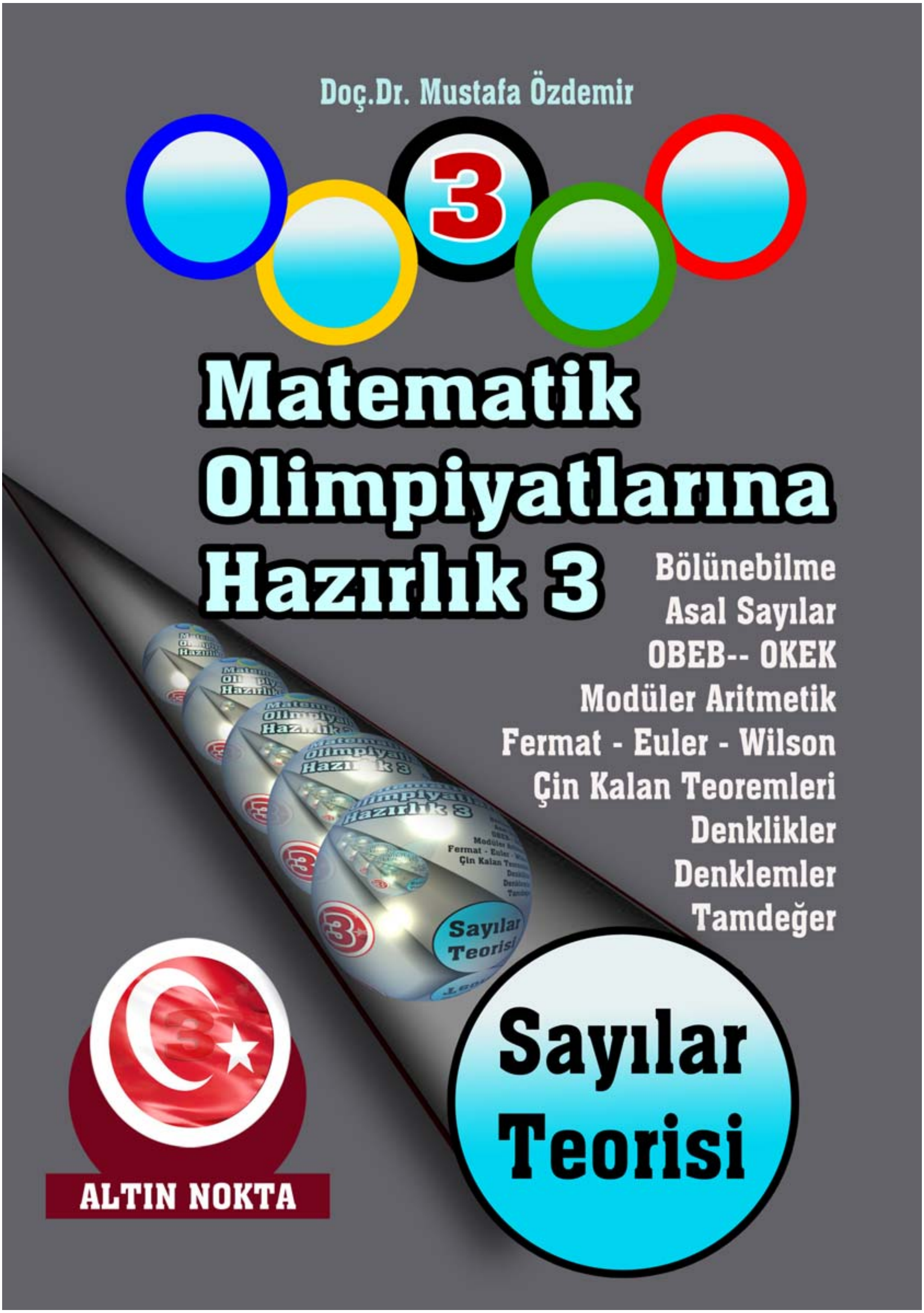
Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Cilt 3, SAYILAR TEORİSİ, Mustafa Özdemir

Book · November 2014

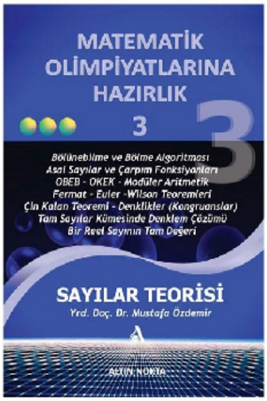
Mustafa Özdemir
Akdeniz University

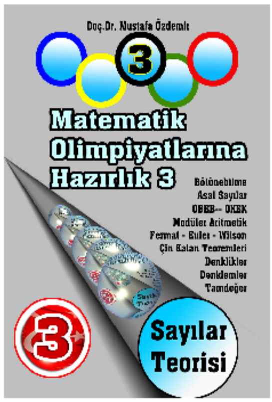
Çözümler Kitabın Orjinalindedir



SAYILAR TEORİSİ

Bu kitap üniversitelerimizin Matematik ve Matematik Eğitimi bölümlerinde okutulmakta olan **Sayılar Teorisi** derslerine de yardımcı olacaktır. Bunun yanında, sayılarla ilgili sıradışı ve kısmen zor problemler çözmek isteyen öğretmen ve öğrenciler için de, güzel bir kaynak olarak kullanılmaktadır. Lise Matematik yarışmalarında sorulan sorular, kitaba ilave edilmiştir.





BU KİTAPTA MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3
(Sayılar Teorisi)
KİTABINDA BULUNAN SORULAR BULUNMAKTADIR.

KİTAPTA BULUNAN, TEOREM İSPATLARI, KONU ANLATIMI ve ÇÖZÜMLERİN OLDUĞU KISIMLAR,
BU DÖKÜMANA KONULMAMIŞTIR.

Kitabın içeriği hakkında bir bilgi verilmesi amacıyla bu döküman hazırlanmıştır.
Konuların içeriğini ve soruların çözümlerini
MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi)
ALTIN NOKTA YAYINLARI
kitabında bulabilirsiniz.

Kitabın içeriğindeki konuları, Aşağıdaki İÇİNDEKİLER bölümünden inceleyebilirsiniz

Mustafa Özdemir

İrtibat İçin : mozdemir07@gmail.com
veya Altın Nokta Yayınevi

İçindekiler

BİRİNCİ BÖLÜM

Bölünebilme ve Bölme Algoritması

Bölme Algoritması	12
Bölünebilme Kuralları	15
Bölünebilme Problemlerinde En Çok Kullanılan Yöntemler	22
Çözümlü Test	25
Çözümler	28
Problemler (Bölünebilme)	34
Problemlerin Çözümleri	36
TÜBİTAK SORULARI (Bölünebilme)	43
TÜBİTAK SORULARININ ÇÖZÜMLERİ	46
ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI SORULARI	51

İKİNCİ BÖLÜM

Asal Sayılar ve Çarpım Fonksiyonları

De Polignac Formülü	57
Bir Tam Sayının Pozitif Bölenlerinin Sayısı	59
Bir Tam Sayının Pozitif Bölenlerinin Toplamı	61
Euler Fonksiyonu	63
Çarpım Fonksiyonu	65
Karışık Örnekler	69
Çözümlü Test	74
Çözümler	81
Problemler	95
Problemlerin Çözümleri	97
TÜBİTAK SORULARI (Asal Sayılar)	103
TÜBİTAK SORULARININ ÇÖZÜMLERİ	106
ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI SORULARI	112

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
OBEB - OKEK

OBEB (Ortak Bölenlerin En Büyüğü) 115
OKEK (Ortak Katların En Küçüğü) 116
Öklid Algoritması ve OBEB'in Kullanılması 118
OBEB ve Tam Sayı Katsayılı İki Bilinmeyenli Lineer Denklemler 123
Karışık Örnekler 125
Çözümlü Test 127
Çözümler 130
Problemler (OBEB - OKEK) 135
Problemlerin Çözümleri 137
TÜBİTAK SORULARI (OBEB - OKEK) 142
TÜBİTAK SORULARININ ÇÖZÜMLERİ 143
ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI SORULARI 145

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
Modüler Aritmetik

Mod Kavramı 147
Denklikler 149
Bölünebilirlik Testlerinin Modüler Aritmetik Yardımıyla Yapılması 153
Karışık Örnekler 158
Çözümlü Test 162
Çözümler 165
Problemler (Modüler Aritmetik) 171
Problemlerin Çözümleri 173
TÜBİTAK SORULARI (Modüler Aritmetik) 181
TÜBİTAK SORULARININ ÇÖZÜMLERİ 185
ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI SORULARI 192

BEŞİNCİ BÖLÜM
Fermat - Euler -Wilson - Çin Kalan Teoremleri

Fermat - Euler Teoremi 193
Bir Tam Sayının Mertebesi 196
Wilson Teoremi 198
Çin Kalan Teoremi 201
Karışık Örnekler 203

Çözümlü Test 207
Çözümler 212
Problemler (Fermat - Euler) 222
Problemlerin Çözümleri 224
TÜBİTAK SORULARI (Fermat - Euler) 231
TÜBİTAK SORULARININ ÇÖZÜMLERİ 234

ALTINCI BÖLÜM
Denklikler (Kongruanslar)
Doğrusal Denklikler 241
İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklikler 244
Denklik Sistemleri 246
Yüksek Mertebeden Denklikler 248
M Bileşik Sayısı için Mod$M$ de Yüksek Mertebeden Denkliler 250
p Asal Sayısı İçin modp^n de Denklikler 253
Çözümlü Test 258
Çözümler 260
TÜBİTAK SORULARI (Denklikler) 263
TÜBİTAK SORULARININ ÇÖZÜMLERİ 266

YEDİNCİ BÖLÜM
Tam Sayılar Kümesinde Denklem Çözümü
Lineer Diofan Denklemleri 275
Basit Bölünebilme Özellikleri ile Çözülebilen Denklemler 280
Çarpanlara Ayırma Kuralları Kullanılarak Çözülen Denklemler 281
Modüler Aritmetik Yardımıyla Çözülebilen Denklemler 283
Bilinmeyenleri Sınırlayarak Çözülebilen Denklemler 287
Simetriklik Kullanılarak Çözülebilen Denklemler 288
Tahmini Çözümden Genel Çözüme Ulaşma 291
Diskriminant Kullanılarak Çözülen Denklemler 292
Tam kare ve Tam küp Soruları 294
Karışık Örnekler 299
Çözümlü Test 308
Çözümler 315
TÜBİTAK SORULARI (Tam Sayılar Kümesinde Denklem Çözümü) 330

TÜBİTAK SORULARININ ÇÖZÜMLERİ 335
ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI SORULARI 345

SEKİZİNCİ BÖLÜM
Bir Reel Sayının Tam değeri
Bir Reel Sayının Tam değeri 347
Problemler 358
Problemlerin Çözümleri 359
Çözümlü Test 363
Çözümler 365
TÜBİTAK SORULARI (Tam değer) 370
TÜBİTAK SORULARININ ÇÖZÜMLERİ 372
ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI SORULARI 376

Çalışma Soruları 379
YANIT ANAHTARI 396

Bölünebilme ve Bölme Algoritması

Örnek 1 $a - c \mid ab + cd$ *ise* $a - c \mid ad + bc$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 2 $n^2 + 18n - 22$ *ifadesi* 103*'e tam bölünecek şekildeki* 1000*'den küçük en büyük* n *tamsayısı kaçtır?*

Örnek 3 $3n - 5$ *sayısı* $7n - 2$ *sayısını bölecek şekilde kaç tane* n *tamsayısı bulunabilir?*

1.1 Bölme Algoritması

Örnek 4 5*'in katı olmayan herhangi* n *tamsayısının karesinin bir fazlasının* 5*'e bölümünden elde edilebilecek kaç farklı kalan vardır?*

Örnek 5 ***a***) *Bir tamsayının karesinin* 4*'e bölümünden hangi kalan elde edilemez?*
b) *Bir tamsayının karesinin* 8*'e bölümünden hangi kalanlar elde edilebilir.*

Örnek 6 x, 3*'e bölünmeyen bir tek sayı olmak üzere*,

$$x^5 + x^3 + x^2 + 4x - 1$$

sayısının daima 6*'ya bölünebildiğini gösteriniz.*

Örnek 7 n, 1*'den büyük bir tamsayı olmak üzere*, 3^n *sayısının ardışık üç tek sayının toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.*

Örnek 8 6*'dan büyük her tamsayının aralarında asal olan iki tamsayının toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.*

Örnek 9 x, y *ve* z *tamsayılar olmak üzere*, *her tamsayının* $x^2 + y^2 - 5z^2$ *formunda yazılabileceğini gösteriniz.*

Örnek 10 *Üç elemanlı tüm altkümelerinin elemanları toplamı asal olan ve asal sayılardan oluşan bir kümenin;*

a) *Beş elemanlı kaç tane altkümesi vardır?*

b) *İçinde* 3 *asal sayısını bulunduran dört elemanlı kaç altkümesi vardır?*

Örnek 11 100*'den küçük pozitif sayılardan kaç tanesi*, m *ve* n *tamsayılar olmak üzere* $n^2 - m^2$ *formunda yazılamaz?*

1.2 Bölünebilme Kuralları

Örnek 12 $101, 1001, 10001, 100001, ..., 1\overbrace{00...00}^{101\ tane}1$ *sayılarından kaç tanesi* 11*'e bölünebilir?*

Örnek 13 *Aşağıdaki* 6 *basamaklı sayılardan hangisi* 7*'ye bölünmez?*

A) $aaaaaa$ *B*) $abcabc$ *C*) $ababab$ *D*) $aabbaa$ *E*) $a1a1a1$

Örnek 14 $\overline{a679b}$ *beş basamaklı sayısının*, 72*'ye bölünebilmesi için*, $a+b$ *kaç olmalıdır?* (*Kanada M.O.*- 1980)

Örnek 15 x, y, z, n *ve* m *rakamları için,* $\overline{xyz1n} \times 234 = \overline{332m842}$ *çarpma işlemi sağlanıyorsa*, $x+y+z+n+m = ?$

Örnek 16 *İlk* 99 *pozitif tamsayının art arda yazılmasıyla oluşan*, $12345...979899$ *sayısının* 45*'e bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 17 *En az* 100 *basamaklı* $a2007a2007a...a2007a$ *sayısının* 72 *ile tam bölünebilmesi için en az kaç basamaklı olması gerekir.*

Örnek 18 1320 *ve* 1452 *sayıları istenildiği kadar kullanılarak toplama*, *çıkarma ve çarpma işlemleriyle aşağıdaki sayılardan hangisi elde edilemez?*

A) $137\,676$ *B*) 1256676 *C*) $170\,676$ *D*) $10\,956$ *E*) $1917\,960$

Örnek 19 $a_1 = 1$ *ve* $a_n = 10a_{n-1} + 1$ *olmak üzere*, $n = 2, 3, ..., 1000$ *için* a_n *sayılarından kaç tanesi* 37*'ye bölünür?*

Örnek 20 $1, 2, 3, ..., 100$ *sayılarından hiçbir sayı diğerinin üç katı olmayacak şekilde bir grup sayı seçilecektir. Bu seçilecek sayı grubunun maksimum eleman sayısı kaçtır?*

Örnek 21 $15n$*'in her rakamı* 0 *veya* 8 *olacak şekilde en küçük pozitif* n *sayısı kaçtır?* (*AIME* 1984)

Örnek 22 $x^2 + 3y = 200$ *sayısının tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 23 7 *sayısının* $a^2 + b^2$ *sayısını bölmesi için gerek ve yeter şart*

$$7 \mid a \quad \text{ve} \quad 7 \mid b$$

olmasıdır. Gösteriniz.

Örnek 24 *n pozitif tamsayısı için,*

$$3n-1,\quad 5n+2,\ \ 4n+3,\quad 8n+3,\ \ 7n+5$$

sayılarının kaç tanesi bir tamkare olabilir.

Örnek 25 $x^2+4y-12z=122$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x,y,z) *tamsayı üçlüsü vardır?*

Örnek 26 $a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}$ *için,* $a^4+b^4+c^4+d^4+e^4=87$ *denkleminin çözümlerini bulunuz.*

Örnek 27 n^3+5n *sayısının her* n *pozitif tamsayısı için* 6*'ya bölünebildiğini ispatlayınız.*

Örnek 28 n *pozitif tamsayı olmak üzere,* n^5-5n^3+4n *sayısının daima* 120 *ile bölüneceğini gösteriniz.*

Örnek 29 $(n+127)(n+128)\cdots(n+141)$ *sayısı aşağıdakilerden hangisiyle bölünmeyebilir?*

A) 2^{10} *B*) 3^7 *C*) 5^3 *D*) 7^2 *E*) 143

Örnek 30 *Her n pozitif bir tamsayısı için* $n+3n^2+2n^3$ *ifadesinin 6'ya bölündüğünü gösteriniz.*

Örnek 31 $x,y,z\in\mathbb{Z}$ *için,* $x+y+z$ *sayısı* 6*'ya bölünüyor ise,* $x^3+y^3+z^3$ *sayısı da* 6*'ya bölünür. İspatlayınız.*

Örnek 32 $m\in\mathbb{Z}^+$ *olmak üzere, her n pozitif bir tamsayısı için*

$$R=(n+1)^{2m}-\left(n^{2m}+2n+1\right)$$

ifadesinin 6'ya bölündüğünü gösteriniz.

Örnek 33 *n pozitif tamsayısı için,* n *sayısının rakamları toplamı* $S(n)$ *olsun. Buna göre,* $n+S(n)=2008$ *eşitliğini sağlayan kaç* n *sayısı vardır?*

1.3 Bölünebilme Problemlerinde En Çok Kullanılan Yöntemler

1.3.1 Çarpanlara Ayırma Kurallarının Kullanılması

Örnek 34 $2009^n - 209^n - 839^n + 92^n$ *sayısının tüm* n *pozitif tamsayıları için* 117*'ye bölünebildiğini gösteriniz?*

Örnek 35 $118^{13} - 1$ *sayısının* 169*'a bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 36 $3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1$ *sayısının* 1930 *ile bölünebildiğini gösteriniz.*

1.3.2 Binom Açılımının Kullanılması

Örnek 37 3^{100} *sayısının* 100*'e tam bölünebilmesi için en küçük hangi pozitif tamsayı çıkarılmalıdır?*

Örnek 38 n *pozitif tamsayısı için*, $3^{2^n} + 1$ *sayısının* 2*'ye bölünebildiğini fakat* 4*'e bölünemediğini ispatlayınız.*

Örnek 39 2^n *sayısı* $3^{128} - 1$ *sayısını bölecek şekildeki en büyük* n *pozitif tamsayısını bulunuz.*

1.3.3 Tümevarımın Kullanılması

Örnek 40 *Her* $n \geq 1$ *için*, $3^{3n+3} - 26n - 27$ *sayısının* 169*'a bölünebildiğini gösteriniz.*

1.3.4 Güvercin Yuvası İlkesinin Kullanılması

Örnek 41 n *tane* 1997 *sayısının yan yana yazılmasıyla elde edilen*, $4n$ *basamaklı* $199719971997...1997$ *sayısı* 1999*'a tam bölünecek şekilde bir* n *sayısının bulunduğunu gösteriniz.*

Örnek 42 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere*, $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ *çarpımının* 12*'ye tam bölündüğünü gösteriniz.*

Örnek 43 *Herhangi üç tamsayıdan* $a^3b - ab^3$ *sayısı* 10*'a bölünebilecek şekilde iki* a *ve* b *sayısı seçilebileceğini gösteriniz.*

Örnek 44 $1, 2, 3, ..., 1000$ *sayıları arasından seçilecek* 501 *sayı arasında biri diğerine bölünen iki sayının mutlaka olduğunu gösteriniz.*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

1.4 Çözümlü Test

1. $n^2 - 14n - 48$ sayısı 97'ye tam bölünecek şekildeki 2009'dan küçük pozitif n tamsayılarından kaç tanesi için, $3n - 2$ sayısı $71n + 49$ sayısını bölmez?

A) 19 B) 16 C) 14 D) 20 E) 21

2. $11, 111, 1111, 11111$, ... sayılarının kaç tanesi bir tamsayının karesidir?

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) Sonsuz sayıda

3. 1000'den küçük kaç tane n pozitif tamsayısı için, $n^2 + 33$ sayısı 34'e kalansız bölünebilir?

A) 50 B) 56 C) 64 D) 54 E) 59

4. $n(2n-1)$ sayısının tüm rakamlarının toplamı 911 olacak şekilde kaç tane n doğal sayısı vardır?

A) $6!$ B) 16 C) 64 D) 0 E) 114

5. Kaç tane n pozitif tamsayısı için, $4^n + 2^{n+1} + 2$ ifadesi 3'e tam bölünür?

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) Sonsuz sayıda

6. $\{16, 17, 18, ..., n\}$ kümesinin farklı 15 elemanı $a_1, a_2, ..., a_{15}$ seçiliyor. Bu 15 elemanın, a_k sayısı k sayısının bir katı olacak şekilde olması için, n en küçük kaç olmalıdır?

A) 32 B) 33 C) 34 D) 35 E) 37

7. 3^{1000} sayısının ondalık formundaki yazılışının rakamları toplamı a olsun. a sayısının rakamları toplamı da b ve b sayısının rakamları toplamı da c olsun. c sayısını bulunuz. (Avusturya – Polonya M.O. 1981)

A) 27 B) 18 C) 9 E) 12 E) 3

8. 10 rakamlı bütün pozitif tamsayıların toplamının 81'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 63 B) 28 C) 45 D) 50 E) 40

9. $S = 5+55+555+5555+\cdots+\overbrace{555...55}^{100 \text{ tane}}$ toplamının 9'a bölümünden kalan kaçtır?

A) 3 B) 0 C) 5 D) 4 E) 7

10. $a^2+b^2+c^2$ sayısı 26 sayısını bölecek şekilde, kaç tane üç basamaklı $\overline{abc}$ sayısı vardır? (CENTRO Amerikan M.O.- 2000)

A) 6 B) 12 C) 11 D) 17 E) 3

11. n^2 sayısı $n!$ sayısını bölemeyecek şekilde 50'den küçük kaç tane n pozitif tamsayısı vardır? (SSCB M.O. 1964)

A) 16 B) 15 C) 19 D) 7 E) 23

12. n sayısı rakamları toplamı 2009 olan bir sayı olduğuna göre,

$$1+2+3+\cdots+m = n$$

olacak şekilde kaç tane m sayısı vardır?

A) 6 B) 2 C) 5 D) 0 E) 1

13. Kendisinden ve 1'den farklı her bir pozitif d böleni, $n-20 \leq d \leq n-12$ koşulunu sağlayan kaç tane n bileşik sayısı vardır?

A) 6 B) 2 C) 5 D) 0 E) 4

14. 154'e bölündüğünde 9 kalanını veren ve iki asal sayının toplamı veya farkı şeklinde yazılan kaç tane pozitif tamsayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 4

15. $[40, a]$ aralığında 3'e tam bölündüğü halde 7'ye tam bölünemeyen 30 tamsayı olduğuna göre, a'nın en küçük değeri kaçtır?

A) 144 B) 139 C) 135 D) 140 E) Hiçbiri

16. n pozitif tamsayısı için, n sayısının rakamları toplamı $S(n)$ olsun.

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2007$$

eşitliğini sağlayan kaç n sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 4

17. 1 ile 1000 arasındaki tamsayılardan kaç tanesi negatif olmayan iki tamsayının kareleri farkı olarak yazılabilir? (AIME 1997)

A) 400 B) 750 C) 500 D) 250 E) Hiçbiri

18. 3, 15, 24, 48, ... şeklinde tamkarelerin 1 eksiği 3'e bölünen sayıların sıralanmasıyla elde edilen sayılardan 1994'üncü terimin 1000 ile bölümünden kalan kaçtır? (AIME 1994)

A) 63 B) 45 C) 143 D) 240 E) 992

19. Rakamlarından biri 3 olan, ve sadece iki rakamı sıfırdan farklı olan, 10^7 sayısından küçük kaç tane tamkare vardır? (CENTRO Amerikan M.O. 2001)

A) 16 B) 3 C) 5 D) 0 E) 14

20. $n \cdot 2^{n-1}$ tamkare olacak şekilde 100'den küçük kaç tane n pozitif tamsayısı vardır?

A) 17 B) 11 C) 15 D) 14 E) 12

21. $5^n + n$ sayısı 31'e bölünecek şekildeki 31'den büyük en küçük pozitif n tamsayısı kaçtır?

A) 48 B) 58 C) 68 D) 78 E) 88

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

1.5 Problemler (Bölünebilme)

1. 6 *ile aralarında asal olan bir tamsayının karesinin* 1 *eksiğinin daima* 24*'e bölünebildiğini gösteriniz.*

2. n *pozitif tamsayısı için*, $n^4 - n^2$ *sayısının daima* 12*'ye bölünebildiğini gösteriniz.*

3. $3n+1$ *bir tamkare ise* $n+1$ *sayısının üç tamkarenin toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.*

4. 3^n *basamaklı* $111...11$ *sayısının* 3^n *ile bölündüğünü gösteriniz.*

5. k *tek sayı ise*, $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ *sayısının* $1+2+\cdots+n$ *sayısına tam bölündüğünü gösteriniz.* (Kanada M.O.- 1986)

6. 10*'un katı olmayan iki basamaklı bir* n *sayısı veriliyor.* n *sayısı rakamları toplamına bölünebilmektedir. Bu sayının* 3*'ün bir katı olması gerektiğini gösteriniz.*

7. *Her* n *pozitif tamsayısı için*, $n^5 - n$ *sayısının* 5*'e bölündüğünü gösteriniz.*

8. n *pozitif tamsayısı için*, $2n+1$ *ve* $3n+1$ *sayıları tamkare olduğuna göre* n *sayısının* 40*'a bölünebildiğini gösteriniz.*

9. 19*'dan* 80*'e kadar tüm iki basamaklı sayılar arka arkaya yazılarak*,

$$19202122...77787980$$

sayısı elde ediliyor. Bu sayının 1980*'e tam bölünebildiğini gösteriniz.* (SSCB 1980)

10. *Verilen* 5 *tamsayıdan*, *toplamı* 3*'e bölünebilecek şekilde üç tamsayının seçilebileceğini gösteriniz.* (Kanada M. O. 1970)

11. 6*'ya bölünen her sayının dört tane tamsayının küpleri toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.*

12. *Her tamsayı*, 5 *tane*, *sayının küpleri toplamı olarak yazılabildiğini gösteriniz.*

13. *Herhangi ardışık üç tamsayının toplamının bu sayıların küpleri toplamını böldüğünü gösteriniz.*

14. m *pozitif tamsayı olmak üzere*, $(1000^m - 1) \nmid (2000^m - 1)$ *olduğunu gösteriniz.*

15. $a, b \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere,* $13 \mid a + 4b$ *ise* $13 \mid 10a + b$ *olduğunu gösteriniz.*

16. $a, b \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere,* $a^2 + ab + b^2$ *sayısı* 9 *ile bölünüyor ise*, *hem* a *hem de* b *sayısının* 3*'e bölüneceğini ispatlayınız.*

17. n *bir pozitif tamsayı olmak üzere*, $n(n+1)$ *sayısının* 1*'den büyük tamsayının kuvveti olamayacağını ispatlayınız.*

18. *Herhangi biri sıfır olmayan üç tane ardışık sayının çarpımının bir tamsayının bir kuvveti olamayacağını gösteriniz.*

19. $n > 2$ *pozitif tamsayısı için*, $2^n - 1$*'in* 3*'ün bir kuvveti olamayacağını ispatlayınız.*

20. n *pozitif tamsayısı için*, $2n+1$ *ve* $3n+1$ *sayıları tamkare ise*, $5n+3$ *asal değildir. Gösteriniz.*

21. S *kümesi üç elemanlı ve herhangi iki elemanın toplamı tamkare olan bir küme ise*, *kümenin elemanlarından en çok birinin tek sayı olabileceğini ispatlayınız. Örneğin*, $\{5, 20, 44\}$.

22. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere,* $a^2 + b^2 + c^2$ *sayısı* 16*'ya tam bölünüyorsa* $a^3 + b^3 + c^3$ *sayısı da* 64*'e tam bölünür. Gösteriniz.*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

1.6 TÜBİTAK Olimpiyat Soruları (Bölünebilme)

1. Kaç n tamsayısı için, n^3+4 sayısı n^2-n+1 sayısı ile bölünür?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

UİMO - 2007

2. n'nin kaç değişik tamsayı değeri için $\dfrac{n^2}{n+4}$ tamsayı olur?

A) 3 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

UİMO - 1997

3. Kaç farklı n tamsayısı için, $\dfrac{5n-17}{3n-5}$ bir tamsayı olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

UİMO - 2007

4. 1000'den küçük kaç n doğal sayısı için $n^2+8n-85$ ifadesi 101'e bölünür?

A) 0 B) 2 C) 6 D) 9 E) Hiçbiri

UİMO - 2008

5. 143 ve 253 sayılarını istediğimiz kadar kullanarak, toplama, çıkarma ve çarpma işlemleriyle aşağıdaki sayılardan hangisini elde edemeyiz?

A) 135740 B) 218009 C) 780811 D) 6050704 E) 566500

UİMO - 1997

6. On tabanına göre $\overline{a627b}$ şeklinde verilen 5 basamaklı sayı 56'ya bölündüğünde 4 kalanını veriyor. Buna göre, $a+b$ kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) Hiçbiri

UİMO - 1999

7. $n(2n-1)$ sayısının ondalık yazılımının basamakları toplamının 2000 olmasını sağlayan kaç n pozitif tamsayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) Sonsuz Çoklukta E) Hiçbiri

UİMO - 2001

8. $x, y \in \{0, 1, ..., 9\}$ olmak üzere ondalık yazılımı $\overline{2x57y3}$ olan bir sayının 33'e bölünmesini sağlayan kaç (x, y) sıralı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UİMO - 2002

9. Yan yana yazılmış 123456789 rakamlarından bazılarının arasına $+$ işareti koyularak oluşturulan bir toplam aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 144 B) 153 C) 189 D) 375 E) 486

UİMO - 2008

10. n ve $n+1$ pozitif tamsayılarının her ikisinin de rakamlarının toplamı 53'e bölünüyorsa, n en az kaç basamaklıdır?

A) 6 B) 7 C) 12 D) 13 E) 17

UİMO - 2008

11. Öğretmen, tahtaya 8 pozitif tamsayı yazıyor, ve Betül bu sayılardan ikisinin 2'ye, üçünün 3'e, dördünün 4'e, beşinin 5'e, altısının 6'ya, yedisinin 7'ye, ve sekizinin 8'e bölündüğünü söylüyor. Betül en az kaç hata yapmıştır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

UİMO - 2008

12. On tabanında basamaklarından birini 4, birini 6, diğer ikisini de istenilen herhangi iki a ve b rakamlarının oluşturduğu ve değeri $46(10a+b)$'ye eşit olan kaç tane dört basamaklı sayı vardır?

A) 6 B) 3 C) 12 D) 0 E) 1

UİMO - 2004

13. 7 sayısı $2, 22, 222$, ..., dizisinin kaç terimini böler?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 7 E) Sonsuz sayıda

UMO - 2005

14. Tüm basamaklarındaki rakamlar birbirinden farklı olan ve 11111 ile bölünen on basamaklı kaç tamsayı vardır?

A) 0 B) 1264 C) 2842 D) 3456 E) 11111

UMO - 2000

15. Bir n doğal sayısı 48'e bölündüğünde kalan 47 oluyor. Aynı sayı 49'a bölündüğünde ise kalan yine 47'dir. Bu n sayısı 42'ye bölününce kalan ne olur?

A) 5 B) 7 C) 13 D) 24 E) 41

UMO - 1995

16. d tamsayısının kaç farklı değeri için, her biri d ile bölünen ve toplamları 999 olan 49 pozitif tamsayı bulunabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

UMO - 2006

17. Tüm basamakları 0'dan farklı olan ve basamaklarındaki rakamlar nasıl sıralanırsa sıralansın oluşan sayıların hepsinin 7'ye bölündüğü kaç tane altı basamaklı pozitif tamsayı vardır?

A) 11 B) 77 C) 133 D) 166 E) 255

UMO - 2005

18. Eğer n pozitif tamsayısına bölünen her tamsayı, basamaklarının yerleri nasıl değiştirilirse değiştirilsin yine n'ye bölünüyorsa, n'ye "iyi" sayı diyelim. Kaç iyi sayı vardır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 12 E) Sonsuz Sayıda

UMO - 2008

19. Ondalık yazılımı beş basamaklı bir sayının binler basamağı 3 olup, bu sayı 37 ve 173'e bölünüyorsa, bu sayının yüzler basamağı kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

UMO - 2002

20. $n!(2n+1)$ ve 221 sayılarının aralarında asal olmasını sağlayan kaç n pozitif tamsayısı vardır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) Hiçbiri

UMO - 2007

21. $5^{256}-1$ sayısı 2^n'e bölünüyorsa, n en çok kaç olabilir?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) Hiçbiri

UMO - 2002

22. On tabanına göre yazılımı 50 basamaklı olan bir N tamsayısının soldan 26'ncı basamağı dışındaki bütün basamaklarında 1 rakamı bulunuyor ve N sayısı 13'e tam bölünüyor ise, N'nin yazılımında soldan 26'ncı rakam nedir?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 8 E) Veriler yetersizdir

UMO - 2000

23. Ondalık yazılımında 0'dan farklı olan tüm rakamlarına bölünen pozitif bir tamsayıya “özel sayı” diyelim. En fazla kaç ardışık özel sayı vardır?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 14

UMO - 2008

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

1.7 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyat Soruları (Bölünebilme)

1. n sayısının kaç tane tamsayı değeri için n^3+3 sayısı n^2-n-1'e tam bölünür?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) Sonsuz

Antalya M.O.- 1997

2. $1 \leq x \leq 1000$, $1 \leq y \leq 1000$ olmak üzere, x^2+y^2 sayısı 49'a bölünecek biçimde kaç tane (x,y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 30416 B) 20164 C) 10153 D) 400 E) 142

Antalya M.O.- 1997

3. $A = 2^{1998}$ sayısının onluk sayı sistemindeki yazılışında en baştaki rakam silinip en sona yazılarak B sayısı elde ediliyor. $|A-B|$'nin rakamlar toplamına a, a'nın rakamlar toplamına b ve b'nin rakamlar toplamına da c denirse, c'nin rakamlar toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 18 C) 9 D) 19 E) $1+9+9+8$

Antalya M.O.- 1998

4. $n^{1998}-1$ sayısının 10'a tam bölünmesini sağlayan, 2000'den küçük kaç tane pozitif n tamsayısı vardır?

A) 200 B) 300 C) 400 D) 600 E) 800

Antalya M.O.- 1999

5. $3^3+5^3+7^3+\cdots+1999^3$ sayısı 999000 sayısına bölündüğünde kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1997 B) 998 C) 1998 D) 999 E) 0

Antalya M.O.- 1999

6. $\dfrac{17x-5}{6}$ ve $\dfrac{14x+5}{9}$ sayılarının ikisi de tamsayı olacak biçimde kaç tane x tamsayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

Antalya M.O.- 2003

7. a, b, c, d pozitif tamsayılar ve $c>7$, $d>7$ olmak üzere, $a-25=c\cdot d$ ve $37a+76=b\cdot d$ eşitliklerini sağlayan en küçük a sayısının 5'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Antalya M.O.- 2007

Asal Sayılar ve Çarpım Fonksiyonları

Örnek 45 $n^5 + n^4 + 1$ *sayısı asal olacak şekilde kaç* n *pozitif tamsayısı vardır?*

Örnek 46 *Eğer* p *asal değilse* $2^p - 1$ *sayısının da asal olamayacağını gösteriniz.*

Örnek 47 p *sayısı* 2*'nin bir kuvveti değilse*, $2^p + 1$ *sayısının asal olamayacağını gösteriniz.*

Örnek 48 $\dfrac{2^{58}+1}{5}$ *sayısının asal olmadığını gösteriniz.*

Örnek 49 $3n - 10, 6n - 13$ *ve* $5n - 13$ *sayılarının üçü de asal sayı olacak şekilde kaç tane* n *pozitif tamsayısı vardır?*

Örnek 50 27000001 *sayısı* 4 *tane asal sayının çarpımı olduğu bilindiğine göre*, *bu asal sayıların en büyüğü kaçtır?*

Örnek 51 $p - 4$ *sayısı bir tamsayının dördüncü kuvveti olacak şekilde kaç tane* p *asal sayısı vardır?*

Örnek 52 3*'ten büyük her asal sayının* $6n+1$ *veya* $6n-1$ *şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.*

Örnek 53 3*'ten büyük bir asal sayının karesinin* 12*'ye bölümünden kalanın* 1 *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 54 *Kaç tane* p *asal sayısı için*, $p^2 + 21p - 1$ *sayısı da asaldır?*

★ **Teorem 2.1.** *Sonsuz sayıda asal sayı vardır.*

İspat :

★ **Teorem 2.2.** 3*'e bölündüğünde* 2 *kalanını veren sonsuz sayıda asal sayı vardır?*

İspat :

★ **Teorem 2.3.** $4k - 1$ *formunda sonsuz sayıda asal sayı vardır?*

İspat :

★ **Teorem 2.4.** (*Dirichlet*) a *ve* b *aralarında asal iki pozitif tamsayı olmak üzere*, $ax + b$ *biçiminde yazılan sonsuz sayıda asal sayı vardır.*

★ **Teorem 2.5.** a, b *ve* c*, herhangi ikisi aralarında asal olan pozitif tamsayılar olmak üzere,* $ax^2 + bxy + cy^2$ *biçiminde yazılan sonsuz sayıda asal vardır.*

Örnek 55 *Sonsuz sayıda p asal sayısı için, $n^2+n+1=mp$ denklemini sağlayan (m,n) tamsayı çiftinin bulunduğunu gösteriniz.*

Örnek 56 *Tamamı asal olmayan en fazla kaç tane ardışık sayı bulunabilir? Örneğin, hiçbiri asal olmayan ardışık 100000000 sayı bulmak mümkün müdür?*

★ **Teorem 2.6.** *Her hangi k sayısı için ardışık k tane bileşik sayı daima bulunabilir.*

İspat : $(k+1)!+2$, $(k+1)!+3$,..., $(k+1)!+k+1$ sayıları k tanedir ve tümü bileşik sayıdır.

★ **Teorem 2.7.** (**Aritmetiğin Temel Teoremi**) *1'den büyük her tamsayı asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türlüdür.*

Yani, 1'den büyük her n tamsayısı, $p_1, p_2, ..., p_k$ farklı asal sayılar ve $r_1, r_2, ..., r_k$ sayıları pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazılışa, n sayısının asal çarpanlarına göre yazılmış hali denir. Bu yazılışı tek türlüdür. Bu yazılışı,

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i} = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

şeklinde yazabiliriz.

2.1 De Polignac Formülü

Örnek 57 $1000!$ *sayısının sonunda kaç tane 0 vardır?*

Örnek 58 $\dfrac{50!}{25!}$ *sayısı aşağıdakilerden hangisiyle bölünemez?*

A) 2^{25} *B*) 3^{12} *C*) 5^7 *D*) 7^5 *E*) 1517

Örnek 59 *İlk 100 tek sayının çarpımı P olsun. P sayısı, 3^k ile bölünecek şekildeki en büyük k sayısı kaçtır?* (*AIME* 2006)

2.2 Bir Tamsayının Pozitif Bölenlerinin Sayısı

Örnek 60 *Pozitif bölenlerinin sayısı 6 olan 100'den küçük olan kaç sayı vardır?*

Örnek 61 *a ve b sayılarının pozitif bölenlerinin sayısı sırasıyla 9 ve 15'dir.*
$a-b=101$ olduğuna göre $a+b=?$

Örnek 62 *p_1 ve p_2 asal sayılar olduğuna göre, $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$, $n_1 \neq n_2$ ve $n_1, n_2 \geq 1$ olmak üzere, n^2 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı $\tau\left(n^2\right) = 81$ olduğuna göre, $\tau\left(n^3\right)$ kaçtır.*

Örnek 63 *60^4 sayısının farklı pozitif bölenlerinin çarpımını bulunuz.*

Örnek 64 *2010'u böldüğünde 10 kalanı elde edilen kaç tane pozitif tamsayı vardır?*

Örnek 65 *$xyz = 4000$ olacak şekilde kaç tane (x, y, z) pozitif tamsayı üçlüsü vardır?*

2.3 Bir Tamsayının Pozitif Bölenlerinin Toplamı

Örnek 66 *Pozitif bölenlerinin toplamı 30 olan kaç tamsayı vardır?*

Örnek 67 *Pozitif bölenlerinin toplamı 45 olan kaç tamsayı vardır?*

Örnek 68 *Pozitif bölenlerinin toplamı 12 olan sayıları bulunuz.*

Örnek 69 *10^4 sayısının pozitif bölenlerinden çift olanlarının toplamını bulunuz.*

Örnek 70 *$S(n)$, n sayısının pozitif bölenlerinin kümesi olmak üzere,*

$$A(n) = \sum_{k \in \tau(n)} \frac{1}{k}$$

olarak tanımlanıyor. Buna göre, $A(2009)$ toplamını bulunuz.

2.4 Euler Fonksiyonu

Örnek 71 *1 ile 100 arasında (100 dahil), 100'den küçük 100 ile aralarında asal olan kaç pozitif tamsayı vardır?*

Örnek 72 *1 ile 360 arasında $2, 3$ veya 5'e bölünemeyen kaç tamsayı vardır?*

Örnek 73 *$\varphi(n)$, n sayısının Euler fonksiyonunu göstermek üzere, herhangi p asal sayısı için, $1 + \varphi(p) + \varphi\left(p^2\right) + \cdots + \varphi(p^n) = p^n$ olduğunu gösteriniz.*

★ **Teorem 2.8.** $\varphi(n) = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)$'dir.

İspat :

Örnek 74 *$\varphi(n)$, n sayısının Euler fonksiyonunu göstermek üzere, $\varphi(n) = n/2$ olacak şekilde 100'den küçük kaç tane n sayısı vardır?*

Örnek 75 *60'dan küçük olan ve 60 ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?*

2.5 Çarpım Fonksiyonu

★ **Teorem 2.9.** *Bir tamsayının pozitif bölenlerinin sayısı $\tau(n)$ fonksiyonu ve bir tamsayının pozitif bölenlerinin toplamı $\sigma(n)$ fonksiyonu çarpımsal fonksiyonlardır.*
İspat :

Örnek 76 *Bir n sayısının asal çarpanları ile yazılımı $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r2} \cdot p_3^{r_3} \cdots p_k^{r_k}$ olsun. Bu durumda n sayısının pozitif bölenlerinin sayısının*

$$\tau(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1)(r_3 + 1) \cdots (r_k + 1)$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 77 *Bir n sayısının asal çarpanları ile yazılımı $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r2} \cdot p_3^{r_3} \cdots p_k^{r_k}$ olsun. Bu durumda n sayısının pozitif bölenlerinin toplamının,*

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{r_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{r_2+1} - 1}{p_2 - 1} \frac{p_3^{r_3+1} - 1}{p_3 - 1} \cdots \frac{p_k^{r_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

olduğunu gösteriniz.

★ **Teorem 2.10.** *f bir çarpım fonksiyonu ise*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

fonksiyonu da çarpım fonksiyonudur.
İspat :
★ **Teorem 2.11.** *φ Euler fonksiyonu da bir çarpım fonksiyonudur. Yani, m ve n aralarında asal sayılar olmak üzere, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ eşitliği sağlanır.*

Örnek 78 *$\varphi(n)$, Euler fonksiyonunu göstermek üzere, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 79 *$\varphi(n)$, Euler fonksiyonunu göstermek üzere, $d \neq 100$ için*

$$\sum_{d|100} \varphi(d)$$

toplamını hesaplayınız.

Örnek 80 $\varphi(n)$, n *sayısının Euler fonksiyonunu göstermek üzere*, *her bir* m *tamsayısı için*, $\varphi(n) = m$ *olacak şekildeki* n *tamsayılarının sayısının sonlu olduğunu gösteriniz.*

2.6 Karışık Örnekler

Örnek 81 $a, b \in \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere*, *çarpmaya göre tersi* $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ *şeklinde yazılabilen kaç tane asal sayı vardır?* (*Wisconsin M. Talent Search* 1998)

Örnek 82 *Farklı asal sayılardan oluşan bir sayı kümesinin aritmetik ortalaması* 27*'dir. Bu özelliği sağlayan sayı kümelerindeki asal sayılardan en büyük asal sayı kaç olabilir?* (*Çek ve Slovak M.O.* 1999)

Örnek 83 x *ve* y *en az biri tamkare olan pozitif iki tamsayı olmak üzere*, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$ *eşitliğini sağlayan kaç tane* p *asal sayısı vardır?*

Örnek 84 *İki tane asal olmayan tek sayının toplamı şeklinde yazılamayan en büyük çift sayı kaçtır?* (*AIME* 1984)

Örnek 85 p, q *asal sayılar ve* $m \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere*,

$$n = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} - \frac{m^2}{pq}$$

ifadesi kaç tane pozitif tamsayı değeri olabilir? (*USA Talent Search*)

Örnek 86 $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ *sayısı tamkare olacak şekilde kaç tane* p *asal sayısı vardır?*

Örnek 87 $n \in \mathbb{Z}^+$ *için* $p(p+1) + q(q+1) = n(n+1)$ *eşitliğini sağlayan kaç tane* (p, q) *asal sayı çifti vardır?* (*Avusturya-Polonya M.O.* 1983)

Örnek 88 n *pozitif tamsayısının pozitif bölenlerinin sayısını* $\tau(n)$ *ile gösterelim.*

$$S(n) = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n)$$

olmak üzere, a *sayısı* $n \leq 2005$ *için*, $S(n)$ *sayısı tek olacak şekilde* n *sayılarının sayısını ve* b *sayısı da* $n \leq 2005$ *için*, $S(n)$ *çift sayı olacak şekildeki* n *sayılarının sayısını gösterdiğine göre*, $|a - b|$ *kaçtır?* (*AIME* 2005)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

2.7 Çözümlü Test

1. p, $p+10$ ve $p+14$ sayıları asal olacak şekilde kaç tane p sayısı vardır?

A) 1 B) Sonsuz sayıda C) 0 D) 2 E) 5

2. $8p-1$ ve $8p+1$ sayıları asal olacak şekilde kaç p asal sayısı vardır?

A) 1 B) Sonsuz sayıda C) 0 D) 2 E) 5

3. $n-1$ ve $n+1$, 10'dan büyük iki asal sayı olduğuna göre, n^3-4n sayısı aşağıdakilerden hangisine daima bölünür?

A) 240 B) 100 C) 32 D) 45 E) Hiçbiri

4. 10101 sayısı 1'den büyük kaç tane tabanda bir asal sayıdır? (Kanada M.O. 1972)

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

5. n^4+4^n sayısı asal sayı olacak şekilde kaç farklı n doğal sayısı vardır?

A) 1 B) 0 C) 2 D) Sonsuz sayıda E) 6

6. 2007'nin bir katı olan ve 1111 tane pozitif tamsayı böleni kaç n pozitif tamsayısı vardır.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7. Tam 8 tane pozitif çarpanı olan ve bu çarpanlarının çarpımı $256\cdot 10^4$ olan pozitif tamsayının rakamları toplamı kaçtır?

A) 4 B) 11 C) 12 D) 8 E) 6

8. Dikdörtgenler prizması şeklinde bir kutunun boyutları asal sayıdır. Kenarlardan en az biri iki basamaklı olmak üzere, bu kutunun alanı bir asal sayının kuvveti ise, bu kutunun hacmi en fazla kaç olabilir?

A) 186 B) 124 C) 117 D) 388 E) Hiçbiri

9. $X = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + 100 \cdot 100!$ olduğuna göre, $X + 1$ sayısının, sondan kaç tane basamağı sıfırdır?

A) 15 B) 17 C) 21 D) 20 E) 24

10. $\dfrac{(200)!}{(100)!}$ sayısı, 2^{99} sayısına bölündüğünde bölüm aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 101)$ B) $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 199)$ C) $(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99)$

D) $2 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 101)$ E) $2 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 199)$

11. $\dfrac{(33)!}{(11)!}$ sayısını kalansız bölen 2^n sayısında n en çok kaç olabilir?

A) 23 B) 19 C) 27 D) 24 E) 29

12. p, 3'ten büyük bir asal sayı olmak üzere, $p^2 + 2$ formunda kaç asal sayı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz sayıda

13. p bir asal sayı olduğuna göre, $2^{p^2+1} + 1$ formunda yazılabilen 1000'den küçük kaç asal sayı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 11 E) 9

14. Karesi 2 ile 2010 sayıları arasında olan sayılardan, herhangi ikisi aralarında asal olacak şekilde en fazla kaç sayı seçilebilir?

A) 10 B) 16 C) 9 D) 15 E) 14

15. 1'den 100'e $(1$ ve 100 dahil$)$ kadar olan sayılardan kaç tanesinin pozitif bölenlerinin sayısı tek sayıdır?

A) 0 B) 8 C) 9 D) 10 E) 25

16. Pozitif bölenlerinin sayısı 10 olan en küçük sayının rakamları toplamını bulunuz.

A) 12 B) 16 C) 9 D) 15 E) 10

17. Pozitif bölenlerinin sayısı 202 olan en küçük sayının son rakamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 0

18. Pozitif bölenlerinin toplamı 18 olan kaç tamsayı vardır?

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

19. p bir asal olmak üzere, $p(x+y) = xy$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 6 D) 3 E) 5

20. $(60-x)/120$ kesrinin en sadeleştirilmiş halinde pay ve paydanın toplamı 120'yi geçtiğine göre x bileşik sayısının rakamları toplamı kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 11

21. $19^{88} - 1$ sayısının, $a, b > 0$ olmak üzere, $2^a \cdot 3^b$ formundaki tüm bölenlerinin toplamı kaçtır? (Avusturya-Polonya M.O. 1989)

A) 812 B) 714 C) 595 D) 744 E) 724

22. p bir asal sayı ve n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $n^p - p^n = 1$ eşitliğini sağlayan kaç tane (p, n) ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) Sonsuz çoklukta E) Hiçbiri

23. Pozitif bölenlerinin sayısının karesine eşit kaç tane pozitif tamsayı vardır? (Kanada M.O. 1999)

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

24. a, b aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere, $\sqrt{n}$ sayısından küçük tüm asal sayılar $a \cdot b$ sayısını bölecek şekilde tüm $n = a^2 + b^2$ pozitif tamsayılarını bulunuz. (Asya Pasifik M.O. 1994)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Sonsuz sayıda

25. p ve q arasında asal olmak üzere,

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{66} + \frac{1}{67}$$

ise, aşağıdakilerin hangisi p sayısının bir asal çarpanıdır?

A) 59 B) 43 C) 61 D) 101 E) 67

26. $\varphi(n)$, n sayısının Euler fonksiyonunu göstermek üzere,

$$\frac{\varphi(n)}{n} < \frac{1}{4}$$

olacak şekildeki en küçük n doğal sayısının soldan ilk rakamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 1 E) 2

27. Kendisinden ve 1'den farklı pozitif bölenlerinin çarpımına eşit olan ilk 10 sayının toplamını bulunuz. (AIME 1987)

A) 201 B) 182 C) 162 D) 196 E) 194

28. 500'den küçük olup 250 ile aralarında asal olan sayıların sayısı kaçtır?

A) 80 B) 48 C) 180 D) 200 E) 250

29. $\varphi(n)$, n sayısının Euler fonksiyonunu göstermek üzere, $\varphi(n)$ sayısı 18'e tam bölünecek şekilde kaç tane n sayısı vardır?

A) 1 B) 8 C) 9 D) Sonsuz Sayıda E) Hiçbiri

30. $\varphi(n)$, n sayısının Euler fonksiyonunu göstermek üzere, $\varphi(n)$ sayısı tamkare olacak şekilde kaç tane n sayısı vardır?

A) 1 B) 8 C) 9 D) Sonsuz Sayıda E) Hiçbiri

31. $\varphi(n)$, n sayısının Euler fonksiyonunu göstermek üzere, $\varphi(n) = n/3$ olacak şekilde 100'den küçük kaç tane n sayısı vardır?

A) 1 B) 6 C) 8 D) 9 E) Hiçbiri

32. Euler fonksiyonu 24'e eşit olan ve üç farklı asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilen sayıların toplamı kaçtır?

A) 148 B) 218 C) 324 D) 196 E) Hiçbiri

33. n pozitif tamsayısı için, $\varphi(n)$, n sayısının Euler fonksiyonunu göstermek üzere, $\varphi(2n) = \varphi(n)$ olacak şekilde $100 \leq n \leq 200$ şartını sağlayan kaç tane pozitif tamsayı vardır?

A) 49 B) 50 C) 51 D) 26 E) 25

34. p bir asal sayı ve $x, y \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $x^2 + x + 1 = py$ eşitliğini sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır? (SSCB M.O. 1968)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz sayıda

35. İki asal sayının beşinci kuvvetlerinin farkına eşit olacak şekilde kaç tane asal sayı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz Sayıda

36. 100'den küçük kaç tane pozitif tamsayı 1'den büyük iki tane aralarında asal sayının toplamı olarak yazılamaz?

A) 4 B) 6 C) 11 D) 13 E) 5

37. n ve $n + 100$ sayılarının her ikisinin de bölenlerinin sayısı tek olacak şekilde kaç tane n pozitif tamsayısı vardır?

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

38. $2^p + p^2$ sayısı asal olacak şekilde kaç tane p asal sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

39. $n(173 + n)$ sayısı tamkare olacak şekilde kaç tane n pozitif tamsayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

40. İki pozitif x ve$y$ tamsayılarının harmonik ortalaması,

$$\frac{2}{1/x + 1/y}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre, $x < y$ olmak üzere, harmonik ortalaması 6^{20} olan kaç tane (x, y) pozitif tamsayı çifti vardır? (AIME 1996)

A) 688 B) 788 C) 799 D) 689 E) Hiçbiri

41. $1!2!3!\cdots 99!100!$ sayısının sonundaki 0 ların sayısı N olsun. N sayısının 1000 ile bölümünden kalan kaçtır? (AIME 2006)

A) 124 B) 128 C) 234 D) 213 E) Hiçbiri

42. n sayısı 75'in katı olan ve tam 75 pozitif böleni olan en küçük pozitif tamsayı olduğuna göre, $\dfrac{n}{75}$ kaçtır? (AIME 1990)

A) 134 B) 432 C) 346 D) 412 E) Hiçbiri

43. Tam 4 pozitif böleni olan pozitif tamsayılardan kaç tanesinin kendisinden başka pozitif bölenleri 50'den küçüktür? (AIME 2005)

A) 100 B) 111 C) 109 D) 101 E) Hiçbiri

44. 2004^{2004} sayısının kaç tane pozitif böleni tam 2004 tane pozitif tamsayıya bölünebilir. (AIME 2004)

A) 45 B) 48 C) 56 D) 52 E) Hiçbiri

45. $n = 2^{31}3^{19}$ olmak üzere, n^2 sayısının n'den küçük kaç tane pozitif böleni n'nin bir böleni değildir? (AIME 1995)

A) 546 B) 624 C) 589 D) 486 E) Hiçbiri

46. 6 tane tek pozitif tamsayı böleni ve 12 tane çift pozitif tamsayı böleni olan en küçük pozitif tamsayının rakamları toplamı kaçtır? (AIME 2000)

A) 14 B) 8 C) 12 D) 11 E) Hiçbiri

47. n bir tamsayı olmak üzere, $p^2 = n^3 + 1$ eşitliğini sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Hiçbiri

48. $6p+1$ sayısı bir tamsayının beşinci kuvveti olacak şekildeki kaç tane p asal sayısı vardır? (USA Talent Search)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

49. $3k+1$ formundaki pozitif bölenlerinin sayısı, $3k+2$ formundaki pozitif bölenlerinin sayısına eşit olacak şekilde kaç tane tamkare vardır?

A) 0 B) 2 C) 1 D) 3 E) Hiçbiri

50. p^2+11 sayısının tam 6 tane pozitif böleni olacak şekilde kaç tane p asal sayısı vardır? (Rusya M.O. 1995)

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

51. $2005, 2006, 2007, ..., 4012$ sayılarının her birinin en büyük tek sayı bölenlerinin toplamının son iki rakamını hesaplayınız.

A) 41 B) 42 C) 43 D) 46 E) Hiçbiri

52. φ Euler fonksiyonunu göstermek üzere,

$$\varphi\left(n^2\right)=n+p_1p_2 \text{ ve } p_1\leq p_2$$

koşullarını sağlayan 50'den küçük kaç tane (p_1,p_2) asal sayı çifti vardır?

A) 11 B) 12 C) 1 D) 4 E) 8

53. n bir pozitif tamsayı olacak şekilde kaç tane asal sayı $\sqrt{24n+1}$ formunda yazılamaz?

A) 7 B) 8 C) 1 D) 2 E) Sonsuz sayıda

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

2.8 Problemler

1. *p ve q iki ardışık tek asal sayı olsunlar. $p+q$ sayısının birbirinden farklı olması gerekmeyen en az üç 1'den farklı pozitif tamsayının çarpımına eşit olduğunu gösteriniz.* (Baltık Way M.O. 1992)

2. *p ve $p+2$ sayıları asal sayı ise, $p=3$ veya $6 \mid p+1$ olduğunu gösteriniz.* (Kanada M.O.- 1973)

3. *$n!$ sayısının $1+2+3+\cdots+n$ sayısı ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart $n+1$ sayısının bir tek asal sayı olmamasıdır. Gösteriniz.* (Kanada M.O.- 1992)

4. *2^n+n^{2004} sayısı asal olacak şekilde sadece bir tane n pozitif tamsayısı olduğunu gösteriniz.* (Kanada O.Komitesi Şubat Problemleri)

5. *a, ve b pozitif tamsayılar olmak üzere p tek asal sayısı için,*

$$p^4 \mid a^2+b^2 \text{ ve } p^4 \mid a\left(a+b\right)^2$$

olduğuna göre $p^4 \mid a\left(a+b\right)$ olduğunu gösteriniz.

6. *1 ve kendisi dahil tüm farklı pozitif bölenlerinin toplamı $\left(\sqrt{n}+1\right)^2$ sayısından fazla olmayan n pozitif tamsayılarının asal olması gerektiğini gösteriniz.*

7. *x,y pozitif tamsayılar olmak üzere, $A=x^2+y^2$ olduğuna göre, A sayısının $k\geq 2$ olmak üzere x^k-y^k formunda pozitif böleninin olmadığını gösteriniz.*

8. *İlk n asal sayının toplamını S_n ile gösterelim. S_n ile S_{n+1} arasında bir tamkare olduğunu ispatlayınız.*

9. *$[104,208]$ aralığında seçilen 28 sayıdan ortak asal bölene sahip olacak iki tane sayının olduğunu ispatlayınız.*

10. *a ve b, 900 sayısının aralarında asal olan iki pozitif böleni olmak üzere, a/b formundaki tüm sayıların toplamını bulunuz.*

11. *Bir tamkarenin ve bir asal sayının toplamına eşit olmayacak şekilde sonsuz sayıda pozitif tamsayı olduğunu ispatlayınız.*

12. *Her tek p asal sayısı için, $n\left(n+p\right)$ sayısı tamkare olacak şekilde bir n pozitif tamsayının bulunacağını gösteriniz.* (Wisconsin M. Talent Search 2005)

13. $A = 1+2+3+\cdots+n$ *sayısının son dört rakamı* 1008 *olacak şekilde*, n *sayısının olamayacağını gösteriniz.*

14. *Her* k *negatif olmayan tamsayısı için*, $k+a_1, k+a_2, \ldots$ *sayı dizisinin sonlu elemanı asal sayı olacak şekilde artan bir* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *dizisinin bulunduğunu ispatlayınız.* (Çek ve Slovak M.O. 1997)

15. p *asal sayısı iki tamsayının küplerinin farkına eşit olsun.* $4p = 3k + r$, $0 \leq r < 3$ *olarak yazılırsa*, k *sayısının bir tamkare olacağını ispatlayınız.* (Wisconsin Math. Talent Search)

16. a, b, c, d *pozitif tamsayılar için olduğuna göre,* $ab = cd$ *olduğuna göre*, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *sayısının asal olmadığını gösteriniz.*

17. p *tek bir asal sayı olmak üzere*,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

toplamının en sadeleşmiş hali a/b *ise*, p *sayısının* a *sayısını böldüğünü ispatlayınız.*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

2.9 TÜBİTAK Olimpiyat Soruları (Asal Sayılar)

1. $\sqrt{17p+625}$ sayısının bir tamsayı olmasını sağlayan en büyük p asal sayısı nedir?

A) 3 B) 67 C) 101 D) 151 E) 211

UMO - 2000

2. 72000 sayısının pozitif bölenlerinden kaç tanesi 8'e bölünüp 9'a bölünemez?

A) 24 B) 32 C) 36 D) 48 E) 84

UİMO - 1998

3. 2 ve 9'a bölünebilen bir sayının tam olarak 15 pozitif böleni varsa, bu sayı 5'e bölündüğünde kalan ne olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

UİMO - 1998

4. p ve q tek sayıları asal sayılar dizisinin ardışık iki terimi olsun. $p+q$ sayısının farklı pozitif bölenlerinin sayısı en az kaç olabilir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

UMO - 1998

5. 72 tane pozitif böleni olan en küçük tamsayının on tabanına göre yazılımında rakamların karelerinin toplamı nedir?

A) 41 B) 110 C) 123 D) 65 E) Hiçbiri

UMO - 1999

6. p^q+q^p sayısının asal olmasını sağlayan kaç (p,q) asal sayı sıralı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) Sonsuz Çoklukta E) Hiçbiri

UİMO - 2001

7. 10^{999} sayısının rastgele seçilmiş bir pozitif böleninin 10^{100} 'ün bir tam katı olması olasılığı nedir?

A) $\frac{11}{111}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{9}{10}$ D) $\frac{81}{100}$ E) $\frac{1}{10}$

UİMO - 2000

8. p asal ve n pozitif tamsayı olmak üzere, $(1+p)^n=1+pn+n^p$ eşitliğini sağlayan kaç (p,n) sıralı ikilisi vardır?

A) 2 B) 5 C) 1 D) 0 E) Hiçbiri

UMO - 2001

9. $x_1 \le x_2 \le x_3$ asal sayıları,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 68 \text{ ve } x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1121$$

eşitliklerini sağlıyorsa, x_2 kaçtır?

A) 7 B) 13 C) 19 D) 23 E) 29

UİMO - 2002

10. $39p + 1$ sayısını tamkare yapan kaç p asal sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 2002

11. p, q asal sayılar olmak üzere, $p\left(p^2 + 3q^2 - 1\right) = q\left(q^2 + 3p^2 + 1\right)$ eşitliğini sağlayan kaç (p, q) ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

UMO - 2006

12. Asal çarpanlarına ayrıldığında tüm asal çarpanlarının kuvvetleri tek sayı olan pozitif tamsayıların oluşturduğu küme, en çok kaç ardışık tamsayı içerir?

A) 3 B) 7 C) 8 D) 10 E) 15

UMO - 2004

13. $p^2 + 23$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 14 olacak şekilde kaç p asal sayısı bulunur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 2004

14. $13! + 1 < p \le 13! + 13$ koşulunu sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

A) 0 B) 5 C) 3 D) 1 E) 2

UMO - 1993

15. p ve q farklı asal sayılar, a ve b farklı pozitif tamsayılar ve $n = p^a \cdot q^b$ olmak üzere, n^2 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 81 ise, n^3 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı kaçtır?

A) 169 B) 160 C) 117 D) 84 E) Hiçbiri

UMO - 1996

16. Bir n tamsayısı için, $n^2 + 1$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) Hiçbiri

UMO - 2005

17. p ve p^2+2 asal sayılarsa, p^3+3 sayısının en çok kaç asal böleni olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

UMO - 2006

18. n^3+8 sayısının en çok üç pozitif böleninin bulunmasını sağlayan kaç n tamsayısı vardır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Hiçbiri

UMO - 2007

19. Üç bileşik tek sayının toplamı olarak yazılabilen tüm tamkarelerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(2k+1)^2 : k \geq 0\}$ B) $\{(4k+3)^2 : k \geq 1\}$ C)$\{(2k+1)^2 : k \geq 3\}$

d) $\{(4k+1)^2 : k \geq 2\}$ E) Hiçbiri

UMO - 2002

20. $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ sayısının tamkare olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

A) 4 B) 2 C) 1 D) 8 E) Sonsuz Çoklukta

UMO - 1997

21. $2p^4-7p^2+1$ sayısının, bir tamsayının karesine eşit olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 4 D) Sonsuz Çoklukta E) Hiçbiri

UMO - 2001

22. Aşağıdakilerden hangisi $b>1$ doğal sayısı ne olursa olsun asal değildir?

A) $(11)_b$ B) $(111)_b$ C) $(1111)_b$ C) $(11111)_b$ D) Hiçbiri

UMO - 1995

23. p asal sayısının n'yi bölmesinin, $p-1$'in $n-1$ sayısını bölmesini gerektirdiği, ondalık yazımı iki basamaklı olan kaç n çift pozitif tamsayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

UİMO - 2002

24. $101, 10101, 1010101, ..., \underbrace{10101...101}_{\text{100 tane 1}}$ dizisinde kaç tane asal sayı vardır?

A) 0 B) 49 C) 1 D) 12 E) 33

UMO - 1993

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

2.10 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyat Soruları (Asal Sayılar)

1. $x < y < z$ asal sayıları $\begin{cases} x+y+z=68 \\ x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=1121 \end{cases}$ denklem sisteminin bir çözümü ise, $y\cdot z$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 893 B) 919 C) 957 D) 989 E) 1003

Antalya M.O.- 1996

2. 1001 ile aralarında asal olan üç basamaklı bir sayının 12 pozitif böleni vardır. Bu sayının yan yana yazılmasıyla elde edilen altı basamaklı sayının kaç pozitif böleni olacaktır?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 72 E) 96

Antalya M.O.- 1997

3. $101\cdot 102\cdot 103\cdots 300=7^k\cdot n$, $(k,n\in\mathbb{N})$ eşitliğini sağlayan en büyük k sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 26 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

Antalya M.O.- 1998

4. m ve n sayıları 2000 sayısının pozitif bölenleri olmak üzere, (m,n) ikililerini düşününüz. Bu ikililerden kaç tanesi için n sayısı m'yi tam böler?

A) 200 B) 150 C) 100 D) 60 E) 35

Antalya M.O.- 2000

5. m ve n sayıları 2520 sayısının pozitif bölenleri olmak üzere, (m,n) ikililerini düşününüz. Bu ikililerden kaç tanesi için n sayısı m'yi tam böler?

A) 270 B) 540 C)250 D) 455 E) 500

Antalya M.O.- 2000

6. $p^3+p^2+11p+2$ ifadesinin asal sayı olmasını sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 11 D) Sonsuz E) Hiçbiri

Antalya M.O.- 2000

7. $5,10,15,...,995,1000$ aritmetik dizisinin tüm terimlerinin çarpımı olan sayının sondan kaç basamağında sıfır bulunur ?

A) 200 B) 199 C) 198 D) 197 E) 196

Antalya M.O.- 2000

8. Kaç tane p asal sayısı için $p^2 + 11$ sayısının tam 6 tane farklı pozitif böleni vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 12 E) Sonsuz çoklukta

Antalya M.O.- 2002

9. İki $($farklı veya eşit$)$ asal sayının çarpımı biçiminde gösterilebilen her sayıya "iyi sayı" diyelim. $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n+1, n+2, \ldots, n+k$ sayılarının her biri "iyi sayı" ise, k en fazla kaç olabilir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 5 E) k için bir üst sınır yoktur

Antalya M.O.- 2002

10. a doğal sayısı 4 ayrı asal sayının çarpımının karesi olsun. k ve n, a'nın $k|n$ koşulunu sağlayan pozitif bölenleri olmak üzere, (k, n) ikilileri kaç tanedir? $(1$ ve a sayıları da a'nın bölenleridir; $k|n$ gösterimi "k, n'yi böler" anlamındadır.$)$

A) 3^6 B) 4^5 C) 5^4 D) 4^6 E) 6^4

Antalya M.O.- 2003

11. $\{1, 2, 3, 4, ..., 20, 21, 22\}$ kümesinden en az kaç eleman atılmalı ki, geriye kalan sayıların çarpımı bir tamkare olsun?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Antalya M.O.- 2003

12. 2004 basamaklı bir sayının herhangi komşu iki rakamının oluşturduğu sayı, üç farklı asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilmektedir. Bu sayının son basamağı nedir?

A) 0 B) 2 C) 5 D) 4 E) 6

Antalya M.O.- 2004

13. $n(n+1)(n+2)...(5n-1)5n$ sayısının 5^{86}ya bölünmesini sağlayan en küçük pozitif n tamsayısının rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 13 B) 10 C) 12 D) 14 E) 11

Antalya M.O.- 2005

OBEB - OKEK

Örnek 89 *Aralarında asal olan iki sayının çarpımı ile toplamının OBEB'inin* 1 *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 90 $x+y$ *ile* $x-y$ *aralarında asal iki sayı ise*, *OBEB*$\left(x^2-y^2, 2x\right)$ $=$*?*

Örnek 91 2520 *ve* 3960 *sayılarının her ikisini de bölen kaç pozitif tamsayı vardır?*

Örnek 92 $a+b$ *ile* $a-b$ *sayıları aralarında asal sayılar olmak üzere*,

$$M = 2a + (1+2a)\left(a^2-b^2\right) \text{ ve } N = 2a\left(a^2+2a-b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$$

ise, *OBEB*(M,N) $=$*?*

3.1 OKEK (Ortak Katların En Küçüğü)

★ **Teorem 3.1.** $A = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ *ve* $B = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ *sayılarını göz önüne alalım.* $i = 1, 2, ..., k$ *için*, r_i *ve* s_i *sayı üslerinin minimumlarını* m_i *ve maksimumlarını ise* M_i *ile gösterelim. Bu durumda*,

$$\text{OBEB}(A,B) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k} \quad \text{ve} \quad \text{OKEK}(A,B) = p_1^{M_1} p_2^{M_2} \cdots p_k^{M_k}$$

olur.

Örnek 93 60^{50} *sayısı ile* 50^{60} *sayılarının OBEB'ini ve OKEK'ini bulunuz.*

Örnek 94 *OKEK*$(m,n) = 2^3 5^7 11^9$ *olacak şekilde kaç tane* (m,n) *pozitif tamsayı ikilisi vardır?*

Örnek 95 1519 *sayısı* 25 *tane pozitif tamsayının toplamı olduğuna göre*, *bu* 25 *sayının OKEK'i en küçük kaç olabilir?*

Örnek 96 *Birincisi* 3*'e*, *ikincisi* 5*'e*, *üçüncüsü* 7*'ye*, *dördüncüsü* 9*'a ve beşincisi de* 11*'e tam bölünen en küçük beş ardışık doğal sayıdan en küçüğünün rakamları toplamı kaçtır?*

★ **Teorem 3.2.** *OBEB*$(m,n) \cdot$ *OKEK*$(m,n) = m \cdot n$*'dir.*

İspat :

Örnek 97 *OBEB*$(A,B) = d$ *ise OBEB*$(A^n, B^n) = d^n$ *olduğunu gösteriniz.*

3.2 Öklid Algoritması ile OBEB'in Bulunması

Örnek 98 791 *ve* 12543 *sayılarının OBEB'ini Öklid algoritmasını kullanarak bulunuz.*

Teorem 3.3. *Herhangi* x *ve* y *tamsayıları için,*

$$\text{OBEB}(A, B) = \text{OBEB}(A, Ax + By)$$

eşitliği vardır.

İspat :

Örnek 99 $\dfrac{7n-3}{8n-5}$ *ifadesi* 100*'den küçük kaç tane* n *doğal sayısı için sadeleştirilebilir?*

Örnek 100 100*'den küçük kaç tane* k *pozitif tamsayısı için* $2k-1$ *ve* $9k+4$ *sayıları aralarında asal değildir?*

Örnek 101 $\dfrac{n^2+3n+1}{n^2+4n+3}$ *denkleminin sadeleştirilemez olduğunu gösteriniz.*

Örnek 102 n *bir pozitif tamsayı olmak üzere,* $\text{OBEB}(n!+1, (n+1)!+1) = ?$

Örnek 103 $\text{OBEB}\big(2002+2, 2002^2+2, 2002^3+2, \ldots\big) = ?$ (*Harvard MIT.Math Tournament* 2002)

Örnek 104 $\text{OBEB}\left(\binom{1680}{1}, \binom{1680}{3}, \binom{1680}{5}, \ldots, \binom{1680}{1679}\right)$ *değeri kaça eşittir?*

Örnek 105 $2^{19}+1$ *ve* $2^{96}+1$ *sayılarının en büyük ortak böleni kaçtır?*

Örnek 106 $3118, 2007$ *ve* 1300 *sayılarının her birinin bir* $d > 1$ *sayısına bölümünden kalan* r *olsun. Buna göre,* $d - r$ *sayısı kaçtır?*

3.3 OBEB ve Tamsayı Katsayılı İki Bilinmeyenli Lineer Denklemler

★ **Teorem 3.4.** (**Bezout Teoremi**) *Herhangi* a, b *pozitif tamsayısı için,*

$$ax + by = \text{OBEB}(a, b)$$

olacak şekilde x, y *tamsayıları vardır.*

İspat :

★ **Sonuç :** *a ve b sayıları aralarında asal ise, $ax + by = 1$ olacak şekilde x, y tamsayıları vardır.*

★ **Teorem 3.5.** *a, b pozitif tamsayılar ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun, $ax + by = n$ denkleminin x, y tamsayı çözümlerinin olması için,*

$$\text{OBEB}(a, b) \mid n$$

olmalıdır. Bu durumda, çözümler, (x_0, y_0) bir çözüm olmak üzere,

$$(x, y) = \left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t \right)$$

formunda olur.

İspat :

Örnek 107 $12x + 15y = 10$ *denkleminin kaç tane pozitif tamsayı çözümü vardır?*

3.4 Karışık Örnekler

Örnek 108 *OBEB$(x, y) = 5!$ ve OKEK $(x, y) = 50!$ ve $x \leq y$ olacak şekilde kaç tane (x, y) pozitif tamsayı çifti vardır?* (*Kanada M.O.* 1997)

Örnek 109 $y < x \leq 100$ *olmak üzere,*

$$\frac{x}{y} \text{ ve } \frac{x+1}{y+1}$$

sayılarının her ikiside tamsayı olacak şekilde kaç (x, y) pozitif tamsayı ikilisi vardır? (*AIME*)

Örnek 110 *OKEK $\left(6^6, 8^8, k\right) = 12^{12}$ olacak şekilde kaç tane k pozitif tamsayısı vardır?* (*AIME* 1998)

Örnek 111 *X ondalık yazılımında tekrar eden rakam bulunmayan tüm doğal sayıların kümesi olsun. $n \in X$ ve A_n de n sayısının rakamlarının permütasyonlarının oluşturduğu, n sayısı ile aynı basamağa sahip sayıların kümesi olsun. d_n sayısı, A_n'deki sayıların en büyük ortak böleni ise d_n sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?* (*İTALYA M.O.* 2006)

Örnek 112 $1 \leq m < n \leq 13$ *olmak üzere, OBEB$(2^m - 1, 2^n - 1) = 1$ olacak şekilde kaç tane (m, n) tamsayı ikilisi vardır?*

3.5 Çözümlü Test

1. $\dfrac{10n+3}{15n+4}$ ifadesi kaç tane n doğal sayısı için sadeleştirilebilir?

A) 0 B) 1 C) Sonsuz Sayıda D) 11 E) 12

2. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\dfrac{11n-6}{17n-12}$ ifadesi n sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için sadeleştirilemez?

A) 2007 B) 2013 C) 2009 D) 2010 E) 2011

3. $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}$ ifadesi 100'den küçük kaç tane n pozitif tamsayısı için sadeleştirilebilir.

A) 0 B) 11 C) 12 D) 13 E) 4

4. $\dfrac{7}{n+9}, \dfrac{8}{n+10}, \dfrac{9}{n+11}, ..., \dfrac{31}{n+33}$ kesirlerinin sadeleştirilemez olması için n'nin alabileceği en küçük pozitif tamsayı kaçtır?

A) 35 B) 54 C) 37 D) 34 E) 13

5. $(n+1)\left(n^4+2n\right)+3\left(n^3+57\right)$ sayısı n^2+2 ile bölünecek şekilde n pozitif tamsayısı en büyük kaç olabilir?

A) 13 B) 19 C) 17 D) 11 E) 16

6. $\dfrac{a^2+30a+2}{a^2-3}$ ifadesi aşağıdaki hangi a değeri için sadeleşebilir?

A) 127 B) 89 C) 23 D) 107 E) 117

7. 1059, 1417 ve 2312 sayılarının her birinin bir $d>1$ sayısına bölümünden kalan r olsun. Buna göre, $d-r$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir? (AHSME 1976)

A) 11 B) 15 C) 14 D) 16 E) 17

8. 100'den küçük kaç tane k pozitif tamsayısı için $(2k-9)$ ve $(9k-31)$ sayıları aralarında asal değildir?

A) 11 B) 5 C) 9 D) 8 E) 6

9. $[x,y]=100$ ve $(x,y)=25$ olacak şekilde kaç x,y pozitif tamsayısı vardır?

A) 3 B) 2 C) 4 E) 1 F) 5

10. $1,1,2,3,5,8,13,21,34$,... Fibonacci dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin 2007 ve 2008'inci elemanlarının en büyük ortak böleni kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 12 E) 11

11. n pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$\frac{n^4+8n^2+15}{n^4+10n^2+24}$$

ifadesi n sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için sadeleştirilemez?

A) 1572 B) 2001 C) 1451 D) 2007 E) 9876

12. n pozitif bir tamsayı olmak üzere aşağıdakilerden hangisi en az bir n pozitif tamsayısı için sadeleştirilebilir? (İspanya M.O. 1993)

A) $\dfrac{n-1}{n}$ B) $\dfrac{n}{2n+1}$ C) $\dfrac{2n+1}{2n^2+2n}$ D) $\dfrac{2n-3}{3n+11}$ E) $\dfrac{3n+25}{2n+17}$

13. m ve n aralarında asal doğal sayılar olduğuna göre, *OBEB*$\left(m+n,m^2+n^2\right)$ kaç farklı sayı olabilir? (Sovyet M.O. 1963)

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Sonsuz Sayıda

14. n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$100+n^2 \text{ ve } 100+(n+1)^2$$

sayılarının en büyük ortak böleni $f(n)$ olsun. $f(n)$ sayısının maksimum değeri kaçtır? (AIME 1985)

A) 100 B) 101 C) 400 D) 200 E) Hiçbiri

15. $n+10$ sayısı n^3+100 sayısını bölecek şekildeki en büyük n pozitif tamsayısı kaçtır? (AIME 1986)

A) 190 B) 790 C) 840 D) 900 E) Hiçbiri

16. *OKEK* $(a,b)=1000$, *OKEK* $(b,c)=2000$, *OKEK* $(c,a)=2000$ olacak şekilde kaç tane (a,b,c) üçlüsü vardır? (AIME 1987)

A) 100 B) 75 C) 120 D) 70 E) Hiçbiri

17. 10^{10}, 15^7 ve 18^{11} sayılarının en az birinin böleni olan pozitif tamsayıların sayısını bulunuz. (AIME 2005)

A) 435 B) 440 C) 396 D) 460 E) Hiçbiri

18. n sayısı 2 ile, $n+1$ sayısı 3 ile, ..., $n+8$ sayısı 10'a bölünecek şekilde sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayalım. Bu özelliği sağlayan ilk sayı 2'dir. Bu özelliği sağlayan beşinci sayının rakamları toplamı kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 13 D) 11 E) Hiçbiri

19. 2401 sayısı 25 tane pozitif tamsayının toplamı olduğuna göre, bu 25 sayının *OKEK* 'i en küçük kaç olabilir?

A) 100 B) 49 C) 97 D) 67 E) Hiçbiri

20. n tek sayı olmak üzere, *OBEB*$\left(3^3-3, 5^5-5, 7^7-7, ..., n^n-n, ...\right)=?$

A) 8 B) 12 C) 4 D) 6 E) Hiçbiri

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

3.6 Problemler

1. 1*'den büyük beş tamsayı veriliyor. Bu beş sayı büyükten küçüğe sıralanıp herhangi komşu olan iki sayının OKEK'lerinin çarpmaya göre terslerin toplamı yazılıyor. Bu toplamın daima* $15/16$ *sayısından küçük olduğunu gösteriniz.* (Kanada M.O. 1979)

2. n *pozitif bir tamsayı olmak üzere,* $OBEB\left(\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},\binom{2n}{5},...,\binom{2n}{2n-1}\right)$ *değeri kaça eşittir?* (İrlanda M.O. 2006)

3. *Verilen* m,n,k *doğal sayıları için,* $rm+sn$ *ifadesi* k *sayısıyla bölünebilecek şekilde aralarında asal* r *ve* s *doğal sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.* (SSCB M.O. 1961)

4. x,y,z *pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \text{ ve } OBEB(x,y,z)=d$$

ise, $dxyz$ *ve* $d\left(y-x\right)$ *sayılarının tamkare olacaklarını ispatlayınız.* (BMO 1998)

5. m *ve* n *pozitif tamsayıları için,* $OBEB(m,n)+OKEK(m,n)=m+n$ *ise, bu sayılardan birinin diğerini böldüğünü ispatlayınız.* (Rusya M.O.)

6. $m,n\in S$ *olduğundan,*

$$\frac{m+n}{OBEB\left(m,n\right)}\in S$$

olacak şekilde boş olmayan tüm sonlu pozitif sayı kümelerini bulunuz. (Avusturya-Polonya M.O. 2004)

7. x *ve* y *pozitif tamsayıları için,* $u=x+y$ *ve* $v=OKEK(x,y)$ *ile tanımlanıyor.* $OBEB\left(u,v\right)=OBEB\left(x,y\right)$ *olduğunu ispatlayınız.*

8. $a,b\in\mathbb{Z}^{+}$ *olmak üzere,*

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

ifadesi tamsayı ise, $OBEB(a,b)\leq\sqrt{a+b}$ *olduğunu ispatlayınız.* (İspanya M.O. 1996)

9. $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere*,
$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{c}+\frac{c+1}{a}$$
ifadesi bir tamsayı ise OBEB$(a, b, c) \leq \sqrt[3]{ab+bc+ca}$ *olduğunu ispatlayınız.*

10. $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ *ve OBEB*$(a, b, c) = 1$ *olmak üzere*, *bu sayıların herhangi ikisinin çarpımı üçüncüsüne bölünüyor ise*,

a) *Bu sayıların her birinin diğer ikisinin en küçük ortak katının*, *en büyük ortak bölenine bölümünden elde edilen sayıya eşit olduğunu gösteriniz.*

b) $a > 1$, $b > 1$ *ve* $c > 1$ *olacak şekilde bir örnek veriniz.* (Estonya M.O. 2006)

11. n *pozitif tamsayısı için*, $0 < i < j < n$ *olmak üzere*,
$$OBEB\left(\tbinom{n}{i}, \tbinom{n}{j}\right) > 1$$
olduğunu gösteriniz.

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

3.7 TÜBİTAK Olimpiyat Soruları (OBEB - OKEK)

1. $n > 5$ bir tamsayı olmak üzere, $2n + 13$ ve $2n + 27$ sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü $n - 4$ ise, bunların ortak katlarının en küçüğü nedir?

A) 105 B) 245 C) 351 D) 851 E) 975

UİMO - 2004

2. $k > 1$ bir tamsayı ve $k \not\equiv 9 \pmod{17}$ ise, $2k - 1$ ve $9k + 4$ tamsayılarının en büyük ortak böleni aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 17 C) 2k-1 D) 1 E) Hiçbiri

UMO - 1993

3. c, a ve b'nin pozitif ortak katlarının en küçüğünü ve d de, ortak bölenlerinin en büyüğünü göstermek üzere,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (a, b) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

UMO - 2007

4. 210 ile en büyük ortak böleni 1'den büyük olan ve $1 \leq n \leq 25$ koşulunu sağlayan n tamsayılarının toplamı nedir?

A) 325 B) 308 C) 283 D) 264 E) 241

UMO - 1996

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

3.8 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyat Soruları (OBEB - OKEK)

1. $\dfrac{11n+3}{23n+2}$, $(n \in \mathbb{N})$ kesrini kısaltan $k \neq 1$ doğal sayısının rakamlarının toplamı kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 15

Antalya M.O.- 1999

2. $\dfrac{3n+11+13}{11}, \dfrac{3n+12+14}{12}, \dfrac{3n+13+15}{13}, \ldots, \dfrac{3n+54+56}{54}, \dfrac{3n+55+57}{55}$ kesirlerinin hiçbiri sadeleşmeyecek biçimde alınmış n doğal sayılarının en küçüğünün rakamlar toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Antalya M.O.- 2003

3. 60^{50}nin böleni olup, 50^{60}ın böleni olmayan pozitif sayıların sayısı n olsun. n sayısının 50 ile bölümünden kalan nedir?

A) 40 B) 32 C) 35 D) 30 E) 48

Antalya M.O.- 2004

4. $\dfrac{m(n+3)-1}{m(n+3)+n+2}$ kesiri sadeleşecek şekilde kaç tane (m,n) pozitif tamsayı çifti vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

Antalya M.O.- 2005

5. *OBEB*(x,y)+*OKEK* $(x,y) = x+y+4$ denklemini sağlayan kaç tane (x,y) pozitif tamsayı çifti vardır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Antalya M.O.- 2005

6. $a_n = n^2+5$, $(n = 1,2,3,\ldots)$ dizisi verilsin. Her n için a_n ve a_{n+1} sayılarının *OBEB*'i d_n ile gösterilsin. d_n'nin alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 30 C) 25 D) 27 E) 21

Antalya M.O.- 2006

Modüler Aritmetik

4.1 Mod Kavramı

Örnek 113 $1! + 2! + 3! + ... + 2009!$ *sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?*

Örnek 114 $11! \equiv 10! \pmod{m}$ *denkliğini sağlayan* m *sayılarının sayısını bulunuz.*

Örnek 115 $2^n + 27$ *sayısı* 7*'ye bölünecek şekilde* 100*'den küçük kaç pozitif* n *tamsayısı vardır?*

Örnek 116 m *pozitif tamsayısı için*, $125 \equiv 37 \pmod{m}$ *ve* $125 \equiv 70 \pmod{m}$ *olduğuna göre*, $125! \equiv 0 \pmod{m^n}$ *denkliğini sağlayan en büyük* n *tamsayısı kaçtır?*

Örnek 117 $7^{7^{7^{7}}}$ *sayısının birler basamağı kaçtır?*

Örnek 118 41^{362} *sayısının* 61*'e bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 119 10^{200} *sayısı* 19 *tabanında yazılırsa son basamağı kaç olur?*

Örnek 120 $\dfrac{1}{13}$ *sayısının virgülden sonraki* 101*-inci rakamı kaçtır?*

4.2 Denklikler

★ **Teorem 4.2.** $x \equiv y \pmod{m}$ *ve* $a \equiv b \pmod{m}$ *ise*,

i) $x + a \equiv y + b \pmod{m}$,

ii) $x - a \equiv y - b \pmod{m}$,

iii) $x \cdot a = y \cdot b \pmod{m}$,

iv) $k \in \mathbb{Z}$ *için*, $k \cdot x \equiv k \cdot y \pmod{m}$,

v) $n \in \mathbb{Z}$ *için*, $x^n \equiv y^n \pmod{m}$ *denklikleri sağlanır.*

İspat :

★ **Teorem 4.3.** $ka \equiv kb \pmod{m}$ ise, $a \equiv b(\bmod \dfrac{m}{\mathit{OBEB}\,(k,m)})$ olur.

İspat :

★ **Teorem 4.3.** Bir a sayısının, $m_1, m_2, ..., m_r$ sayılarına bölümünden kalanlar eşitse, yani,

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m_1} \\ a \equiv b \pmod{m_2} \\ \vdots \\ a \equiv b \pmod{m_r} \end{cases}$$

ise, $\mathbf{M}$ =*OKEK* $(m_1, m_2, ..., m_r)$ *olmak üzere*, $a \equiv b \pmod{\mathbf{M}}$ *denkliği sağlanır.*

Örnek 121 $\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{12} \\ x \equiv 14 \pmod{15} \\ x \equiv 17 \pmod{18} \end{cases}$ *olduğuna göre* x *aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) 1899 *B*) 1799 *C*) 1699 *D*) 1599 *E*) 1499

Örnek 122 *Alper, cevizlerini* 5*'er* 5*'er saydığında* 3 *ceviz,* 7*'şer* 7*'şer saydığında* 5 *ceviz ve* 6*'şar* 6*'şar saydığında da* 4 *ceviz artıyor. Buna göre, Alper'in en az kaç cevizi vardır?*

Örnek 123 6*'ya bölündüğünde* 2 *ve* 7*'ye bölündüğünde* 5 *kalanını veren en küçük* 3 *basamaklı sayı kaçtır?*

Örnek 124 $11^n - 1$ *sayısı* 105*'e tam bölünecek şekilde* 100*'den küçük kaç* n *pozitif tamsayısı vardır?*

Örnek 125 17 *sayısının* $\bmod 19$*'da tersini bulunuz.*

Örnek 126 6 *sayısının* $\bmod 10$*'da tersini bulunuz.*

Örnek 127 $\bmod 100$*'de tersi olan kaç eleman vardır?*

★ **Teorem 4.5.** *p bir asal sayı olmak üzere*, $1 \leq r \leq p-1$ *için* $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod{p}$*'dir. Hatta*, $1 \leq r \leq p^k - 1$ *için*,

$$\binom{p^k}{r} \equiv 0 \pmod{p}$$

'dir. Bunun bir sonucu olarak da $(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod{p}$ *olduğu görülür.*

Örnek 128 $(x, 19) = 1$ *olmak üzere* $(2x+1)^{19}$ *ifadesinin* 19*'a bölümünden kalan* 4 *olacak şekildeki en küçük üç basamaklı* x *sayısı kaçtır?*

4.3 Bölünebilirlik Testlerinin Modüler Aritmetik Yardımıyla Yapılması

Örnek 129 9*'a bölünebilme kuralını bulunuz.*

Örnek 130 11*'e bölünebilme kuralını bulunuz.*

Örnek 131 7*'ye bölünebilme kuralını bulunuz.*

Örnek 132 13*'e bölünebilme kuralını bulunuz*

Problem : Benzer yöntem ile, bir $10A+B$ sayısının 19'a bölünebilmesi için, $A+2B$'nin 19'a bölünebilmesi gerektiğini gösteriniz.

Örnek 133 5 *tabanında* 4*'e bölünebilme kuralını bulunuz.*

Örnek 134 8 *tabanında verilen* $(131612a425)_8$ *sayısı* 7*'ye bölündüğüne göre*, $a=?$

Örnek 135 n^2+m^2 *ifadesi* 3*'e bölünüyorsa* 9*'a da bölünür. Gösteriniz.*

Örnek 136 $x^2+y^2=8z+6$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x,y,z) *tamsayı üçlüsü vardır?* (*Kanada M.O.*- 1969)

Örnek 137 $10n-1$, $13n-1$ *ve* $85n-1$ *sayılarının hepsi tamkare olacak şekilde kaç tane* n *tamsayısı vardır?* (*Avusturya - Polonya M.O.* 2001)

Örnek 138 2^{29} *sayısının değeri*, *rakamları birbirinden farklı* 9 *basamaklı bir sayıdır. Bu sayının değerinde kullanılmayan rakam kaçtır?*

Örnek 139 *Beş tane ardışık tamsayının karelerinin toplamının bir tamkare olamayacağını ispatlayınız.*

Örnek 140 x^2+2y^2 *sayısı tek asal ise*, $8n+1$ *veya* $8n+3$ *formunda olduğunu ispatlayınız.*

Teorem 4.6. m *bir pozitif tamsayı ve* a *ve* b *ise* m *ile aralarında asal olan tamsayılar olsun.* x, y *tamsayıları için*,

$$a^x \equiv b^x \pmod m \text{ ve } a^y \equiv b^y \pmod m$$

ise, $a^{OBEB(x,y)} \equiv b^{OBEB(x,y)} \pmod m$ *olur.*

İspat :

Örnek 141 *a ve b pozitif tamsayıları için*

$$OBEB\left(n^a-1,n^b-1\right)=n^{OBEB(a,b)}-1$$

olduğunu gösteriniz.

4.4 Karışık Örnekler

Örnek 142 *Bir A pozitif tamsayısının rakamları dört tane ardışık sayıdan oluştuğuna ve soldan sağa azalan sırada dizildiğine göre, A sayısının 37'ye bölümünden elde edilebilecek mümkün kalanların toplamını bulunuz.* (*AIME* 2004)

Örnek 143 $p+q=(p-q)^3$ *eşitliğini sağlayan tüm p ve q asal sayılarını bulunuz.* (*RUSYA M.O.* 2001)

Örnek 144 6 *tabanına göre yazılışı* $n=(513451522153241)_6$ *olan n sayısı için* $25^{2n-1}+36^n$ *sayısının son iki rakamı nedir?*

Örnek 145 $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2004}$ *sayısının virgülden önceki ve sonraki ilk rakamlarını bulunuz.*

Örnek 146 5*'e bölündüğünde* 2, 7*'ye bölündüğünde* 3 *ve* 9*'a bölündüğünde* 4 *kalanını veren en küçük pozitif tamsayının rakamları toplamı kaçtır?*

Örnek 147 $S=\left\{n:n2^n+(n+1)\,2^{3n}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,11)\right\}$ *olduğuna göre,*

a) *S kümesinin elemanlarının 55'e bölümünden hangi kalanlar elde edilebilir?*

b) *Her $n\in S$ için, $n+k\in S$ olmasını sağlayan en küçük pozitif k tamsayısı nedir?*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

4.5 Çözümlü Test

1. m ve n tek sayılar olmak üzere m^2+n^2 sayısının 8'e bölümünden kaç farklı kalan elde edilebilir?

A) 4 B) 2 C) 3 D) 1 E) 5

2. k bir rakam, n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\sqrt{8n+k}$ ifadesi kesinlikle tamsayı olamayacak şekilde kaç farklı k rakamı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 4 E) 8

3. $1+(1+2)+\left(1+2+2^2\right)+\cdots+\left(1+2+2^2+\cdots+2^{100}\right)$
toplamının birler basamağındaki rakam aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

4. n pozitif tamsayıları için, $15\cdot 3^{20n}+83\cdot 2^{25n}$ sayısının $4, 5, 11, 3$ ve 49 sayılarından kaç tanesiyle bölümünden elde edilecek kalan n'ye bağlı değildir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. $n\in\mathbb{N}$ için, $5^{6n+10}+3^{6n+8}$ sayısının 7'ye bölümünden kaç farklı kalan elde edilir?

A) 2 B) 7 C) 1 D) 4 E) 3

6. n pozitif tamsayısı için, $101^{n!}$ sayısının 7'ye bölümünden kaç farklı kalan elde edilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

7. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\left(n^2+n+1\right)^{2007}$ ifadesinin son rakamı kaç farklı değer olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

8. $m=1^3+2^3+3^3+\cdots+2007^3$ sayısının 7'ye bölümünden kalan kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 5

9. 3^{2007} sayısının 41'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 14 B) 17 C) 11 D) 24 E)27

10. $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + k^k$ ifadesinin $k = 2007$, $k = 2008$ ve $k = 2009$ değerleri için, 3'e bölümünden kalanların toplamı kaçtır?

A) 1 B) 4 C) 3 D) 5 E) 2

11. aşağıdakilerden hangisi iki tamsayının karesinin toplamı olarak yazılabilir?

A) 12345 B) 10101 B) 11211 C) 12330 D) 87654

12. $2007, 2009, 2010, 2011$ sayılarından kaç tanesi n ve m tamsayılar olmak üzere $n^2 + m^2$ formunda yazılabilir.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13. x pozitif tamsayılarından, x ve 2^x pozitif sayılarının son rakamı aynı olanları artan sırada yazılıyor, buna göre, 1000'inci sırada hangi sayı bulunur?

A) 4036 B) 4104 C) 9996 D) 1006 E) 2924

14. Aşağıdaki sayılardan hangisi iki tamsayının karesinin farkı olarak yazılamaz.

A) 55555555 B) 3333333 C) 1111111 D) 44444444 E) 2222222

15. Aşağıdaki sayılardan hangisi iki tamsayının karesinin farkı olarak yazılabilir.

A) 43434 B) 45454 C) 62626 D) 69696 E) 24242

16. $\frac{1}{2}\left(\left(3+\sqrt{2}\right)^{10} + \left(3-\sqrt{2}\right)^{10}\right)$ ifadesinin son rakamı kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

17. Kendisinin rakamları toplamıyla, 3 katının rakamları toplamı birbirine eşit olan x sayısının 9'a bölümünden kalan kaçtır? (İsveç M.O. 1993)

A) 1 B) 3 C) 5 D) 0 E) 9

18. $7^n - 1$ sayısı $6^n - 1$ sayısının bir katı olacak şekilde kaç tane n pozitif tamsayısı vardır? (Çekoslavakya M.O. 1993)

A) 1 B) 2 C) 5 D) 0 E) Sonsuz sayıda

19. $n_1, n_2, ..., n_{1998}$ pozitif tamsayıları $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{1997}^2 = n_{1998}^2$ eşitliğini sağladığına göre bu sayılardan en az kaç tanesi çift olmalıdır? (Junior Balkan M.O. 1997)

A) 1 B) 2 C) 5 D) 0 E) 3

20. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için, $36^m - 5^n$ formunda yazılabilen en küçük pozitif tamsayı kaçtır? (Sovyet M.O. 1974)

A) 11 B) 2 C) 7 D) 1 E) 3

21. $a_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ olduğuna göre, *OBEB*$(a_0, a_1, ..., a_{1999})$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir? (Junior Balkan M.O. 1999)

A) 1 B) 5 C) 7 D) 35 E) Hiçbiri

22. $1 + 2^n + 3^n + 4^n$ sayısı 5'e bölünecek şekilde 100'den küçük kaç tane n pozitif tamsayısı vardır?

A) 50 B) 1 C) 75 D) 51 E) Hiçbiri

23. $2^{200} \mid 3^n - 1$ olacak şekildeki en küçük n pozitif tamsayısını bulunuz.

A) 201 B) 100 C) 198 D) 200 E) Hiçbiri

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

4.6 Problemler

1. $n^2+2n+12$ *sayısının hiç bir* n *tamsayısı için*, 121*'e bölünemeyeceğini gösteriniz.* (Kanada M.O. 1971)

2. n^2+3n+5 *ifadesinin* 121*'e bölünemeyeceğini gösteriniz.*

3. $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere*, $25 \mid a^5+b^5+c^5+d^5+e^5$ *ise* $5 \mid abcde$ *olduğunu gösteriniz.*

4. $A = 2^{2006}+2^{2007}+2^{2008}$ *sayısının yüzler basamağının çift olduğunu ispatlayınız.*

5. $n > 3$ *tamsayısı için*, $1!+2!+\cdots+n!$ *sayısının bir tamsayının bir kuvveti olamayacağını gösteriniz.*

6. a *bir tek sayı olmak üzere*, *birbirine eşit olmayan her* m *ve* n *pozitif tamsayıları için*, $a^{2^n}+2^{2^n}$ *ve* $a^{2^m}+2^{2^m}$ *sayılarının aralarında asal olduğunu gösteriniz.* (BALTIK M.O. 2001)

7. $p_1 < p_2 < \cdots < p_{31}$ *asal sayıları için*, $p_1^4+p_2^4+\cdots+p_{31}^4$ *sayısı* 30 *ile bölünüyor ise*, *bu asal sayılardan üç tane ardışık asal sayı bulunacağını gösteriniz.* (Romanya M.O. 2003)

8. $1^1+2^2+3^3+\cdots+2011^{2011}$ *toplamının bir tamsayının* 1*'den büyük bir kuvvetine eşit olamayacağını gösteriniz.*

9. $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere*, $2n+1$ *ve* $3n+1$ *sayıları tamkare ise* $40 \mid n$ *olacağını ispatlayınız.*

10. $a_1, a_2, ..., a_n$ *sayılarının her biri* 1 *veya* -1 *olmak üzere*,

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_{n-1}a_na_1a_2 + a_na_1a_2a_3 = 0$$

ise, n *sayısının* 4*'e bölünebildiğini ispatlayınız.*

11. $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ *ve* $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ *kümelerinin her ikisi de* $\mathrm{mod}\, m$*'de tüm kalanların oluşturduğu kümeler olsunlar.* $\{a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_m+b_m\}$ *kümesinin de* $\mathrm{mod}\, m$*'de tüm kalanları göstermesi için*, m *sayısının tek olması gerektiğini gösteriniz.*

12. n *sayısı* 11*'den küçük bir pozitif tamsayı ve* $p_1, p_2 > 9, p_3$ *ve* p, *asal sayıları için*, $p_1 + p_3^n$ *de bir asal sayı olsun.* $p_1 + p_2 = 3p$ *ve* $p_2 + p_3 = p_1^n (p_1 + p_3)$ *eşitlikleri sağlanıyor ise*, $p_1 p_2 p_3^n$ *çarpımı kaçtır?* (Hubei Mat. Yar. 1997)

13. n *bir pozitif tamsayı olmak üzere*, $2n + 1$ *ve* $3n + 1$ *sayılarının her biri tamkare ise*, $8 \mid n$ *olduğunu gösteriniz.*

14. m *ve* n *pozitif tamsayılar olmak üzere*, m *sayısı* 3*'e bölünmüyorsa*,

$$a = (n+1)^m - n \text{ ve } b = (n+1)^{m+3} - n$$

sayılarının aralarında asal olduğunu gösteriniz.

b) a *ve* b *aralarında asal olmayacak şekilde tüm* m *ve* n *sayılarını bulunuz.* (Municipal 98)

15. *Eğer*, p_1 *ve* p_2 *farklı tek asal sayılar olsunlar. Buna göre*, $A = (p_1 p_2 + 1)^4 - 1$ *sayısının en az* 4 *farklı asal çarpanı olduğunu gösteriniz.*

16. p *bir asal sayı olmak üzere* x, y, z *tamsayıları* $0 < x < y < z < p$ *eşitsizliğini sağlasınlar.* x^3, y^3, z^3 *sayıları* p'ye *bölündüklerinde aynı kalanı verdiklerine göre*, $x^2 + y^2 + z^2$ *sayısının* $x + y + z$ *ile bölündüğünü ispatlayınız.* (Polonya M.O. 2003)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

4.7 TÜBİTAK Olimpiyat Soruları (Modüler Aritmetik)

1. n pozitif bir tamsayı ise, 3^n'nin 32'ye bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 1 B) 11 C) 15 D) 25 E) Hiçbiri

UİMO - 2003

2. Aşağıdaki a ve b değerlerinden hangisi için, 5 tabanına göre yazılımı,

$$(aaabbbaaabbbaaa)_5$$

olan sayı 4'e tam bölünemez?

A) $a = 4, b = 0$ B) $a = 2, b = 3$ C) $a = 0, b = 2$
D) $a = 2, b = 1$ E) $a = 1, b = 2$

UİMO - 1999

3. $14n - 35$ sayısının 77 ile tam olarak bölünmesini ve $1 \leq n \leq 77$ koşulunu sağlayan kaç tane n tamsayısı vardır?

A) 77 B) 11 C) 7 D) 1 E) 0

UİMO - 1996

4. $5^n + n^5$ sayısının 11'e bölünmesini sağlayan 2003'ten büyük en küçük n tamsayısı nedir?

A) 2010 B) 2011 C) 2012 D) 2014 E) Hiçbiri

UMO - 2003

5. $8^{26} \cdot 125^{48}$ sayısının yedi tabanına göre yazımının son iki basamağı nedir?

A) 21 B) 31 C) 41 D) 51 E) 61

UİMO - 2007

6. $2005^{2003^{2004}+3}$ sayısı 3 tabanına göre yazıldığında son iki basamak ne olur?

A) 21 B) 01 C) 11 D) 02 E) 22

UMO - 2004

7. $n < 2005$ pozitif bir tamsayı olmak üzere, n sayısının, hiçbiri 5'e bölünmeyen tüm $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif tamsayıları için, $a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4$ sayısının 5'e bölünmesini sağlayan en büyük değeri nedir?

A) 2000 B) 2001 C) 2002 D) 2003 E) 2004

UMO - 2005

8. Aşağıdaki sayılardan hangisi $3^{3n+1}+5^{3n+2}+7^{3n+3}$ sayısını her n pozitif tamsayısı için böler?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 53

UMO - 2005

9. $3+3^2+3^{2^2}+3^{2^3}+\cdots+3^{2^{2006}}$ toplamı, 11 moduna göre aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 10

UMO - 2006

10. On tabanında basamaklarından birini 4, birini 6, diğer ikisini de istenilen herhangi iki a ve b rakamlarının oluşturduğu ve değeri $46(10a+b)$'ye eşit olan kaç tane dört basamaklı sayı vardır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 6 E) 12

UİMO - 2004

11. $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=y^2$ denkleminin x, y tamsayı olacak şekilde kaç tane (x, y) çözüm takımı vardır?

A) Sonsuz B) 12 C) 2 D) 0 E) 3

UMO - 1993

12. $5p\left(2^{p+1}-1\right)$ sayısını tamkare yapan kaç p asal sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 2003

13. $t_k(n)$ ile, n pozitif tamsayısının on tabanına göre yazılımındaki rakamların k'ıncı kuvvetlerinin toplamını gösterelim. Aşağıdaki değerlerden, hangisi için, 3'ün $t_k(n)$'yi bölmesi 3'ün n'yi bölmesini gerektirmez?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 15 E) Hiçbiri

UMO - 1999

14. Aşağıdaki sayılardan hangisi $4n^2+1$ sayısının n'nin sonsuz sayıda tamsayı değeri için böler?

A) 3 B) 7 C) 11 D) 13 E) Hiçbiri

UMO - 1994

15. m, n pozitif tamsayılar ve $p > 2$ asal sayı olsun. $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ olmak üzere,

$$m^n + n^m \equiv 0 \pmod{p}$$

denkliğinin sağlayan (m, n) sıralı ikililerinin oluşturduğu kümede kaç eleman vardır?

A) 0 B) 1 C) p D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

UMO - 1994

16. Aşağıdaki kümelerden hangisi; $\{a \in \mathbb{Z} : a^7 \equiv a \pmod{63}\}$ kümesinin alt kümesi değildir?

A) $\{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 0 \pmod{21}\}$ B) $\{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 0 \pmod{9}\}$

C) $\{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 2 \pmod{3}\}$ D) $\{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 1 \pmod{3}\}$

E) Hiçbiri

UMO - 1995

17. $P_1, P_2, ..., P_{12}$ farklı asal sayılar ve $P_1 + P_2 + \cdots + P_{12} \equiv x \pmod{12}$ olsun. Bu durumda x aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 0 B) 3 C) 7 D) 8 E) 11

UMO - 1994

18. n sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için, $\sum\limits_{i=1}^{4} i^n$ sayısı 5'e bölünmez?

A) 241 B) 240 C) 239 D) 238 E) 237

UMO - 1996

19. $5^n + 3^n + 1$ sayısı $1 \leq n \leq 100$ koşulunu sağlayan n tamsayılarından kaç tanesi için 7'ye bölünür?

A) 28 B) 30 C) 32 D) 34 E) Hiçbiri

UİMO - 1993

20. $2x^2 + ky^2 \equiv z^2 \pmod{32}$ denkliğinin, x, y, z teksayılar olmak üzere, en az bir çözümünün bulunmasını sağlayan k tamsayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{k : k \equiv 7 \pmod{16}\}$ B) $\{k : k \equiv 7 \pmod{32}\}$ C) $\{k : k \equiv 7 \pmod{8}\}$

D) $\{k : k \equiv 7 \pmod{4}\}$ E) Hiçbiri

UMO - 1997

21. $S = \{n : n3^n + (2n+1)\,5^n \equiv 0 \pmod{7}\}$ ise, her $n \in S$ için, $n + k \in S$ olmasını sağlayan en küçük pozitif k tamsayısı nedir?

A) 6 B) 7 C) 14 D) 21 E) 42

UMO - 2006

22. $1 \leq q \leq 37$, $1 \leq b \leq 37$ koşullarını ve 37'nin $1 + 7a + 8b + 19ab$ ifadesini bölmesini sağlayan kaç (a, b) tamsayı ikilisi vardır?

A) 37 B) 63 C) 73 D) 36 E) Hiçbiri

UİMO - 2009

23. $11^2+13^2+17^2,\ 24^2+25^2+26^2,\ 12^2+24^2+36^2,\ 11^2+12^2+132^2$ sayılarından kaçı bir tamsayının karesine eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

UMO - 2009

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.

Mustafa Özdemir

4.8 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyat Soruları (Modüler Aritmetik)

1. $B = 10^{10^7} + 10^{10^6} + 10^{10^5} + 10^{10^4}$ sayısı 7'ye bölündüğünde kalan nedir?

A) 2 B) 1 C) 4 D) 3 E) 5

Antalya M.O.- 1999

2. $n = 37^{73!} + 73^{41^{37}} + 69^{96!}$ sayısının onluk sayı sistemindeki yazılımında son iki basamak aşağıdakilerden hangisidir?

A) 03 B) 69 C) 75 D) 73 E) 41

Antalya M.O.- 2001

3. $\sqrt{2000^{2002}}$ sayısının onluk sayı sisteminde yazılışında sağdan sıfırdan farklı ilk rakam nedir?

A) 4 B) 2 C) 8 D) 6 E) 5

Antalya M.O.- 2002

4. $a_1, a_2, ..., a_{100}$ tamsayıları için $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1001^{1001}$ eşitliği sağlandığına göre, $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{100}^3$ sayısının 6'ya bölümünden kalan nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antalya M.O.- 2004

Fermat - Euler - Wilson - Çin Kalan Teoremleri

5.1 Euler - Fermat Teoremi

★ **Teorem 5.1.** (**Euler Teoremi**) $(a,n)=1$ *ise*, φ, *Euler fonksiyonu olmak üzere*, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$*'dir.*

İspat :

Örnek 148 11^{100} *sayısının* 48*'e bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 149 $2^{2010\cdot 2011}-1$ *sayısının* 2011^2*'ne tam bölünebildiğini gösteriniz.*

Örnek 150 91^8-1 *sayısı aşağıdakilerden hangisine tam bölünemez?*

A) 20 *B*) 24 *C*) 16 *D*) 23 *E*) 27

★ **Teorem 5.2.** (**Fermat Teoremi**) p *bir asal sayı olmak üzere*, *herhangi* a *tamsayısı için*, $a^p \equiv a \pmod{p}$*'dir.*

İspat :

Örnek 151 6^{127} *sayısının* 19*'a bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 152 $7^{128}+5^{67}$ *sayısının* 13*'e bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 153 $p_1<p_2<...<p_n$ *sayıları* $(50!)^2$ *sayısının tüm asal çarpanları olsun.* $(50!)^2$ *sayısının en büyük tek çarpanına bölümünden elde edilen sayı* m *olmak üzere*,

$$n\cdot p_1^{100!}+(n-1)\cdot p_2^{100!}+\cdots+2\cdot p_{n-1}^{100!}+1\cdot p_n^{100!}$$

toplamının m *ile bölümünden kalan kaçtır?* (*Antalya M.O.*- 2007)

Örnek 154 n *sayısı* 1*'den büyük bir tamsayı olmak üzere*, n *sayısının* 2^n-1 *sayısını bölemeyeceğini gösteriniz.*

5.2 Bir Tamsayının Mertebesi

★ **Teorem 5.3.** m *ve* a *aralarında asal sayıları için*, $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ olması için gerek ve yeter şart $o_m(a) \mid n$ olmasıdır.

İspat :

Örnek 155 $2^n \equiv 1 \pmod{101}$ *denkliğini sağlayan en küçük* n *sayısı kaçtır?* (*Yani*, $\bmod 101$*'e göre*, 2*'nin mertebesi kaçtır?*)

Örnek 156 $3^n - 1$ *sayısının son iki basamağının* 00 *olması için* n *en küçük kaç olmalıdır?*

Örnek 157 p *bir asal sayı ise*, $2^p - 1$ *sayısının tüm asal bölenlerinin* p*'den büyük olacağını gösteriniz.*

Örnek 158 n *bir tamsayı olmak üzere* p *asal sayısı*, $4n^2 + 1$ *sayısını bölüyor ise*, $p = 4k + 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 159 *Aşağıdaki* p *asal sayılarından hangisi için*, p *sayısı* $4n^2 + 1$ *sayısını bölecek şekilde bir* n *tamsayısı vardır?*

A) 31 *B*) 43 *C*) 151 *D*) 157 *E*) *Hiçbiri*

5.3 Wilson Teoremi

★ **Teorem 5.4. (Wilson)** p *bir asal sayı olmak üzere*, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$*'dir.*

İspat :

Örnek 160 $11 \cdot 22!$ *sayısının* 23*'e bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 161 $20!$ *sayısının* 23*'e bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 162 $n \in \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere*, *OBEB*$(n! + 1, (n+1)!) = ?$ (*İrlanda M.O.* 1996)

★ **Teorem 5.5.** $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ ise p *bir asal sayıdır.*

İspat :

Örnek 163 *Bir tamsayının karesinin bir* p *tek asal sayısı ile bölümünden kalanın* -1 *olması için gerek ve yeter şartın* p *sayısının* $4k + 1$ *formunda olması olduğunu gösteriniz.*

Örnek 164 *Aşağıdaki* n *tamsayılarından hangisi için* $x^2 \equiv -1 \pmod{n}$ *denkliğini sağlayan en az bir* x *tamsayısı vardır?* (*UMO* - 2003)

A) 97 *B*) 98 *C*) 99 *D*) 100 *E*) *Hiçbiri*

Örnek 165 $x^2 + 1 \equiv \pmod{101}$ *denkliğini aşağıdakilerden hangisi sağlar?*

A) 25! *B*) 37! *C*) 14! *D*) 50! *E*) *Hiçbiri*

Örnek 166 $p = 4k + 1$ *bir asal sayı olduğuna göre*,

$$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

olduğunu gösteriniz.

5.4 Çin Kalan Teoremi

★ **Teorem 5.6.** (**Çin Kalan Teoremi**) $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ *sayıları ikişer ikişer aralarında asal sayılar olmak üzere*,

$$\begin{cases} x \equiv k_1 \pmod{p_1} \\ x \equiv k_2 \pmod{p_2} \\ \vdots \\ x \equiv k_n \pmod{p_n} \end{cases}$$

denklik sistemi $\bmod\,(p_1 p_2 \cdots p_n)$*'ye göre bir tek çözüme sahiptir.*

İspat :

Örnek 167 2*'ye bölündüğünde* 1 *kalanını*, 3*'e bölündüğünde* 1 *kalanını ve* 5*'e bölündüğünde* 3 *kalanını veren en küçük* 4 *basamaklı tamsayı kaçtır?*

Örnek 168 $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$ *denklik sistemini çözünüz.*

5.5 Karışık Örnekler

Örnek 169 $p^8 - 1$ *sayısı* 240*'a bölünecek şekilde kaç tane* p *asal sayısı vardır?*

Örnek 170 $2003^{2002^{2001}}$ *sayısının son üç rakamını bulunuz.* $($*Kanada M.O.* $2003)$

Örnek 171 $\sum_{k=1}^{10} k^{100!}$ *toplamının son üç rakamını bulunuz.*

Örnek 172 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{23} = \frac{a}{23!}$ *denklemini sağlayan*, a *tamsayısının* 13*'e bölümünden kalan kaçtır?* $($*ARML* $2002)$

Örnek 173 $\frac{1}{2009}$ *sayısının ondalık yazılımında virgülden sonraki* 841*'inci rakamı kaçtır?*

Örnek 174 1001 *sayısının katlarından kaç tanesi*, $0 \leq m < n \leq 99$ *ve* $m, n \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere*, $10^n - 10^m$ *formunda yazılabilir?* $($*AIME* $2001)$

Örnek 175 pq *sayısı* $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ *sayısını bölecek şekilde kaç tane* (p, q) *asal sayı çifti vardır?* $($*Bulgaristan M.O.* $1995)$

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

5.6 Çözümlü Test

1. 7^{9999} sayısının son üç rakamını bulunuz.

A) 142 B) 124 C) 127 D) 004 E) Hiçbiri

2. 11^{321} sayısının 2 tabanına göre yazılışındaki son 7 rakam aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0001011 B) 0101011 C) 0001101 D) 1011000 E) Hiçbiri

3. $16!$ sayısının 323'e bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 220 B) 81 C) 19 D) 10 E) 237

4. $9 \cdot 13^{41}$ sayısının 43'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Hiçbiri

5. $100!$ sayısının 103'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 61 B) 31 C) 51 D) 41 E) Hiçbiri

6. $5 \cdot 3^{4n+2} + 53 \cdot 2^{5n} + 6^{42n+1}$ sayısının 49'a bölümünden kalan kaçtır?

A) 11 B) 21 C) 31 D) 6 E) Hiçbiri

7. $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin 50'den küçük kaç tane p asal sayısı için çözümü vardır?

A) 11 B) 7 C) 6 D) 8 E) 5

8. $1+3+3^2+\cdots+3^n$ sayısı 100'e tam bölündüğüne göre n aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 39 B) 79 C) 119 D) 69 E) 199

9. $8^{2008} - 9^7$ sayısının 61'e bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 20 B) 18 C) 9 D) 0 E) 5

10. $100^{560} - 1$ sayısı aşağıdakilerden hangisine tam bölünemez?

A) 29 B) 11 C) 17 D) 19 E) 41

11. 143^{101} sayısının son iki rakamı kaçtır?

A) 33 B) 00 C) 50 D) 23 E) 43

12. $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$ sistemini sağlayan en küçük pozitif tamsayının rakamları toplamı kaçtır?

A) 2 B) 11 C) 5 D) 8 E) 14

13. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$ olduğuna göre, x sayısının 385'e bölümünden elde edilen kalanın rakamları toplamı kaçtır?

A) 2 B) 11 C) 5 D) 8 E) 14

14. 2009'dan küçük kaç tane pozitif tamsayı için, $n^{101} - n$ sayısı 1000'e tam bölünür?

A) 1205 B) 1207 C) 803 D) 1000 E) 805

15. n sayısı 10'a bölünemeyen bir çift sayı olduğuna göre, n^{20} sayısının son iki basamağının rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisisidir?

A) 7 B) 11 C) 9 D) 15 E) 13

16. $14! + 15! + 16! + 17! + \cdots + 22!$ sayısının 17'ye bölümünden kalan kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 9 E) 16

17. m ve n pozitif tamsayıları için, $m^{60} - n^{60}$ sayısı aşağıdakilerden hangisine tam bölünmez?

A) 11 B) 7 C) 19 D) 13 E) 31

18. $\sum_{k=1}^{2008} 10^{10^k}$ sayısının 7'ye bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 0 E) 3

19. $9^{9^{9^9}} - 9^{9^9}$ sayısının son iki rakamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 10 B) 30 C) 40 D) 50 E) 00

20. $100^{101^2-1} - 100^{100}$ sayısının 101^2 ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) $101^2 - 2$ B $101^2 - 1$ C) 2 D) 1 E) 0

21. 101^{100} sayısının 105'e bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 43 B) 65 C) 37 D) 46 E) 31

22. $9, 99, 999, 9999, ...$ sayılarından sonsuz tanesini bölmeyen kaç tane asal sayı vardır?

A) 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) Sonsuz sayıda

23. $25^{25!} + 27^{27!} + \cdots + 47^{47!} + 49^{49!}$ sayısının 50'ye bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 25 B) 35 C) 45 D) 15 E) 5

24. n tane 5 rakamından oluşan $555...55$ sayısı, 11, 13, 17, 19 ve 23 sayılarından en az üçüyle tam bölündüğüne göre n aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 528 B) 396 C) 440 D) 180 E) 144

25. $7^{128} + 5^{67}$ sayısının 13'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 10 B) 7 C) 9 D) 11 E) 0

26. 7^{2008} sayısının son üç basamağını bulunuz?

A) 801 B) 401 C) 543 D) 649 E) 349

27. Her n tamsayısı için, $n^{13} - n$ sayısı aşağıdakilerden hangisiyle tam bölünmez?

A) 15 B) 35 C) 26 D) 65 E) 33

28. Bir tamsayının 2000'inci kuvvetinin son rakamı kaç farklı sayı olabilir?

A) 4 B) 2 C) 6 D) 5 E) 10

29. n pozitif tamsayısı için, $n^{25} - n + 1$ sayısının 30'a bölümünden elde edilebilecek farklı kalanların toplamı kaçtır?

A) 1 B) 7 C) 9 D) 19 E) 17

30. $2^{5^{17}} + 3^{5^{17}}$ sayısının 17'ye bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 11 C) 9 D) 3 E) 7

31. $n^{33} - n$ sayısı 15'e hangi n tamsayıları için bölünür?

A) $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ B) $n = 5k$ $(k \in \mathbb{Z})$ C) $n = 7k$ $(k \in \mathbb{Z})$

D) 17 E) Hepsi

32. $12! \cdot 10! + 12! + 10! + 1$ sayısı aşağıdakilerden hangisine tam bölünür.

A) 33 B) 91 C) 143 D) 77 E) 55

33. $p \mid 2^n + 1$ ve n pozitif tamsayısının en küçük asal böleni p'den büyük olacak şekilde kaç tane p asal sayısı vardır?

A) 1 B) 0 C) Sonsuz Sayıda D) 2 E) Hiçbiri

34. $176^{176!}$ sayısının 2000 ile bölümünden elde edilen kalanın rakamları toplamı kaçtır?

A) 13 B) 17 C) 19 D) 22 E) 21

35. En küçüğü 5'in, ortancası 7'nin ve en büyüğü 9'un katı olacak şekildeki en küçük ardışık üç sayının toplamını bulunuz.

A) 346 B) 187 C) 429 D) 432 E) 483

36. $\underbrace{111...11}_{p-1 \text{ tane}}$ sayısı p'ye bölünmeyecek şekilde kaç tane p asal sayısı vardır.

A) 1 B) 2 C) 3 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

5.7 Problemler

1. 242 *tane* 1 *ve* 242 *tane* 2*'den oluşan*, $n = 111...122...2$ *sayısının* 23*'e tam bölündüğünü ispatlayınız.*

2. *Tüm rakamları aynı olan bir sayı* 2008*'in bir katı olabilir mi?*

3. *Toplamları* 1492 *olan bir miktar tamsayının yedinci kuvvetlerinin toplamı* $a)$ 1996 $b)$ 1998 *olabilir mi?* (Çek - Slovak M.O. 96)

4. 1*'den büyük* a, n *tamsayıları için*, $n \mid a^n - 1$ *ise*, *OBEB*$(a-1, n) > 1$ *olduğunu ispatlayınız.*

5. *Her* n *pozitif çift sayısı için* $n^2 - 1$ *sayısının* $2^{n!} - 1$ *sayısını böldüğünü ispatlayınız.*

6. $n > 1$ *tamsayısı* $2^n - 1$ *sayısını asla bölemez ispatlayınız.*

7. p *asal sayı olmak üzere*, $ab^p - ba^p$ *sayısının* p'ye *bölündüğünü ispatlayınız.*

8. $2^n - n$ *sayısı verilen bir asal sayının katı olacak şekilde*, *sonsuz sayıda* n *pozitif tamsayı bulunabileceğini gösteriniz.* (Kanada M.O. 1983)

9. p *bir tek asal sayı olmak üzere*, q *ve* r *asal sayıları için*, $q^r + 1$ *sayısı* p*'ye tam bölünüyor ise*, $2r \mid p - 1$ *veya* $p \mid q^2 - 1$ *olduğunu ispatlayınız.*

10. $n > 1$ *bir tek sayı olduğuna göre*, n *sayısının* $3^n + 1$ *sayısını bölmediğini ispatlayınız.*

11. *Tüm rakamları aynı olan ve* 2008*'e bölünebilen bir sayının olduğunu gösteriniz.*

12. $p \geq 5$ *bir asal sayı ve* m *ile* n *aralarında asal iki tamsayı olmak üzere*,

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

ise, $p \mid m$ *olduğunu ispatlayınız.*

13. p *asal sayısı* $2^n - n$ *sayısını bölecek şekilde sonsuz sayıda* n *pozitif tamsayısı olduğunu ispatlayınız.*

14. $3k + 2$ *formunda bir* p *asal sayısı*, $a, b \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere* $a^2 + ab + b^2$ *sayısını bölüyor ise*, $p \mid a$ *ve* $p \mid b$ *olduğunu ispatlayınız.*

15. *Her n pozitif tamsayısı için $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ genel terimiyle verilen (a_n) dizisi veriliyor. Bu dizinin tüm elemanlarıyla aralarında asal olan tüm pozitif tamsayıları bulunuz.* (IMO 2005)

16. *Her n pozitif tamsayısı için, hiçbiri bir asal sayının kuvveti olmayan n tane ardışık sayının bulunabileceğini ispatlayınız.* (IMO 1989)

17. *p bir asal sayı olmak üzere,*

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + 3^{p-2} + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \frac{2-2^p}{p} \pmod p$$

olduğunu ispatlayınız.

18. *$S(n)$, n sayısının rakamlarının toplamını göstermek üzere, $S(n) = 1996 \cdot S(3n)$ olacak şekilde n pozitif tamsayısının var olduğunu gösteriniz.* (İRLANDA M.O. 1996)

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

5.8 TÜBİTAK Olimpiyat Soruları (Euler - Wilson Teoremleri)

1. 11 modunda 3^{2002} aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) Hiçbiri

UMO - 2002

2. Aşağıdaki sayılardan hangisi $n^{2225} - n^{2005}$ sayısını n'nin bütün tamsayı değerleri için bölmez?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 23

UMO - 2005

3. $10 \cdot 3^{195} \cdot 49^{49}$ sayısının dört tabanına göre yazımının son üç basamağı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 112 B) 130 C) 132 D) 212 E) 232

UMO - 2007

4. $49^{303} \cdot 3993^{202} \cdot 39^{606}$ sayısının son üç rakamı nedir?

A) 001 B) 081 C) 561 D) 721 E) 961

UMO - 2008

5. $20^{15} - 1$ sayısı aşağıdakilerden hangisi ile bölünmez?

A) 11 B) 19 C) 31 D) 41 E) 61

UMO - 1994

6. $1 \leq a \leq 100$ olmak üzere, $a^{60} \equiv 1 \pmod{77}$ bağıntısını sağlayan kaç tane a tamsayısı vardır?

A) 79 B) 78 C) 77 D) 76 E) 75

UMO - 1996

7. $1^{1!} + 2^{2!} + 3^{3!} + \cdots + 13^{13!}$ sayısı 13'e bölündüğünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) Hiçbiri

UMO - 1996

8. $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n$ toplamının 77 ile bölünmesini sağlayan en küçük $n \geq 100$ tamsayısı nedir?

A) 101 B) 105 C) 111 D) 119 E) Hiçbiri

UMO - 2000

9. $9^{8^{7^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}$ sayısının on tabanına göre yazılımının son iki basamağı nedir?

A) 81 B) 61 C) 41 D) 21 E) 01

UMO - 2000

10. $1 \leq n \leq 100$ ve $2^n + n^5 \equiv 1 (\operatorname{mod} 11)$ koşullarını sağlayan kaç n tamsayısı vardır?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 9 E) Hiçbiri

UİMO - 2001

11. $p_1 < p_2 < ... < p_{24}$, $[3;100]$ aralığındaki asal sayıları gostermek uzere,

$$\sum_{i=1}^{24} p_i^{99!} \equiv a \,(\operatorname{mod} 100)$$

denkliğini gerçekleyen en küçük pozitif a sayısı kaçtır?

A) 99 B) 50 C) 48 D) 25 E) 24

UMO - 1998

12. n'nin tüm pozitif tamsayı değerleri için $5n^{11} - 2n^5 - 3n$ sayısını bölen kaç tane pozitif tamsayı vardır?

A) 2 B) 5 C) 6 D) 12 E) 18

UMO - 2004

13. $9, 99, 999, ...$ dizisi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) Bu dizinin hiç bir terimini bölmeyen asal sayılar sonlu sayıdadır.

B) Sonsuz çoklukta asal sayı, bu dizinin sonsuz çoklukta terimini böler.

C) Her n pozitif tamsayısı için, bu dizinin n'den çok sayıda farklı asal sayı ile bölünen bir terimi vardır.

D) Öyle bir n tamsayısı vardır ki, n'den büyük her asal sayı, bu dizinin sonsuz çoklukta terimini böler.

E) Hiçbiri

UMO - 2001

14. Aşağıdaki sayılardan hangisi $\left(a^3 - 1\right) a^3 \left(a^3 + 1\right)$ sayısını a'nın en az bir tamsayı değeri için bölmez?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) Hiçbiri

UMO - 1995

15. Aşağıdaki a sayılarından hangisi için,

$$n^a \equiv n \pmod a$$

bağıntısını sağlamayan en az bir n tamsayısı vardır?

A) 667 B) 561 C) 547 D) 503 E) 491

UMO - 1996

16. N sayısının ondalık yazımında birler basamağındaki rakam 2'dir. Bu rakamı bulunduğu yerden kaldırıp en başa yazdığımızda elde ettiğimiz sayı N sayısının iki katı ise, N'nin basamak sayısı en az kaçtır?

A) 12 B) 36 C) 4 D) 18 E) 6

UMO - 1997

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

Denklikler (Kongruanslar)

6.1 Doğrusal Denklikler

★ **Teorem 7.1.** (**Çözümün Varlığı**) *$ax \equiv b \pmod m$ denkliğinin tamsayılarda çözümünün olması için gerek ve yeter şart m ile a sayılarının OBEB'inin b sayısını bölmesidir.*

İspat :

Örnek 176 $9x = 6 \pmod{12}$ *denkliğinin* $(9,12) = 3$ *ve* $3 \mid 6$ *olduğundan çözümü vardır? Bu denkliğin birbirine denk olmayan kaç çözümü vardır?*

★ **Teorem 7.2.** (**Çözüm Sayısı**) $ax \equiv b \pmod m$ d*enkliğinde*, *OBEB*$(m,a) = d \mid b$ *ise denkliğin tam d tane çözümü vardır.*

İspat :

Örnek 177 *Aşağıdaki denkliklerden hangisinin çözümü yoktur?*

A) $25x + 19 \equiv 0 \pmod{34}$ *B*) $11x \equiv 21 \pmod{41}$

C) $27x + 1 \equiv 22 \pmod{33}$ *D*) $47x + 37 \equiv 0 \bmod 57$

E) $24x + 19 \equiv 0 \pmod{45}$

Örnek 178 $27x + 18 \equiv 0 \pmod{36}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 179 $ax \equiv 24 \pmod{72}$ *denkleminin* 3*'ten fazla çözümünün olabilmesi için* a *yerine yazılabilecek mod* 72*'de birbirine denk olmayan kaç tane pozitif tamsayı vardır?*

★ **Teorem 7.3. (Çözümlerin Bulunması)** $ax \equiv b \pmod m$ *denkliğinin tamsayılarda bir çözümü* x_0 *ise*, *bu denkliğin çözüm kümesi*

$$\text{Ç.K.} = \left\{x_0 + \frac{m}{m-a}t : t \in \mathbb{Z}\right\}$$

olur. Yani, x_0 *bir çözüm ve* $(m,a) = d$ *ise*, *tüm çözümler*, $p = m/d$ *olmak üzere*,

$$x_0,\ x_0 + p,\ x_0 + 2p, ..., x_0 + (d-1)\,p$$

olur.

Örnek 180 $12x \equiv 9 \pmod{21}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan çözümlerini bulunuz.*

★ **Teorem 7.4.** (**Çözümlerin toplamı**) $ax \equiv b \pmod{m}$ *denkliğinin*, m*'den küçük pozitif çözümlerinin toplamı* S *ise*, x_0 *bir çözüm ve OBEB*$(m, a) = d$ *olmak üzere*, $S = d \cdot x_0 \pmod{m}$ *olur.*

Örnek 181 $105x \equiv 80 \pmod{550}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan* 550*'den küçük, pozitif tamsayı çözümlerinin toplamının* 550 *ile bölümünden kalan kaçtır?*

6.2 İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklikler

★ **Teorem 7.5.** (**Çözümün Varlığı**) $ax + by \equiv c \pmod{m}$ *denkliğinin çözümü olması için gerek ve yeter şart OBEB*$(a, b, m) \mid c$ *olmasıdır.*

İspat :

★ **Teorem 7.6.** (**Çözüm Sayısı**) *OBEB*$(m, a) = 1$ *veya OBEB*$(m, b) = 1$ *olması durumunda* $ax + by \equiv c \pmod{m}$ *denkliğinin tam* m *tane birbirine denk olmayan çözümü vardır.*

İspat :

Örnek 182 $21x + 34y = 15 \pmod{45}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane tamsayı çözümü vardır?*

★ **Teorem 7.7.** *OBEB*$(a, b, m) = d$ *ve* $d \mid c$ *ise* $ax + by \equiv c \pmod{m}$ *denkliğinin, tam* $d \cdot m$ *tane birbirine denk olmayan çözümü vardır.*

Örnek 183 $231x + 429y = 132 \pmod{660}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan çözümlerinin sayısı bulunuz.*

Örnek 184 $2x + 3y = 4 \pmod{6}$ *denkliğini sağlayan ve birbirine denk olmayan farklı çözümlerini bulunuz.*

Örnek 185 $2x + 3y + 4z \equiv 1 \pmod{5}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan kaç çözümü vardır.*

6.3 Denklik Sistemleri

Örnek 186 $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3 \pmod{12} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{array} \right.$ *denklik sistemini çözünüz.*

★ **Teorem 7.8.** $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{array} \right.$ *sisteminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart* $OBEB\,(m, n) \mid (a - b)$ *olmasıdır.*

İspat :

★ **Teorem 7.9.** x_0 *sayısı*

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

sisteminin bir çözümü ise, diğer çözümler $x \equiv x_0 \,(\mathrm{mod}\, \mathit{OKEK}\ (m,n))$ *denkliğini sağlarlar ve bu denkliği sağlayan her* x *değeri bir çözümdür.*

İspat :

Örnek 187 $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$ *denklik sistemini sağlayan* 100*'den küçük kaç tane pozitif tamsayı vardır?*

Örnek 188 $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$ *denklik sisteminin çözümü var mıdır?*

6.4 Yüksek Mertebeden Denklikler

6.4.1 p Asal Sayısı İçin Mod$p$'de Yüksek Mertebeden Denklikler

Örnek 189 $x^3 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan çözümlerini bulunuz.*

Örnek 190 $x^{11} + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ *denkliğini sağlayan* 100*'den küçük en büyük tamsayı kaçtır?*

Örnek 191 $x^4 + 6x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{13}$ *denkliğini sağlayan* 100*'den büyük en küçük tamsayı kaçtır?*

Örnek 192 $x^3 + 107x^2 + 11x + 107 \equiv 0 \pmod{113}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan köklerini bulunuz.*

6.4.2 M Bileşik Sayısı İçin Mod$\mathrm{M}$'de Yüksek Mertebeden Denklikler

★ **Teorem 7.10.** (**Aralarında asal çarpanlara parçalayıp çözme**) $m_1, m_2, ..., m_n$ *pozitif tamsayıları ikişer ikişer aralarında asal ve* $M = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ *olsun. Bu durumda,* $f(x)$ *katsayıları tamsayılar olan bir polinom olmak üzere,* a *sayısının*

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

denkliğinin çözümünün olması için gerek ve yeter şart a *tamsayısının*

$$\begin{gathered} f(x) \equiv 0 \pmod{m_1} \\ f(x) \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ f(x) \equiv 0 \pmod{m_n} \end{gathered}$$

sisteminin bir çözümü olmasıdır

Örnek 193 $x^5 - 2x^2 + 6x + 11 \equiv 0 \pmod{30}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 194 $x^5 + 3x^2 - 6x + 8 \equiv 0 \pmod{30}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane çözümü vardır?*

★ **Teorem 7.11.** $f(x)$ *tamsayı katsayılı bir* n*'inci dereceden polinom ve* p *bir asal sayı olmak üzere, eğer,* $a_1, a_2, ..., a_r$ *sayıları* $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ *denkliğinin birbirine denk olmayan çözümleri iseler,*

$$f(x) \equiv (x - a_1)(x - a_1) ... (x - a_1)\, g(x) \pmod{p}$$

olacak şekilde, $(n - r)$'inci *dereceden tam katsayılı bir* $g(x)$ *polinomu vardır.*

★ **Teorem 7.12.** (**Bir polinomun denk olmayan kök sayısı**) $f(x)$ *tamsayı katsayılı* n*'inci dereceden bir polinom ve* p *bir asal sayı olsun. Eğer,* $f(x)$ *polinomunun katsayıları* p *moduna göre her biri sıfıra denk değilse,*

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

denkliğinin birbirine denk olmayan en çok n *tane çözümü vardır.*

Örnek 195 *Aşağıdaki denkliklerden hangisinin birbirine denk olmayan çözüm sayısı* 3*'ten fazladır?*

A) $x^3 + 2x \equiv 0 \pmod{37}$ *B)* $2x^3 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{11}$

C) $x^2 + 3x + 9 \equiv 0 \pmod{12}$ *D)* $x^2 + x \equiv 0 \pmod{15}$

E) $x^3 + 5x^2 + 6x \equiv 0 \pmod{47}$

6.5 p asal sayısı için modp^n de Denklikler

Örnek 196 $x^3 + x + 2 \equiv 0 \left(\bmod 3^3\right)$ *denkliğinin kökünü bulunuz.*

Örnek 197 $x^3 + x + 2 \equiv 0 \left(\bmod 3^2\right)$ *denkliğinin kökünü bulunuz.*

Örnek 198 $x^2 \equiv -1 \left(\bmod 5^3\right)$ *denkliğinin köklerini bulunuz.*

Örnek 199 $x^2 \equiv -5 \left(\bmod 7^3\right)$ *denkliğinin birbirine denk olmayan en küçük pozitif köklerinin toplamı kaçtır?*

★ **Teorem 7.13.** $f(x)$ *tamsayı katsayılı bir polinom ve* p *bir asal sayı olsun.* a *tamsayısı* $f(x) \equiv 0 \,(\bmod p^n)$ *denkliğinin bir çözümü olsun. Bu durumda,*

$$f(x) \equiv 0 \left(\bmod p^{n+1}\right)$$

denkliğinin

i) $p \nmid f'(a)$ *ise sadece* 1 *çözümü vardır.*

ii) $p \mid f'(a)$ *ve* $p^{n+1} \mid f(a)$ *ise,* p *tane çözümü vardır.*

$(x \equiv a + p^n k,\ k = 0, 1, ..., p-1)$

Örnek 200 $x^3 + 5x^2 + x - 3 \equiv 0 \left(\bmod 3^2\right)$ *denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 201 $2x^4 - x^2 + 3x \equiv 0 \left(\bmod 3^3\right)$ *denkliğinin kaç tane birbirine denk olmayan kökü vardır?*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

6.6 Çözümlü Test

1. $105x \equiv 450 \pmod{1650}$ denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane çözümü vardır?

A) 1 B) 0 C) 13 D) 3 E) 15

2. $m^2 + m - 72$ ifadesi 19'a tam bölünecek şekilde, 1000'den küçük kaç tane pozitif m sayısı vardır?

A) 101 B) 100 C) 106 D) 107 E) Hiçbiri

3. $2x^{31} + x^{21} + 5x^{11} + 3x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$ denkliğinin birbirine denk olmayan kaç farklı kökü vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 4

4. $n^{27} + 5n^{25} - n^{15} + 11n^{12} + 8n + 2$ ifadesi, 100'den küçük kaç tane n pozitif tamsayı değeri için 13'e tam bölünür?

A) 7 B) 10 C) 92 D) 93 E) 98

5. $x^{19} + x^{14} - 5x^7 + 4 \equiv 0 \pmod 7$ denkliğinin birbirine denk olmayan kaç farklı kökü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 7 E) 6

6. $x^3 + 3x^2 - x + 98 \equiv 0 \pmod{101}$ denkliğinin birbirine denk olmayan en küçük pozitif köklerinin toplamını bulunuz?

A) 110 B) 100 C) 200 D) 199 E) 98

7. $x^3 + ax + 1 \equiv 0 \pmod 3$ denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane çözümü olabilir?

A) 0 veya 1 B) Sadece 1 C) $0, 1$ veya 2 D) $0, 1$ veya 3 E) Hiçbiri

8. $x^3+5x^2+x+3 \equiv (x-r)^3 \pmod{p}$ olacak şekilde kaç p asal sayısı vardır?

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

9. $x^4+5x^2-2 \equiv 0 \pmod{11}$ denkliğini sağlayan 100'den küçük en büyük tamsayı kaçtır?

A) 93 B) 94 C) 95 D) 96 E) 97

10. $x^3+94x^2+96x+3 \equiv 0 \pmod{97}$ denkliğinin birbirine denk olmayan en küçük pozitif köklerinin toplamını bulunuz.

A) 110 B) 100 C) 140 D) 199 E) 98

11. $x^5+2x^2-4x+5 \equiv 0 \pmod{42}$ denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane çözümü vardır?

A) 0 B) 1 C) 6 D) 4 E) 3

12. $7x^5+3x^2-2x+6 \equiv 0 \pmod{42}$ denkliğinin birbirine denk olmayan kaç tane çözümü vardır?

A) 0 B) 1 C) 6 D) 4 E) 2

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.

Mustafa Özdemir

6.7 TÜBİTAK Olimpiyat Soruları (Denklikler)

1. m, n, k tamsayıları $221m + 247n + 323k = 2001$ eşitliğini sağlıyorlarsa, k tamsayısının alabileceği 100'den büyük en küçük değer kaçtır?

A) 224 B) 107 C) 101 D) 111 E) Hiçbiri

UMO - 2001

2. $x^3 + 3x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{25}$ denkliğinin 25 moduna göre farklı kaç çözümü vardır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

UMO - 2001

3. $0 \leq x \leq 13$, $0 \leq y \leq 13$, $0 \leq z \leq 13$ olmak üzere,

$$x - yz^2 \equiv 1 \pmod{13} \text{ ve } xz + y \equiv 4 \pmod{13}$$

denklik sisteminin sağlayan kaç (x, y, z) tamsayı üçlüsü vardır?

A) 10 B) 23 C) 36 D) 49 E) Hiçbiri

UMO - 2006

4. $x^5 + 5x^2 + x + 1 \equiv 0 (\bmod 121)$ ve $0 \leq x < 121$ koşullarını sağlayan kaç x tamsayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

UMO - 2005

5. Aşağıdaki p asal sayılarından hangisi için, $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ denkliğinin en az bir tamsayı çözümü vardır?

A) 653 B) 647 C) 641 D) 617 E) Hiçbiri

UMO - 1996

6. $0 < n < 945$ ve $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \equiv 0 \pmod{105}$ koşullarını sağlayan kaç n tamsayısı vardır?

A) 80 B) 89 C) 82 D) 90 E) Hiçbiri

UMO - 200?

7. Her $0 \leq i \leq 9$ için, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere, $6 \sum\limits_{i=0}^{9} a_i 5^i \equiv 1 \left(\bmod 5^{10}\right)$ ise, a_9 aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

UMO - 1999

8. Kaç p asal sayısı için, $x^3 - x + 2 \equiv (x-r)^2 (x-s) \pmod{p}$ denkliğinin tüm x tamsayıları tarafından gerçeklenmesini sağlayan r, s tamsayıları bulunabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 1999

9. p, q pozitif tamsayılar ve $p = q + 2$ ise, $p^2 + q^2 \equiv x \pmod{72}$ denkliğini sağlayan en küçük pozitif x tamsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 34 C) 70 D) 1 E) 4

UMO - 1993

10. $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 \equiv 0 \pmod{25}$ ve $0 \leq x \leq 25$ koşullarını sağlayan tamsayıların toplamı 25 modunda aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) 3 B) 4 C) 17 D) 22 E) Hiçbiri

UMO - 2003

11. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{30}$ ve $0 \leq x \leq 30$ koşullarını sağlayan kaç tane tamsayı vardır?

A) 3 B) 4 C) 2 D) 0 E) 1

UMO - 1998

12. $x^3 - 5x^2 - 22x + 56 \equiv 0 \pmod{p}$ denkliğinin kaç p asal sayısı için $0 \leq x \leq p$ koşullarını sağlayan üç farklı tamsayı kökü yoktur?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 0 E) 5

UMO - 1998

13. a, b, c tamsayılar olmak üzere,

$$x \equiv a \pmod{14}, \ x \equiv b \pmod{15}, \ x \equiv c \pmod{16}$$

denklik sistemini ve $0 \leq x < 2000$ koşulunu sağlayan tamsayıların sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 1999

14. $0 \leq x, y < 31$ olmak üzere, $\left(x^2 - 18\right)^2 \equiv y^2 \pmod{31}$ denkliğini sağlayan kaç (x, y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 59 B) 60 C) 61 D) 62 E) Hiçbiri

UMO - 2000

15. $x^3 - 2x + 6 \equiv 0 (\operatorname{mod} 125)$ ve $0 \leq x < 125$ koşullarını sağlayan kaç tane x tamsayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 2002

16. Aşağıdaki ifadelerin hangisinin 25'e bölünmesini sağlayan bir x tamsayısı bulunur?

A) $x^3 - 3x^2 + 8x - 1$ B) $x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ C) $x^3 + 14x^2 + 3x - 8$
D) $x^3 - 5x^2 + x + 1$ D) Hiçbiri

UMO - 2004

17. Kaç p asal sayısı için, $m^3 + 3m - 2 \equiv 0 \pmod p$ ve $m^2 + 4m + 5 \equiv 0 \pmod p$ koşullarını sağlayan bir m tamsayısı bulunabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

UMO - 2006

18. n ve m tamsayılar olmak üzere, $n \leq 2007 \leq m$ ve $n^n \equiv -1 \equiv m^m (\operatorname{mod} 5)$ ise, $m - n$'nin alabileceği en küçük değer nedir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

UMO - 2007

19. 15'ten küçük kaç p asal sayısı için,

$$m + n + k \equiv 0 \pmod p, \ mn + mk + nk \equiv 1 \pmod p, \ mnk \equiv 2 \pmod p$$

sistemini sağlayan (m, n, k) tamsayı üçlüsü vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

UMO - 2007

20. $1 \leq n \leq 455$ ve $n^3 \equiv 1 \pmod{455}$ koşullarını sağlayan kaç n tamsayısı vardır?

A) 3 B) 1 C) 9 D) 6 E) Hiçbiri

UMO - 2009

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

Tamsayılar Kümesinde Denklem Çözümü

7.1 Lineer Diofan Denklemleri

Örnek 202 $10x + 12y = 15$ *denklemini sağlayan kaç farklı* (x, y) *tamsayı çifti vardır?*

Örnek 203 $2x + 3y = 1000$ *eşitliğini sağlayan kaç tane* (x, y) *pozitif tamsayı ikilisi vardır?*

Örnek 204 $12x + 15y = 1203$ *eşitliğini sağlayan kaç tane* (x, y) *pozitif tamsayı ikilisi vardır?*

Örnek 205 $15x + 36y = 3$ *denklemini tamsayılarda sağlayan* 36*'dan küçük pozitif* x *tamsayıları bulunuz.*

Örnek 206 *Bir kitapçı tanesi* 13 *ve* 23 *TL olan iki çeşit kitapdan* 1715 *TL liralık kitap almak istiyor.* 23 *TL'lik kitaplardan kaç farklı sayıda kitap alabilir?*

Örnek 207 *Aşağıdaki açılardan hangisiyle sadece cetvel ve pergel kullanılarak* 123 *derecelik bir açı oluşturulamaz?*

A) 24 *B*) 13 *C*) 19 *D*) 17 *E*) 21

Örnek 208 *Bir karayolu üzerinde bir noktadan başlanarak yol kenarlarına* 111*'er metre arayla palmiye ağacı dikiliyor. Daha sonra aynı noktadan başlanarak,* 78*'er metre arayla çam ağacı dikiliyor. Hangi iki ağaç arasındaki mesafe ilk kez* 42 *metredir? (Başlangıç noktasına ağaç dikilmemektedir.)*

Örnek 209 x *ve* y *negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,* $8x + 15y$ *şeklinde* <u>*yazılamayan*</u> *en büyük* n *tamsayısı kaçtır?* (*Kanada M.O.* - 1974)

Örnek 210 *Biri* 3*, diğeri* 11*'e bölünebilen iki* <u>*bileşik*</u> *pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılamayan en büyük tamsayı kaçtır?*

Örnek 211 $2x + 3y = c$ *denklemini sağlayan* 1000 *tane* (x, y) *pozitif tamsayı çiftinin olması için,* c *yerine yazılabilecek kaç tane pozitif tamsayı vardır.*

Örnek 212 208 *ile sona eren ve* 209*'a bölünen en küçük pozitif tamsayının rakamları toplamı kaçtır?*

7.2 Basit Bölünebilme Özellikleri ile Çözülebilen Denklemler

Örnek 213 $2xy = 4x + y$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y) *tamsayı çifti vardır?*

Örnek 214 $11x + 13y = 4xy$ *denkleminin kaç tane tamsayı çözümü vardır?*

Örnek 215 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ *denkleminin pozitif tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?*

7.3 Çarpanlara Ayırma Kuralları Kullanılarak Çözülen Denklemler

Örnek 216 $x^2 = 210 + y^2$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y) *tamsayı ikilisi vardır?*

Örnek 217 $x^4 = y^2 + 71$ *denkleminin tamsayı çözümlerinin sayısını bulunuz.*

Örnek 218 $x^3 - y^3 = xy + 61$ *denkleminin pozitif tamsayılarda kaç tane kökü vardır?*

Örnek 219 y *bir asal sayı, ve* x *sayısı* 3 *ve* y*'ye tam bölünemeyen bir pozitif tamsayı ise,* $x^3 - y^3 = z^2$ *denkleminin kaç tane* (x, y, z) *pozitif tamsayı çözümü vardır?*

Örnek 220 $y^2\left(x^2 + 1\right) + x^2\left(y^2 + 16\right) = 448$ *eşitliğini sağlayan kaç tane* (x, y) *tamsayı çifti vardır?*

Örnek 221 $x^6 = y^2 + 60$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y) *tamsayı çifti vardır?*

7.4 Modüler Aritmetik Yardımıyla Çözülebilen Denklemler

Örnek 222 $5x^2 + 4y^2 = 27$ *denkleminin tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 223 $5x^2 + 4y^2 = 61$ *denkleminin tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 224 $6x^2 + 5y^2 = 230$ *denkleminin tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 225 $(x + m)^2 + (x + 2m)^2 + (x + 3m)^2 + (x + 4m)^2 = 2009$ *denkleminin çözümlerini bulunuz.*

Örnek 226 $x^7 - x = 42y$ *denklemini sağlayan kaç* (x, y) *tamsayı çifti vardır?*

Örnek 227 $3{\cdot}5^{2x+1}+2^{3x+1}+17y=1870$ *denkleminin negatif olmayan tamsayılarda, kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 228 $6\left(x!+3\right)=y^2+5$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x,y) *tamsayı çifti vardır?*

Özellik : n^2+1 *sayısınının* 2 *haricindeki tüm asal çarpanları* $4k+1$ *formundadır.*
İspat :

Örnek 229 $y^2=x^3+7$ *denklemini sağlayan kaç* (x,y) *tamsayı ikilisi vardır?*

Örnek 230 $k!+48=48\left(k+1\right)^m$ *olacak şekilde* k *ve* m *negatif olmayan tamsayılarının bulunmadığını gösteriniz.* (*Kanada M.O.*)

Örnek 231 *Bir* n *pozitif tamsayısı için,* $f\left(n\right)$, n^2+2 *sayısının* 4*'e bölümünden kalanı göstersin. Buna göre,* $x^2+\left(-1\right)^y f\left(z\right)=10y$ *denkleminin kaç tane* (x,y,z) *tamsayı çözümü vardır?*

Örnek 232 $2^m-3^n=7$ *olacak şekildeki tüm pozitif tamsayıları bulunuz.* (*Avusturya Polonya M.O.* 1993)

7.5 Bilinmeyenleri Sınırlayarak Çözülebilen Denklemler

Örnek 233 $2x^y-y=2007$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x,y) *pozitif tamsayı çifti vardır?*

Örnek 234 $2^x\cdot(4-x)=2x+4$ *denkleminin kaç tane tamsayı çözümü vardır?*

Örnek 235 $a^2+b=b^{1999}$ *denklemini sağlayan kaç tane* (a,b) *tamsayı ikilisi vardır?* (*Estonya M.O.* 1999)

7.6 Simetriklik Kullanılarak Çözülebilen Denklemler

Örnek 236 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{xy}$ *denkleminin pozitif tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 237 $a^3+b^3+c^3=2001$ *denklemini sağlayan kaç tane* (a,b,c) *pozitif tamsayı üçlüsü vardır?* (*Balkan Junior* 2001)

Örnek 238 $5(xy + yz + xz) = 4xyz$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y, z) *pozitif tamsayı üçlüsü vardır?*

Örnek 239 m, n, k *pozitif tamsayıları için*, $(36m + n)(m + 36n) = 2^k$ *denkleminin çözümünün olmadığını gösteriniz.* (*Asya Pasifik M.O.* 1998)

7.7 Tahmini Çözümden Genel Çözüme Ulaşma

Örnek 240 $x^2 + y^2 = z^{2008}$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y, z) *pozitif tamsayı üçlüsü vardır?*

Örnek 241 x, y, z *tamsayıları için* $xyz \neq 0$ *ise* $x^2 + y^5 = z^3$ *denkleminin sonsuz çözümü olduğunu gösteriniz.* (*Kanada M.O.* 1991)

Örnek 242 $x^3 + y^5 - z^4 = 0$ *denkleminin pozitif tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?*

7.8 Diskriminant Kullanılarak Çözülen Denklemler

Örnek 243 $n^2 + 3n + 5 = 121m$ *denklemini sağlayan kaç tane* (n, m) *pozitif tamsayı ikilisi vardır?*

Örnek 244 $x^3 - y^3 = xy + 61$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y) *pozitif tamsayı ikilisi vardır?* (*Sovyet M.O.* 1981)

Örnek 245 $x^3 + 9xy + 127 = y^3$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y) *tamsayı çifti vardır?*

Örnek 246 $\frac{x \cdot y}{z} + \frac{x \cdot z}{y} + \frac{y \cdot z}{x} = \frac{9}{2}$ *denkleminin tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?*

7.9 Tamkare ve Tamküp Soruları

Örnek 247 m, n *pozitif tamsayılar olmak üzere*, $2001m^2 + m = 2002n^2 + n$ *eşitliği sağlandığına göre*, $m - n$ *sayısının bir tamkare olduğunu gösteriniz.* (*Avusturya Polonya M.O.* 2002)

Örnek 248 11 *tane* 1 *ile başlayan* 20 *basamaklı bir sayının tamkare olamayacağını ispatlayınız.*

Örnek 249 x, y *pozitif tamsayılar olmak üzere*, $2x^2 + x = 3y^2 + y$ *ise*, $x - y$, $2x + 2y + 1$, $3x + 3y + 1$ *ifadeleri tamkaredir ispatlayınız.*

Örnek 250 $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere*,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \text{ ve } OBEB\,(a, c) = 1$$

eşitliği sağlandığına göre, $a + b$, $a - c$ *ve* $b - c$*'nin üçünün de tamkare olduğunu gösteriniz.*

Örnek 251 *OBEB*$(a, b, c) = 1$ *ve* $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ *sayısı tamkare olacak biçimde, sonsuz sayıda* (a, b, c) *pozitif tamsayı üçlüsü bulunduğunu ispatlayınız.*

Örnek 252 *Herhangi* 9 *tanesinin toplamı tamkare olan* 10 *farklı tamsayı var mıdır?* (*Rusya* 1999)

Örnek 253 n *pozitif tamsayısı için,* $n^3 + 7n - 133$ *ifadesi pozitif bir tamsayının küpü oluyorsa,* n *sayısına "iyi sayı" diyelim. Tüm iyi sayıların toplamını bulunuz.* (*USC Math.Contest*)

Örnek 254 $n^2 - 19n + 99$ *sayısı tamkare olacak şekilde tüm* n *pozitif tamsayılarının toplamını bulunuz.* (*AIME* 1999)

Örnek 255 $n^2 + 2009n$ *sayısı tamkare olacak şekilde en büyük* n *pozitif tamsayısı kaçtır?*

Örnek 256 $n^4 + n^3 + 1$ *ifadesi tamkare olacak şekilde tüm* n *pozitif tamsayılarını bulunuz.*

Örnek 257 $n^2 + n$ *ve* $n^3 + 2n^2$ *ifadelerinin ikisi de tamsayı olacak şekilde kaç tane rasyonel olmayan* n *reel sayısı vardır?*

7.10 Karışık Örnekler

Örnek 258 $5n^2 = 36a^2 + 18b^2 + 6c^2$ *denklemini sağlayan kaç tane* (a, b, c, n) *tamsayı dörtlüsü vardır?* (*Asya Pasifik M.O* 1989)

Örnek 259 $x^n + (x + 2)^n + (2 - x)^n = 0$ *denkleminin tamsayı çözümüne sahip olabilmesi için* n *pozitif tamsayısı kaç farklı sayı olabilir?* (*Asya Pasifik M.O* 1993)

Örnek 260 *m ve n sayıları her ikisi de pozitif yada negatif olan birbirinden farklı sayılar olmak üzere, m^2+4n ve n^2+4m sayılarının her ikisi de tamkare olacak şekilde kaç tane (m,n) tamsayı ikilisi vardır?* (*Asya Pasifik M.O*)

Örnek 261 $10x^3+20y^3+8xyz=1999z^3$ *denkleminin tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?* (*Municipal* 1999)

Örnek 262 $\frac{1}{2}(x+y)(y+z)(x+z)+(x+y+z)^3=1-xyz$ *denklemini sağlayan kaç tane (x,y,z) tamsayı çifti vardır?*

Örnek 263 $(m-n)^2=\frac{4mn}{m+n-1}$ *denklemini sağlayan $0<m+n<100$ olacak şekilde kaç tane (m,n) tamsayı çifti vardır?* (*Estonya M.O.* 1999)

Örnek 264 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}+\frac{1}{xy^2}$ *denklemini sağlayan kaç tane (x,y) tamsayı ikilisi vardır?*

Örnek 265 $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=(axy+1)^2+1$ *denkleminin sonsuz sayıda (x,y) pozitif tamsayı çözümünün olması için, a pozitif tamsayının olabileceği tüm değerleri bulunuz.*

Örnek 266 $(4-x)^{4-x}+(5-x)^{5-x}+10=4^x+5^x$ *denklemini sağlayan tüm x tamsayılarını bulunuz.*

Örnek 267 *Üçlülerdeki sayıların her biri bir asal sayının herhangi bir pozitif kuvveti olacak şekilde tüm ardışık tamsayı üçlülerini bulunuz.*

Örnek 268 $\frac{x}{y}>\sqrt{2}$ *olmak üzere, $5x-7y=1$ eşitliğini sağlayan tüm (x,y) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz.*

Örnek 269 $a<b<c$ *olmak üzere, $(a+b+c)^2=a^3+b^3+c^3$ denklemini sağlayan tüm (a,b,c) pozitif tamsayı üçlülerini bulunuz.*

Örnek 270 $2x^2+y^2=384$ *olacak şekilde tüm (x,y) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz.*

Örnek 271 $x^2-x-k=0$ *denkleminin tamsayı kökü olacak şekilde, 100'den küçük kaç k pozitif tamsayısı vardır?*

Örnek 272 $x^3-y^3=100$ *olmak üzere, $x-y$ ve xy ifadelerinin ikisi de pozitif tamsayı olacak şekilde kaç tane (x,y) reel sayı ikilisi vardır?*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

7.11 Çözümlü Test

1. Bir karayolu üzerinde bir noktadan başlanarak yol kenarlarına 111'er metre arayla palmiye ağacı dikiliyor. Daha sonra aynı noktadan başlanarak, 78'er metre arayla çam ağacı dikiliyor. Herhangi iki ağacın arasındaki mesafe aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 42 B) 51 C) 37 D) 6 E) Hiçbiri

2. $121x + 100y = 10$ denkleminin 1000'den küçük kaç tane pozitif x tamsayı değeri için tamsayı y çözümü vardır?

A) 12 B) 11 C) 100 D) 121 E) 10

3. $5x + 8y = 1001$ eşitliğini sağlayan kaç tane (x, y) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 80 B) 8 C) 18 D) 16 E) 25

4. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $3^n - 1 = 13k$ denklemini sağlayan 100'den küçük kaç tane n pozitif tamsayısı vardır?

A) 22 B)1 C) 33 D) 6 E) Hiçbiri

5. $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $25xa^2 - 5yb^2 = 1680$ denklemini sağlayan ve a ve b'yi bölen en büyük tamsayı kaç olabilir?

A) 4 B) 1 C) 2 D) 6 E) Hiçbiri

6. $3x + 5y = c$ denklemini sağlayan 100 tane (x, y) pozitif tamsayı çiftinin olması için, c yerine yazılabilecek kaç tane pozitif tamsayı vardır.

A) 12 B) 15 C) 18 D) 9 E) Hiçbiri

7. $x^2 - 3y^2 = 17$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

A) 4 B) 1 C) 3 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

8. $2xy + 3y^2 = 24$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 6 E) Hiçbiri

9. $x^2+y^2+z^2=2xyz$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

A) 4 B) 1 C) 3 D) 6 E) Hiçbiri

10. $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

A) 3 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

11. $y\neq 1$ olmak üzere, $x^y+1=y\,(x+1)$ eşitliğini sağlayan kaç tane (x,y) pozitif tamsayı çifti vardır?

A) 4 B) 5 C) 3 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

12. $10\,(m+n)=mn$ denkleminin pozitif tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?

A) 5 B) 9 C) 8 D) 10 E) Hiçbiri

13. $4m\,(m+1)=n\,(n+1)$ eşitliğini sağlayan kaç tane (m,n) pozitif tamsayı çifti vardır? (Kanada M.O. 1977)

A) 0 B) 8 C) 10 D) 1 E) Sonsuz sayıda.

14. $5x^2-4y^2=2007$ denkleminin kaç tane tamsayı çözümü vardır?

A) 4 B) 1 C) 2 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

15. $x+y=x^2-xy+y^2$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

A) 4 B) 1 C) 3 D) 6 E) Hiçbiri

16. $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$ denklemini sağlayan kaç tane (x,y) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

17. n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $2+2\sqrt{28n^2+1}=m$ denklemini sağlayan m tamsayılarından kaç tanesi tamkare değildir?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) 3

18. $x^3 + 3 = 4y\,(y+1)$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

19. $999999 \cdot n = 111...1$ denklemini sağlayan en küçük n pozitif tamsayısını bulunuz.

A) $\dfrac{(10^{27}-1)}{9\,(10^6-1)}$ B) $\dfrac{(10^9-1)}{9\,(10^3-1)}$ C) $\dfrac{(10^{54}-1)}{9\,(10^6-1)}$ D) $\dfrac{(10^{18}-1)}{9\,(10^6-1)}$ E) Hiçbiri

20. $n^2 - 19n + 89$ sayısı tamkare olacak şekilde kaç tane pozitif n tamsayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

21. $x^2 + 615 = 2^y$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) pozitif tamsayı çifti vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

22. $x^3 + y^3 = 8^{30}$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

23. $x^3 + y^4 = 2^{2003}$ denkleminin pozitif tamsayılarda kaç tane çözümü vardır?

A) 5 B) 3 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

24. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1999}$ denklemini sağlayan kaç tane pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 5 B) 3 C) 10 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

25. $2x^y - 3y = 194$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) pozitif tamsayı çifti vardır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

26. $6x^2 + 2y^2 = z^2$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y, z) pozitif tamsayı üçlüsü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

27. $2^a + 2^b + 1$ sayısı $2^c - 1$ sayısına eşit olacak şekilde kaç tane (a, b, c) negatif olmayan tamsayı üçlüsü vardır? (Avusturya - Polonya M.O. 2002)

A) 3 B) 4 C) 1 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

28. $n! + 5$ sayısı tamküp olacak şekilde kaç tane n pozitif tamsayısı vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) 5 E) Hiçbiri

29. $x^y = y^{x-y}$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) pozitif tamsayı ikilisi vardır? (Junior Balkan M.O. 1998)

A) 2 B) 4 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

30. OBEB$(x, y, z) = 1$ olmak üzere, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y, z) tamsayı üçlüsü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

31. x, y, z sayıları asal ise, $x^2 + y^3 = z^4$ denkleminin kaç tane (x, y, z) çözümü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

32. $x^2 + 2y^2 + 98z^2 = \underbrace{777...77}_{2009 \text{ tane}}$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç tane (x, y, z) çözümü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

33. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y, z) tamsayı üçlüsü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

34. $3^x + 4^y = 5^z$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y, z) pozitif tamsayı üçlüsü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

35. $\left(p^2+1\right)\left(q^2+1\right)=n^2+1$ denklemini sağlayan bir $n \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde, kaç tane (p,q) asal sayı ikilisi vardır?

A) 3 B) 4 C) 1 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

36. $x^3+11^3=y^3$ denklemini sağlayan kaç tane (x,y) pozitif tamsayı ikilisi vardır? (Kanada M.O. 1972)

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

37. $7n^2+7n+7$ bir tamsayının dördüncü kuvveti olacak şekilde en küçük n sayısının rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisidir? (Kanada M.O. 1977)

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) Hiçbiri

38. $x^3=y^3+y$ denklemini sağlayan tüm x,y tamsayılarını bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1969)

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

39. $x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2$ denklemini sağlayan kaç (x,y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 7 B) 1 C) 3 D) 2 E) 10

40. $m,n<100$ olmak üzere $2m^2=3n^3$ eşitliğini sağlayan kaç tane (m,n) pozitif tamsayısı ikilisi vardır?

A) 4 B) 12 C) 8 D) 16 E) Hiçbiri

41. $z^2=\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+101$ denklemini sağlayan kaç tane (x,y,z) tamsayı üçlüsü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

42. $p+1=2x^2$ ve $p^2+1=2y^2$ denklemlerini sağlayan x,y tamsayıları olacak şekilde kaç farklı p asal sayısı vardır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

43. $n < 14$ için, $n! = a^2 + b^2$ denklemini sağlayan kaç tane (a, b) pozitif tamsayı çifti vardır? (Kanada M.O. 1987)

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) Hiçbiri

44. $x - y = x^2 + xy + y^2$ denklemini sağlayan kaç negatif olmayan tamsayı çifti vardır?

A) 3 B) 4 C) 1 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

45. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) doğal sayı ikilisi vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

46. $3^n + 81 = m^2$ denklemini sağlayan kaç tane (m, n) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) 3 E) Hiçbiri

47. $\dfrac{3^x + 5^x}{3^{x-1} + 5^{x-1}} = y$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) pozitif tamsayı ikilisi vardır? (St. Petersburg 1996)

A) 4 B) 1 C) 0 D) 3 E) Hiçbiri

48. $3x^2 - 2y^2 = 1998$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y) tamsayı çifti vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

49. $\left\{ \begin{array}{l} xy - 2zw = 3 \\ xz + yw = 1 \end{array} \right.$ denklem sistemini sağlayan kaç tane, (x, y, z, w) pozitif tamsayı dörtlüsü vardır? (SSCB M.O. 1991)

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

50. $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y - z = 100 \\ x + y^2 - z = 124 \end{array} \right.$ denklem sistemini sağlayan kaç tane (x, y, z) pozitif tamsayı üçlüsü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

51. $\begin{cases} x^3 - 3xy - y^3 = 1 \\ y^3 + 3yz + z^3 = 1 \end{cases}$ denklem sisteminin sağlayan kaç tane (x, y, z) tamsayı üçlüsü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

52. $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2 \cdot 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan kaç tane (x, y, z) negatif olmayan tamsayı üçlüsü vardır?

A) 4 B) 1 C) 0 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

53. $\begin{cases} 2x + 3y = 185 \\ xy > x + y \end{cases}$ sistemini sağlayan kaç tane (x, y) tamsayı çifti vardır?

A) 24 B) 26 C) 29 D)18 E) Hiçbiri

54. $x^2 + 3y$ ve $y^2 + 3x$ ifadeleri tamkare olacak şekilde kaç tane (x, y) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 3 B) 1 C) 2 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

7.12 TÜBİTAK Olimpiyat Soruları (Tamsayılar Kümesinde Denklemler)

1. $5(x+y)=xy$ eşitliğini sağlayan kaç (x,y) sıralı tamsayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) Hiçbiri

UİMO - 2002

2. $n^2-m^2=124$ eşitliğini sağlayan kaç (n,m) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Hiçbiri

UİMO - 2003

3. $2x+5y=xy-1$ eşitliğini sağlayan kaç (x,y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12

UMO - 2004

4. $xy=4\left(y^2+x\right)$ eşitliğini sağlayan kaç tane (x,y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 3 C) 7 D) 14 E) Hiçbiri

UMO - 1999

5. $2n^2+5nm-12m^2=28$ eşitliğini sağlayan kaç (m,n) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

UMO - 2006

6. $n^n+1=(n+1)(2n+1)$ eşitliğinin tamsayılar kümesinde kaç çözümü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz sayıda

UMO - 1995

7. x ve y tamsayı olmak üzere, $x^2-y^2=1996$ eşitliğini sağlayan kaç (x,y) sıralı ikilisi vardır?

A) 12 B) 6 C) 4 D) 0 E) Sonsuz sayıda

UMO - 1996

8. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $2n^2-36=m^2-mn$ denklemini sağlayan kaç (m,n) sıralı ikilisi vardır?

A) 2 B) 0 C) 4 D) 3 E) Sonsuz Çoklukta

UMO - 1997

9. x, y, z tamsayıları,

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 7 \end{cases}$$

denklem sistemini sağlıyorsa z aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 3^{111} B) 4^{111} C) 5^{111} D) 6^{111} E) Hiçbiri

UMO - 1999

10. $x^3 - 13y^3 = 1453$ eşitliğini sağlayan (x, y) tamsayı sıralı ikililerinin sayısı aşağıdakilerden hangisine bölünmez?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) Hiçbiri

UMO - 2002

11. $2^n + 65$ sayısının, bir tamsayının karesine eşit olmasını sağlayan en büyük n tamsayısı kaçtır?

A) 1024 B) 268 C) 10 D) 4 E) Hiçbiri

UMO - 2001

12. $3^m - 1 = n^3$ denklemini sağlayan kaç tane (m, n) pozitif tamsayı sıralı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 3 ten çok

UİMO - 2000

13. n'nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $a^2 + ab - 6b^2 = n$ eşitliğini sağlayan a, b tamsayıları bulunur?

A) 17 B) 19 C) 29 D) 31 E) 37

UMO - 2004

14. $2^x + 1 = 3^y$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) pozitif tamsayı ikilisi vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Hiçbiri

UİMO - 2003

15. $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$ denkleminin x, y tamsayı olacak şekilde kaç tane (x, y) çözüm takımı vardır?

A) Sonsuz B) 12 C) 2 D) 0 E) 3

UMO - 1993

16. $a^{2000}+b^{2000}+c^{2000}=d^{2001}$ eşitliğini sağlayan kaç (a,b,c,d) pozitif tamsayı sıralı dörtlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 6 E) Sonsuz çoklukta

UİMO - 2001

17. $(2a+b)(2b+a)=2^c$ eşitliğini sağlayan kaç (a,b,c) pozitif tamsayı sıralı üçlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 6 E) Sonsuz çoklukta

UMO - 2001

18. Kaç n tamsayısı için, $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x+ny=n^2 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan en az bir (x,y) tamsayı sıralı ikilisi vardır?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 8 E) Hiçbiri

UMO - 2001

19. $\begin{cases} 3x^2-2y^2-4z^2+54=0 \\ 5x^2-3y^2-7z^2+74=0 \end{cases}$ sistemini sağlayan kaç (x,y,z) pozitif tamsayı sıralı üçlüsü vardır?

A) 0 B) 2 C) 3 D) Sonsuz çoklukta E) Hiçbiri

UMO - 2000

20. $\sqrt{xy}-71\sqrt{x}+30=0$ denkleminin pozitif tamsayılarda kaç tane (x,y) çözüm ikilisi vardır?

A) 8 B) 18 C) 72 D) 2130 E) Sonsuz Sayıda

UMO - 2000

21. $\begin{cases} x+y+z=19 \\ xy+z=98 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan kaç (x,y,z) sıralı tamsayı üçlüsü vardır?

A) 0 B) 5 C) 8 D) 10 E) 20

UMO - 1998

22. a,b sıfırdan farklı ve c pozitif olmak üzere, a,b,c tamsayıları, $\dfrac{5}{663}=\dfrac{a}{17}+\dfrac{b}{c}$ denklemini sağlıyorsa b'nin alabileceği en küçük pozitif değer nedir?

A) 5 B) 44 C) 1 D) 76 E) Hiçbiri

UMO - 1997

23. $3^{3a}+3^{4b}+3^{5c}=3^{7d}$ eşitliğini sağlayan a,b,c,d pozitif tamsayıları için $a+b+c+d$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 278 B) 287 C) 782 D) 872 E) Hiçbiri

UİMO - 1999

24. $n \leq 15$ olmak üzere, $t_1, t_2, ..., t_n$ tek sayıları, $t_1^4 + t_2^4 + \cdots + t_n^4 = 1963$ eşitliğini sağlamaktadır. n kaç olmalıdır?

A) 9 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

UMO - 1995

25. En büyük ortak bölenleri n olan tüm a, b, c tamsayıları için,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + y - 2z = b \\ 3x + y + 5z = c \end{cases}$$

denklem sisteminin x, y, z tamsayılar olmak üzere çözümünün bulunmasını sağlayan en küçük n pozitif tamsayısı nedir?

A) 7 B) 14 C) 28 D) 56 E) Hiçbiri

UMO - 1999

26. $\dfrac{2^{p-1} - 1}{p}$ sayısının tamkare olmasını sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

A) 4 B) 2 C) 1 D) 8 E) Sonsuz Çoklukta

UMO - 1997

27. $3n^2 + 3n + 7$ sayısının tamküp olmasını sağlayan kaç n pozitif tamsayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) Sonsuz çoklukta

UMO - 2002

28. $\begin{cases} xz - yt = 1 \\ xt + 4yz = 3 \end{cases}$ denklem çiftinin, x, y, z, t negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, kaç tane (x, y, z, t) çözüm takımı vardır?

A) 4 B) 2 C) 1 D) 0 E) 3

UMO - 1993

29. $a < b < c < d$ tamsayılar olmak üzere, $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) - 9 = 0$ denkleminin bir kökü $x = 7$ ise, $a + b + c + d$ kaçtır?

A) 14 B) 21 C) 28 D) 42 E) 63

UMO - 2007

30. Bir tamsayının karesinin iki katına ve bir tamsayının küpünün üç katına eşit olup, 10^6'dan küçük olan kaç pozitif tamsayı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 2007

31. $\sqrt{x+1998+\sqrt{x+1998+\sqrt{x+1997\sqrt{x+\sqrt{1997+\cdots\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}}}=y$

denklemini sağlayan kaç tane (x,y) sıralı tamsayı ikilisi vardır?

A) 3996 B) 1998 C) 0 D) 1 E) Sonsuz çoklukta

UMO - 1999

32. $3m^2n=n^3+A$ denkleminin doğal sayılarda aşağıdaki A değerlerinden hangisi için çözümü vardır?

A) 301 B) 403 C) 415 D) 427 E) 481

UMO - 2008

33. $x!+y!+z!=u!$ denklemini sağlayan kaç tane (x,y,z) pozitif tamsayı üçlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 1997

34. Biri 5, diğeri 7 ile bölünebilen iki bileşik pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılamayan en büyük tamsayı kaçtır?

A) 82 B) 47 C) 45 D) 42 E) Hiçbiri

UMO - 2009

35. $a^2+b^4=5^n$ eşitliğini sağlayan kaç (a,b,n) pozitif tamsayı üçlüsü vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

UMO - 2009

36. $a^2b+ab^2=2009201020092010$ eşitliğini sağlayan kaç (a,b) tamsayı ikilisi vardır?

A) 2 B) 4 C) 0 D) 1 E) Hiçbiri

UMO - 2009

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

7.13 Ulusal Antalya Matematik Olimpiyat Soruları (Tamsayılar Kümesinde Denklemler)

1. $x^2 + y^2 = x^3$ denklemini sağlayan (x, y) doğal sayı ikililerinin sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) Sonsuz E) Hiçbiri

Antalya M.O.- 1998

2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2000}$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç çözümü vardır?

A) 5 B) 21 C) 16 D) 10 E) 40

Antalya M.O.- 2000

3. $2^x = \dfrac{x+5}{4-4x}$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

A) 5 B) 2 C) 3 D) 1 E) Sonsuz çoklukta

Antalya M.O.- 2001

4. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$(m+n)^3 = (m^2+n)(m+n^2)$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (m, n) ikilisi vardır?

A) 4 B) 6 C) 2 D) 10 E) 8

Antalya M.O.- 2004

5. $x^3 - y^3 = 2y^2 + 1$ denkleminin tamsayılarda kaç çözümü vardır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Sonsuz çoklukta

Antalya M.O.- 2006

Bir Reel Sayının Tamdeğeri

Özellik 1. $[\![x]\!] = n \in \mathbb{Z}$ *ise*, $n \leq x < n+1$*'dir.*
Özellik 2. $a \in \mathbb{Z}$ *ise*, $[\![x+a]\!] = [\![x]\!] + a$*'dir.*
Özellik 3. $[\![x]\!] + [\![-x]\!] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ *dir.*
İspat :
Özellik 4. $x, y \in \mathbb{R}$ için, $[\![x+y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$ eşitsizliği sağlanır.
İspat :
Özellik 5. $n \in \mathbb{Z}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $\left[\!\!\left[\dfrac{[\![x]\!]}{n}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\dfrac{x}{n}\right]\!\!\right]$ eşitliği sağlanır.

İspat :

Örnek 273 $\left[\!\!\left[\dfrac{2[\![x]\!]}{3}\right]\!\!\right] = 6$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 274 $x = \left[\!\left[\frac{1}{3}x - 1\right]\!\right] + [\![x]\!]$ *denklemini sağlayan kaç* x *reel sayısı vardır?*

Örnek 275 $[\![x]\!] = -2x+1$ *denkleminin çözümünü bulunuz.*

Örnek 276 $[\![2x]\!] + \{2x-3\} = [\![3-x]\!] + 1$ *olduğuna göre*, x *kaçtır?*

Örnek 277 $\left[\!\!\left[\dfrac{3x-7}{5}\right]\!\!\right] = \dfrac{x}{3}$ *denklemini sağlayan kaç tane* x *tamsayısı vardır?*

Örnek 278 $x + 4 = 2\{x\} + 3[\![x]\!] - \dfrac{[\![x]\!]-1}{3}$ *olduğuna göre* $x = ?$

Örnek 279 $\left\{\begin{array}{l} x + [\![y]\!] + \{z\} = 300,7 \\ y + [\![z]\!] + \{x\} = 500,5 \\ z + [\![x]\!] + \{y\} = 400,8 \end{array}\right.$ *olduğuna göre*, x, y *ve* z*'yi bulunuz.*

Örnek 280 a *negatif bir tamsayı olmak üzere*, $[\![x]\!] = ax+1$ *denkleminin çözümünü bulunuz.*

Örnek 281 $[\![x]\!]$, x *sayısından büyük olmayan en küçük tamsayıyı göstermek üzere*,

$$x^2 - 19[\![x]\!] + 88 = 0$$

denkleminin tamsayı olmayan çözümlerini bulunuz.

Örnek 282 $[\![x]\!]$, x *sayısından büyük olmayan en küçük tamsayıyı göstermek üzere,*

$$3x^3 - [\![x]\!] = 3$$

denkleminin tüm reel çözümlerini bulunuz.

Örnek 283 $[\![x]\!]$, x *sayısından büyük olmayan en küçük tamsayıyı göstermek üzere,* 1*'den* 100*'e kadar olan sayılardan kaç tanesi,*

$$[\![2x]\!] + [\![4x]\!] + [\![6x]\!] + [\![8x]\!]$$

formunda yazılabilir.

Örnek 284 $x = \left[\!\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{x}{5}\right]\!\!\right]$ *denkleminin kaç tane kökü vardır?* (*Kanada M.O.* 1998)

Örnek 285 $\left[\!\!\left[\frac{k}{5}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{k}{6}\right]\!\!\right]$ *eşitliğini sağlayan kaç pozitif* k *tamsayısı vardır?*

Örnek 286 $\left\{\left[\!\!\left[\frac{1^2}{1998}\right]\!\!\right], \left[\!\!\left[\frac{2^2}{1998}\right]\!\!\right], \left[\!\!\left[\frac{3^2}{1998}\right]\!\!\right], ..., \left[\!\!\left[\frac{1998^2}{1998}\right]\!\!\right]\right\}$ *kümesinde kaç farklı tamsayı vardır?*

Özellik : $m \in \mathbb{Z}^+$ *için,* $[\![x]\!] + \left[\!\!\left[x + \frac{1}{m}\right]\!\!\right] + \cdots + \left[\!\!\left[x + \frac{m-1}{m}\right]\!\!\right] = [\![mx]\!]$'dir.

İspat :

Örnek 287 $\left[\!\!\left[\frac{2x+1}{3}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{4x+5}{6}\right]\!\!\right] = \frac{3x-1}{2}$ *denklemini sağlayan kaç tane reel sayı vardır?*

Örnek 288 $[\![x]\!]\left(\frac{7}{2} + \{x\}\right) = (x+2)$ *denkleminin kaç tane çözümü vardır?*

Örnek 289 $\frac{[\![x]\!]}{\{x\}}\left(x + \frac{1}{3}\{x\}\right) + x - \frac{1}{3}[\![x]\!] = 1$ *denkleminin çözümü olması için* x *hangi aralıkta olmalıdır?*

Örnek 290 $[\![x]\!] + [\![2x]\!] + [\![4x]\!] = 123$ *ise* $[\![x]\!]$ *kaç tamsayı değeri olabilir?*

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

8.1 Problemler

1. *x ve y reel sayıları için,* $[\![2x]\!] + [\![2y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!] + [\![x+y]\!]$ *olduğunu gösteriniz.*

2. *n pozitif bir tamsayı olmak üzere,* $\left[\!\!\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right]\!\!\right]$ *olduğunu ispatlayınız.*

3. *$x_1, x_2, ..., x_m$ pozitif rasyonel sayılar olmak üzere,* $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$ *ise, n pozitif tamsayısı için,* $n - [\![nx_1]\!] - [\![nx_2]\!] - ... - [\![nx_m]\!]$ *ifadesinin alabileceği minimum ve maksimum değerlerin toplamını bulunuz.* (Kanada M.O. 1996)

4. *p ve q aralarında asal sayılar olmak üzere,*

$$\left[\!\!\left[\frac{p}{q}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{2p}{q}\right]\!\!\right] + \cdots + \left[\!\!\left[\frac{(q-1)\,p}{q}\right]\!\!\right] = \frac{(p-1)\,(q-1)}{2}$$

olduğunu ispatlayınız.

5. *$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\frac{1}{a}$ ve $\frac{1}{b}$ sayılarının küçük olanına k diyelim.*

$$c\left[\!\!\left[\frac{c}{ab}\right]\!\!\right] - \left[\!\!\left[\frac{c}{a}\right]\!\!\right]\left[\!\!\left[\frac{c}{b}\right]\!\!\right] \leq ck$$

olduğunu gösteriniz.

6. $[\![x]\!] + [\![10x]\!] + [\![100x]\!] + [\![1000x]\!] = N$

$[\![y]\!] + [\![10y]\!] + [\![100y]\!] + [\![1000y]\!] = N + 11$

$[\![z]\!] + [\![10z]\!] + [\![100z]\!] + [\![1000z]\!] = N + 111$

denklemleri veriliyor. Birinci denklem haricindeki denklemlerin çözümü olacak şekildeki 2003*'ten küçük bir pozitif tamsayı bulunuz.* (USA Math. Talent Search 2004)

7. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\!\!\left[\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right]\!\!\right] = [\![x]\!]$ olduğunu ispatlayınız. (IMO 1968)

8. x, y reel sayıları için, $\{x\} = \{y\}$ ve $\{x^3\} = \{y^3\}$ eşitlikleri sağlandığına göre, x sayısının tamsayı katsayılı bir ikinci dereceden denklemin kökü olduğunu gösteriniz.

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

8.2 Çözümlü Test

1. $[\![x]\!] + [\![2x]\!] + [\![4x]\!] + [\![8x]\!] + [\![16x]\!] + [\![32x]\!] = 12345$ denkleminin kaç tane kökü vardır? (Kanada M.O. 1982)

A) 1 B) 0 C) 13 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

2. $x_1, x_2, ..., x_{100}$ pozitif rasyonel sayılar olmak üzere, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 1$ ise, n pozitif tamsayısı için, $n - [\![nx_1]\!] - [\![nx_2]\!] - \cdots - [\![nx_{100}]\!]$ ifadesinin alabileceği maksimum değer kaçtır?

A) 100 B) 110 C) 101 D) 95 E) Hiçbiri

3. $[\![x]\!]\left(\frac{5}{2} + \{x\}\right) = \frac{1}{2}(x+2)$ denkleminin kaç tane kökü vardır?

A) 1 B) 0 C) 13 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

4. $\{x\}^2 (x + [\![x]\!])^2 + [\![x]\!]^2 (x + \{x\})^2 = 9 + 2[\![x]\!]^2 \{x\}^2$ denklemini sağlayan x reel sayılarının kareleri toplamı kaçtır?

A) $2\sqrt{6}$ B) 6 C) 0 D) 4 E) Hiçbiri

5. $[\![x]\!]\left(\frac{7}{2} + \{x\}\right) = (x+2)$ denkleminin kaç tane çözümü vardır?

A) 1 B) 0 C) 2 D) Sonsuz sayıda E) Hiçbiri

6. $\left[\!\!\left[\frac{1}{1997}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{2}{1997}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\frac{4}{1997}\right]\!\!\right] + \cdots + \left[\!\!\left[\frac{2^{1995}}{1997}\right]\!\!\right]$ toplamını hesaplayınız.

A) 998 B) $2^{1997} - 1$ C) $\frac{2^{1997} - 1}{1997}$ D) $2^{1997} - 998$ E) Hiçbiri

7. $\left[\!\!\left[x + \frac{19}{100}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[x + \frac{20}{100}\right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[x + \frac{21}{100}\right]\!\!\right] + \cdots + \left[\!\!\left[x + \frac{91}{100}\right]\!\!\right] = 546$

olduğuna göre, $[\![100x]\!] = ?$ (AIME 1991)

A) 751 B) 841 C) 744 D) 741 E) Hiçbiri

8. Bir k tamsayısı için, $k = \llbracket \sqrt[3]{n_1} \rrbracket = \llbracket \sqrt[3]{n_2} \rrbracket = \cdots = \llbracket \sqrt[3]{n_{70}} \rrbracket$ olacak şekilde tam 70 tamsayı var ve k sayısı tüm n_i, $(i = 1, 2, ..., 70)$ sayılarını bölmektedir. Buna göre, $\frac{n_i}{k}$, $(i = 1, 2, ..., 70)$ sayılarından en büyüğü kaçtır? (AIME 2007)

A) 551 B) 552 C) 553 D) 554 E) Hiçbiri

9. $4x^2 - 40 \llbracket x \rrbracket + 51 = 0$ denkleminin kaç tane çözümü vardır? (Kanada M.O. 1999)

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) Hiçbiri

10. $x - \llbracket x \rrbracket$, $\llbracket x \rrbracket$, x geometrik dizi olduğuna göre, $x =$? (Kanada M.O. 1975)

A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$ D) $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$ E) Hiçbiri

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

8.3 TÜBİTAK Olimpiyat Soruları (Tamdeğer)

1. $\sum\limits_{n=1}^{100} \left[\!\left[\frac{2n}{3} \right]\!\right]$ toplamı kaçtır?

A) 3000 B) 3267 C) 3300 D) 3330 E) 3333

UMO - 1994

2. $[\![x]\!]$ ile x'i aşmayan en büyük tamsayı gösterilmek üzere, $x^2 - 18\,[\![x]\!] + 77 = 0$ denkleminin tamsayı olmayan gerçel köklerinin sayısı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

UMO - 2001

3. $\left[\!\left[\frac{m}{11} \right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{m}{10} \right]\!\right]$ eşitliğini sağlayan kaç pozitif tamsayı vardır?

A) 44 B) 48 C) 52 D) 54 E) 56

UMO - 2006

4. $\left[\!\!\left[\dfrac{6x+5}{8} \right]\!\!\right] = \dfrac{15x-7}{5}$ eşitliğini sağlayan gerçel sayıların toplamı kaçtır?

A) 2 B) $\dfrac{81}{92}$ C) $\dfrac{7}{15}$ D) $\dfrac{4}{5}$ E) $\dfrac{19}{15}$

UMO - 2007

5. Tüm x gerçel sayıları için, $x^2 \geq C\,[\![x]\!]\,(x - [\![x]\!])$ eşitsizliğinin doğru olmasını sağlayan en büyük C gerçel sayısı nedir?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 9 E) 25

UMO - 2004

6. $[\![a]\!]$ ile a gerçel sayısını aşmayan en büyük tamsayıyı gösterelim.

$$[\![x]\!] + [\![3x]\!] + [\![5x]\!] + [\![7x]\!] + [\![11x]\!] + [\![13x]\!] = 1994$$
$$[\![x]\!] + [\![3x]\!] + [\![5x]\!] + [\![7x]\!] + [\![11x]\!] + [\![13x]\!] = 1995$$
$$[\![x]\!] + [\![3x]\!] + [\![5x]\!] + [\![7x]\!] + [\![11x]\!] + [\![13x]\!] = 1996$$
$$[\![x]\!] + [\![3x]\!] + [\![5x]\!] + [\![7x]\!] + [\![11x]\!] + [\![13x]\!] = 1997$$

denklemlerinden kaç tanesinin çözüm kümesi boş değildir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Hiçbiri

UMO - 1997

7. $\llbracket x^2+8x \rrbracket \leq A$ denkleminin, tamsayılar kümesi içinde tam olarak 13 tane çözümü olması için, A'nın alabileceği en küçük değer nedir?

A) 8 B) 9 C) 19 D) 20 E) 30

UMO - 1994

8. $\llbracket x^2+4x \rrbracket = \llbracket x \rrbracket^2 + 4\llbracket x \rrbracket$ denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesinde $x=0$ sayısını içine alan en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1 \leq x \leq 1$ B) $0 \leq x < \sqrt{5}-2$ C) $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{5}-2$

D) $x=0$ E) $0 \leq x \leq \sqrt{5}-2$

UMO - 1994

9. $\llbracket a \rrbracket$ ile a gerçel sayısını aşmayan en büyük tamsayıyı gösterelim. Her x gerçel sayısı için,

$$f(x) = x - \llbracket \tfrac{x}{2} \rrbracket - \llbracket \tfrac{x}{3} \rrbracket - \llbracket \tfrac{x}{6} \rrbracket$$

olarak tanımlanan fonksiyonun değer kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[0,1)$ B) $[0,2)$ C) $[0,3)$ D) $[0,4)$ e) Hiçbiri

UMO - 1997

10. $x^4 - 2^{-y^2}x^2 - \llbracket x^2 \rrbracket + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan kaç (x,y) gerçel sayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Sonsuz sayıda

UMO - 1999

11. $\llbracket \sqrt[3]{7n+2} \rrbracket = \llbracket \sqrt[3]{7n+3} \rrbracket$ eşitliğini sağlamayan kaç n pozitif tamsayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 7 D) Sonsuz çoklukta E) Hiçbiri

UMO - 2002

BU SORULARIN ÇÖZÜMLERİNİ MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK 3 (Sayılar Teorisi) KİTABINDA BULABİLİRSİNİZ.
Mustafa Özdemir

8.4 Antalya Matematik Olimpiyatı Soruları (Tamdeğer)

1. $[\![a]\!]$ ile a reel sayısının tam kısmı gösterildiğine göre $x - [\![x]\!] = [\![(0,5)\,x - 2]\!]$ denkleminin reel çözümlerinin sayısı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Sonsuz

Antalya M.O.- 1998

2. $[\![x]\!]$, x'in tamdeğer fonksiyonu olmak üzere, $\{x\} = x - [\![x]\!]$ olarak tanımlansın. Her x reel sayısı için, $x = f(x) + f(\{x\})$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun $x = -\frac{17}{7}$ noktasındaki değeri nedir?

A) $-\frac{31}{14}$ B) $-\frac{19}{7}$ C) -3 D) $-\frac{19}{14}$ E) $-\frac{31}{7}$

Antalya M.O.- 2001

3. $\left[\!\!\left[\dfrac{6x+5}{8}\right]\!\!\right] = \dfrac{15x-7}{5}$ denkleminin gerçel sayılarda çözüm kümesi kaç elemanlıdır? (Burada, $[\![a]\!]$ ile a sayısının tam kısmı gösterilmektedir.)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

Antalya M.O.- 2002

4. $2002^2 \leq n \leq 2003^2$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane n doğal sayısı için $[\![\sqrt{n}]\!]$ sayısı n'yi böler? (Burada, $[\![a]\!]$ ile a sayısının tam kısmı gösterilmektedir.)

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) $\lfloor\sqrt{2002}\rfloor$

Antalya M.O.- 2003

5. x_1 ve x_2 sayıları $[\![x^2]\!] = [\![6 - x]\!] - \{x - 111\}$ denkleminin kökleri ise, $x_1^3 + x_2^3$ sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

($[\![a]\!]$ ifadesi, a sayısının tam kısmı olup, $\{a\} = a - [\![a]\!]$ dır.)

A) -7 B) 9 C) -9 D) -19 E) 35

Antalya M.O.- 2004

6. $5 \leq n \leq 2005$ aralığındaki kaç tane n tamsayısı için $n - [\![\frac{n}{2}]\!] = [\![\frac{2n}{3}]\!] - [\![\frac{n}{6}]\!]$ eşitliği sağlanmaz? (Burada, $[\![a]\!]$ ile a sayısının tam kısmı gösterilmektedir.)

A) 222 B) 266 C) 322 D) 334 E) 366

Antalya M.O.- 2005

7. x reel sayısının tam kısmı $[\![x]\!]$ ve kesir kısmı da $\{x\} = x - [\![x]\!]$ olmak üzere,

$$f\left(x\right) = x^3 - 3x \cdot [\![x]\!] \cdot \{x\}$$

fonksiyonu veriliyor.

$$S = f\left(1,2\right) + f\left(2,2\right) + f\left(3,2\right) + \cdots + f\left(m,2\right)$$

toplamının bir tamsayı olması için m'nin alabileceği en küçük değer nedir?

A) 100 B) 125 C) 200 D) 250 E) 400

Antalya M.O.- 2006

ÇALIŞMA SORULARI

1. $a^2+b^2+c^2$ ifadesi 9'a bölünüyor ise, a^2-b^2, b^2-c^2 veya a^2-c^2 ifadelerinden birinin 9'a bölüneceğini ispatlayınız.

2. p^2+2 ve p asal ise, p^3+2 de asaldır gösteriniz.

3. $\overline{aabb}$ dört basamaklı sayısı bir tamkare ise, $a+b=?$

4. p, $2p+1$ ve $4p+1$ sayıları asal olacak şekilde kaç tane p asal sayısı vardır?

5. $p>5$ asal sayısının karesinin 30 ile bölümünden kalan ya 1 ya da 19 dur ispatlayınız.

6. İlk n tane asal sayının çarpımı p ise, $p-1$ ve $p+1$ sayılarının tamkare olamayacaklarını gösteriniz.

7. n, 2'den büyük bir tamsayı ve p bir asal sayı olmak üzere, $\dfrac{2n}{3}<p<n$ ise $p\nmid\binom{2n}{n}$ olduğunu ispatlayınız.

8. n pozitif tamsayısı için,

$$OBEB\,(2n+3,n+7)=\begin{cases}1, & n\not\equiv 4\pmod{11}\\ 11, & n\equiv 4\pmod{11}\end{cases}$$

olduğunu ispatlayınız.

9. a) $19\mid 23a+10b$ ise $19\mid 3a+55b$ olduğunu ispatlayınız .
b) $\dfrac{5n+26}{2n+3}$ tamsayı olacak şekilde kaç tane n tamsayısı vardır?

10. $a_i\in\{-1,1\}$ olmak üzere, $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1=0$ ise, $4\mid n$ olduğunu ispatlayınız.

11. $m,n,a\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $a^m+1\mid a^n+1$ ise $m\mid n$ olduğunu ispatlayınız.

12. Dört tane ardışık sayının çarpımının bir tamsayının bir kuvveti olamayacağını gösteriniz.

13. $\dfrac{2^{32}+1}{641}$ sayısının tamsayı olduğunu gösteriniz.

14. $a, b \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere, $OBEB\big(n^a+1, n^b+1\big) \mid n^{OBEB(a,b)}+1$ olduğunu ispatlayınız.

15. $p > 3$ asal sayı ve $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $6p \mid ab^p - ba^p$ olduğunu ispatlayınız. $($Fermat teoremini kullanınız$)$

16. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $1^{2009}+2^{2009}+\cdots+n^{2009}$ sayısının $n+2$ ile bölünemeyeceğini ispatlayınız.

17. $|12^m - 5^m|$ formundaki en küçük tamsayının 7 olduğunu gösteriniz.

18. n tane 9 ve 2 tane 1 rakamından oluşan $199...91$ sayısı 1991'e tam bölünecek şekilde bir $n > 2$ sayısının bulunduğunu ispatlayınız. $($BREZİLYA M.O. 1991$)$

19. $8p^4 - 3003$ sayısı pozitif olacak şekilde tüm p asal sayılarını bulunuz. $($MEKSİKA M. O. 1997$)$

20. 12345 sayısından küçük olan aritmetik olarak artan 1999 farklı pozitif asal sayının bulunamayacağını gösteriniz. $($MEKSİKA M. O. 1999$)$

21. Hiçbir rakamı 0 olmayan ve 2^{2009} ile bölünebilen bir pozitif tamsayının var olduğunu ispatlayınız.

22. $\dfrac{1}{1996}$ sayısının ondalık yazılımında virgülden sonraki 46-ıncı rakamı kaçtır? $($Un. of South Carolina Math. Contest $)$

23. $\left[\!\left[\frac{2006}{1}\right]\!\right], \left[\!\left[\frac{2006}{2}\right]\!\right], \left[\!\left[\frac{2006}{3}\right]\!\right], \cdots, \left[\!\left[\frac{2006}{2006}\right]\!\right]$ sayılarının oluşturduğu küme kaç elemanlıdır?

24. $OBEB\left(\binom{3232}{1}, \binom{3232}{3}, \binom{3232}{5}, ..., \binom{3232}{3231},\right) = ?$

25. Rakamları 3 veya 7'den oluşan ve 21'in katı olan tüm 7 basamaklı sayıları bulunuz. $($MEKSİKA M.O. 2001$)$

26. $20!$ sayısının kaç tane pozitif tamsayı böleni vardır? $($MEKSİKA M.O. 1987$)$

27. n sayısı, 100'den küçük olan ve tam 3 tane pozitif tamsayı böleni olan tüm pozitif tamsayıların çarpımı ise, n sayısını bulunuz ve tamkare olduğunu gösteriniz. $($MEKSİKA M.O. 1987$)$

28. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$ sayısının 3804 sayısı ile bölünebildiğini gösteriniz. (MEKSİKA M.O. 1987)

29. n^2+n-1 ve n^2+2n sayılarının ortak çarpanı olamayacağını gösteriniz. (MEKSİKA M.O. 1987)

30. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, 19 sayısının $11m+2n$ sayısını bölmesi için gerek ve yeter şart $18m+5n$ sayısını da bölmesidir. (MEKSİKA M.O. 1988)

31. a ve b aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere, $n+2$ sayısının

$$OBEB\left(a^2+b^2-nab, a+b\right)$$

ile tam bölündüğünü gösteriniz. (MEKSİKA M.O. 1988)

32. $n>2$ olmak üzere, $n^{n-1}-1$ sayısının $(n-1)^2$ ile bölünebildiğini gösteriniz. (MEKSİKA M.O. 1990)

33. Verilen bir p asal sayısı için, $0<a,b,c,d<p-1$ olmak üzere, $ad \equiv bc \pmod p$ olacak şekilde kaç tane (a,b,c,d) pozitif tamsayı dörtlüsü vardır? (MEKSİKA M.O. 1992)

34. $1+11^{11}+111^{111}+1111^{1111}+\cdots+1111111111^{1111111111}$ sayısının 100 ile bölünebildiğini gösteriniz. (MEKSİKA M.O. 1992)

35. 100 ile 999 arasında rakamlarının küpüne eşit olan tüm sayıların bulunuz. (MEKSİKA M.O. 1993)

36. p bir tek asal sayı olduğuna göre, bir n tamsayısı için

$$p \mid n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

olması için gerek ve yeter şart $p \mid m^2-5$ olacak şekilde bir m tamsayısının olmasıdır. (MEKSİKA M.O. 1993)

37. $n^a+n^b=n^c$ denkleminin pozitif tamsayılar kümesinde tüm çözümlerini bulunuz. (BREZİLYA M.O. 1992)

38. $x^2+y^2+z^2=3xyz$ denkleminin pozitif tamsayılar kümesinde sonsuz sayıda çözümü olduğunu gösteriniz. (BREZİLYA M.O. 1996)

39. 1998'den küçük ikişer olarak aralarında asal olan 15 pozitif tamsayıdan en az birinin asal olması gerektiğini gösteriniz. (BREZİLYA M.O. 1998)

40. Bir n tamsayısı için $n^2+5n+23$ sayısını bölecek şekildeki en küçük asal sayıyı bulunuz. (BREZİLYA M.O. 2003)

41. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{1983}$ denkleminin pozitif tamsayılar kümesinde sonlu sayıda çözümü olduğunu gösteriniz. (BREZİLYA M.O. 1983)

42. $(n+1)^k-1=n!$ denkleminin pozitif tamsayılar kümesinde tüm çözümlerini bulunuz. (BREZİLYA M.O. 1984)

43. $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $x^2+ax+b=y^2+cy+d$ denkleminin sonsuz sayıda tamsayı çözümünün olması için gerek ve yeter şart $a^2-4b=c^2-4d$ olmasıdır. Gösteriniz. (BREZİLYA M.O. 1985)

44. Hem iki asal sayının farkı, hem de iki asal sayının toplamı olarak yazılabilen tüm asal sayıları bulunuz. (BREZİLYA M.O. 1988)

45. $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $\dfrac{n(n+1)}{3}$ ifadesi tamkare ise n sayısının 3'ün katı ve $n+1$, $\dfrac{n}{3}$ sayılarının da tamkare olduğunu gösteriniz. (BREZİLYA M.O. 1989)

46. $a^3+1990b^3=c^4$ denkleminin pozitif tamsayılar kümesinde sonsuz sayıda çözümünün olduğunu gösteriniz. (BREZİLYA M.O. 1990)

47. $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=m^2$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümü var mıdır? (İSVEÇ M.O. 2000)

48. Hangi $n\geq 8$ tamsayıları için, $n^{\frac{1}{n-7}}$ ifadesi bir tamsayıdır? (İSVEÇ M.O. 2002)

49. $[\![x^2-2]\!]+2\,[\![x]\!]=[\![x]\!]^2$ denkleminin sağlayan x reel sayılarını bulunuz. (İSVEÇ M.O. 2003)

50. $n^2-3mn+m-n=0$ denklemini sağlayan tüm (m,n) tamsayı ikililerini bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1962)

51. $1234^{567}+89^{1011}$ sayısının 12'ye bölümünden kalan kaçtır? (İSVEÇ M.O. 1963)

52. $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m)=1000$ denklemini sağlayan tüm (m,n) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1964)

53. $m^3 - n^3 = 999$ denklemini sağlayan tüm (m, n) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz.. (İSVEÇ M.O. 1965)

54. $m^3 = n^3 + n$ denklemini sağlayan tüm (m, n) tamsayı ikililerini bulunuz.. (İSVEÇ M.O. 1969)

55. Üç tane tamsayının dördüncü kuvvetlerinin toplamı olarak yazılamayan sonsuz sayıda pozitif tamsayının bulunduğunu ispatlayınız. (İSVEÇ M.O. 1970)

56. $\begin{cases} x - 4y = 1 \\ ax + 3y = 1 \end{cases}$ denklem sisteminin bir tamsayı çözümünün olması için a reel sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1972)

57. $a_1 = 1$, $a_2 = 2^{a_1}$, $a_3 = 3^{a_2}$, $a_4 = 4^{a_3}$, ..., $a_9 = 9^{a_8}$ olduğuna göre, a_9 sayısının son iki basamağını bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1974)

58. $n \mid 2^n + 1$ olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tamsayısı olduğunu gösteriniz. (İSVEÇ M.O. 1975)

59. $3^m - 1 = 2^n$ denkleminin tamsayılar kümesinde sonlu sayıda çözümünün olduğunu gösteriniz. Çözümleri bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1976)

60. p bir asal sayı olmak üzere, $p^d \mid p^4!$ olacak şekildeki en büyük d tamsayısını bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1977)

61. $x \geq y \geq z$ olmak üzere,

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 3n^2 - 1 \\ x + y + z = 3n \end{cases}$$

sisteminin tamsayı çözümlerinin sadece, $x = n + 1$, $y = n$, $z = n - 1$ olduğunu gösteriniz. (İSVEÇ M.O. 1977)

62. $1 \leq x \leq n$ olmak üzere, $x^2 - [\![x^2]\!] = (x - [\![x]\!])^2$ denkleminin kaç tane çözümü vardır? (İSVEÇ M.O. 1982)

63. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \\ \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n = 1 \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1 \end{cases}$ denklem sisteminin pozitif tamsayılarda bir çözümü olduğuna göre, n sayısının çift olması gerektiğini gösteriniz. (İSVEÇ M.O. 1983)

6**4.** $\begin{cases} a^3-b^3-c^3=3abc \\ a^2=2(a+b+c) \end{cases}$ denklem sisteminin pozitif tamsayılar kümesinde tüm çözümlerini bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1984)

65. $d_1, d_2, ..., d_k$ sayıları, $n = 1990!$ sayısının bölenleri ise, $\sum_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\sqrt{n}}{d_i}$ olduğunu gösteriniz. (İSVEÇ M.O. 1990)

66. $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}=2/5$ denklemini sağlayan tüm (m,n) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz. .(İSVEÇ M.O. 1991)

67. $\frac{19^{92}-91^{29}}{90}$ ifadesi tamsayı mıdır? (İSVEÇ M.O. 1992)

68. $a,b \in \mathbb{Z}$ ve ab bir çift sayı ise, $a^2+b^2+x^2=y^2$ denklemini sağlayan x,y tamsayılarının bulunduğunu gösteriniz. (İSVEÇ M.O. 1993)

69. $2n^3-m^3=mn^2+11$ denklemini sağlayan tüm (m,n) tamsayı ikililerini bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1994)

70. $S(n)$ sayısı n sayısının rakamlarının toplamını göstermek üzere, 1'den büyük ve 10'dan farklı bir n tamsayısı için, her $0<k<f(n)$ sayısı $S(k)+S(f(n)-k)=n$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir tek $f(n)\geq 2$ tamsayısı bulunduğunu gösteriniz. (İSVEÇ M.O. 1997)

71. $(8a-5b)^2+(3b-2c)^2+(3c-7a)^2=2$ denklemini sağlayan tüm (a,b,c) pozitif tamsayı üçlülerini bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1998)

72. Herhangi $n>5$ pozitif tamsayısı için, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1997}{1998}$ denklemini sağlayan $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitif tamsayıları bulunabileceğini ispatlayınız. Böyle bir denklemi sağlayan bu n sayıdan *OBEB* leri 1'den büyük olacak şekilde iki sayı bulunacağını gösteriniz.

73. $a^2+b^2-8c=6$ denklemini sağlayan (a,b,c) tamsayı üçlüsünün bulunmadığını gösteriniz. (Kanada M.O. 1969)

74. $\frac{n^3+m}{n+2}$ sayısı tamsayı olacak şekilde, en az 11 tane tek ve en az 11 tane de çift pozitif n sayısının olmasını sağlayan en küçük $m>8$ pozitif tamsayısını bulunuz. (2006 Rice Math Tourn.)

75. **a**) 10201 sayısının 2'den büyük herhangi bir tabanda asal olamayacağını gösteriniz.

b) 10101 sayısının herhangi tabanda asal olmadığını gösteriniz. (Kanada M.O. 1972)

76. $x^3 + 11^3 = y^3$ denkleminin sağlayan (x, y) pozitif tamsayı ikilisi bulunmadığını gösteriniz. (Kanada M.O. 1972)

77. p ve $p + 2$ sayıları 3'ten büyük asal ise, $6 \mid p + 1$ olduğunu gösteriniz. (Kanada M.O. 1973)

78. n sayısı b tabanında 777'ye eşit olduğuna göre, n sayısı bir tamsayının dördüncü kuvvetine eşit olacak şekilde en küçük b pozitif tamsayısını bulunuz. (Kanada M.O. 1977)

79. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, n^2 sayısının onlar basamağı 7 ise, n^2 sayısının birler basamağı kaçtır? (Kanada M.O. 1978)

80. $2a^2 = 3b^3$ denklemini sağlayan, tüm (a, b) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz. (Kanada M.O. 1978)

81. Her p asal sayısı için, $p \mid 2^n - n$ olacak şekilde, sonsuz sayıda pozitif n tamsayısı bulunduğunu gösteriniz. (Kanada M.O. 1983)

82. 1984 tane ardışık sayının karelerinin toplamının bir tamkare olamayacağını ispatlayınız. (Kanada M.O. 1984)

83. $2^{n-1} \mid n!$ olması için gerek ve yeter şart $n = 2^{k-1}$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır. İspatlayınız. (Kanada M.O. 1985)

84. $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ ve $n < 14$ olmak üzere, $a^2 + b^2 = n!$ denklemini sağlayan tüm (a, b, n) pozitif tamsayı üçlülerini bulunuz. (Kanada M.O. 1987)

85. $[\![x]\!]$, x sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıyı gösterdiğine göre, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$[\![\sqrt{n} + \sqrt{n+1}]\!] = [\![\sqrt{4n+1}]\!] = [\![\sqrt{4n+2}]\!] = [\![\sqrt{4n+3}]\!]$$

olduğunu ispatlayınız. (Kanada M.O. 1987)

86. $a_1 = 1989^{1989}$, olmak üzere $n > 1$ için a_n, a_{n-1} sayısının rakamlarının toplamını göstermektedir. Buna göre, a_5 kaçtır? (Kanada M.O. 1989)

87. $xyz \neq 0$ olmak üzere, $x^2 + y^5 = z^3$ denklemini sağlayan sonsuz sayıda (x, y, z) üçlüsü olduğunu gösteriniz. (Kanada M.O. 1991)

88. İlk n tane doğal sayının çarpımının, ilk n tane doğal sayının toplamıyla bölünebilmesi için gerek ve yeter şart $n + 1$ sayısının asal olmamasıdır. Gösteriniz. (Kanada M.O. 1992)

89. $x = \left[\!\left[\frac{x}{2} \right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{x}{3} \right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{x}{5} \right]\!\right]$ denklemini sağlayan kaç tane x reel sayısı vardır? (Kanada M.O. 1998)

90. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $83 \mid 25m + 3n$ olması için gerek ve yeter şart $83 \mid 3m + 7n$ olmasıdır. Gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1990)

91. $x^2 - 7y^2 = 1$ denklemini sağlayan sonsuz sayıda (x, y) doğal sayı ikilisi bulunduğunu ispatlayınız. (Baltık Way M.O. 1990)

92. Herhangi ikisinin veya daha fazlasının toplamı asal olmayan 1990 tane aralarında asal sayı var mıdır? (Baltık Way M.O. 1990)

93. $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, ...$ sayılarının hiçbirisi bir tamsayının küpü olamaz. Gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1990)

94. $a_1, a_2, ..., a_n$ farklı tamsayıları için, $i < j$ iken tüm $a_i - a_j$ farkları 1991'e tam bölünecek şekildeki en küçük n pozitif tamsayısı kaçtır? (Baltık Way M.O. 1991)

95. $102^{1991} + 103^{1991} = n^m$ olacak şekilde, $m > 1$ ve n tamsayılarının bulunmadığını gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1991)

96. $[\![x]\!]$, x sayısının tam kısmını ve $\{x\} = x - [\![x]\!]$ kesir kısmını göstermek üzere, $[\![x]\!] \cdot \{x\} = 1991x$ denkleminin çözümlerini bulunuz. (Baltık Way M.O. 1991)

97. p ve q ardışık iki tek asal sayı olmak üzere, $p + q$ sayısının, birbirinden farklı olması gerekmeyen en az üç tane 1'den büyük tamsayının çarpımı olarak yazılabileceğini gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1992)

98. $d(n)$, n sayısının tüm pozitif bölenlerinin sayısını göstermek üzere, $\dfrac{n}{d(n)}$ tamsayı olacak şekilde sonsuz sayıda n tamsayısı bulunduğunu gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1992)

99. $2^x(4-x) = 2x+4$ denklemini sağlayan tüm x tamsayılarını bulunuz. (Baltık Way M.O. 1992)

100. $a_1a_2a_3$ ve $a_3a_2a_1$ üç basamaklı iki sayı olsun. a_1 ve a_3 rakamları sıfırdan farklıdır. Bu sayıların kareleri sırasıyla, $b_1b_2b_3b_4b_5$ ve $b_5b_4b_3b_2b_1$ olduğuna göre, bu şekildeki üç basamaklı tüm sayıları bulunuz. (Baltık Way M.O. 1993)

101. Her k pozitif tamsayısı için, $an+b$ ifadesi, bir tamsayının k-ıncı kuvveti olacak şekilde bir n pozitif tamsayısının var olmasını sağlayacak şekilde $a > b > 1$ pozitif tamsayıları var mıdır? (Baltık Way M.O. 1993)

102. Eğer bir pozitif sayı birbirinden farklı olması gerekmeyen iki asal sayının çarpımı ise ilginç sayı diyelim. En fazla kaç tane ardışık ilginç sayı vardır. (Baltık Way M.O. 1993)

103. $\sqrt{\dfrac{25}{2}+\sqrt{\dfrac{625}{4}-n}}+\sqrt{\dfrac{25}{2}-\sqrt{\dfrac{625}{4}-n}}$ tamsayı olacak şekilde tüm n tamsayılarını bulunuz. (Baltık Way M.O. 1993)

104. Tüm n tek pozitif tamsayıları için, $2^9 \mid n^{12}-n^8-n^4+1$ olduğunu gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1993)

105. tamsayılar kümesinde $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 4^x \\ x+y+z = 20 \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz. (Baltık Way M.O. 1993)

106. $a \circledast b = a+b-ab$ olmak üzere,

$$(x \circledast y) \circledast z + (y \circledast z) \circledast x + (z \circledast x) \circledast y = 0$$

eşitliğini sağlayan tüm (x,y,z) tamsayı üçlülerini bulunuz. (Baltık Way M.O. 1994)

107. $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ sayısı, rasyonel sayı olacak şekilde n tamsayısı var mıdır? (Baltık Way M.O. 1994)

108. p bir tek asal sayı olmak üzere, m ve n aralarında asal sayıları için,

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots++\frac{1}{(p-1)^3}=\frac{m}{n}$$

ise, $p \mid m$ olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way M.O. 1994)

109. $2^a + 3^b$ ifadesi bir tamkare olacak şekilde tüm (a, b) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz. (Baltık Way M.O. 1994)

110. 1994 rakamlı, tüm rakamları $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinden olan ve herhangi ardışık iki rakamı arasındaki farkının mutlak değeri 1 olan kaç tane pozitif tamsayı vardır? (Baltık Way M.O. 1994)

111. $a, k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^2 + k \mid (a-1)a(a+1)$ ise, $k \geq a$ olduğunu gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1995)

112. a ve c sayıları tek sayı olmak üzere, a, b, c pozitif tamsayıları ikişerli olarak aralarında asal ve $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlıyorlar ise, $b + c$ sayısının tamkare olacağını gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1995)

113. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $ab = cd$ ise, $a + b + c + d$ toplamının asal olamayacağını gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1996)

114. $a \geq b \geq c$ koşulunu sağlayan ve $1a^3 + 9b^2 + 9c + 7 = 1997$ denklemini sağlayan tüm (a, b, c) doğal sayı üçlülerini bulunuz. (Baltık Way M.O. 1997)

115. 79 tane ardışık sayı içerisinde rakamları toplamı 13 ile bölünebilen bir pozitif tamsayının bulunduğunu gösteriniz. (Baltık Way M.O. 1997)

116. $2x^2 + 5y^2 = 11(xy - 11)$ denklemini sağlayan tüm (x, y) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz. (Baltık Way M.O. 1998)

117. a bir tek rakam ve b bir çift rakam olmak üzere, her n pozitif tamsayısı için, rakamları sadece a ve b'den oluşan ve 2^n. (Baltık Way M.O. 1998)

118. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $19^n - 5^m$ formunda yazılabilen en küçük pozitif tamsayı kaçtır? (Baltık Way M.O. 1999)

119. Her p asal sayısı için, $p^2 + k$ sayısı asal olmayacak şekilde sonsuz sayıda çift k pozitif tamsayısı bulunabileceğini ispatlayınız. (Baltık Way M.O. 1999)

120. a, b, c ve d asal sayıları için, $a > 3b > 6c > 12d$ ve $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$ olduğuna göre, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ifadesinin tüm mümkün olabilecek değerlerini bulunuz. (Baltık Way M.O. 1999)

121. Pozitif bölenlerinin sayısının 100 katına eşit olan tüm n pozitif tamsayılarını bulunuz. (Baltık Way M.O. 2000)

122. n pozitif tamsayısı 2 veya 3'e bölünemeyen bir sayı olmak üzere, her k tamsayısı için, $(k+1)^n - k^n - 1$ sayısı $k^2 + k + 1$ sayısı ile tam bölündüğünü ispatlayınız. (Baltık Way M.O. 2000)

123. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\{1, 2, 3, ..., 2^n\}$ kümesinden herhangi x, y ikilisinin $x + y$ toplamı, xy çarpımını bölmeyecek şekilde en az $2^{n-1} + n$ sayının seçilebileceğini gösteriniz. (Baltık Way M.O. 2001)

124. a bir tek sayı olmak üzere, her $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \neq n$ için,

$$OBEB\left(a^{2^n} + 2^{2^n},\ a^{2^m} + 2^{2^m}\right) = 1$$

olduğunu gösteriniz. (Baltık Way M.O. 2001)

125. 360 tane pozitif bölene sahip olan en küçük pozitif tek sayı kaçtır? (Baltık Way M.O. 2001)

126. $a_k = \left(2^{2k+1}\right)^2 + 1$ sayısı en fazla iki farklı asal sayıya bölünecek şekilde, tüm k doğal sayılarını bulunuz. (Baltık Way M.O. 2002)

127. $n^6 - 1$ sayısının herhangi asal böleni $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$ sayısının da böleni olacak şekilde tüm $n > 1$ tamsayılarını bulunuz. (Baltık Way M.O. 2002)

128. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3n$ denkleminin pozitif rasyonel sayılar kümesinde çözümünün olmadığını gösteriniz. (Baltık Way M.O. 2002)

129. $a - b$ asal sayı ve ab tamkare olacak şekilde tüm (a, b) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz. (Baltık Way M.O. 2003)

130. a, b pozitif tamsayılar olmak üzere, $a^3 + b^3$ bir tamkare ise, $a + b$ sayısı iki farklı asal sayının çarpımı olarak yazılamayacağını gösteriniz. (Baltık Way M.O. 2003)

131. n pozitif tamsayısının kendisi haricindeki tüm pozitif bölenlerinin toplamı $\sigma(n)$ ve n sayısının pozitif bölenlerinin sayısı $\tau(n)$ olmak üzere, $\sigma(n) + \tau(n) = n$ ise, $n = 2m^2$ $(m \in \mathbb{Z})$formunda yazılabileceğini gösteriniz. (Baltık Way M.O. 2003)

132. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ olacak şekilde, $p_1, p_2, ...$ sonsuz elemanlı bir asal sayı dizisi var mıdır? (Baltık Way M.O. 2004)

133. $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ve M kümesi, m sayısının tam iki tane asal çarpana sahip olan pozitif bölenlerinin kümesi olsun. M kümesinden seçilen herhangi n eleman arasında, $abc = m$ olacak şekilde a, b, c sayılarının daima bulunmasını sağlayan en küçük n sayısı kaçtır? (Baltık Way M.O. 2005)

134. p bir asal sayı ve n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $(n+1)^p - n^p$ sayısının bir pozitif böleni q olsun. $p \mid q - 1$ olduğunu ispatlayınız. (Baltık Way M.O. 2005)

135. $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için $z = \dfrac{4xy}{(x+y)}$ bir tek sayı ise, z sayısının en az bir pozitif böleninin $4n-1$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ formunda olduğunu gösteriniz. (Baltık Way M.O. 2005)

136. Toplamları da tamkare olan 2005 tane farklı tamkare bulunabilir mi? (Baltık Way M.O. 2005)

137. $p_1 p_2 \cdots p_k$, sayısı n sayısının farklı olması gerekmeyen asal çarpanlarına ayrılmış hali ise, $n = p_1 p_2 \cdots p_k \mid (p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$ olacak şekildeki tüm n pozitif tamsayılarını bulunuz. (Baltık Way M.O. 2005)

138. Herhangi ikisinin çarpımı ile 2006 sayısının toplamı tamkare olan dört farklı pozitif tamsayı bulunabilir mi? (Baltık Way M.O. 2006)

139. $n^2 \mid 3^n + 1$ olacak şekilde tüm n pozitif tamsayılarını bulunuz. (Baltık Way M.O. 2006)

140. n^{n^n} sayısının son rakamı a_n ise, (a_n) dizisinin periyodik olduğunu gösteriniz ve periyodunu bulunuz. (Baltık Way M.O. 2006)

141. Sadece $1, 5$ ve 9 rakamlarından oluşan 12 basamaklı bir sayı 37'ye bölünüyor ise, bu sayının rakamları toplamının 76 olamayacağını ispatlayınız. (Baltık Way M.O. 2006)

142. $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\dfrac{x+1}{y} + \dfrac{y+1}{z} + \dfrac{z+1}{x}$ bir tamsayı ve

$$OBEB\,(x,y,z) = d \text{ ise } d \leq \sqrt[3]{xy+yz+zx}$$

olduğunu gösteriniz. (Baltık Way M.O. 2007)

143. $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $b < a$ olmak üzere, $ab(a-b) \mid a^3 + b^3 + ab$ ise, ab sayısının tamküp olduğunu gösteriniz. (Baltık Way M.O. 2007)

144. $6n \mid 6+n$ olacak şekilde tüm n pozitif tamsayılarını bulunuz. (Estonya M.O. 1995)

145. $1, 2, ..., 100$ sayıları arasından 50 farklı sayı seçiliyor, bu 50 sayı arasından, toplamı tamkare olacak şekilde iki sayı seçilebileceğini gösteriniz. (Estonya M.O. 1995)

146. $n > 5$ tek sayısı için, $1^n + 2^n + \cdots + 15^n$ sayısının 480'e tam bölündüğünü gösteriniz. (Estonya M.O. 1995)

147. p bir asal sayı olmak üzere, $p(x-y) = xy$ denklemini sağlayan tüm (x, y) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz. (Estonya M.O. 1995)

148. x, y ve $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ sayıları tamsayı ise, $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ sayısının tamküp olduğunu gösteriniz. (Estonya M.O. 1995)

149. $7 \mid 3^n + n^3$ olması için gerek ve yeter şart $7 \mid 3^n n^3 + 1$ olmasıdır, ispatlayınız. (Estonya M.O. 1995)

150. $m, n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $m^n \mid n^m$ ve $n^k \mid k^n$ ise, $m^k \mid k^m$ olduğunu ispatlayınız. (Estonya M.O. 1993)

151. *OBEB*$(a, b) =$ *OBEB*(c, d) eşitliğini sağlayan, birbirinden farklı ve 1'den büyük $ab = cd$ olacak şekilde (a, b, c, d) tamsayı dörtlüsü var mıdır? (Aynı soruyu $ac = bd$ için de çözünüz) (Estonya M.O. 2007)

152. Herhangi bir rakamı silindiğinde elde edilen 4 basamaklı sayı 7 ile tam bölünecek şekilde kaç tane 5 basamaklı sayı vardır? (Estonya M.O. 2007)

153. $\overline{bca} = (a+b+c)^3$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\overline{abc} \cdot (a+b+c)$ ifadesinin alabileceği tüm değerleri bulunuz. ($\overline{abc}$ ve $\overline{bca}$ üç basamaklı sayıları göstermektedir. (Estonya M.O. 2007)

154. k basamaklı bir pozitif tamsayının tüm tekli, ikili, üçlü,... ve k-lı kısımları asal ise bu sayıya hiperasal sayı diyelim. Tüm hiperasal sayıları bulunuz. Örneğin, 5323 sayısı hiper asal değildir. Çünkü, 32 ikili kısmı asal değildir. (Estonya M.O. 2006)

155. n bir çift pozitif tamsayı olmak üzere, $\dfrac{n^m-1}{n-1}$ sayısı tamkare olacak şekilde bir $m > 1$ doğal sayısı var ise, $8 \mid n$ olduğunu gösteriniz. (Estonya M.O. 2006)

156. $m^n - n^m = 3$ denklemini sağlayan tüm (m, n) pozitif tamsayı ikilerini bulunuz. (Estonya M.O. 2006)

157. $k-$ıncı kuvvetinin rakamları toplamı i) $k = 2004$'e ; ii) $k = 2006$'ya eşit olan bir doğal sayı var mıdır? (Estonya M.O. 2005)

158. ab =*OBEB*(a, b)+*OKEK*(a, b) denklemini sağlayan tüm (a, b) pozitif tamsayı ikilerini bulunuz. (Estonya M.O. 2005)

159. 3'ten büyük her n tamsayısı için, herhangi ikisinin çarpımı, geri kalan $n-2$ tanesinin toplamına tam bölünecek şekilde iki parçaya ayrılabilen n farklı sayının bulunduğunu ispatlayınız. (Estonya M.O. 2005)

160. a ve b aralarında asal sayılar olmak üzere, $(a+b) / (a-b)$ bir pozitif tamsayı ise, $ab+1$ ve $4ab+1$ sayılarının en az birinin tamkare olması gerektiğini gösteriniz. (Estonya M.O. 2004)

161. Öğretmen, $\frac{a}{b} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ ifadesi tamsayı olacak şekilde a ve b tamsayıları seçiyor.

a) Sam, a nın, b'nin her asal çarpanı ile bölünebileceğini iddia ediyor. Sam'in iddiasının doğru olduğunu gösteriniz.

b) Sam, $b \leq a$ olduğunu iddia ediyor. İddiası doğru mudur ? (Estonya M.O. 2004)

162. $a, b, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $n \mid a+b$ ve $n^2 \mid a^2+b^2$ ise, her m pozitif tamsayısı için $mn \mid a^m + b^m$ olduğunu gösteriniz. (Estonya M.O. 2004)

163. $2^{2^n - 1} - 7$ ifadesi tamkare olacak şekilde $n > 1$ tamsayısı bulunabilir mi? (Estonya M.O. 2004)

164. $(x+y)^x = x^y$ denklemini sağlayan tüm (x, y) pozitif tamsayı ikililerini bulunuz. (Estonya M.O. 2004)

165. $\frac{n^1}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}$ ifadesi tamsayı olacak şekilde tüm n pozitif tamsayılarını bulunuz. (Estonya M.O. 2003)

166. $x < y < z$ olmak üzere

$$\begin{cases} \textit{OBEB}\,(x, y) = 6 \\ \textit{OBEB}\,(y, z) = 10 \\ \textit{OBEB}\,(z, x) = 8 \\ \textit{OKEK}\,(x, y, z) = 2400 \end{cases}$$

olacak şekilde tüm (x, y, z) pozitif tamsayı üçlülerini bulunuz. (Estonya M.O. 2003)

167. $52^a \cdot 77^b \cdot 88^c \cdot 91^d = 2002$ denklemini sağlayan tüm (a, b, c, d) tamsayı dörtlülerini bulunuz. (Estonya M.O. 2002)

168. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\underbrace{999...9}_{n \text{ tane}}$ sayısı n ile bölünebiliyor ise, $\underbrace{111...1}_{n \text{ tane}}$ sayısının da n ile bölünebildiğini ispatlayınız. (Estonya M.O. 2002)

169. m, n tamsayılar olmak üzere, $\dfrac{m^2+n^2}{mn}$ ifadesinin alabileceği tüm tamsayı değerlerini bulunuz. (Estonya M.O. 2002)

170. $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \cdots + 2000^{2001} + 2001^{2001}$ sayısının 13 ile bölümünden kalanı bulunuz. (Estonya M.O. 2001)

171. $[\![x]\!]$, x sayısının tam kısmını ve $\{x\}$ sayısı da kesir kısmını göstermek üzere, $(x = [\![x]\!] + \{x\})$

$$\begin{cases} x + [\![y]\!] + \{z\} = 200,2 \\ y + [\![z]\!] + \{x\} = 200,1 \\ z + [\![x]\!] + \{y\} = 200,0 \end{cases}$$

sistemini sağlayan tüm (x, y, z) reel sayı üçlülerini bulunuz. (Estonya M.O. 2001)

172. Rakamları birbirinde farklı 10 basamaklı bir sayı 99999'a bölünebiliyor ise, bu sayıya sihirli sayı diyelim. Kaç tane sihirli sayı vardır? (Estonya M.O. 2001)

173. $\overline{ab}$ iki basamaklı sayısı c ile, $\overline{bc}$ iki basamaklı sayısı a ile ve $\overline{ca}$ iki basamaklı sayısı b ile bölünecek şekilde a, b, c sıfırdan farklı rakamları bulunabilir mi? (Estonya M.O. 2001)

174. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $S(n)$, n sayısının pozitif bölenlerinin sayısını gösteriyor ise,

a) $S(6n) \leq 12S(n)$ olduğunu ispatlayınız.

b) $S(6n) = 12S(n)$ eşitliği sağlanacak şekildeki n sayısını bulunuz. (Estonya M.O. 2001)

175. Sadece 2 ve 0 rakamlarından oluşan ve bir pozitif tamsayının $k-$ıncı $(k \geq 2)$ kuvvetine eşit olan bir tamsayı var mıdır? (Estonya M.O. 2001)

176. *OBEB*$(m, n) = d$ ve *OKEK*$(m, n) = r$ olmak üzere, $3m + n = 3r + d$ ise, $m \mid n$ olduğunu ispatlayınız. (Estonya M.O. 2001)

177. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ denklemini sağlayan (a,b,c) pozitif tamsayı üçlüsüne harmonik üçlü diyelim. Herhangi verilen bir c pozitif tamsayısı için, (a,b,c) harmonik üçlülerinin sayısının c^2 sayısının pozitif bölenlerinin sayısına eşit olacağını gösteriniz. (Estonya M.O. 2000)

178. $2,4,6,...,2000$ sayılarının $\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},...,\dfrac{1}{2000},\dfrac{1}{2001}\right\}$ kümesinin elemanları ile çarparak elde edilen tüm çarpımların toplamını bulunuz. (Estonya M.O. 2000)

179. 2 tabanında n tane 1 ve n tane 0 olan tüm pozitif tamsayıların toplamını bulunuz.

180. 55^n+m32^n sayısı 2001 sayısının katı olacak şekilde en küçük pozitif tamsayıyı bulunuz. (İRLANDA M.O. 2001)

181. $2x^2+x=3y^2+y$ denkleminin kaç tane (x,y) pozitif tamsayı çözümü vardır?

182. m ve n, $m\leq n$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayılar ve d sayısı da m ve n'nin en büyük ortak bölenini göstermek üzere, $\dfrac{d}{n}\binom{n}{m}$ sayısının tamsayı olduğunu gösteriniz. (Putnam M.O. 2000)

183. $(a,b,...,z)$ ve $[a,b,...,z]$ ifadeleri sırasıyla $a,b,...,z$ sayılarının *OBEB* ve *OKEK*'ini göstermek üzere, $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ için,

$$\frac{(a,b,c)^2}{[a,b,c]^2}=\frac{(a,b)\,(b,c)\,(c,a)}{[a,b]\,[b,c]\,[c,a]}$$

olduğunu gösteriniz. (USAMO 1972)

184. $6n^2+5$, $2n^2+3$ ve n^2+1 sayıları asal olacak şekilde tüm n pozitif tamsayılarını bulunuz. (Wisconsin M. Talent Search 1995)

185. Tam 36 tane pozitif böleni olan ve $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 8,\ 9$ sayıları ile bölünebilen tüm pozitif tamsayıları bulunuz. (Wisconsin M. Talent Search 1995)

186. 6'dan farklı olan bir a pozitif tamsayısı için, $9p^2+ap+1$ ifadesi tamkare olacak şekilde bir p asal sayısının bulunabileceğini gösteriniz. (Wisconsin M. Talent Search 1995)

187. $m,n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\dfrac{1997m}{m+1997^n}$ ifadesinin alabileceği tamsayı değerlerini bulunuz. (Wisconsin M. Talent Search 1997)

188. $n \mid 2^n + 2$ ve $n - 1 \mid 2^n + 1$ olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tamsayısı bulunduğunu ispatlayınız.

189. $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, *OBEB*$(y, z) = 1$ ve $1000 \mid y$ olmak üzere, $\dfrac{1997}{1998} + \dfrac{1999}{x} = \dfrac{y}{z}$ denklemini sağlayan en küçük x tamsayısı kaçtır?

190. $\dfrac{m^{n+1} + 2^{n+1} + 1}{m^n + 2^n + 1} = k$ denklemini sağlayan, tüm (m, n, k) pozitif tamsayı üçlülerini bulunuz.

KAYNAKLAR

1. Aliyev İ. , Özdemir M., Şıhaliyeva D., *Ulusal Antalya Matematik Oimpiyatları Sorular ve Çözümler*, TÜBİTAK Yayınları, 2007.
2. Alizade R., Ufuktepe Ü., *Sonlu Matematik*, TÜBİTAK Yayınları, 2006.
3. Andreescu, T.; Feng, Z., 101 *Problems in Algebra from the Training of the USA IMO Team*, Australian Mathematics Trust, 2001.
4. Andreescu, T.; Feng, Z., *102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team*, Birkhäuser, 2002.
5. Andreescu, T.; Feng, Z., *103 Trigonometry Problems From The Training of the USA IMO Team*, Birkhäuser, 2005.
6. Andrescu T, Andrica D., Feng Z. ,*104 Number Theory Problems From The Training of the USA IMO Team,* Birkhäuser 2007.
7. Andrescu T., Enescu B., *Mathematical Olympiad Treasures,* ,Birkhäuser 2006.
8. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads, 1996-1997: Problems and Solutions from Around the World*, The Math. Association of America, 1998.
9. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads, 1997-1998: Problems and Solutions from Around the World*, The Math. Association of America, 1999.
10. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around the World 1998-1999,* The Math. Association of America, 2000.
11. Andrescu T, Feng Z., George L., *Mathematical Olympiads, 1999-2000: Problems and Solutions from Around the World,* The Math. Association of America, 2002.
12. Andrescu T, Feng Z., George L., *Mathematical Olympiads, 2000-2001: Problems and Solutions from Around the World,* The Math. Association of America, 2003.
13. Arthur, E., *Problem-Solving Strategies*, 1999, Springer.
14. Balcı, M., Matematik Analiz, Cilt 1., Balcı Yayınları, 2008.
15. Bin X., Peng Yee L., *Mathematical Olympiad in China Problems and Solutions,* East China Normal University Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
16. Don R., *Number Theory, An Introduction,* Marcel Dekker, Newyork, 1996.
17. Dickson L. E., *First Course in the Theory of Equations,* J.Wiley & Sons, 1922.
18. Doob, M., *The Canadian Mathematical Olympiad 1969–1993*, University of Toronto Press, 1993.
19. Felda Darjo, (by Translated), *40 National Math. Olymp. in Slovenia,* Soc. of. Math., Phy. and Astr. of Slovenia, 1996.
20. Fomin, D.; Kirichenko, A., *Leningrad Mathematical Olympiads 1987–1991*, MathPro Press, 1994.

21. Fomin, D.; Genkin, S.; Itenberg, I., *Mathematical Circles*, American Mathematical Society, 1996.
22. Gerald L. A., Klosinski L., F., Larson L., C.,*The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions: 1965-1984*, 1985, The Mathematical Association of America.
23. Gözükızıl Ö. F., Yaman M**.,** *Olasılık Problemleri*, Sakarya Kitabevi, 2005..
24. Greitzer S. L. , *Uluslararası Matematik Olimpiyatları 1959 - 1977,* Tübitak Yayınları, 1984.
25. Gürlü Ö., *Meraklısına Geometri*, Zambak Yayınları, 2005.
26. Honsberger R., *From Erdos to Kiev Problems of Olympiad Caliber,* The Mathematical Association of America, 1996.
27. Honsberger R., *In Polya's Footsteps, Miscellaneous Problems and Essays,* The Mathematical Association of America, 1997.
28. *Mathematical Diamonds*, Ross Honsberger, 2003, he Mathematical Association of America.
29. *Problems in Elemantary Maths.*, V. Lidsky, L. Ovsyannikov, A. Tulaikov, M. Sahbunin, MIR Pub. 1973.
30. Karakaş H. İ., Aliyev İ., *Sayılar teorisinde ilginç olimpiyat problemleri ve çözümleri,* TÜBİTAK Yayınları 1999.
31. Karakaş H. İ., Aliyev İ., *Analiz ve Cebirde ilginç olimpiyat problemleri ve çözümleri*, TÜBİTAK Yayınları 1999.
32. Kazarinoff, N. D., *Geometric Inequalities,* New Mathematical Library,Vol. 4, Random House, 1961.
33. Klamkin M, *USA Mathematical Olympiads 1972-1986 Problems and Solutions,* Mathematical Association of America, 1989.
34. Klamkin, M., *International Mathematical Olympiads, 1978–1985*, NewMathematical Library, Vol. 31, Mathematical Association of America, 1986.
35. Kızılırmak A., Akbulut F., *Cevdet Bilsay'dan Bir Demet*, Ege Ün. Yay., Bornova, 1975.
36. Kuczma, M., *144 Problems of the Austrian–Polish Mathematics Competition 1978–1993*, The Academic Distribution Center, 1994.
37. Larson, L. C., *Problem-Solving Through Problems*, Springer - Verlag, 1992.
38. Lidsky V., Ovsyannikov L., Tulaikov A., and Shabunin M., *Problems in Elementary Mathematics*, Mir, Moscow: 1973
39. Nesin A., *Matematiğe Giriş III, Sayma*, Nesin Yayıncılık, 2009.
40. Nesin A., *Matematiğe Giriş 1, Sezgisel Kümeler Kuramı,* Nesin Yayıncılık, 2008.
41. Salkind, C. T., *The Contest Problem Book*, Random Hause, 1961.
42. Shanks D., *Solved and Unsolved Problems in Number Theory,* 1978, Chelsea Pub. Company, New York.
43. Shklarsky D.O., Chentzov N. N., Yaglom I. M., *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Pub. 1994.

44. Yücesan R., *Meraklısına Matematik*, Zambak Yayınları, 2005.
45. Terzioğlu N., İçen, O., Saban, G., Şahinci, H., *Analiz Problemleri,* Şirketi Mürettibiye Basımevi, 1962.
46. Töngemen M., *Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyat Soru ve Çözümleri 1993-2006*, Altın Nokta Yayınları, 2006.
47. *Liselerarası Mat. Yarışması Soruları ve Çözümleri,* 1969-1983, Tübitak Yayınları, 1983.
48. Türk Matematik Derneği, *Matematik Dünyası Dergileri,* 2000 - 2008.
49. Özdeğer, A., Özdeğer, N., *Çözümlü Analiz Problemleri Cilt 1*, Kuşak Ofset, 1995.
50. Öztunç, M. K., *Trigonometri Problemleri*, İrem Yayınevi, 1965.

WEB KAYNAKLARI

1. The art of problem solving, http://www.artofproblemsolving.com.
2. Estonian Math Competitions, http://www.math.olympiaadid.ut.ee/eng/html/index.php
3. Mathematical Excalibur Journal, http://www.math.ust.hk/excalibur/.
4. Crux Mathematicorum with Math. Mayhem, Canadian Math. Society, http://journals.cms.math.ca/CRUX/.
5. Bulgarian Competitions in Mathematics and Informatics, http://www.math.bas.bg/bcmi/index.html.
6. Problems from Olympiads, http://www.imomath.com/index.php?options=oth|other&p=0.
7. Wisconsin Math. Enginering and Science Talent Saerch Problem Page http://www.math.wisc.edu/~talent/problems.html.
8. Canadian Math. Olympiads, http://www.math.ca/Competitions/CMO/
9. Kalva Math.Problems , John Scholes, http://www.kalva.demon.co.uk/.
10. William Lowell Putnam Mathematics Competition Problems, http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml.
11. AMC USAMO/MOSP/IMO & Others Problems, http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/problemUSAMO-IMOarchive.shtml.
12. Problems in Elemantary Number Theory, http://www.problem-solving.be/pen/.
13. Lecture Notes of Dr.David A. Santos, http://faculty.ccp.edu/faculty/dsantos/.
14. The Harvard MIT Mathematic Tournament, http://web.mit.edu/hmmt/www/.