GDV 2 – Theorie Übung 5

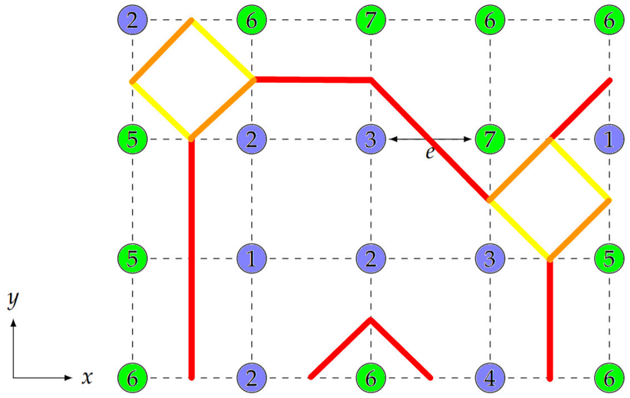
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommer Semester 2019
Übungsgruppe F

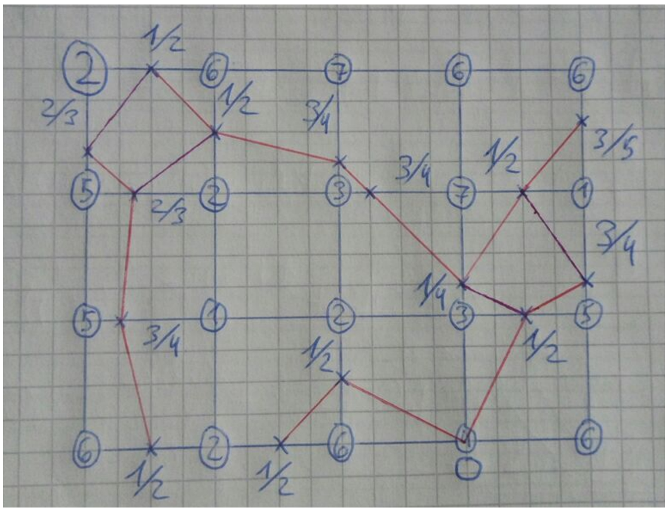
Aufgabe 1 Marching Cubes (3 Punkte)

a) 1 Punkt

Alle blauen Punkte sind innen, alle grünen außen. Die roten Linien sind die eindeutigen Kanten / Zellen und die Zellen mit den orangenen und gelben Linien sind uneindeutig. Hierbei kann entweder orange oder gelb gewählt werden.



b) 1 Punkt



c) 1 Punkt

$\nabla f_{2;2} = 1/2 * \binom{7-2}{7-2} = \binom{5/2}{5/2}$
$\nabla f_{3;2} = 1/2 * \binom{1-3}{6-3} = \binom{-1}{3/2}$
$\nabla f_s = 1/4 * \binom{-1}{3/2} + (1-\frac{1}{4})\binom{5/2}{5/2} = \binom{-1/4}{3/8} + \binom{15/8}{15/8} = \binom{13/8}{18/8} = \binom{1.625}{2.25}$

Aufgabe 2 Emissions-Absorptions Model (6 Punkte)

Dichtewert	q	k
1	0.1	0.1
2	0.4	0.2
3	0.9	0.3
5	2.5	0.5
6	3.6	0.6
7	4.9	0.7

Bilineare Interpolation über Stützpunkte R1 und R2:

$k(R_1) = \frac{4-3.5}{4-3} * 0.7 + \frac{3.5-3}{4-3} * 0.1 = 0.35 + 0.05 = 0.4$
$q(R_1) = 0.5 * 4.9 + 0.5 * 0.1 = 2.45 + 0.05 = 2.5$
$k(R_2) = 0.5 * 0.6 + 0.5 * 0.6 = 0.6$
$q(R_2) = 0.5 * 3.6 + 0.5 * 3.6 = 3.6$
$k(s_1) = \frac{3-2.75}{3-2} * k(R_1) + \frac{2.75-2}{3-2} * k(R_2) = 0.25 * 0.4 + 0.75 * 0.6 = 0.55$
$q(s_1) = 0.25 * 2.5 + 0.75 * 3.6 = 3.325$

Also ergibt sich $I(s_1)$ folgendermaßen, wobei man das Delta X einfach an der X-achse ablesen kann(Delta x = 0.5):

$I(s_1) = I(s_0) * e^{-k(s_1)*\Delta x} + q(s_1) * \Delta x = 0.5 * \frac{1}{e^{0.55*0.5}} + 3.325 * 0.5 = 2.042$

Nach dem selben Prinzip wird der Rest auch berechnet.

$q(R_3) = \frac{2-1.5}{2-1} * 0.4 + \frac{1.5-1}{2-1} * 0.9 = 0.2 + 0.45 = 0.65$
$k(R_3) = 0.5 * 0.2 + 0.5 * 0.3 = 0.1 + 0.15 = 0.25$
$q(R_4) = 0.5 * 3.6 + 0.5 * 4.9 = 4.25$
$k(R_4) = 0.5 * 0.6 + 0.5 * 0.7 = 0.65$
$k(s_2) = \frac{1}{4} * 0.25 + \frac{3}{4} * 0.65 = 0.55$
$q(s_2) = 0.25 * 0.65 + 0.75 * 4.25 = 3.35$
$I(s_2) = 2.042 * \frac{1}{e^{0.55*2}} + 3.35 * 2 = 7.379$

Und für s3 braucht man den ersten Schritt nicht, da sich der Punkt auf der y-Achse zwischen zwei Gitterpunkten befindet:

$k(s_3) = \frac{1}{4} * 0.5 + \frac{3}{4} * 0.2 = 0.275$
$q(s_3) = 0.25 * 2.5 + 0.75 * 0.4 = 0.925$
$I(s_3) = 7.779 * \frac{1}{e^{0.275*1.5}} + 0.925 * 1.5 = 6.272$

Und weil es so schön war nocheinmal das ganze für $\hat{s}$....

$q(R_5) = \frac{1}{2} * 0.9 + \frac{1}{2} * 2.5 = 1.7$
$k(R_5) = 0.5 * 0.3 + 0.5 * 0.5 = 0.4$
$q(R_6) = 0.5 * 4.9 + 0.5 * 0.1 = 2.5$
$k(R_6) = 0.5 * 0.7 + 0.5 * 0.1 = 0.4$
$k(\hat{s_1}) = \frac{1}{2} * 0.4 + \frac{1}{2} * 0.4 = 0.4$
$q(\hat{s_1}) = 0.5 * 1.7 + 0.5 * 2.5 = 2.1$
$I(\hat{s_1}) = 0.5 * \frac{1}{e^{0.4*0.5}} + 2.1 * 0.5 = 1.459$

Für $\hat{s2}$:

$q(R_7) = \frac{1}{2} * 0.1 + \frac{1}{2} * 0.4 = 0.25$
$k(R_7) = 0.5 * 0.1 + 0.5 * 0.2 = 0.15$
$q(R_8) = 0.5 * 0.4 + 0.5 * 0.9 = 0.65$

$k(R_8) = 0.5 * 0.2 + 0.5 * 0.3 = 0.25$
$k(\hat{s_2}) = \frac{1}{2} * 0.15 + \frac{1}{2} * 0.25 = 0.2$
$q(\hat{s_2}) = 0.5 * 0.25 + 0.5 * 0.65 = 0.45$
$I(\hat{s_2}) = 1.459 * \frac{1}{e^{0.2*2}} + 0.45 * 2 = 1.878$

Und $\hat{s3}$:

$k(\hat{s_3}) = 0.5$
$q(\hat{s_3}) = 0.5 * 2.5 + 0.5 * 2.5 = 2.5$
$I(\hat{s_3}) = 1.878 * \frac{1}{e^{0.5*1.5}} + 2.5 * 1.5 = 4.637$

Aufgabe 3 Bernstein-Bezier Dreiecke (6 Punkte)

a) 1.5 Punkte

Für z_0:

$$\lambda_0(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{0}{32} = 0$$

$$\lambda_1(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$\lambda_2(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{8}{32} = \frac{2}{4}$$

$B_{ijk}(z_0)$ wir für z_0 wie folgt berechnet $\frac{q!}{i!j!k!}\lambda_0^i\lambda_1^j\lambda_2^k$. Aus $\lambda_0 = 0$ er gibt sich:

$$p(z_0) = B_{030}(z_0)b_{030} + B_{021}(z_0)b_{021} + B_{012}(z_0)b_{012} + B_{003}(z_0)b_{003} = \frac{27}{64}13 + \frac{27}{64}6 + \frac{9}{64}2 + \frac{1}{64}4 = \frac{535}{64} = 8.359375$$

Daraus folgt:

$$\chi_p(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{535}{64} \end{pmatrix}$$

Für z_1:

$$\lambda_0(z_1) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1(z_1) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_1 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_2(z_1) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & z_1 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$B_{ijk}(z_1)$ wir für z_1 wie folgt berechnet $\frac{q!}{i!j!k!}\lambda_0^i \lambda_1^j \lambda_2^k$. Es gibt sich:

$$p(z_1) = \frac{1}{64}8 + \frac{3}{64}6 + \frac{6}{64}4 + \frac{3}{64}0 + \frac{12}{64}6 + \frac{12}{64}0 + \frac{1}{64}13 + \frac{6}{64}6 + \frac{12}{64}2 + \frac{8}{64}4 = \frac{227}{64}$$

Daraus folgt:

$$\chi_p(z_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \frac{227}{64} \end{pmatrix}$$

b) 1.5 Punkte

$$\tilde{\lambda}_0(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{0}{32} = 0$$

$$\tilde{\lambda}_1(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = \frac{0}{32} = 0$$

$$\tilde{\lambda}_2(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 1$$

Daraus Folgt dass alle $\tilde{B}_{ijk} = 0$ wenn nicht $k = 3$:

$$\tilde{p}(z_0) = \tilde{B}_{003}(z_0)b_{003} = 4$$

$$\tilde{\chi}_p(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_0(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 0$$

$$\hat{\lambda}_1(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 1$$

$$\hat{\lambda}_2(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & z_0 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 0$$

Daraus Folgt dass alle $\hat{B}_{ijk} = 0$ wenn nicht $j = 3$:

$$\hat{p}(z_0) = \hat{B}_{030}(z_0) b_{030} = 13$$

$$\hat{\chi}_p(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0^*(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 1$$

$$\lambda_1^*(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & z_0 & v_2 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 0$$

$$\lambda_2^*(z_0) = \frac{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & v_1 & z_0 \end{pmatrix})}{det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix})} = 0$$

Daraus Folgt dass alle $B_{ijk}^* = 0$ wenn nicht $i = 3$:

$$p^*(z_0) = B_{030}^*(z_0) b_{030} = 13$$

$$\chi_p^*(z_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

c) 1.5 Punkte

$$\lambda_0(\tilde{v}_2) = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1(\tilde{v}_2) = 1$$

$$\lambda_2(\tilde{v}_2) = -\frac{1}{2}$$

Durch die C^0 Bedingung:

$$\tilde{b}_{300} = b_{300} = 8, \tilde{b}_{210} = b_{210} = 6, \tilde{b}_{120} = b_{120} = 0, \tilde{b}_{030} = b_{030} = 13$$

Die C^1 Bedingung gibt uns:

$$\tilde{b}_{201} = 0.5 b_{300} + b_{210} - 0.5 b_{201} = 8$$

$$\tilde{b}_{111} = 0.5 b_{210} + b_{120} - 0.5 b_{111} = 0$$

$$\tilde{b}_{021} = 0.5 b_{120} + b_{030} - 0.5 b_{021} = 10$$

d) 1.5 Punkte

Die Koeffizienten gegeben durch die C^0 Bedingung ändern sich nicht im Vergleich zu Aufgabenteil c). Die Änderung sind:

$$\lambda_0(\tilde{v}_2) = \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1(\tilde{v}_2) = 0$$

$$\lambda_2(\tilde{v}_2) = -\frac{1}{2}$$

Die C^1 Bedingung gibt uns:

$$\tilde{b}_{201} = 1.5 b_{300} - 0.5 b_{201} = 10$$

$$\tilde{b}_{111} = 1.5 b_{210} - 0.5 b_{111} = 6$$

$$\tilde{b}_{021} = 1.5 b_{120} - 0.5 b_{021} = -3$$

Aufgabe 4 Splines auf Triangulierungen (5 Punkte)