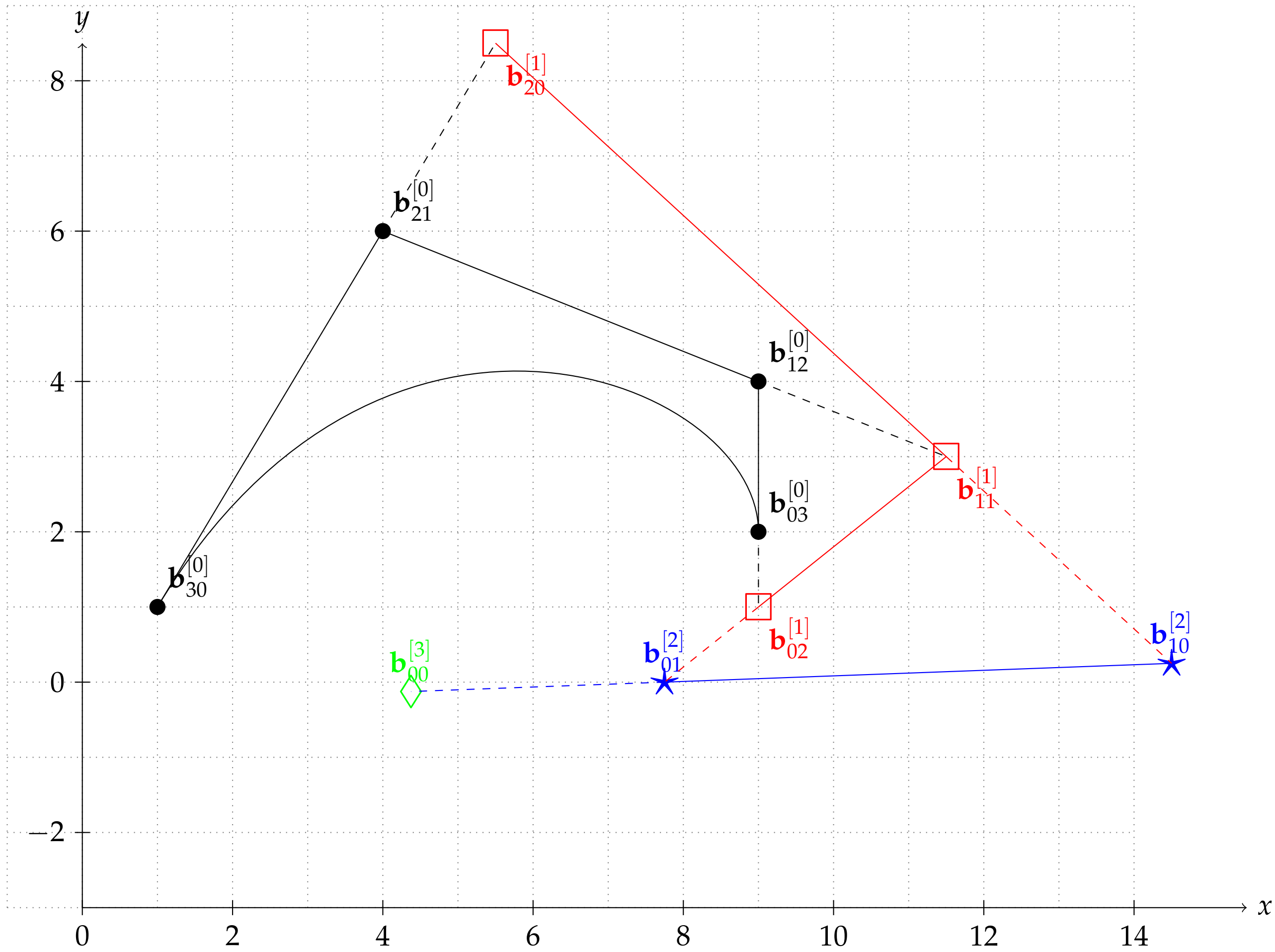



de Casteljau für $\xi = 1$: $\lambda_0(\xi) = 0.5$ $\lambda_1(\xi) = 0.5$

$$
\begin{array}{cccc}
\mathbf{b}_{ij}^{[0]} & & & \\
 & \mathbf{b}_{ij}^{[1]} & & \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & \mathbf{b}_{ij}^{[2]} & \\
 & \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} & & \mathbf{b}_{ij}^{[3]} \\
\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 4.5 \\ 4.25 \end{pmatrix} & \\
 & \begin{pmatrix} 6.5 \\ 5 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 6.13 \\ 4.13 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 7.75 \\ 4 \end{pmatrix} & \Diamond \\
 & \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} & \star & \\
\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} & \square & & \\
\bullet & & &
\end{array}
$$

de Casteljau für $\xi = 3$: $\lambda_0(\xi) = -0.5$ $\lambda_1(\xi) = 1.5$

$$
\begin{array}{cccc}
\mathbf{b}_{ij}^{[0]} & & & \\
 & \mathbf{b}_{ij}^{[1]} & & \\
\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & & \mathbf{b}_{ij}^{[2]} & \\
 & \begin{pmatrix}5.5\\8.5\end{pmatrix} & & \mathbf{b}_{ij}^{[3]} \\
\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}14.5\\0.25\end{pmatrix} & \\
 & \begin{pmatrix}11.5\\3\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}4.38\\-0.13\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}7.75\\0\end{pmatrix} & \diamond \\
 & \begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix} & \bigstar & \\
\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix} & \square & & \\
\bullet & & &
\end{array}
$$




b) Bestimmen Sie mit den Berechnungen aus a) die Bernstein-Bézier-Darstellung von $\mathbf{P}$ hinsichtlich den Parameterintervallen $[0,1]$, $[1,2]$, $[0,3]$ und $[2,3]$.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

$$(BB_1) : \mathbf{P}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_{30}(\xi) + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} B_{21}(\xi) + \begin{pmatrix} 4.5 \\ 4.25 \end{pmatrix} B_{12}(\xi) + \begin{pmatrix} 6.13 \\ 4.13 \end{pmatrix} B_{03}(\xi)\ , \quad \xi \in [0,1]$$

$$(BB_2) : \mathbf{P}(\xi) = \begin{pmatrix} 6.13 \\ 4.13 \end{pmatrix} B_{30}(\xi) + \begin{pmatrix} 7.75 \\ 4 \end{pmatrix} B_{21}(\xi) + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} B_{12}(\xi) + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} B_{03}(\xi)\ , \quad \xi \in [1,2]$$

$$(BB_3) : \mathbf{P}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_{30}(\xi) + \begin{pmatrix} 5.5 \\ 8.5 \end{pmatrix} B_{21}(\xi) + \begin{pmatrix} 14.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} B_{12}(\xi) + \begin{pmatrix} 4.38 \\ -0.13 \end{pmatrix} B_{03}(\xi)\ , \quad \xi \in [0,3]$$

$$(BB_4) : \mathbf{P}(\xi) = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} B_{30}(\xi) + \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} B_{21}(\xi) + \begin{pmatrix} 7.75 \\ 0 \end{pmatrix} B_{12}(\xi) + \begin{pmatrix} 4.38 \\ -0.13 \end{pmatrix} B_{03}(\xi)\ , \quad \xi \in [2,3]$$

c) Bestimmen Sie mit den Berechnungen aus a) die Werte

$$\mathbf{P}(\xi), \mathbf{P}'(\xi), \mathbf{P}''(\xi), \mathbf{P}'''(\xi)$$

für $\xi = 1$ und $\xi = 3$.

**2 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

Um diese Aufgabe zu lösen können wir die spezielle Formel für die i-te Ableitung einer Stelle $\xi$ für den de Casteljau-Algorithmus verwenden (Vorlesung 01,Folie 40, PDF-Seite 42):

$$\frac{1}{(b-a)^i} \frac{q!}{(q-i)!} \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} (-1)^{i-k} \cdot b_{i-k,k}^{[q-i]}$$

Wir können allerdings auch die allgemeine Formel für die Ableitung eines Randpunktes $a$ verwenden (Vorlesung 01,Folie 35, PDF-Seite 37):

$$\mathbf{P}^{(\ell)}(a) = \frac{q!}{(q-\ell)!} \frac{1}{(b-a)^\ell} \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \begin{pmatrix} \ell \\ k \end{pmatrix} \mathbf{b}_{q-k,k}$$

Beachten Sie dass die Formeln fast identisch sind! Die erste Formel benutzt $i$ statt $\ell$ und die Faktoren der Multiplikationen sind teilweise vertauscht (beides macht mathematisch keinen Unterschied). Der einzige echte Unterschied besteht darin, dass die erste Formel sich auf $b_{i-k,k}^{[q-i]}$ bezieht, welches beim anwenden des de Casteljau-Algorithmus für eine Stelle $\xi$ berechnet wird, während die zweite Formel sich auf ein $\mathbf{b}_{q-k,k}$ bezieht, welches innerhalb der Bernstein-Bezier-Darstellung bereits gegeben ist.

Mit der ersten Formel können direkt die Ergebnisse für $\xi = 1$ und $\xi = 3$ berechnet werden.

Wir schauen uns die Verwendung der zweiten Formel genauer an: Um die zweite Formel nun hinsichtlich $\xi$ verwenden zu können müssen wir ein geeignetes Parameterintervall aus Aufgabenteil b) wählen. Für $\xi = 1$ ist dies $[1,2]$, also $(BB_2)$:

$$(BB_2) : \mathbf{P}(\xi) = \begin{pmatrix} 6.13 \\ 4.13 \end{pmatrix} B_{30}(\xi) + \begin{pmatrix} 7.75 \\ 4 \end{pmatrix} B_{21}(\xi) + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} B_{12}(\xi) + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} B_{03}(\xi)$$

Mit $q = 3$, $a = 1$ und $b = 2$ erhält man:

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{b}_{30} = \begin{pmatrix} 6.13 \\ 4.13 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}'(a) = 3(\mathbf{b}_{21} - \mathbf{b}_{30}) = \begin{pmatrix} 4.88 \\ -0.38 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}''(a) = 6(\mathbf{b}_{12} - 2\mathbf{b}_{21} + \mathbf{b}_{30}) = \begin{pmatrix} -2.25 \\ -5.25 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}'''(a) = 6(\mathbf{b}_{03} - 3\mathbf{b}_{12} + 3\mathbf{b}_{21} - \mathbf{b}_{30}) = \begin{pmatrix} -5.25 \\ 5.25 \end{pmatrix}$$

Für $\xi = 3$ ist dies z.B. $[3, 2]$, also $(BB_4)$ in umgekehrter Reihenfolge. ($(BB_3)$ umgekehrt ist auch möglich.)

$$(BB_4{}^*) : \mathbf{P}(\xi) = \begin{pmatrix} 4.38 \\ -0.13 \end{pmatrix} B_{30}(\xi) + \begin{pmatrix} 7.75 \\ 0 \end{pmatrix} B_{21}(\xi) + \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} B_{12}(\xi) + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} B_{03}(\xi)\,, \quad \xi \in [3, 2]$$

Mit $q = 3$, $a = 3$ und $b = 2$ erhält man:

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{b}_{30} = \begin{pmatrix} 4.38 \\ -0.13 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}'(a) = -3(\mathbf{b}_{21} - \mathbf{b}_{30}) = \begin{pmatrix} -10.13 \\ -0.38 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}''(a) = 6(\mathbf{b}_{12} - 2\mathbf{b}_{21} + \mathbf{b}_{30}) = \begin{pmatrix} -12.75 \\ 5.25 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}'''(a) = -6(\mathbf{b}_{03} - 3\mathbf{b}_{12} + 3\mathbf{b}_{21} - \mathbf{b}_{30}) = \begin{pmatrix} -5.25 \\ 5.25 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3 Approximation in Bernstein-Bézier-Darstellung (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll eine *approximierende Bernstein-Bézier-Kurve* (d.h. die Kurve interpoliert die Datenpunkte i.A. nicht) $\mathbf{P}(t)$ mit $t \in [a, b] = [0, 1]$ berechnet werden. Dabei seien die folgenden Datenpunkte und Parameter vorgegeben:

$$\mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$t_0 = 0\,, \quad t_1 = \frac{1}{4}\,, \quad t_2 = \frac{3}{4}\,, \quad t_3 = \frac{4}{4}$$

Weiter sei der Grad $q = 2$ der Bézierkurve vorgegeben.

a) Wieviele Kontrollpunkte und Bernstein-Polynome wird die approximierende Bézierkurve besitzen? Stellen Sie alle Bernstein-Polynome $B_{ij}(t)$ mit obigen Vorgaben auf.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Es gibt drei Kontrollpunkte, welche noch berechnet werden müssen und drei Bernstein-Polynome vom Grad 2:

$$\begin{aligned}
B_{20}(t) &= (1-t)^2 = B_{02}(1-t)\\
B_{11}(t) &= 2\cdot(1-t)\cdot t\\
B_{02}(t) &= t^2 = B_{20}(1-t)
\end{aligned}$$

b) Stellen Sie das Gleichungssystem in der Matrix-Form $\mathbf{d} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{b}$ auf, so dass gilt

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{P}(t_k) \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}(t_k) = \sum_{i+j=q} B_{ij}(t_k)\mathbf{b}_{ij}, \quad k = 0,1,2,3.$$

Berechnen Sie anschließend die Einträge der Matrix $\mathbf{B}$. Wieso kann dieses Gleichungssystem nicht direkt gelöst werden?

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Die Matrix-Form lautet:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{d}_0\\ \mathbf{d}_1\\ \mathbf{d}_2\\ \mathbf{d}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{20}(t_0) & B_{11}(t_0) & B_{02}(t_0)\\ B_{20}(t_1) & B_{11}(t_1) & B_{02}(t_1)\\ B_{20}(t_2) & B_{11}(t_2) & B_{02}(t_2)\\ B_{20}(t_3) & B_{11}(t_3) & B_{02}(t_3)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{b}_{20}\\ \mathbf{b}_{11}\\ \mathbf{b}_{02}\end{pmatrix}$$

Einträge der Matrix $\mathbf{B}$:

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 9 & 6 & 1\\ 1 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 16\end{pmatrix}$$

Es handelt sich um ein nicht-quadratisches, überbestimmtes Gleichungssystem. Es gibt also mehr Gleichungen als Unbekannte. Im allgemeinen kann es sein, dass es keine Lösung gibt, welche alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt.

c) Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass solch ein Gleichungssystem mit folgenden Umformungen im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate gelöst werden kann.

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{b}\\
\underbrace{\mathbf{B}^\mathsf{T}\cdot\mathbf{d}}_{\mathbf{d}^*} &= \underbrace{\mathbf{B}^\mathsf{T}\cdot\mathbf{B}}_{\mathbf{B}^*}\cdot\mathbf{b}\\
\mathbf{d}^* &= \mathbf{B}^*\cdot\mathbf{b}\\
(\mathbf{B}^*)^{-1}\cdot\mathbf{d}^* &= \mathbf{b}
\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{B}^*$ und die modifizierten Datenpunkte $\mathbf{d}^*$.
Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem und berechnen Sie die Kontrollpunkte $\mathbf{b}$.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

$$\mathbf{B}^* = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{256}\begin{pmatrix} 338 & 60 & 18 \\ 60 & 72 & 60 \\ 18 & 60 & 338 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}^* = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.19 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4.13 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2.69 \\ 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0^* \\ \mathbf{d}_1^* \\ \mathbf{d}_2^* \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet nun

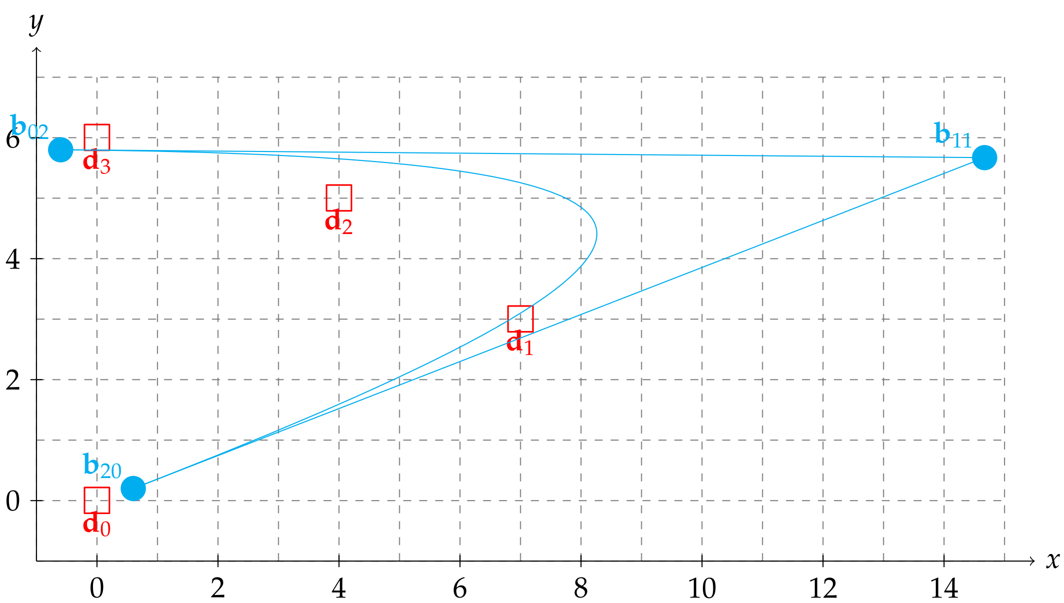
$$\mathbf{b} = (\mathbf{B}^*)^{-1} \cdot \mathbf{d}^* = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.83 & 0.1 \\ -0.83 & 4.94 & -0.83 \\ 0.1 & -0.83 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0^* \\ \mathbf{d}_1^* \\ \mathbf{d}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 14.67 \\ 5.67 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.6 \\ 5.8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{20} \\ \mathbf{b}_{11} \\ \mathbf{b}_{02} \end{pmatrix}$$

d) Fertigen Sie eine (erkennbare) Skizze an (mit verschiedenen Farben und / oder Symbolen), welche folgendes enthält:

- Die Datenpunkte
- Das Kontrollpolygon mit den Kontrollpunkten der approximierenden Kurve
- Den Verlauf der approximierenden Kurve

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**



### Aufgabe 4 B-Splines vom Grad 2 (6 Punkte)

Der Verlauf einer B-Spline Kurve vom Grad 2 lässt sich einfach per Hand konstruieren und soll hier untersucht werden. Dazu muss das Verhalten der B-Spline-Basisfunktionen genau betrachtet werden.

Gegeben sei ein allgemeiner Knotenvektor eines B-Splines vom Grad 2 im Intervall $[a, b]$ mit $k+1$ Spline-Segmenten:

$$\underbrace{x_{-2} = x_{-1}}_{\text{Hilfsknoten}} = \underbrace{x_0 = a}_{\text{Randknoten}} < \underbrace{x_1 < ... < x_k}_{\text{innere Knoten}} < \underbrace{x_{k+1} = b}_{\text{Randknoten}} = \underbrace{x_{k+2} = x_{k+3}}_{\text{Hilfsknoten}}$$

Weiter gehen wir davon aus, dass es **keine** vielfachen inneren Knoten gibt.

a) Wir wollen das Verhalten des B-Splines **an seinen Knoten** untersuchen und beginnen mit einem inneren Knoten, welcher nicht zu vielfachen Knoten benachbart ist, also an $x_j$ mit $1 < j < k$.

Welche zwei Basisfunktionen $B_i^2(x_j)$ sind am Knoten $x_j$ ungleich 0? Vereinfachen Sie diese zwei Basisfunktionen weitestmöglich, so dass sie nur von den umliegenden Knoten $x_{j-1}$, $x_j$ und $x_{j+1}$ abhängig sind. Stellen Sie anschließend die B-Spline-Funktion $\mathbf{S}(x_j)$ auf.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Zuerst grenzen wir ein, welche $B_i^2$ am Knoten $x_j$ nicht 0 sind. Laut Folien gilt mit $q = 2$

$$B_i^2(t) > 0, \;\; t \in (x_i, x_{i+3}) \,.$$

Somit sind nur zwei Basisfunktionen ($i = j-2$ und $i = j-1$) größer als 0:

$$B_{j-2}(x_j) > 0, \;\; t = x_j \in (x_{j-2}, x_{j+1})$$

$$B_{j-1}(x_j) > 0, \;\; t = x_j \in (x_{j-1}, x_{j+2})$$

Aus den Vorlesungsfolien entnehmen und vereinfachen wir folgende Formel für $i = j-2$ und $t = x_j$:

$$\begin{aligned} B_i^2(t) &= \frac{(x_{i+3}-t)^2}{(x_{i+3}-x_{i+1})(x_{i+3}-x_{i+2})} && \text{für } x_{i+2} \le t < x_{i+3} \\ B_{j-2}^2(t) &= \frac{(x_{j+1}-t)^2}{(x_{j+1}-x_{j-1})(x_{j+1}-x_j)} && \text{für } x_j \le t < x_{j+1} \\ B_{j-2}^2(x_j) &= \frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+1}-x_{j-1}} && \text{für } t = x_j \end{aligned}$$

Für $i = j-1$ entnehmen und vereinfachen wir folgende Formel:

$$\begin{aligned} B_i^2(t) &= \frac{(t-x_i)(x_{i+2}-t)}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} - \frac{(x_{i+1}-t)(x_{i+3}-t)}{(x_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+3}-x_{i+1})} && \text{für } x_{i+1} \le t < x_{i+2} \\ B_{j-1}^2(t) &= \frac{(t-x_{j-1})(x_{j+1}-t)}{(x_{j+1}-x_{j-1})(x_{j+1}-x_j)} - \frac{(x_j-t)(x_{j+2}-t)}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)} && \text{für } x_j \le t < x_{j+1} \\ B_{j-1}^2(x_j) &= \frac{x_j-x_{j-1}}{x_{j+1}-x_{j-1}} && \text{für } t = x_j \end{aligned}$$

Da alle anderen Basisfunktionen am Knoten $x_j$ gleich 0 sind ergibt sich für den B-Spline insgesamt die Formel

$$\mathbf{S}(x_j) = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} \cdot \mathbf{b}_{j-2} + \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} \cdot \mathbf{b}_{j-1}$$

b) Angenommen der Knotenvektor ist uniform, also $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ für $i = 0, ..., k$. Wo liegt der Punkt $\mathbf{S}(x_j)$? Beschreiben Sie die Lage auch in Worten.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Mit obiger Annahme vereinfacht sich die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(x_j) &= \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} \cdot \mathbf{b}_{j-2} + \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} \cdot \mathbf{b}_{j-j} \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta x} \cdot \mathbf{b}_{j-2} + \frac{\Delta x}{2\Delta x} \cdot \mathbf{b}_{j-j} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{b}_{j-2} + \frac{1}{2}\mathbf{b}_{j-1}
\end{aligned}$$

Der Punkt liegt in der Mitte zwischen den Kontrollpunkten $\mathbf{b}_{j-2}$ und $\mathbf{b}_{j-1}$.

c) Stellen Sie einen beliebigen Knotenvektor auf, so dass

$$\mathbf{S}(x_j) = \frac{4}{6}\mathbf{b}_{j-2} + \frac{2}{6}\mathbf{b}_{j-1}\,.$$

Welche Knoten sind dabei relevant?

*Bemerkung:* Wir haben in a) und b) einen Knoten und die Position des zugehörigen Punktes untersucht, welcher **nicht** zu vielfachen Knoten benachbart ist. Bei den Knoten $x_1$ und $x_k$ setzen sich die Basisfunktionen anders zusammen. Ohne Beweis sei aber vermerkt, dass die Auswertung des B-Splines an $x_1$ und $x_k$ identisch zu den untersuchten Knoten $x_j$ ist. Für die Randknoten und für vielfache Knoten gelten allerdings andere Vorschriften.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Folgende zwei Bedingungen müssen gelten:

$$\begin{aligned}
B^2_{j-2}(x_j) &= \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} = \frac{4}{6} \\
B^2_{j-1}(x_j) &= \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} = \frac{2}{6}
\end{aligned}$$

Die Umformung der ersten Gleichung liefert die Abhängigkeit

$$\begin{aligned}
\frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} &= \frac{4}{6} \\
6x_{j+1} - 6x_j &= 4x_{j+1} - 4x_{j-1} \\
-6x_j &= -2x_{j+1} - 4x_{j-1} \\
x_j &= \frac{2}{6}x_{j+1} + \frac{4}{6}x_{j-1}
\end{aligned}$$

Die Umformung der zweiten Gleichung ergibt die gleiche Abhängigkeit. Wir können nun $x_{j+1}$ und $x_{j-1}$ beliebig wählen und $x_j$ berechnen. Ein gültiger Knotenvektor ist somit

$$x_{j-1} = 0\,,\;\; x_j = 2\,,\;\; x_{j+1} = 6$$

d) Wir wollen nun die Tangente $\mathbf{S}'(x_j)$ an einem Knoten $x_j$ mit $1 < j < k$ berechnen. Zur Vereinfachung nehmen wir einen **uniformen** Knotenvektor mit $\Delta x = 1$ an.

Nehmen Sie hierzu die Basisfunktionen aus Aufgabenteil a), bilden Sie die Ableitungen $B_i^{2\prime}(t)$ der Funktionen und werten Sie diese an $t = x_j$ aus.

Stellen Sie nun die komplette Ableitung $\mathbf{S}'(x_j)$ der B-Spline-Funktion auf und beschreiben Sie die Ausrichtung der Tangente in Worten.

*Bemerkung:* Die Tangente verändert sich nicht bei einem nicht uniformen Knotenvektor, macht aber die Ableitung wesentlich komplexer. Lediglich die Länge der Tangente ändert sich mit anderem $\Delta x$ oder nicht uniformen Knotenvektor. Weiter schenken wir uns die Untersuchung der Tangente an den Knoten $x_1$ und $x_k$ mit benachbarten vielfachen Knoten. Das Ergebnis ist letztendlich das gleiche Tangentenverhalten.

Weiter sei vermerkt, dass ein B-Spline vom Grad 2 und einem doppelten Knoten $x_i$ den Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{i-1}$ mit mindestens $C^0$-Stetigkeit interpoliert, tangential zu den Geraden des Kontrollpolygons an $\mathbf{b}_{i-1}$.

**1 Punkt**

**Lösungsvorschlag**

Aus Aufgabenteil a) entnehmen wir die Gleichungen der beiden Basisfunktionen. Wir vereinfachen die Gleichungen durch den uniformen Knotenvektor, bilden die Ableitung und werten an $x_j$ aus:

$$\begin{aligned}
B_{j-2}^2(t) &= \frac{(x_{j+1}-t)^2}{(x_{j+1}-x_{j-1})(x_{j+1}-x_j)} \\
&= \frac{t^2 - 2tx_{j+1} + x_{j+1}^2}{2} \\
{B_{j-2}^2}'(t) &= \frac{1}{2}(2t - 2x_{j+1}) = t - x_{j+1} = t - x_j - 1 \\
{B_{j-2}^2}'(x_j) &= -1 \\
B_{j-1}^2(t) &= \frac{(t-x_{j-1})(x_{j+1}-t)}{(x_{j+1}-x_{j-1})(x_{j+1}-x_j)} - \frac{(x_j-t)(x_{j+2}-t)}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)} \\
&= \frac{(tx_{j+1} - t^2 - x_{j-1}x_{j+1} + tx_{j-1}) - (x_jx_{j+2} - tx_j - tx_{j+2} + t^2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(-2t^2 + tx_{j-1} + tx_j + tx_{j+1} + tx_{j+2} - x_{j-1}x_{j+1} - x_jx_{j+2}) \\
&= -t^2 + 2tx_j + t - x_j^2 - x_j + \frac{1}{2} \\
{B_{j-1}^2}'(t) &= -2t + 2x_j + 1 \\
{B_{j-1}^2}'(x_j) &= 1
\end{aligned}$$

Für die Ableitung des B-Splines an $x_j$ ergibt sich somit

$$\mathbf{S}'(x_j) = {B_{j-2}^2}'(x_j) \cdot \mathbf{b}_{j-2} + {B_{j-1}^2}'(x_j) \cdot \mathbf{b}_{j-1} = \mathbf{b}_{j-1} - \mathbf{b}_{j-2}$$

Die Gerade von Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{j-2}$ zum Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{j-1}$ ist somit die Tangente für den Punkt bei Knoten $x_j$.

e) Wenden Sie das erlangte Wissen an folgendem Beispiel an. Berücksichtigen Sie dabei die Bemerkungen aus den Aufgabenteilen c) und d).

Gegeben sei ein B-Spline zweiten Grades mit dem Knotenvektor

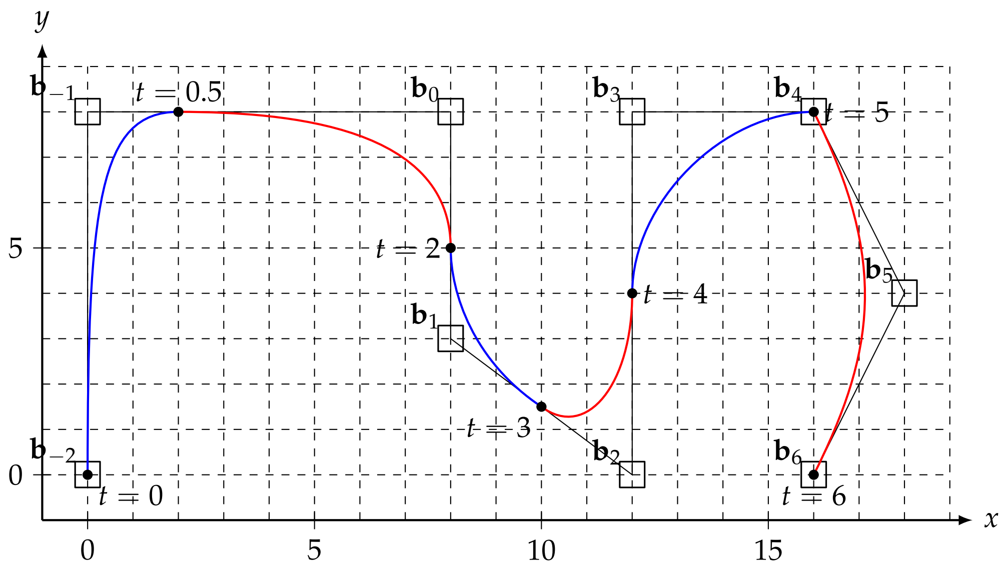
| $x_{-2}$ | $x_{-1}$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0.5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 |

und den Kontrollpunkten

$$\mathbf{b}_{-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_{0} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_{1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{2} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_{3} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_{4} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_{5} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_{6} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Punkte und Tangenten des B-Splines an allen Randknoten und inneren Knoten ein. Machen Sie dabei erkenntlich, welcher Punkt zu welchem Knoten gehört. Skizzieren Sie ebenfalls den Verlauf der Kurve.




**2 Punkte**

**Lösungsvorschlag**

Der B-Spline am Randknoten $x_0 = 0$ interpoliert den ersten Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{-2}$.

Der Knoten $x_1 = 0.5$ teilt die umliegenden Knoten $x_0 = 0$ und $x_2 = 2$ im Verhältnis 1 zu 3. Der B-Spline-Punkt liegt somit auf $\frac{1}{4}$ der Strecke von $\mathbf{b}_{-1}$ zu $\mathbf{b}_0$.

Der Knoten $x_2 = 2$ teilt die umliegenden Knoten $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 3$ im Verhältnis 3 zu 2. Der B-Spline-Punkt liegt somit auf $\frac{3}{5}$ der Strecke von $\mathbf{b}_0$ zu $\mathbf{b}_1$.

Der Knoten $x_3 = 3$ teilt die umliegenden Knoten $x_2 = 2$ und $x_4 = 4$ im Verhältnis 1 zu 1. Der B-Spline-Punkt liegt somit auf $\frac{1}{2}$ der Strecke von $\mathbf{b}_1$ zu $\mathbf{b}_2$.

Der Knoten $x_4 = 4$ teilt die umliegenden Knoten $x_3 = 3$ und $x_5 = 5$ im Verhältnis 1 zu 1. Der B-Spline-Punkt liegt somit auf $\frac{1}{2}$ der Strecke von $\mathbf{b}_2$ zu $\mathbf{b}_3$.

Der Knoten $x_5 = 5$ interpoliert den Kontrollpunkt $\mathbf{b}_4$

Der Knoten $x_7 = 6$ interpoliert den letzten Kontrollpunkt $\mathbf{b}_6$.

Die Geraden des Kontrollpolygons sind immer die Tangenten der B-Spline-Punkte an den Knoten.