Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Cilt 2 (Volume 2) Toplamlar, Çarpımlar, Kombinasyon, Permütasyon, Dağılım, Olasılık, Binom Açılımı, Multinom Açılımı, Kanıt Yöntemleri ile ilgili...

Book · October 2014

DOI: 10.13140/RG.2.1.4055.2722

1 author:

Mustafa Özdemir
Akdeniz University

Toplamlar, Çarpımlar, Kombinasyon, Permütasyon, Dağılım, Olasılık, Binom Açılımı, Multinom Açılımı, Kanıt Yöntemleri ile ilgili Olimpiyat Problemleri

Olympiad Problems on the Sums, Products, Combination, Permutation, Probability, Binom Expansion.

Mustafa Özdemir*

December 29, 2014

Abstract

Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 1-2-3-4-5 Serisi, Matematik yarışmalarında, matematik olimpiyatlarına hazırlık çalışmalarında , matematik proje çalışmalarına öğrenci ve öğretmenlere yardımcı olacak kitaplardır. Bu kitap setini ALTIN NOKTA yayınevinden, internet kitabevlerinden ve seçkin kitapçılardan temin edebilirsiniz.

Bu dökümanda bulunan sorular, 5 ciltlik Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık kitaplarının KOMBİNATORİK konusunun ele alındığı **İKİNCİ CİLDİNDEKİ SORULARDAN** oluşmaktadır. **Konu anlatımını** ve soruların **çözümlerini** söz konusu kitapta bulmanız mümkündür. Burada sadece **sorulara** yer verilmiştir.

Keywords : Toplamlar, Çarpımlar, Kombinasyon, Permütasyon, Dağılım, Olasılık, Binom Açılımı, Kanıt Yöntemleri, Olimpiyat Soruları, Matematik Projeleri

Çözümler İçin : Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 2

Book details
Book Name: Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Volume 2 (FOURTH EDITION)
Paperback: 416 pages
Publisher: Altin Nokta Yayinevi (Ekim - 2014)
Language: Turkish
ISBN/BARKOD 9789756146637

*Department of Mathematics, Akdeniz University, Antalya, TURKEY, e-mail: mozdemir@akdeniz.edu.tr, mozdemir@gmail.com

ALTIN NOKTA YAYINLARI

Part I

Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Cilt 2 Kitabında Neler Var?

Bu dökümandaki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini

MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2

kitabında bulabilirsiniz?

Part II

Toplamlar ve Çarpımlar

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 1 $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{100\cdot 101}=?$

Örnek 2 $S=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{101\cdot 105}=?$

Örnek 3 $\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{25\cdot 28\cdot 31}$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 4 $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{21}{10^2\cdot 11^2}$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 5 *Her* $n\geq 1$ *için* $a_{n+1}=a_n\,(a_n+3)+1$ *olsun.* $a_1=1$ *olduğuna göre,*

$$S=\frac{1}{a_1+2}+\frac{1}{a_2+3}+\frac{1}{a_3+2}+\cdots+\frac{1}{a_9+2}+\frac{1}{a_{10}+1}$$

toplamını bulunuz.

Örnek 6 $S=\frac{3^1}{9^1-1}+\frac{3^2}{9^2-1}+\frac{3^4}{9^4-1}+\frac{3^8}{9^8-1}+\cdots+\frac{3^{64}}{9^{64}-1}$ *olmak üzere,*

$$S+\frac{1}{3^n-1}=\frac{1}{2}$$

olduğuna göre n kaçtır?

Örnek 7 $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+100\cdot 100!$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 8 $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=?$

Örnek 9 *Aşağıdaki faktöriyelli toplamı sadeleştiriniz.*

$$S=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\cdots+\frac{100}{98!+99!+100!}$$

Örnek 10 $\frac{1}{3^{-100}+1}+\frac{1}{3^{-99}+1}+\cdots+\frac{1}{3^{99}+1}+\frac{1}{3^{100}+1}=?$

Örnek 11 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$ *olduğuna göre,*

$$f\left(\tfrac{1}{2007}\right)+f\left(\tfrac{2}{2007}\right)+f\left(\tfrac{3}{2007}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{2006}{2007}\right)$$

toplamını hesaplayınız.

Örnek 12 $S=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{121}+\sqrt{119}}=?$

Örnek 13 *Aşağıdaki toplamı hesaplayınız.*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{26^2}+\sqrt[3]{26\cdot 27}+\sqrt[3]{27^2}}$$

Örnek 14 $f(k) = \dfrac{k+3}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+9k+18}}$ *olduğuna göre,*

$$S = f(1) + f(4) + f(7) + \cdots + f(43)$$

toplamını hesaplayınız.

Örnek 15 $\{10, 11, 12, 13, ..., 19\}$ *kümesinin her bir elemanı ile* $\{20, 21, 22, 23, ..., 29\}$ *kümesinin elemanları çarpılarak toplanırsa toplam kaç olur?*

Örnek 16 n *tane pozitif ardışık sayının toplamı* 1000 *olduğuna göre,* n*'nin alabileceği değerleri bulunuz.*

Örnek 17 100 *sayısı pozitif ardışık sayıların toplamı şeklinde kaç farklı şekilde yazılabilir?*

Örnek 18 1000*'den küçük olan ve* 2 *veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak yazılamayan kaç pozitif tamsayı vardır?* (*UMO* 2006)

Örnek 19 *A kümesi toplamı* $2m$ *olan* m *tane ardışık sayıdan ve B kümesi de toplamı* m *olan* $2m$ *tane ardışık sayıdan oluşmaktadır. A ve B kümelerinin en büyük elemanlarının arasındaki farkın mutlak değeri* 11 *ise* m *kaçtır?*

Örnek 20 3^{11} *sayısı en çok sayıda ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak yazıldığında ilk sayı kaç olur?*

Örnek 21 $1, 2, 3, ..., 2007$ *sayı dizisindeki tüm sayıların rakamlarının toplamı kaçtır?*

Örnek 22 n *sayısı rakamları toplamı* 2009 *olan bir sayı olduğuna göre,*

$$k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+9) = n$$

olacak şekilde kaç k *sayısı vardır?*

Örnek 23 *Bir kitabın sayfaları* 1,2,3,... *şeklinde numaralandırılıyor. Kitabın sayfa numaraları toplanmak istenirken yanlışlıkla bir sayfa iki kez toplanıyor ve* 2007 *sonucu bulunuyor. Kitabın* 2 *kez toplanan sayfa numarası kaçtır?*

Örnek 24 $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ *toplamının son rakamı hangi rakamlar olamaz?*

Örnek 25 *Paydası* 1991 *olan* 1*'den küçük sadeleşemeyen tüm kesirlerin toplamını bulunuz.* (*MEKSİKA M.O.* 1991)

Örnek 26 $1,\ 2+3,\ 4+5+6,\ 7+8+9+10,\ \ldots$ *şeklinde devam eden sayılardan* n*'inci grubunun toplamını hesaplayınız.* (*İSVEÇ M.O.* 1983)

Örnek 27 $\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3} + \dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4} + \dfrac{3\cdot 6}{4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{10\cdot 13}{11\cdot 12}$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 28 100 *ile* 200 *sayıları arasında* 7*'ye bölündüğünde* 5 *kalanını veren tüm sayıların toplamını hesaplayınız.*

Örnek 29 $S = 1\cdot 2 - 2\cdot 3 + 3\cdot 4 - 4\cdot 5 + \cdots + 99\cdot 100 - 100\cdot 101 = ?$

Örnek 30 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2n}$ *olduğuna göre,* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{50}$ *toplamı kaçtır?*

Örnek 31 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = ?$

Örnek 32 $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 99\cdot 100 = ?$

Örnek 33 $\left(1^2+3\cdot1+2\right)+\left(2^2+3\cdot2+2\right)+\cdots+\left(10^2+3\cdot10+2\right)=?$

Örnek 34 $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots,\underbrace{n,n,n,\ldots,n}_{n\ tane},\ldots$ *dizisinin ilk 200 teriminin toplamını bulunuz.*

Örnek 35 $11^3+12^3+\cdots+20^3$ *ifadesinin en büyük asal çarpanı kaçtır?*

Örnek 36 $1+x+x^2+x^3+x^4=0$ *ise* $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2010}=?$

Örnek 37 $3\cdot1^2,\ 5\cdot2^2,\ 7\cdot3^2,\ 9\cdot4^2,\ldots$ *dizisinin ilk n teriminin toplamı nedir?*

Örnek 38 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^{20}}=?$

Örnek 39 $S=1+2\cdot3^1+3\cdot3^2+4\cdot3^3+\cdots+11\cdot3^{10}$ *ifadesinin toplamını bulunuz.*

Bir x tamsayısının tamdeğeri, $\lfloor x\rfloor$ veya $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

Örnek 40 $\sum_{n=1}^{100}\left\lfloor\frac{3n^2+1}{n}\right\rfloor$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 41 $\sum_{n=1}^{100}\left\lfloor\frac{3n}{2}\right\rfloor$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 42 $\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\cdots+\lfloor\sqrt{99}\rfloor$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 43 $S=\frac{1}{2\lfloor\sqrt{1}\rfloor+1}+\frac{1}{2\lfloor\sqrt{2}\rfloor+1}+\frac{1}{2\lfloor\sqrt{3}\rfloor+1}+\cdots+\frac{1}{2\lfloor\sqrt{100}\rfloor+1}$ *değerini hesaplayınız.*

Örnek 44 $S=\lfloor\sqrt[3]{1}\rfloor+\lfloor\sqrt[3]{2}\rfloor+\lfloor\sqrt[3]{3}\rfloor+\cdots+\lfloor\sqrt[3]{n^3-2}\rfloor+\lfloor\sqrt[3]{n^3-1}\rfloor$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 45 $\left\lfloor\frac{-101}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{-100}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{-99}{3}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{99}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{101}{3}\right\rfloor=?$

Örnek 46 *Her* $n\in\mathbb{Z}^+$ *için* $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{4n+1}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ *eşitsizliğinden yararlanarak,* $A=\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ *toplamı için,* $\lfloor A\rfloor$ *değerini bulunuz.*

Örnek 47 $n\in\mathbb{Z}$ *için,* $f(n)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2n}{3}\right\rfloor+n$ *olmak üzere,*

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$$

değerini hesaplayınız.

Örnek 48 3^{101} *sayısının* $S=\left\lfloor\frac{3}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{3^2}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{3^3}{5}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{3^{100}}{5}\right\rfloor$ *toplamına bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 49 $S=\left\lfloor\frac{3^{20}}{3^{10}+3^0}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{3^{20}}{3^{10}+3^1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{3^{20}}{3^{10}+3^2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{3^{20}}{3^{10}+3^{20}}\right\rfloor$ *toplamının 9'a bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 50 $0,\overline{12}$ *devirli ondalık sayısının rasyonel değerini serileri kullanarak hesaplayınız.*

Örnek 51 $S=\frac{2^3+3^2}{12}+\frac{2^6+3^4}{12^2}+\frac{2^9+3^6}{12^3}+\cdots$ *serisinin değerini bulunuz.*

Örnek 52 *3'ten büyük asal böleni olmayan tüm pozitif tamsayıların çarpmaya göre terslerinin toplamını hesaplayınız.*

Örnek 53 $S = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} + \cdots$ *serisinin değerini hesaplayınız.*

Örnek 54 $S = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots$ *serisinin değerini hesaplayınız.*

Örnek 55 $S = \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+2} + \frac{1}{5^2+3} + \cdots$ *serisinin değerini bulunuz.*

Örnek 56 $S = \frac{1}{1^4+1^2+1} + \frac{2}{2^4+2^2+1} + \frac{3}{3^4+3^2+1} + \cdots$ *serisinin değerini hesaplayınız.* (*HMMT - 2005*)

Örnek 57 $S = \frac{2^1}{4^1-1} + \frac{2^2}{4^2-1} + \frac{2^4}{4^4-1} + \frac{2^8}{4^8-1} + \cdots$ *serisinin değerini bulunuz.* (*HMMT - 2005*)

Örnek 58 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+4}$ *serisinin değerini bulunuz.* (*HMMT - 2008*)

Örnek 59 $a_1 = 6$ *ve her* $n \geq 1$ *için* $a_{n+1} - 2 = a_n(2a_n+5)$ *olsun. Buna göre,*

$$S = \frac{1}{2a_1+3} + \frac{1}{2a_2+3} + \frac{1}{2a_3+3} + \cdots$$

toplamı kaçtır? (*AÜMO - 2012*)

Örnek 60 $(2+1)(2^2+1)\left(2^{2^2}+1\right)\cdots\left(2^{2^{2009}}+1\right) = 2^a - 1$ *eşitliğine göre a kaçtır?*

Örnek 61 $P = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$ *çarpımının sonucu kaçtır?*

Örnek 62 $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(100^3+1)} = ?$

Örnek 63 $T_n = 1+2+3+\cdots+n$ *ve* $P_n = \frac{T_2}{T_2-1} \cdot \frac{T_3}{T_3-1} \cdot \frac{T_4}{T_4-1} \cdots \frac{T_n}{T_n-1}$ *olmak üzere,* $P_{100} = ?$

Örnek 64 $T_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ *ve*

$$P_n = \frac{4T_2}{2(T_2-T_1)} \cdot \frac{4T_3}{3(T_3-T_2)} \cdots \frac{4T_n}{n(T_n-T_{n-1})}$$

olmak üzere, $P_{25} = ?$

Örnek 65 $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{101}\right\}$ *kümesinin elemanlarının çift sayıdaki (ikişerli, dörderli, altışarlı, ..., yüzerli) tüm çarpımlarının toplamı kaçtır?*

Örnek 66 $a,\ b,\ c \in \{0, -1, -2\}$ *olmak üzere,* $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ *şeklindeki tüm sayıların toplamını bulunuz.*

Örnek 67 $k = 1, 2, 3, \ldots, 20$ *için,* $\frac{k^3+3k^2+3k+2}{k^3+3k^2+3k}$ *sayılarının çarpımını bulunuz.*

Örnek 68 $\prod_{k=1}^{\infty} 2^{\left(-2^{-k}\right)}$ *çarpımını hesaplayınız.*

ALTIN NOKTA YAYINLARI

<u>Örnek</u> **69** $\prod\limits_{k=0}^{350}\left(k^3-350+k\right)=?$ *(HMMT - 2002)*

<u>Örnek</u> **70** $\left(4-\dfrac{2}{1}\right)\left(4-\dfrac{2}{2}\right)\left(4-\dfrac{2}{3}\right)\cdots\left(4-\dfrac{2}{50}\right)$ ***çarpımı 3'ün en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür?*** *(AÜMO - 2012)*

<u>Örnek</u> **71** $P=\left(\dfrac{1}{5}+1\right)\left(\dfrac{1}{5^2}+1\right)\left(\dfrac{1}{5^4}+1\right)\left(\dfrac{1}{5^6}+1\right)\cdots$ ***çarpımının sonucu kaçtır?***

<u>Örnek</u> **72** $S=\left(\dfrac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots+n\cdot2n\cdot4n}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots+n\cdot3n\cdot9n}\right)^{1/3}$
ifadesinin sonucunu bulunuz. (*KANADA M.O.* 1975)

<u>Örnek</u> **73** $A=1+10+10^2+\cdots+10^{97}$ ***toplamının karekökünün, virgülden sonraki 50'nci rakamı kaçtır?***

<u>Örnek</u> **74** ***Birbirinden farklı pozitif reel sayılardan oluşan*** $\{a_1,a_2,...,a_{100}\}$ ***kümesinin boş olmayan her bir alt kümesinin elemanları toplanarak*** $2^{100}-1$ ***tane toplam elde ediliyor. En az kaç farklı toplam elde edilebilir.*** (*SSCB M.O.* 1963)

<u>Örnek</u> **75** n ***tane kirişle bir çemberi en fazla kaç kısıma ayırabiliriz?***

<u>Örnek</u> **76** $a_0,a_1,...,a_n$ ***pozitif reel sayıları,*** $i=0,1,...,n$ ***için,*** $a_{n-i}=\dfrac{1}{a_i}$ ***bağıntısını sağlıyorlar ise,*** $k\in\mathbb{Z}$ ***için,***

$$\frac{1}{1+a_0^k}+\frac{1}{1+a_1^k}+\frac{1}{1+a_2^k}+\cdots+\frac{1}{1+a_n^k}$$

toplamını hesaplayınız.

<u>Örnek</u> **77 Şekilde $y=x^3$ grafiğinin birinci bölgedeki kısmı gösterilmiştir. Taralı alanların toplamına S diyelim.**
S sayısının kaç asal çapanı vardır?

<u>Örnek</u> **78** $a_n=\dfrac{n}{101}$ ***olduğuna göre,***

$$\frac{a_1^3}{1-3a_1+3a_1^2}+\frac{a_2^3}{1-3a_2+3a_2^2}+\cdots+\frac{a_{101}^3}{1-3a_{101}+3a_{101}^2}$$

toplamını hesaplayınız. (*Asya Pasifik M.O.* 2000)

<u>Örnek</u> **79** $a_1=2,\ a_2=3\ ,\ ...,\ a_{n+1}=1+a_1\,a_2...a_n\ \ (n\geq1)$ ***olarak tanımlanıyor.***

$$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\quad ve\quad P_n=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$$

olduğuna göre, $S_{101}+P_{101}$ ***toplamını hesaplayınız.***

<u>Örnek</u> **80** n ***sayısı 1'den büyük bir tamsayıyı gösterdiğine göre,***

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\right)}{n+1}>\frac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)}{n}$$

olduğunu kanıtlayınız. (*KANADA M.O.* 1998)

<u>Örnek</u> **81** $F_1=1,\ F_2=1,$ ***ve*** $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ ***şeklinde tanımlanan*** F_n ***Fibonacci dizisi için,*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{F_k}{3^k}$ ***serisinin değerini hesaplayınız.***

<u>Örnek</u> 82 $f(x)=\dfrac{2(1-x)^{2009}-2x^{2009}+1}{2}$ *ve* $x_i=\dfrac{i}{2009}$ *olduğuna göre,*

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2009})$$

toplamını hesaplayınız.

<u>Örnek</u> 83 *İlk n tane çift doğal sayının kareleri toplamı A ve ilk n tane tek doğal sayının kareleri toplamı B ise, A ile B arasındaki bağıntıyı bulunuz.*

<u>Örnek</u> 84 $f(x)=\dfrac{x^n}{x^n+(1-x)^n}$ *ve* $i=1,2,\ldots,100$ *için,* $x_i=\dfrac{i}{100}$ *ise,*

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{100})$$

toplamını hesaplayınız.

<u>Örnek</u> 85 a_n, $\sqrt{n}$ *sayısına en yakın tamsayıyı göstersin. Buna göre,*

$$S=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{420}}$$

toplamını hesaplayınız.

<u>Örnek</u> 86 $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+m+|n-m|}}=?$

<u>Örnek</u> 87 $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{6}{x^2-9}+\cdots+\dfrac{20}{x^2-100}$ *ifadesinin,*

$$\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}$$

ifadesine eşit olduğunu gösteriniz. (*SSCB M.O.* 1968)

<u>Örnek</u> 88 $S(n)$, *ilk n pozitif tamsayının toplamını göstersin. Buna göre, eğer n ve $S(n)$ sayılarının her ikisi de bir tamkare ise n sayısına fantastik sayı diyelim. Örneğin, 49 sayısı fantastik bir sayıdır, çünkü,*

$$49=7^2 \quad \text{ve} \quad S(49)=1+2+3+\cdots+49=1225=35^2$$

sayıları tamkaredir. 49 sayısından büyük başka bir fantastik sayı bulunuz.

<u>Örnek</u> 89 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$ *olsun. Bu durumda,*
$S=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots$ *serisinin değerini hesaplayınız.*

<u>Örnek</u> 90 $\dfrac{-3}{1!}+\dfrac{7}{2!}-\dfrac{13}{3!}+\dfrac{21}{4!}-\dfrac{31}{5!}+\cdots+\dfrac{1994^2+1994+1}{1994!}$ *toplamını hesaplayınız.* (*KANADA M.O.* 1994)

<u>Örnek</u> 91 *Her k pozitif tamsayısı,* $0\le f_i\le i$ *ve* $0<f_m$ *olmak üzere,*

$$k=1!\cdot f_1+2!\cdot f_2+3!\cdot f_3+\cdots+m!\cdot f_m$$

biçiminde tek türlü yazılabilir. Buradaki, $(f_1,f_2,f_3,\ldots,f_m)$ *ifadesine k sayısının faktöriyel taban açılımı diyelim. Buna göre,* $(f_1,f_2,f_3,\ldots,f_n)$,

$$16!-32!+48!-64!+\cdots+1968!-1984!+2000!$$

ifadesinin faktöriyel taban açılımı olduğuna göre,

$$f_1-f_2+f_3-f_4+\cdots+(-1)^{n+1}f_n=?$$

ifadesinin değeri kaçtır? (*AIME* 2000)

1 ÇÖZÜMLÜ TEST

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+7x+12}$ olmak üzere, $f(1)+f(2)+\cdots+f(2007)$ toplamını aşağıdakilerden hangisiyle çarparsak bir tamsayı elde ederiz.
A) 8044 B) 2007 C) 2008 D) 4022 E) 1011

2. $100 \cdot 100! + 101 \cdot 101! + \cdots + 2007 \cdot 2007!$ sayısının sondan kaç basamağı sıfırdır?
A) 101 B 500 C) 24 D) 476 E) 26

3. n tane pozitif ardışık sayının toplamı 200 olduğuna göre, n kaç farklı değer olabilir?
A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 0

4. $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+20)$ toplamını hesaplayınız.
A) 1620 B 1560 C) 1540 D) 1454 E) 1600

5. $1+2\cdot 3^1+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+11\cdot 3^{10}$ toplamının 4 katı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) $7\cdot 3^{12}+1$ B) $7\cdot 3^{11}+1$ C) $7\cdot 3^{11}-1$ D) $7\cdot 3^{12}-1$ E) Hiçbiri

6. $\dfrac{2}{2!}+\dfrac{7}{3!}+\dfrac{14}{4!}+\cdots+\dfrac{n^2-2}{n!}$ toplamına aşağıdakilerden hangisini eklersek, sonuç bir tamsayı olur?
A) $\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{(n-1)!}$ B $1-\frac{1}{(n-1)!}$ C) $2-\frac{1}{(n-1)!}$ D) $\frac{n+2}{n!}$ E) $\frac{1}{n!}$

7. $\lfloor x \rfloor$, x sayısının x'den büyük olmayan en büyük tam değerini gösterdiğine göre,

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}$$

için, $\lfloor S \rfloor$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) 13 B) 14 C) 10 D) 9 E) 8

8. $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$ ve $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{101} = A$ olduğuna göre,
$T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{100}$ toplamının A cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?
A) $200-A$ B) $202-A$ C) $202-2A$ D) $200-2A$ E) $200+A$

9. $\lfloor x \rfloor$, x sayısının x'den büyük olmayan en büyük tamdeğerini gösterdiğine göre,

$$S = \sum_{n=1}^{999} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$$

için $\lfloor S \rfloor = ?$
A) 6 B) 50 C) 9 D) 5 E) 8

10. Bir kitabın sayfalarının numaralandırılmasında 999 rakam kullanılmıştır. Buna göre kitabın sayfa sayısı kaçtır?
A) 432 B) 451 C) 347 D) 369 E) 455

11. $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ olduğuna göre,

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi^2}{12}$ B) $\frac{\pi^2}{24}$ C) $\frac{\pi^2}{6}$ D) $\frac{5\pi^2}{24}$ E) $\frac{\pi^2}{8}$

12. $x=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots$ olduğuna göre, $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots$ ifadesinin x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{8x}{7}$ B) $\frac{7x}{8}$ C) $\frac{5x}{12}$ D) $\frac{x}{12}$ E) $\frac{7x}{12}$

13. $1!\left(1^2+3\cdot1+1\right)+2!\left(2^2+3\cdot2+1\right)+3!\left(3^2+3\cdot3+1\right)+\cdots+100!\left(100^2+3\cdot100+1\right)$ toplamını hesaplayınız.

A) $103\cdot101!-3$ B) $102!-1$ C) $102\cdot101!$ D) $103!-101!$ E) Hiçbiri

14. $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{1}{11\cdot12\cdot13}=?$

A) $\frac{20}{442}$ B) $\frac{19}{312}$ C) $\frac{25}{312}$ D) $\frac{20}{425}$ E) $\frac{25}{442}$

15. 500'den küçük olan ve 2 veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak yazılamayan kaç pozitif tamsayı vardır?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 1 E) 3

16. Bir kitabın sayfaları $1, 2, 3, \ldots$ şeklinde doğal sayılarla numaralandırılıyor. Kitabın sayfa numaraları toplanmak istenirken yanlışlıkla bir sayfa iki kez toplanıyor ve 2007 sonucu bulunuyor. Kitabın 2 kez toplanan sayfa numarası kaçtır?

A) 44 B) 47 C) 51 D) 54 E)57

17. $1+2+3+\cdots+2009=a$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+2009^2=b$ ve $1^3+2^3+3^3+\cdots+2009^3=c$ olduğuna göre $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+2009\cdot2010\cdot2011$ toplamının a, b ve c cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2a+3b+c$ B) $a+2b+3c$ C) $3a+2b+c$
D) $2a+3b+c$ E) $3a+b+2c$

18. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=a$ ise $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ ifadesinin a türünden değeri nedir?

A) $2a+1$ B) $a-1$ C) $a+1$ D) a E) $2a$

19. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=?$

A) $\frac{n}{n+1}$ B) $\frac{2n}{n+1}$ C) $\frac{n}{n+2}$ D) $\frac{2n-1}{n+1}$ E) $\frac{2n+1}{n+1}$

20. $(1-\frac{4}{1})(1-\frac{4}{9})(1-\frac{4}{25})\cdots(1-\frac{4}{625})=?$

A) $\frac{-1}{25}$ B) $\frac{-27}{25}$ C) $\frac{-27}{50}$ D) $\frac{-27}{23}$ E) $\frac{-23}{25}$

21. $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\cdots+\frac{2}{399}$ toplamını hesaplayınız.

A) $\frac{21}{20}$ B $\frac{1}{399}$ C) $\frac{398}{399}$ D) 1 E) $\frac{20}{21}$

22. $1\cdot 3+3\cdot 7+5\cdot 11+\cdots+21\cdot 43=?$
A) 3663 B 3893 C) 4002 D) 3999 E) 3666

23. 10 tane pozitif tamsayıdan herhangi dokuzunun toplamları 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94 ve 95 olacak şekilde 9 farklı sayı olduğuna göre bu sayıların en küçüğü kaçtır?
A) 5 B) 10 C) 6 D) 11 E) 9

24. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ olduğuna göre,

$$A=f\left(\tfrac{1}{100}\right)+f\left(\tfrac{2}{100}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{99}{100}\right)+f\left(\tfrac{100}{100}\right)$$
$$B=f\left(\tfrac{100}{100}\right)+f\left(\tfrac{100}{99}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{100}{2}\right)+f\left(\tfrac{100}{1}\right)$$

ise $A+B$ toplamını hesaplayınız.
A) $\dfrac{100}{101}$ B) 200 C) 199 D) 100 E) 101

25. $P=(1+\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{3^2})\cdot(1+\frac{1}{3^4})\cdots(1+\frac{1}{3^{2^n}})=?$
A) $\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}})$ B) $\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^n}})$ C) $\frac{2}{3}(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}})$
D) $\frac{1}{3^{2^{n+1}}}$ E) Hiçbiri

26. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+2)}=?$
A) $\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{(n+3)!}$ B) $1-\dfrac{1}{(n+2)!}$ C) $\dfrac{1}{(n+2)!}$
D) $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ E) $\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{(n+2)!}$

27. $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{441\sqrt{440}+440\sqrt{441}}=?$
A) $\dfrac{\sqrt{441}}{\sqrt{443}}$ B) $\dfrac{21}{20}$ C) $\dfrac{20}{21}$ D) $\dfrac{\sqrt{441}}{21}$ E) $\dfrac{\sqrt{441}}{20}$

28. $4\cdot 1^2,\ 7\cdot 2^2,\ 10\cdot 3^2,\ 13\cdot 4^2,\ldots$ dizisinin ilk 10 teriminin toplamını hesaplayınız.
A) 6435 B) 9460 C) 9480 D) 9290 E) 9215

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{125}\left\lfloor\frac{3n}{5}\right\rfloor$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 4675 B) 4750 C) 4446 D) 4444 E) 4664

30. $1;(3,5);(7,9,11);(13,15,17,19);\ldots$ sayı dizisinin 10'uncu grubunun sayılarının toplamı kaçtır?
A) 1011 B) 910 C) 890 D) 990 E) 1000

31. $-1+5+15+29+\cdots+239=?$
A) 900 B) 979 C) 798 D) 826 E) 912

32. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{100}}=?$
A) $\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{100}$ C) $\sqrt[3]{100}-1$ D) $\sqrt[3]{10}$ E) $\sqrt[3]{10}-1$

33. $1\underbrace{00...0}_{n \text{ tane}}6$ sayısının ardışık sayıların küplerinin toplamı olarak yazılabilmesi için n sayısı hangi formda olmalıdır?
A) $12k+1$ B) $3k+2$ C) $4k$ D) $3k$ E) Yazılamaz

34. n sayısı rakamları toplamı 2008 olan bir sayı olduğuna göre,

$$k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+9)=n$$

olacak şekilde bir k pozitif tamsayısının var olması için n en az kaç basamaklı olmalıdır?
A) 226 B) 223 C) 230 D) 224 E) Hiçbiri

35. 100 tane sayı bir çember etrafına yazılıyor. Bu sayıların toplamı 100'dür. Herhangi komşu 6 sayının toplamı 6'dan büyük olmadığına göre ve ilk sayı 6 olduğuna göre 50'inci sayı kaçtır?
A) 6 B) 4 C) -4 D) -6 E) 2

36. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\cdots$ toplamını hesaplayınız.
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{-1}{3}$ E) Hiçbiri

37. $x>0$ ise $\frac{1}{1+x}-\frac{1-x}{(1+x)^2}+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^3}-\frac{(1-x)^3}{(1+x)^4}+\cdots$ toplamını hesaplayınız.
A) $\frac{1}{2x}$ B) $\frac{1}{x}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $1-\frac{1}{x}$ E) $1+\frac{1}{2x}$

38. k, $1,2,...,n$ sayılarından biri olmak üzere, $(1+2+\cdots+n)+k=1986$ eşitliği sağlanıyorsa, k aşağıdakilerden hangisine eşittir? (AIME 1986)
A) 39 B) 37 C) 35 D) 34 E) 33

39. Toplamları 3^{11} olacak şekilde en fazla kaç ardışık pozitif tamsayı vardır? (AIME 1987)
A) $2\cdot 3^5$ B) 3^6 C) 3^5 D) $3^2 2^3$ E) Hiçbiri

40. S_n, 1 ile 10^n (dahil) arasındaki tamsayıların sıfırdan farklı olan rakamlarının çarpmaya göre terslerinin toplamını göstersin. S_n sayısının tamsayı olabilmesi için n en küçük kaç olmalıdır? (AIME 2006)
A) 64 B) 65 C) 60 D) 61 E) Hiçbiri

41. A kümesinde toplamı $2m$ olan m tane ardışık sayı vardır. B kümesinde de toplamı m olan $2m$ tane ardışık sayı vardır. A ve B kümelerinin en büyük elemanlarının arasındaki farkın mutlak değeri 99 ise m kaçtır? (AIME 2004)
A) 201 B) 99 C) 199 D) 217 E) Hiçbiri

42. $x+xr+xr^2+\cdots=2005$ ve $x^2+x^2r^2+x^2r^4+\cdots=20050$ olsun. m ve n aralarında asal tamsayılar olmak üzere, $r=\frac{m}{n}$ ise, $m+n$ kaçtır? (AIME 2005)
A) 2801 B) 455 C) 802 D) 3401 E) Hiçbiri

43. m ve n, 1000 sayısının aralarında asal olan pozitif bölenleri olmak üzere, $\frac{m}{n}$ şeklindeki tüm sayıların toplamı S ise, $\left\lfloor \frac{S}{10} \right\rfloor$ tamdeğerini hesaplayınız. (AIME 2000)
A) 280 B) 248 C) 432 D) 342 E) Hiçbiri

44. $|x|<1$ olmak üzere $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+n\cdot x^{n-1}+\cdots$ toplamının $\sqrt{5}$ olması için, x aşağıdaki değerlerden hangisi olmalıdır?

A) $1-\sqrt[4]{5}$ B) $1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$ D) $\sqrt[4]{5}$ E) Hiçbiri

45. $S=1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots$ toplamını hesaplayınız.

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{9}{16}$ C) $\dfrac{3}{16}$ D) $\dfrac{-3}{4}$ E) $\dfrac{4}{3}$

46. $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{101^2}}$ olduğuna göre, $\dfrac{101}{100}S$ kaçtır?

A) 100 B) 101 C) 102 D) 99 E) Hiçbiri

47. $n=0,1,2,3,...,200$ için, $\sqrt{10^4+n+1}+\sqrt{10^4+n}$ ifadelerinin çarpmaya göre terslerinin ortalaması, m ve n aralarında asal olmak üzere, $\dfrac{m}{n}$'ye eşit ise, $m+n$ toplamı kaçtır?

A) 100 B) 101 C) 201 D) 200 E) Hiçbiri

48. $S=\dfrac{1}{100^1-100^{-1}}+\dfrac{1}{100^2-100^{-2}}+\dfrac{1}{100^4-100^{-4}}+\cdots+\dfrac{1}{100^{2^n}-100^{-2^n}}+\cdots$ serisinin değerini bulunuz.

A) $\dfrac{1}{99}$ B) $\dfrac{1}{100}$ C) $\dfrac{1}{101}$ D) 1 E) Hiçbiri

49. $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$ olduğuna göre, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+9}$ toplamını hesaplayınız.

A) $\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{25}{9}$ B) $\dfrac{\pi^2}{6}-1$ C) $\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{16}{4}$ D) $\dfrac{\pi^2}{6}-2$ E) Hiçbiri

50. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$ olduğuna göre ve $f(n)$ fonksiyonu, n sayısının 2 tabanına göre yazılışındaki 1 rakamlarının sayısını belirtmek üzere,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n(n+1)}$$

toplamını hesaplayınız.

A) $\ln 2$ B) $\ln 2-1$ C) $\ln 2-2$ D) $2\ln 2$ E) Hiçbiri

51. $a_k=2k-1$ ve

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\sqrt{a_{k+1}}+a_{k+1}\sqrt{a_k}}$$

olsun. $S(n)\geq\dfrac{1004}{2009}$ koşulunu sağlayan en küçük n sayısı aşağıdakilerden hangisine tam bölünmez?

A) 251 B) 67 C) 15 D) 16 E) 2008

52. $a_1=a_2=1$ ve $n\geq 1$ için, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ biçiminde tanımlanan (a_n) sayı dizisi veriliyor. (Fibonacci Dizisi.) Buna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^{n+1}}$$

serisinin değeri aşağıdakilerden hangisidir? (Harvard MIT Math. Tournament 2006)

A) $\dfrac{1}{9}$ B) $\dfrac{1}{10}$ C) $\dfrac{1}{11}$ D) $\dfrac{1}{8}$ E) Hiçbiri

Mustafa Özdemir - 2014

2 TÜBİTAK OLİMPİYAT SORULARI (Toplamlar ve Çarpımlar)

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

1. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1996^2}\right)$ çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) $\dfrac{1997}{1996}$ B) $\dfrac{3\cdot 1997}{4\cdot 1996}$ C) $\dfrac{2\cdot 1995}{3\cdot 1996}$ D) $\dfrac{1997}{2\cdot 1996}$ E) $\dfrac{1996}{2\cdot 1995}$

UİMO - 1996

2. 1'den n'ye kadar olan sayıların küplerinin toplamı için,

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

eşitliği doğrudur. Buna göre, 1'den 101'e kadar olan tek sayıların küplerinin toplamı, yani $1^3+3^3+5^3+\cdots+101^3$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) $5201\cdot 10201$ B) $2601\cdot 10201$ C) $2601\cdot 5201$ D) 2061^2 E) $2500\cdot 2601$

UİMO - 1996

3. $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,...$ dizisinin ilk 100 teriminin toplamı kaçtır?
A) 755 B) 845 C) 927 D) 945 E) Hiçbiri

UİMO - 1999

4. Aşağıdakilerden hangisi 51 ardışık tamsayının toplamı olamaz?
A) -255 B) -102 C) 0 D) 850 E) 5100

UİMO - 1998

5. Bir kitabın sayfalarını numaralamak için toplam olarak 2933 rakam kullanılmıştır. Bu kitap kaç sayfadır?
A) 1015 B) 1100 C) 1105 D) 1001 E) 1010

UİMO - 2000

6. Kitabın sayfa numaralarının toplamını bulmak isteyen bir öğrenci bir sayfanın numarasını dalgınlıkla iki kez hesaba katıyor ve sonuçta 2000 buluyor. İki kez hesaba katılan sayfa numarası nedir?
A) 66 B) 67 C) 45 D) 55 E) 47

UİMO - 2000

7. $1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2$ sayısının son rakamı kaçtır?
A) 2 B) 0 C) 7 D) 1 E) 4

UİMO - 2004

8. $6+13+20+\cdots+1994+2001$ ifadesinin başından en az kaç terimi attığımız zaman, kalan terimlerin toplamı 17'ye bölünür?
A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) Hiçbiri

UİMO - 2001

9. $n\geq 2$ olmak üzere, $(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})<\frac{1001}{2001}$ sağlayan en küçük n tamsayısı kaçtır?
A) 1999 B) 2000 C) 2001 D) 2002 E) Hiçbiri

UİMO - 2001

10. 3^n nin, $(100^2-99^2)(99^2-98^2)\cdots(3^2-2^2)(2^2-1^2)$ çarpımını bölmesini sağlayan en büyük n tamsayısı kaçtır?
A) 49 B) 53 C) 97 D) 103 E) Hiçbiri

UİMO - 2007

11. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, S_n ile $\{1,2,...,n\}$ kümesini gösterelim. S_n kümesinin içerdikleri elemanların toplamları birbirine eşit olan iki ayrık altkümeye ayrılabildiğini kabul edelim. Bu durumda, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) n, $4k+1$ biçiminde olmak zorundadır.
B) n, $4k+2$ biçiminde olabilir.
C) n, $4k$ biçiminde olmak zorundadır.
D) n, ya $4k$ ya da $4k+3$ biçiminde olmak zorundadır.
E) İstenen koşulu sağlayan hiçbir n sayısı yoktur.

UMO - 1994

12. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{99}{100!}$ toplamı neye eşittir?
A) $1+\frac{99}{100!}$ B) $\frac{101}{100}$ C) $1-\frac{99}{100}$ D) 1 E) $1-\frac{1}{100!}$

UMO - 1995

13. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$n+(n+1)+\cdots+(n+m)=1000$$

eşitliğini sağlayan kaç (m,n) sıralı ikilisi vardır?
A) 10 B) 5 C) 1 D) 2 E) 3

UMO - 1996

14. $T=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{1996\sqrt{1997}+1997\sqrt{1996}}$
toplamı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
A) $\frac{43}{44}<T<\frac{44}{45}$ B) $T=\frac{1995}{1996\cdot 1997}$ C) $\frac{43}{176}<T<\frac{43}{88}$
D) $T=\frac{1996}{1997\cdot 1998}$ E) Hiçbiri

UMO - 1997

15. $S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2001^2}+\frac{1}{2002^2}$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
A) $\frac{5}{2}\le S<3$ B) $1\le S<\frac{4}{3}$ C) $\frac{4}{3}\le S<2$
D) $2\le S<\frac{7}{3}$ E) $\frac{7}{3}\le S<\frac{5}{2}$

UMO - 2002

16. $\sum\limits_{n=1}^{9}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) $\frac{293}{53}$ B) $\frac{189}{110}$ C) $\frac{179}{120}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{12}$

UMO - 1996

17. $1\cdot 2003+2\cdot 2002+\cdots+2001\cdot 3+2002\cdot 2+2003\cdot 1$ sayısının kaç asal böleni vardır?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

UMO - 2003

18. $A=\frac{2^2+3\cdot 2+1}{3!\cdot 4!}+\frac{3^2+3\cdot 3+1}{4!\cdot 5!}+\frac{4^2+3\cdot 4+1}{5!\cdot 6!}+\cdots+\frac{10^2+3\cdot 10+1}{11!\cdot 12!}$
toplamı için, $11!\cdot 12!\cdot A$ sayısını 11'e bölünce kalan nedir?
A) 10 B) 8 C) 5 D) 1 E) 0

UMO - 2008

19. Matematik öğretmeni, tahtanın soluna 1, sağına 2 yazıyor. Birinci öğrenci bu sayıların arasına toplamları olan 3 sayısını yazıyor.İkinci öğrenciden itibaren sırası gelen her öğrenci yine tahtada ardışık yazılı tüm sayı ikilileri için, bunların arasına toplamlarını yazıyor. Yedinci öğrenci de işlemlerini bitirdikten sonra, tahtada yazılı tüm sayıların toplamı kaç olur?
A) 3192 B) 3216 C) 3282 D) 3312 E) 3366

UMO - 2006

20. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ve a_6 sayıları $\{-1, 0, 1\}$ kümesinin elemanları olmak üzere,

$$a_1 \cdot 5^1 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + a_4 \cdot 5^4 + a_5 \cdot 5^5 + a_6 \cdot 5^6$$

ifadelerine bakalım. Bu ifadelerin kaç tanesi negatif değer alır?

A) 121 B) 224 C) 275 D) 364 E) 375

UMO - 2008

21. $f(x) = \dfrac{x^5}{5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1}$ ve $1 \leq i \leq 2009$ için, $x_i = \dfrac{i}{2009}$ ise, $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2009})$ toplamı kaçtır?

A) 2009 B) 1005 C) 1010 D) 1000 E) 2010

UMO - 2009

22. Her $0 \leq i \leq 17$ için, a_i sayısı -1, 0 veya 1 olmak üzere,

$$a_0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 \cdots + a_{16} 2^{16} + a_{17} 2^{17} = 2^{10}$$

eşitliğini sağlayan kaç $(a_0, a_1, ..., a_{17})$ on sekizlisi vardır?

A) 1 B) 7 C) 4 D) 8 E) 9

UMO - 2009

23. $1^4 + 2^4 + \cdots + 2011^4$ sayısının 16 ile bölümünden kalan nedir?

A) 14 B) 11 C) 8 D) 5 E) 2

UİMO - 2011

24. $n \geq 2012$ olmak üzere, $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$ sayısının 10 ile bölünmesini sağlayan en küçük n tamsayısı nedir?

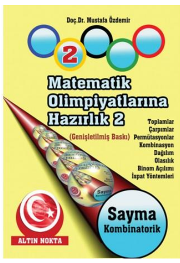
A) 2012 B) 2013 C) 2014 D) 2015 E) 2016

UMO - 2012

25. $N = \left\lfloor \dfrac{2}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2^2}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2^3}{5} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \dfrac{2^{2009}}{5} \right\rfloor$ ise 2^{2010} sayısının N'ye bölümünden kalan kaçtır?

A) 5034 B) 5031 C) 5024 D) 5028 E) 5032

UMO - 2010



3 Akdeniz Üniversitesi Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı Soruları (Toplamlar)

Bu bölümdeki soruların çözümlerini ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATLARI kitabında bulabilirsiniz?

1. $S = 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \cdots + 10 \cdot (10!)$ sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $11! - 1$ B) $11! + 9$ C) $12! - 1$ D) $12! + 9$ E) $10 \cdot 11! - 1$

AÜMO - 1996

2. $T = 1! + 2! + 3! + \cdots + 1997! + 1998!$ toplamının son iki basamağındaki rakamların toplamı kaçtır?

A) 13 B) 9 C) 6 D) 4 E) Hiçbiri

AÜMO - 1998

3. $1, 2, 3, 4, ..., 19999$ sonlu dizisinin ardışık kaç teriminin toplamı 13678'dir?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

AÜMO - 1999

4. 369 sayısı bir kaç ardışık doğal sayının toplamı olarak kaç farklı biçimde yazılabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

AÜMO - 2000

5. $x = 11^2 - 12^2 + 13^2 - 14^2 + 15^2 - \cdots - 110^2 + 111^2$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 6271 B) 6241 C) 6251 D) 6231 E) 6261

AÜMO - 2000

6. 50 yapraklı bir kitabın sayfaları 1, 2, 3, ..., 99, 100 sayıları ile numaralandırılmıştır. Bu kitaptan bir kaç yaprak koparılıp atıldıktan sonra, geriye kalan sayfaların numaralar toplamı 4946 olmuştur. Bu durumda, en fazla kaç yaprak koparılmıştır?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 7 E) 6

AÜMO - 2002

7. $1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99$ ifadesinde en az kaç "+" işareti "−" işareti ile değiştirilmelidir ki, sonuç 700'e eşit olsun?

A) 9 B) 11 C) 8 D) 7 E) 10

AÜMO - 2003

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$ olmak üzere,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(124) + f(125) = A$$

denirse, $2A - 4$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt[3]{123}$ B) $\sqrt[3]{125}$ C) $\sqrt[3]{124}$ D) $\sqrt[3]{127}$ E) $\sqrt[3]{126}$

AÜMO - 2004

9. x, y ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $1 < \dfrac{x}{y} < 2$ ve $2 < \dfrac{y}{n} < 3$ koşullarını sağlayan (x, y) ikililerinin sayısı 99 olduğuna göre, n sayısı kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 6 D) 9 E) 8

AÜMO - 2004

10. Bir x reel sayısı için, $\lfloor x \rfloor$ ile, x'ten büyük olmayan ve x'e en yakın tamsayıyı; $\lfloor x \rfloor^*$ ile de, x'ten küçük olmayan ve x'e en yakın tamsayıyı gösterelim. (Örneğin, $[5,3] = 5$ ve $[5,3]^* = 6$'dır.) Buna göre,

$$\sum_{k=1}^{100} \left(\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor^* \right)$$

toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1300 B) 1310 C) 1320 D) 1330 E) 1340

AÜMO - 2007

11. $A = 1!\left(1^2+3\cdot 1+1\right)+2!\left(2^2+3\cdot 2+1\right)+\cdots+222!\left(222^2+3\cdot 222+1\right)$ toplamının 2007'ye bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 3 C) 1003 D) 2004 E) 2006

AÜMO - 2007

12. $A = \dfrac{3^4+3^2+1}{3^7-3}+\dfrac{4^4+4^2+1}{4^7-4}+\cdots+\dfrac{10^4+10^2+1}{10^7-10}$ olmak üzere, $A+\dfrac{1}{220}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{1}{10}$ D) $\dfrac{1}{12}$ E) $\dfrac{1}{14}$

AÜMO - 2007

13. Bir sayı kümesinin elemanlarının toplamına bu kümenin "ağırlığı" diyelim. Örneğin, $\{3,5,7\}$ kümesinin "ağırlığı" $3+5+7=15$'tir. $\{1,3,5,...,17,19\}$ kümesinin tüm altkümelerinin "ağırlıkları" toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 51200 B) 97280 C) 41472 D) 102400 E) 25600

AÜMO - 2007

14. Bir düzlem üzerindeki 20 doğru ve 1 çember bu düzlemi en fazla kaç parçaya bölebilir?

A) 241 B) 251 C) 261 D) 271 E) 281

AÜMO - 2007

15. $a, b, c, d, e \in \{0,-1\}$ olmak üzere,

$$2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\cdot 11^e$$

şeklindeki tüm sayıların toplamı sadeleşmeyen kesir biçiminde yazıldığında, bu kesirin payı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1151 B) 1152 C) 1153 D) 1154 E) 1155

AÜMO - 2007

16. $f(x) = \dfrac{1}{4^x+2}$ fonksiyonu verilsin. 1111'den küçük ve 1111 ile aralarında asal olan pozitif k tamsayıları için,

$$a_k = f\left(\frac{k}{1111}\right)+f\left(\frac{1111-k}{1111}\right)$$

sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 500 B) 800 C) 600 D) 400 E) 1000

AÜMO - 2008

17. $|x|<1$ için $1+x+x^2+x^3+\cdots = \dfrac{1}{1-x}$ formülünden yararlanarak,

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\left(\frac{1}{2}\right)^7+6\left(\frac{1}{2}\right)^9+7\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots$$

sonsuz toplamını hesaplayınız.

A) $\dfrac{11}{9}$ B) $\dfrac{13}{9}$ C) $\dfrac{14}{9}$ D) $\dfrac{16}{9}$ E) $\dfrac{17}{9}$

AÜMO - 2008

18. $A = \dfrac{\sqrt{1^2\cdot 3^2+8\cdot 1^2-1}}{1\cdot 3}+\dfrac{\sqrt{3^2\cdot 5^2+8\cdot 2^2-1}}{3\cdot 5}+\dfrac{\sqrt{5^2\cdot 7^2+8\cdot 3^2-1}}{5\cdot 7}+$
$\cdots+\dfrac{\sqrt{23^2\cdot 25^2+8\cdot 12^2-1}}{23\cdot 25}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 12,12 B) 12,24 C) 12,32 D) 12,48 E) 12,54

AÜMO - 2009

ALTIN NOKTA YAYINLARI

19. $S = \dfrac{10}{10^4+10^2+1} + \dfrac{11}{11^4+11^2+1} + \dfrac{12}{12^4+12^2+1} + \cdots + \dfrac{100}{100^4+100^2+1}$ ise, $2S + \dfrac{1}{10101}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{1}{259}$ B) $\dfrac{1}{39}$ C) $\dfrac{1}{111}$ D) $\dfrac{1}{91}$ E) $\dfrac{1}{101}$

AÜMO - 2010

20. $\dfrac{\sqrt{1\cdot 2}}{2009} + \dfrac{\sqrt{2\cdot 3}}{2009} + \dfrac{\sqrt{3\cdot 4}}{2009} + \cdots + \dfrac{\sqrt{2009\cdot 2010}}{2009}$ sayısının ondalık yazılımında virgülden sonraki ilk basamaktaki rakam kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 3 D) 9 E) 0

AÜMO - 2010

21. a ve b pozitif sayılar olmak üzere, $a_1 = \dfrac{1}{a}$, $a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_1a_2 + 1$, ..., $a_{100} = a_1a_2...a_{99} + 1$ ve $a_1a_2...a_{99}a_{100} = \dfrac{1}{b}$ ise,

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}}$$

toplamının a ve b cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a+b$ B) $2a+b$ C) $2a-b$ D) $a-b$ E) $a-2b$

AÜMO - 2010

22. Farklı olmaları gerekmeyen 100 reel sayıdan oluşan bir kümede, her sayı, geriye kalan 99 sayının toplamının $\dfrac{1}{7}$'sinden büyük olsun. Bu kümedeki negatif sayıların sayısı en az kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 7 D) 9 E) 10

AÜMO - 2010

23. $\left(4-\dfrac{2}{1}\right)\left(4-\dfrac{2}{2}\right)\left(4-\dfrac{2}{3}\right)\cdots\left(4-\dfrac{2}{50}\right)$ çarpımı 3'ün en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2

AÜMO - 2012

24. $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $1 \le m < n \le 25$ olmak üzere, elde edilebilecek tüm mn çarpımlarının toplamının 9'a bölümünden kalan kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

AÜMO - 2011

25. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ ve her $k \ge 1$ için, $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ şeklinde tanımlanmış $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi veriliyor.

$$S = \frac{1}{2^1a_0}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{2^2a_1}\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \frac{1}{2^k a_{k-1}}\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right) + \cdots$$

sonsuz toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{7}$ C) $\dfrac{1}{6}$ D) $\dfrac{1}{5}$ E) $\dfrac{2}{11}$

AÜMO - 2011

26. $a_1 = 6$ ve her $n \ge 1$ için $a_{n+1} - 2 = a_n(2a_n + 5)$ olsun. Buna göre,

$$S = \frac{1}{2a_1+3} + \frac{1}{2a_2+3} + \frac{1}{2a_3+3} + \cdots$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{1}{12}$ B) $\dfrac{1}{16}$ C) $\dfrac{1}{18}$ D) $\dfrac{1}{10}$ E) $\dfrac{1}{14}$

AÜMO - 2012

27. $100^2+1, 100^2+2, 100^2+3, ..., 102^2-2, 102^2-1, 102^2$ sayılarından 100'e bölünenlerin toplamının, kaç pozitif çift böleni vardır?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 18 E) 27

AÜMO - 2013

28. $f(x)$ fonksiyonu, x sayısının basamak sayısını göstermek üzere,

$$f(a) + f\left(a^2\right) + f\left(a^3\right) + f\left(a^4\right) + \cdots + f\left(a^{20}\right)$$

toplamı en fazla 2730 olabiliyorsa, a sayısı kaç basamaklıdır?

A) 10 B) 14 C) 12 D) 11 E) 13

AÜMO - 2013

29. $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 - 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 - 9^2 - 10^2 + \cdots + 101^2 + 102^2 + 103^2 - 104^2 - 105^2$ toplamının 25'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

AÜMO - 2014

30. $S = \sum_{k=0}^{9} \left(\left\lfloor \dfrac{3^{20}}{3^{10} + 3^k} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{3^{20}}{3^{10} + 3^{20-k}} \right\rfloor \right)$ toplamının 9'a bölümünden kalan kaçtır? (Burada, $\lfloor x \rfloor$ ifadesi, x sayısının tamdeğerini göstermektedir).

A) 8 B) 0 C) 4 D) 6 E) 3

AÜMO - 2014

Part III
Kombinatorik

4 Kümeler

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 92 $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ *kümesinin, eleman sayısı tek sayı olan kaç alt kümesi vardır?*

Örnek 93 $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ *kümesinin kaç altkümesinin elemanları çarpımı tek sayıdır? (Örneğin,* $\{1, 3, 5\}$ *altkümesinin elemanları çarpımı* $1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$ *tektir.)*

Örnek 94 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *kümesinin tüm alt kümelerindeki tüm elemanların toplamı kaçtır?*

Örnek 95 $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ *kümesinin* 10 *elemanlı bir altkümesi* B *olsun.* B *kümesinin elemanları toplamı kaç farklı sayı olabilir?*

Örnek 96 *Bir sayı kümesinin elemanlarının toplamına bu kümenin "özdeğeri" diyelim. Örneğin,* $\{1, 3, 5\}$ *kümesinin "özdeğeri"* $1 + 3 + 5 = 9$*'dur.* $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ *kümesinin tüm altkümelerinin "özdeğerleri" toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*

Örnek 97 *Bir pozitif tamsayı kümesindeki sayılar büyükten küçüğe sıralanıyor. Sonra, ilk baştan itibaren sayıların işaretleri sırasıyla bir pozitif, bir negatif olacak şekilde işaretlenerek toplanıyor. Bulunan bu değere, bu kümenin gerçek değeri diyelim. Örneğin,* $A = \{3, 5, 2, 1\}$ *kümesi için,* $5 - 3 + 2 - 1 = 3$ *olur. Buna göre,* $T = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ *kümesinin bütün altkümelerinin gerçek değerlerinin toplamı kaçtır?*

Örnek 98 *Pozitif tamsayılardan oluşan ve elemanlarının tamamı* 50*'den küçük olan bir kümenin, herhangi iki elemanının toplamı bu kümede olmadığına göre bu kümenin eleman sayısı en çok kaç olabilir?*

Örnek 99 $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ *kümesinin* 3 *elemanlı altkümelerinin kaç tanesinde, altkümenin elemanları bir aritmetik dizi oluşturur?*

Örnek 100 $\{1, 2, 3, ..., 24, 25\}$ *kümesinin* n *elemanlı bir altkümesinde, herhangi iki elemanın farkı tamkare değilse,* n *sayısı en fazla kaç olabilir?*

Örnek 101 *Üç elemanlı tüm altkümelerinin elemanları toplamı asal olan ve asal sayılardan oluşan bir kümenin; eleman sayısı en fazla kaç olabilir?*

Örnek 102 $\{16, 17, 18, ..., n\}$ *kümesinin farklı* 15 *elemanı* $a_1, a_2, ..., a_{15}$ *seçiliyor. Bu* 15 *elemanın,* a_k *sayısı* k *sayısının bir katı olacak şekilde olması için,* n *en küçük kaç olmalıdır?*

Örnek 103 $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ *kümesinin, herhangi iki elemanının toplamı* 11*'e bölünmeyen bir* B *altkümesi en fazla kaç elemanlı olabilir?*

Örnek 104 $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 99, 100\}$ *kümesinin herhangi iki elemanı arasındaki fark* 11 *olmayacak şekilde seçilen altkümesinin eleman sayısı en fazla kaç olur?*

Örnek 105 $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 999, 1000\}$ *kümesinin herhangi iki elemanı arasındaki fark* 5 *veya* 8 *olmayacak şekilde seçilen altkümesinin eleman sayısı en fazla kaç olur?*

Örnek 106 $\{1, 2, 3, ..., 15\}$ *kümesinin öyle bir* X *altkümesi olsun ki,* X*'in elemanları toplamı aynı olan iki alt kümesi olmasın. Bunu sağlayan* X *kümesinin elemanları toplamı en fazla kaç olabilir?* (*AIME* 1986)

Örnek 107 $\{1,2,3,...,100\}$ *kümesinin öyle* n *elemanlı bir altkümesi seçilecektir ki, bu altkümeden seçilen herhangi iki elemanın farkı, toplamlarını bölmesin. Buna göre,* n *sayısı en fazla kaçtır?*

Örnek 108 $\{1,2,3,...,10\}$ *kümesinin, en büyük ve en küçük elemanlarının toplamı* 11 *olan altkümelerinin sayısını bulunuz.*

Örnek 109 1*'den* 1000*'e kadar olan sayılardan kaç tanesi* $3,5$ *veya* 7*'ye bölünür?*

Örnek 110 *Bir tamsayının karesi yada küpü olmayan sayılar sırasıyla yazılarak elde edilen* $2,3,5,6,7,10,...$ *sayı dizisinin* 1601*'inci terimi kaçtır?*

Örnek 111 *Paydası* 600 *olan ve* 1*'den küçük olan sadeleşemeyen kaç pozitif rasyonel sayı vardır?*

Örnek 112 1*'den* 200*'e kadar (*1 *ve* 200 *dahil)* 3 *veya* 5*'e bölünemeyen tüm tamsayıların toplamını bulunuz.*

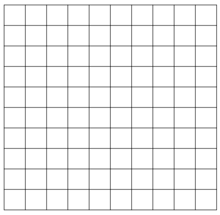
5 Toplama ve Çarpma İlkesi

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 113 $|x|+|y|\leq 3$ *eşitsizliğini sağlayan kaç tane* (x,y) *tamsayı çifti vardır?*

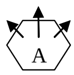
Örnek 114 $x^2+y^2\leq 20$ *eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?*

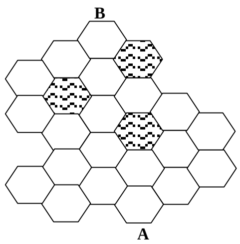
Örnek 115 10×10 *şeklinde bir satranç tahtası üzerinde kaç farklı kare çizilebilir?*



Örnek 116 *Alper, 11 basamaklı bir merdiveni ya birer ya da ikişer adımlarla çıkmaktadır. Alper bu merdiveni kaç değişik şekilde çıkabilir.*

Örnek 117 *Bir kurbağa 11 basamaklı bir merdiveni geçecektir. Merdivenlerde her atlayışda 2 veya 3'er basamak zıpladığına göre, merdiveni kaç farklı şekilde geçebilir?*

Örnek 118 *A'da bulunan bir oyuncu, sadece yukarı doğru üç yönde, yani*  *şeklinde hareket ederek, şekildeki altıgen odalardan geçerek B'ye ulaşmak istiyor. Taralı odalar kilitlidir. Buna göre, A'dan B'ye kaç değişik şekilde gidilebilir?*

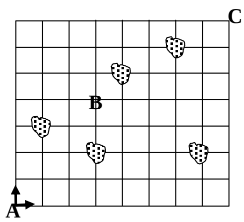


Örnek 119 *Ondalık gösterimi simetrik olan sayılara palindrom sayılar denir.* 1, 33, 121, 234432 *gibi. Buna göre, 5 basamaklı kaç polindrom sayı vardır?*

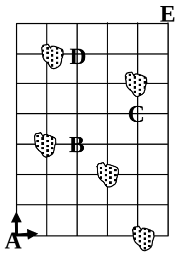
Örnek 120 *10 adet farklı ayakkabı çiftinden kaç tane birbirinin eşi olmayan ayakkabı çifti seçilebilir?*

Örnek 121 *5 rakamını içermeyen kaç tane* n *basamaklı sayı vardır?*

Örnek 122 *Alper, A şehrinden C şehrine B şehrindeki bir arkadaşına da uğrayarak gitmeyi düşünüyor. Şekildeki çizgiler yolları göstermek üzere, çizgiler üzerinde sadece sağa ve yukarı doğru gidilebilmektedir. Yollar üzerinde taralı olarak gösterilen göller üzerinden geçilememektedir. Buna göre, Alper, A şehrinden C şehrine B şehrindeki bir arkadaşına da uğrayarak kaç değişik şekilde gidebilir?*



Örnek 123 *Şekilde A ile E şehri arasında yollar çizgilerle gösterilmiştir. A'dan E'ye doğru giden bir araba sadece sağa ve yukarı doğru hareket edebilmektedir. B, C ve D kavşaklarında benzin istasyonu bulunmaktadır. Taralı olarak gösterilen yerler ise, yol çalışmaları yüzünden trafiğe kapatılmış olan kavşaklardır. A'daki araba, E'ye giderken en az bir kez benzin alması gerektiğine göre, A'dan E'ye kaç değişik şekilde gidebilir?*



Örnek 124 5×7 *karelik bir satranç tahtasında, bu karelerle oluşturulan ve alanı tek sayı olan dikdörtgenlerin sayısı kaç tanedir?* (*Bir karenin alanı* 1 *br*^{2}*'dir.*)

Örnek 125 1, 2, 3, 4 *ve* 5 *rakamlarıyla yazılabilen rakamları birbirinden farklı dört basamaklı sayıların toplamı kaçtır?*

Örnek 126 4×4 *karelik bir tahtanın her karesine bir tamsayı yazılıyor. Eğer her satır ve her sütundaki sayıların çarpımı* 11 *veya* (-11) *olacak şekilde kaç farklı yazılış vardır?*

Örnek 127 $\{1, 2, ..., 20\}$ *kümesinden* $a < b$, $a < c$ *olacak şekilde kaç* (a, b, c) *üçlüsü seçilebilir?*

Örnek 128 $\{1000, 1001, ..., 2007\}$ *sayılarından, toplama işleminde taşıma gerektirmeyecek şekilde kaç ardışık sayı çifti seçilebilir.* (**Not :** *Buradaki toplamadaki taşıma gerektirmemesi, toplama işleminde iki rakamın toplamının yine bir rakam olması demektir.*)

Örnek 129 $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7$ *sayısı* 7 *rakamlı bir telefon numarasını göstermek üzere,* $d_1 d_2 d_3$ *üçlüsü,* $d_4 d_5 d_6$ *veya* $d_5 d_6 d_7$ *üçlüsü ile aynı ise, bu telefon numarasına hatırlanabilir telefon numarası diyelim.* d_i, $0, 1, ..., 9$ *rakamlarından herhangi biri olabildiğine göre, kaç tane hatırlanabilir telefon numarası vardır?*

Örnek 130 3 *tabanına göre yazılışı bir palindrom sayı olan* n *basamaklı tüm sayıların oluşturduğu kümenin eleman sayısının* 1453*'ten fazla olduğu biliniyor. Buna göre,* n *sayısı en az kaç olabilir?*

Örnek 131 *a)* 7*'ye tam bölünebilen, sekiz tabanında sekiz basamaklı olan kaç palindrom sayı vardır?*
b) 3*'e tam bölünebilen, yedi tabanında yedi basamaklı olan kaç palindrom sayı vardır?*

Örnek 132 $1, 2, 3, 4$ *rakamlarıyla, her rakam en az bir kez kullanılması koşuluyla* 7 *basamaklı kaç sayı yazılabilir?*

6 Permütasyon

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 133 *Farklı 8 kitabın 3' ü, her bir öğrenciye 1 kitap vermek şartıyla 3 öğrenciye kaç farklı şekilde verilebilir?*

Örnek 134 *4 farklı matematik ve 3 farklı fizik kitabı yan yana sıralanacaktır.*
a) Kaç farklı şekilde sıralanabilir?
b) Tüm matematik kitapları yan yana gelmek şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabilir?
c) Tüm fizik kitapları yan yana gelmemek şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabilir?

Örnek 135 *ALPER kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle, 5 harfli anlamlı yada anlamsız oluşturulan kelimeler alfabetik sıraya göre yazılırsa 101'inci kelime ne olur?*

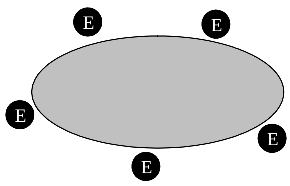
Örnek 136 $(a_1, a_2, ..., a_6)$ *altılısı,* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *sayılarının herhangi bir permütasyonu olmak üzere,* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = 1$ *eşitliğini sağlayan kaç farklı* $(a_1, a_2, ..., a_6)$ *altılısı vardır?*

7 Dairesel permütasyon

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 137 *4 kız ve 3 erkek öğrenci bir yuvarlak masa etrafında oturacaklardır.*
a) Kaç farklı şekilde oturabilirler?
b) Tüm kızlar yan yana gelmek şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler?
c) Tüm erkekler yan yana gelmemek şartıyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

Örnek 138 *4 kız, 5 erkek öğrenci, 2 kız öğrenci arasında en az 1 erkek öğrenci olması koşuluyla yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?*



Örnek 139 *5 farklı anahtar bir anahtarlık halkasına kaç farklı şekilde dizilebilir?*

Örnek 140 *2 araba anahtarı, 3 oda anahtarı ile 3 dolap anahtarı, araba ve oda anahtarları yanyana olacak şekilde bir anahtarlığa kaç farklı şekilde dizilebilir?*

Örnek 141 *Verilen yedi değişik rengi kullanarak bir küpün her yüzünü farklı bir renge boyuyoruz. Küpün istenildiği kadar ve istenen istikametlerde döndürülmesiyle elde edilen iki boyamayı aynı kabul edersek, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?*

Örnek 142 *Yüzlerinde* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *yazan bir zar, sarı, kırmızı ve mavi renklerle kaç farklı şekilde boyanabilir?*

Örnek 143 *Bir zarın karşılıklı yüzlerinin toplamı 7'dir. Bu şekilde kaç farklı zar yapılabilir?*

8 Tekrarlı Permütasyon

Bu bölümdeki problemlerle ilgili <u>konu anlatımını</u> ve <u>soruların çözümlerini</u> MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

<u>Örnek</u> 144 ***PAPATYA kelimesinin harfleriyle 7 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?***

<u>Örnek</u> 145 ***BABADEDE kelimesinin harfleriyle 8 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?***

<u>Örnek</u> 146 ***TEKETEK kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle, T başta ve K sonda olmamak koşuluyla kaç farklı anlamlı ya da anlamsız 7 harfli kelime yazılabilir?***

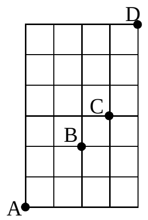
<u>Örnek</u> 147 ***MATEMATİK kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle, iki sessiz harf yan yana gelmemek koşuluyla kaç farklı anlamlı ya da anlamsız 9 harfli kelime yazılabilir?***

<u>Örnek</u> 148 ***Rakamlarının çarpımı 420 olan kaç tane 6 basamaklı sayı vardır?***

<u>Örnek</u> 149 ***Dört bileşenli*** $(0,0,0,0)$ ***dörtlüsünden, her defasında sadece bir bileşenin 1 br artması koşuluyla*** $(3,2,1,2)$ ***dörtlüsünü kaç farklı şekilde elde edebiliriz?***

<u>Örnek</u> 150 ***ERGENEKON sözcüğünün harfleri, bütün sesli harfler art arda geçmek üzere kaç farklı biçimde sıralanabilir?***

<u>Örnek</u> 151 ***5 farklı fizik ve 5 farklı matematik kitabı, 2 fizik kitabı arasında en az 1 matematik kitabı olması koşuluyla kaç farklı şekilde sıralanabilir?***



<u>Örnek</u> 152 ***Şekilde, 6 satır ve 4 sütunu olan tablonun sol alt köşesinden (A noktasından) sağ üst köşesine (D noktasına), çizgiler üzerinde sağa veya yukarıya hareket edilerek gidilecektir. B ve C noktalarının en az birinden geçmek koşuluyla, kaç farklı yol izlenebilir?*** (*AÜMO*−2009)

<u>Örnek</u> 153 ***ÖZDEMİR kelimesinin harfleriyle oluşturulan 7 harfli kelimelerin kaç tanesinde İ ve Ö harfleri E harfinin solunda yer alır?***

<u>Örnek</u> 154 ***MATEMATİK kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle oluşturulan kelimelerden kaç tanesinde sessiz harfler alfabetik sıradadır?***

<u>Örnek</u> 155 ***2 tabanına göre yazılışında*** n ***tane 1 ve*** n ***tane 0 olan tüm pozitif tamsayıların toplamını bulunuz.*** (*KANADA M.O.* 1991)

9 İstenmeyen Permütasyon

Bu bölümdeki problemlerle ilgili <u>konu anlatımını</u> ve <u>soruların çözümlerini</u> MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

<u>Örnek</u> 156 ***Ahmet, Burcu, Cüneyt, Derya, Emel, Fatih altı kişilik bir sırada oturmaktadılar. Herbiri yerlerinden kalktıktan sonra, rastgele tekrar oturuyorlar. Buna göre, herbiri ilk oturdukları yerlerde oturmaması koşuluyla, kaç farklı şekilde oturabilirler.***

Örnek 157 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *sayılarının permütasyonlarının kaç tanesinde,* $1, 2, 4$ *ve* 6 *sayıları,* $1, 2, 3, 4, 5, 6$*'nın küçükten büyüğe sıralandıkları konumda bulunmazlar?*

Örnek 158 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *sayılarının permütasyonlarının kaç tanesinde,* 1 *birinci sırada,* 5 *beşinci sırada ve* 7 *yedinci sırada yer almaz?*

Örnek 159 *TÜRKİYEM kelimesinin permütasyonlarının kaç tanesinde, T harfi ilk başta, K dördüncü sırada, E yedinci sırada ve M sekizinci sırada yer almaz?*

Örnek 160 *TÜRKİYE kelimesinin harflerinin permütasyonlarının kaç tanesinde,* 3 *harf TÜRKİYE kelimesinde bulunduğu sırada,* 4 *harf ise TÜRKİYE kelimesinde bulunduğu sırada değildir.*

Örnek 161 123123 *sayısının rakamlarının tüm permütasyonlarından kaç tanesinde yanyana iki rakam aynı değildir?*

Örnek 162 *BABADEDE harflerinin sıralanışlarından kaç tanesinde aynı iki harf yanyana bulunmaz?*

Örnek 163 *Bir kişi beş farklı kişiye yazılmış beş mektubu, üstlerinde adresleri yazılı olduğu beş zarfa rastgele yerleştiriyor. Herhangi bir kişiye kendisine ait mektubun ulaşmaması durumu kaç farklı şekilde gerçekleşir?*

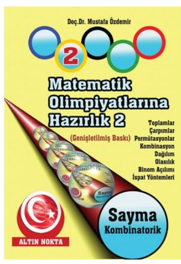
10 Yarışmalarda Sıralanış Problemleri

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 164 *Bir at yarışında, düldül, fırtına, rüzgar, poyraz, meltem ve yıldırım isimli 6 at vardır. Bu at yarışının sonucu kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?*

Örnek 165 *Aynı sınıftaki Alper, Berk, Cem ve Derya isimli öğrenciler bir test sınavına giriyorlar. Sınav sonunda, sınav sonuçlarına göre bu öğrenciler arasında kaç değişik sıralama yapılabilir?* (AÜMO - 2012)

ÇOZUMLERI KITAPTA
BULABİLIRSINIZ



11 Kombinasyon

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 166 $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *kümesi veriliyor.*
a) En az **5** *elemanlı altkümelerinin sayısı kaçtır?*
b) **4** *bulunmayan en çok* **2** *elemanlı altkümelerinin sayısı kaçtır?*

Örnek 167 $\{1, 2, 3, ..., 20\}$ *kümesinin* **6** *elemanlı altkümelerinden kaçında üçüncü en küçük sayı* **6***'dır?*

Örnek 168 *Sinem ile Sevda'nın da aralarında bulunduğu* **9** *kişi arasından, aralarında Sinem'in bulunduğu ve Sevda'nın bulunmadığı* **5** *kişilik grup kaç farklı şekilde seçilebilir?*

Örnek 169 $1, 2, 3, ..., 8$ *sayılarının bütün sıralanışlarının kaç tanesinde, iki komşu sayının ikisi de çift değildir?*

Örnek 170 **10** *kişi arasından* **5** *kişilik bir basketbol takımı seçilecektir. Bu takımda Hidayet ve Mirsat birbiriyle kesinlikle oynamak istemiyorlar. Ersan ile Semih ise mutlaka birlikte oynamak istemektediler. Bu isteklerde göz önünde bulundurularak, takım kaç farklı şekilde seçilebilir?*

Örnek 171 **200** *elemanlı bir kümenin* **100** *elemanlı altkümelerinin sayısı* **7***'nin en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür?*

Örnek 172 **2** *ve* **3***'ün bulunup,* **0** *ve* **4***'ün bulunmadığı rakamları birbirinden farklı* **6** *basamaklı kaç sayı vardır?*

Örnek 173 $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *kümesinin, içinde* **1** *bulunan ve* **6** *bulunmayan üç elemanlı altkümelerinin sayısı, sadece çift sayı bulunan en az iki elemanlı altkümelerinin sayısından ne kadar fazladır?*

Örnek 174 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *kümesinin hiçbiri diğerinin alt kümesi olmayacak şekilde en çok kaç alt kümesi vardır?*

Örnek 175 $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 29, 30\}$ *kümesinin üç elemanlı bütün altkümelerinin kaç tanesinin elemanları toplamı* **3***'e tam bölünür?*

Örnek 176 $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ *kümesinin elemanları çarpımı* **4***'ün katı olan üç elemanlı kaç altkümesi vardır?*

Örnek 177 $\{1, 2, 3, ..., 13\}$ *kümesinin farkları* **5** *olan herhangi iki eleman içermeyen kaç alt kümesi vardır?*

Örnek 178 $\{1, 2, 3, ..., 17\}$ *kümesinin farkları* **4** *olan herhangi iki eleman içermeyen kaç alt kümesi vardır? (UİMO-2012)*

Alıştırma : $\{1, 2, 3, ..., 19\}$ kümesinin, farkları 4 olan herhangi iki eleman içermeyen altküme sayısı n ise $\sqrt[3]{n}$ kaçtır?
Yanıt : $\sqrt[3]{13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 8} = \sqrt[3]{13^3 \cdot 2^3} = 26.$
Alıştırma : $\{1, 2, 3, ..., 12\}$ kümesinin, farkları 6 olan herhangi iki eleman içeren kaç alt kümesi vardır?
Yanıt : $2^{12} - 3^6 = 3367.$
Alıştırma : $\{1, 2, 3, ..., 12\}$ kümesinin, farkları 5 olan herhangi iki eleman içermeyen kaç alt kümesi vardır?
Yanıt : $25 \cdot 3^3 = 675.$

Örnek 179 $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, ..., 60\}$ *kümesinin iki elemanlı altkümelerinden kaçının elemanları toplamı* **100***'den büyüktür.*

Alıştırma : $A = \{41, 42, 43, ..., 100\}$ kümesinin iki elemanlı altkümelerinden kaçının elemanları toplamı 100'den büyüktür.
Çözüm : $\binom{51}{2} + (41 + 42 + \cdots + 49) = 1275 + 405 = 1680.$
Alıştırma : $A = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ kümesinin iki elemanlı altkümelerinden kaçının elemanları toplamı 20'den büyüktür.
Yanıt : $\binom{11}{2} + (1 + 2 + \cdots + 9) = 100.$

Örnek 180 ***Yedi elemanlı bir küme hiçbiri boş olmayan dört ayrık altkümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?***

Örnek 181 ***$\{1, 2, 3, ..., 20\}$ kümesinden, A'daki tüm elemanlar, B'deki tüm elemanlardan büyük olacak şekilde, beşer elemanlı A ve B altkümeleri kaç farklı şekilde seçilebilir?***

Örnek 182 ***Birbirinin aynısı olan 6 kalem ile birbirinden farklı 6 kitaptan, 6 tanesini kaç farklı şekilde seçebiliriz.***

Alıştırma : 16 toptan 8 tanesinin üstünde 0 yazılı olup, diğer 8 tanesi de, her birine farklı bir numara düşecek biçimde, 1'den 8'e kadar olan tamsayılar kullanılarak numaralanmıştır. Bu 16 toptan 8 top kaç değişik biçimde seçilebilir?
Yanıt : 1024.

Örnek 183 ***Rakamlarının artan sırada olduğu üç basamaklı kaç sayı vardır?***

Örnek 184 ***En az dört basamaklı sayılardan kaç tanesinin rakamları soldan sağa doğru artan sıradadır?***

Alıştırma : En az üç basamaklı sayılardan kaç tanesinin rakamları soldan sağa doğru artan sıradadır?
Yanıt : $512 - \binom{9}{0} - \binom{9}{1} - \binom{9}{2} = 466.$
Alıştırma : Rakamlarının artan sırada olduğu en az iki, en fazla beş basamaklı kaç sayı vardır?
Yanıt : $\binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 372.$

Örnek 185 ***Rakamları sıfırdan farklı, $a < b$, $a < c$ olacak şekilde kaç abc üç basamaklı sayısı oluşturulabilir.***

Alıştırma : $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ kümesinden,
a) $a < b < c$ olacak şekilde kaç (a, b, c) üçlüsü oluşturulabilir.
b) $a < b$, $a < c$ olacak şekilde kaç (a, b, c) üçlüsü oluşturulabilir.
c) $a = b > c$ olacak şekilde kaç (a, b, c) üçlüsü oluşturulabilir.
Yanıt : a) $\binom{10}{3} = 120.$
b) $2\binom{10}{3} + \binom{10}{2} = 285.$
c) $\binom{10}{2} = 45.$

Örnek 186 ***Elemanları, $A = \{ (x, y) : 3x + 2y = 20, x, y \in \mathbb{Z}^+ \}$,***

$$B = \{ (x, y) : 2x + y = 11, x, y \in \mathbb{Z}^+ \} \quad ve \quad C = \{ (x, y) : x > y, x, y \in \mathbb{Z}^+ \}$$

kümelerinin en az ikisine ait olan kümenin, en az iki elemanlı altkümelerinin sayısı nedir?

Örnek 187 ***$A = \{x \in \mathbb{Z} : |x - 2| = 3\}$ ve $B = \{x \in \mathbb{Z} : x = \dfrac{3n+3}{n+3},\ n \in \mathbb{Z}\}$ kümeleri veriliyor. $A \cup B$ kümesinin en çok üç elemanlı altkümelerinin kaçında çift sayı bulunmaz?***

Örnek 188 ***$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin dört elemanlı altkümelerinin kaç tanesinde 3 ve 5 birlikte bulunmaz, fakat 2 veya 4'ten birisi veya her ikisi de bulunur.***

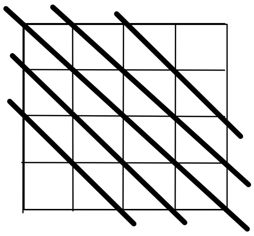
Örnek 189 ***Düzlem üzerinde verilmiş 12 noktanın sadece 4'ü bir doğru üzerindedir. Herhangi üçü bir doğru üzerinde bulunan başka noktalar olmadığına göre, köşeleri bu 12 nokta olacak şekilde kaç üçgen oluşturulabilir?***

<u>Örnek</u> **190** ***Düzlemde 12 nokta verilmiştir. Köşeleri bu noktalarda olan üçgenlerin sayısı 216 olduğuna göre, bu noktaların en az ikisinden geçen doğru sayısı en çok x ve en az y ise $x + y$ kaçtır?***

<u>Örnek</u> **191** ***xoy koordinat sisteminde***

$$1 \leq x \leq 5, \qquad 1 \leq y \leq 5$$

olmak üzere, köşeleri tamsayı koordinatlı (x, y) noktalarında bulunan kaç üçgen vardır?



<u>Örnek</u> **192** ***$x_1 = 8$, $x_9 = 4$ ve $x_2, x_3, ..., x_8$ sayıları $\{0, 2\}$ kümesinin elemanları olmak üzere, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$ eşitliği sağlayan kaç tane $(x_1, x_2, ..., x_9)$ dokuzlusu vardır?***

<u>Örnek</u> **193** ***S kümesi, paydası 24 olan ve payı 26'dan küçük ve 24'le aralarında asal olan sayılar olan kesirlerden oluşan bir kümedir. S kümesinin, elemanları toplamı sadeleşmeyen kaç tane altkümesi vardır?***

<u>Örnek</u> **194** ***a, b, c birbirinden farklı negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,***

$$3^a + 3^b + 3^c$$

formundaki sayıları, küçükten büyüğe doğru sıralarsak, 101'inci sayı için

$$a + b + c$$

toplamı kaç olur?

Alıştırma : a, b, c birbirinden farklı negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$$2^a + 2^b + 2^c$$

formundaki sayıları, küçükten büyüğe doğru sıralarsak, 101'inci sayı kaç olur?
Yanıt : $2^9 + 2^6 + 2^1 = 578$.

<u>Örnek</u> **195** ***$512, 513, 514, ..., 2047$ sayıları ikilik tabanda yazıldığında, sadece 1 ve 0 rakamlarından oluşurlar. Bu sayıların ikilik tabana göre yazılmış hallerinde, kaç tanesinin 0'larınının sayısı 1'lerinin sayısından fazla olacaktır?***

<u>Örnek</u> **196** **DEMİR** ***kelimesinin harflerinin en az bir kez kullanılması koşuluyla anlamlı ya da anlamsız 8 harfli kaç kelime yazılabilir?***

12 Farklı Nesnelerin Dağıtılması

12.1 Farklı Nesnelerin Ayrık Kümelere Dağılımı

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 197 ***$K = \{1,2,3\}$ kümesinden kaç farklı şekilde ayrık iki küme seçilebilir? Bu kümeleri yazınız.***

Örnek 198 ***a) $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi, kaç farklı şekilde ayrık A ve B kümelerinin birleşimi olarak yazılabilir?***
b) $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi kaç farklı şekilde, boş olmayan A ve B ayrık kümelerinin birleşimi olarak yazılabilir?
c) $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi kaç farklı şekilde ayrık iki kümenin birleşimi olarak yazılabilir?
d) $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi kaç farklı şekilde, boş olmayan ayrık iki kümenin birleşimi olarak yazılabilir?
e) 100 kişilik bir topluluk kaç farklı şekilde, her birinde en az bir eleman bulunan iki ayrık gruba ayrılabilir?
f) $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinden ayrık iki A ve B kümesi kaç farklı şekilde seçilebilir?
g) $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinden, boş olmayan ayrık iki A ve B kümesi kaç farklı şekilde seçilebilir?
h) $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinden ayrık iki küme kaç farklı şekilde seçilebilir?
i) $T = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinden boş olmayan ayrık iki küme kaç farklı şekilde seçilebilir?

Örnek 199 ***13 kişilik bir topluluk, her birinde en az bir kişi bulunan iki alt topluluğa kaç farklı şekilde ayrılabilir?*** *(UMO - 1994)*

Örnek 200 ***$\{1,2,3,...,10\}$ kümesinin tüm altkümeler kümesinde $A_1 \cap A_2$ boş küme olacak şekilde, kaç tane (A_1, A_2) sıralı altküme ikilisi vardır?*** *(UİMO - 1997)*

Örnek 201 ***$\{1,2,3,...,10\}$ kümesinden kaç tane ayrık iki küme seçilebilir?***

Örnek 202 ***7 kişilik bir öğrenci grubundan, Futbol ve Voleybol takımlarına öğrenci seçilecektir. Bir öğrencinin sadece bir takımda olması ve her takıma en az bir kişi seçilmesi koşuluyla, kaç farklı şekilde seçim yapılabilir?***

Örnek 203 ***7 kişilik bir öğrenci arasında iki grup belirlenecektir. Bir öğrencinin sadece bir grupta olması ve her grupta en az bir kişi olması koşuluyla, iki grup kaç farklı şekilde belirlenebilir?***

Örnek 204 ***5 kişilik bir öğrenci grubunda, Kimya ve Matematik olimpiyat takımlarına öğrenci seçilecektir.***
a) Bir öğrencinin sadece bir takımda bulunması ve her takımda en az iki kişi olması koşuluyla, Kimya ve Matematik takımları kaç farklı şekilde belirlenebilir?
b) Her takımda en az üç kişi olması koşuluyla, Kimya ve Matematik takımları kaç farklı şekilde belirlenebilir?

12.2 Farklı Nesnelerin Ayrık Olması Gerekmeyen Kümelere Dağılımı

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 205 ***$X = \{1,2,3\}$ kümesi ayrık olması gerekmeyen kaç tane iki kümenin birleşimi olarak yazılabilir? Kümeleri yazarak gösteriniz.***

Örnek 206 ***$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinden ayrık olması gerekmeyen kaç tane iki küme seçilebilir?***

Örnek 207 *Ali, Buse, Cem, Deniz , Erol ve Fuat'dan oluşan 6 kişi arasından, okulun Futbol ve Basketbol takımlarına oyuncu seçilecektir. Her öğrenci en az bir takımda bulunması koşuluyla kaç farklı şekilde seçim yapılabilir?*

Örnek 208 *Ali, Buse, Cem, Deniz , Erol ve Fuat'dan oluşan 6 kişi arasından, iki grup belirlenecektir. Her öğrencinin en az bir grupta bulunması koşuluyla, iki grup kaç farklı şekilde belirlenebilir?*

Örnek 209 $\{1,2,3,4\}$ *kümesinden ayrık olması gerekmeyen iki küme kaç farklı şekilde seçilebilir?*

Örnek 210 $A = \{1,2,3,...,n\}$ *kümesinden ayrık olması gerekmeyen $f(n)$ tane iki küme seçilebildiğine göre,*

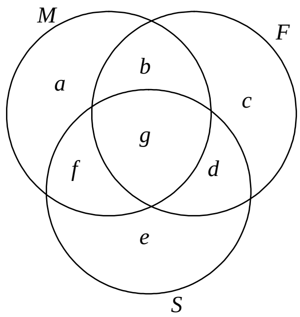
$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

değerini hesaplayınız.

Örnek 211 *Ali, Buse, Cem, Deniz ve Erol dan oluşan 5 kişi arasından, okulun Futbol ve Basketbol takımlarına oyuncu seçilecektir. Bir kişi iki takıma birden seçilebilir. Her iki takıma da en az bir kişi seçmek koşuluyla kaç farklı şekilde seçim yapılabilir?*

Örnek 212 *Ali, Buse, Cem, Deniz ve Erol dan oluşan 5 kişi arasından, iki grup belirlenecektir. Bir kişi iki grupta da olabilir. Buna göre, gruplarda en az birer kişi olması koşuluyla gruplar kaç farklı şekilde belirlenebilir?*

Örnek 213 $X = \{1,2,...,10\}$ *kümesi birleşimleri X olan ve üçünün kesişimi boş küme olan üç M, F ve S kümelerine kaç farklı şekilde ayrılabilir?*



Örnek 214 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ *kümesinden 3'er elemanlı olan ve herhangi ikisinin sadece 2 ortak elemanı olan (A,B,C) altküme üçlüsü kaç farklı şekilde seçilebilir? (Örneğin, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,4\}$, $C = \{2,3,4\}$)*

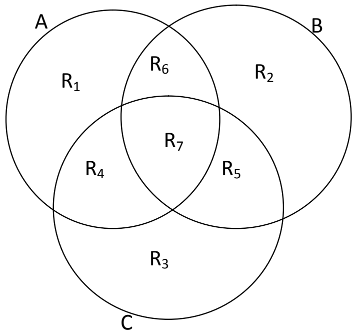
Örnek 215 $\{1,2,3,...,10\}$ *kümesi kaç farklı şekilde, en az bir elemanlı ve ardışık iki sayı içermeyen ayrık üç kümenin birleşimi olarak yazılabilir?*

Örnek 216 $\{1,2,...,2006\}$ *kümesi, boş olmayan ve hiçbiri ardışık herhangi iki sayı içermeyen üç kümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir? (UMO - 2006)*

Örnek 217 $X=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ *kümesi veriliyor. Bu kümenin elemanlarıyla oluşturulan ve aşağıdaki koşulları sağlayan (A,B,C) altküme üçlüsü kaç farklı şekilde oluşturulabilir?*

i) $s(A) = s(B) = s(C) = 4,$
ii) $s(A \cap B) = s(A \cap C) = s(B \cap C) = 2$
iii) $s(A \cup B \cup C) \neq 7$

(Örneğin, $A = \{a,b,c,e\}$, $B = \{a,b,d,f\}$, $C = \{b,c,d,g\}$.)



13 Özdeş nesnelerin dağıtılması

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 218 *6 özdeş bilye 3 öğrenciye kaç değişik şekilde dağıtılabilir?*

Örnek 219 *6 özdeş bilye 3 öğrenciye her biri en az 1 bilye almak koşulu ile kaç değişik şekilde dağıtılabilir?*

Örnek 220 *2, 3, 4, 5 top alabilen dört kutuya 10 top kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

Örnek 221 *Her biri birbirinin aynı olan 10 kalem, 11 silgi, 8 defter, 3 öğrenciye her öğrenciye her birinden en az iki tane verilmesi koşulu ile kaç farklı şekilde paylaştırılır?*

Örnek 222 *9 özdeş bilye, 4 farklı kutuya, kutulardan en fazla ikisi boş kalacak biçimde, kaç farklı şekilde paylaştırılabilir?*

Örnek 223 $a, b, c, d \leq 20$ *olması koşuluyla,* $a \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot d^4 = 10^6$ *biçiminde yazılabilen kaç* (a, b, c, d) *pozitif tamsayı üçlüsü vardır?*

14 Katsayıları 1 Olan Lineer Denklemler

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 224 $x + y + z = 15$ *denklemini sağlayan;*
a) Kaç (x, y, z) *doğal sayı üçlüsü vardır?*
b) Kaç tane (x, y, z) *pozitif tamsayı üçlüsü vardır?*

Örnek 225 $a \geq 13$, $b \geq 12$, $c \geq 11$ *ve* $d \geq 10$ *olmak üzere,*

$$a + b + c + d = 55$$

denklemini sağlayan kaç (a, b, c, d) *pozitif tamsayı dörtlüsü vardır?*

Örnek 226 *15 özdeş matematik ve 5 özdeş fizik kitabı, herhangi iki fizik kitabı arasında en az iki matematik kitabı olması koşuluyla bir rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?*

Örnek 227 *Hakan 40 kalemi arkadaşlarına hediye edecektir. Herhangi üç günde, arkadaşlarına hediye ettiği toplam kalem sayısı toplamı 3'e bölünmek koşuluyla dört günde kaç farklı biçimde 40 kalemi arkadaşlarına hediye edebilir?*

Örnek 228 $14 \geq a \geq 11$, $b \geq 1$, $9 \geq c \geq 5$ *ve* $d \geq 6$ *olmak üzere,*

$$a + b + c + d = 33$$

denklemini sağlayan kaç (a, b, c, d) *pozitif tamsayı dörtlüsü vardır?*

Örnek 229 *$a \leq 3$, $b \leq 4$, $c \leq 5$ ve $d \leq 6$ olmak üzere,*

$$a + b + c + d = 13$$

denklemini sağlayan kaç (a, b, c, d) doğal sayı dörtlüsü vardır?

Örnek 230 *$x_1+x_2+x_3+x_4 < 9$ eşitsizliğini sağlayan kaç (x_1, x_2, x_3, x_4) doğal sayı dörtlüsü vardır?*

Örnek 231 *$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{10} < 21$ eşitsizliğini sağlayan kaç $(x_1,x_2,...,x_{10})$ pozitif tamsayı onlusu vardır?*

Örnek 232 *10 özdeş kalem, herhangi sayıdaki öğrencilere, her öğrenci en az 1 kalem alması koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

Örnek 233 *12 TL'si olan Alper, her gün en az 2 TL olmak şartıyla 2'nin katları kadar para harcıyor ise, parasının tamamını günlere dağılımı itibariyle kaç değişik biçimde harcayabilir?*

Örnek 234 *Kaç (m, n, k) pozitif tamsayı üçlüsü için, 36000 sayısı $m \cdot n \cdot k$ çarpımı ile bölünür?*

Alıştırma : 60^{10} sayısı $m \cdot n \cdot k$ çarpımı ile bölünecek şekildeki (m, n, k) pozitif tamsayı üçlülerinin sayısı p ise, p sayısının en büyük asal çarpanı kaçtır?
Yanıt : 23.

Örnek 235 *Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan kaç (a, b, c, d, e) pozitif tamsayı beşlisi vardır?*

$$\begin{cases} a+b+c+d=20 \\ b+c+d+e=30 \end{cases}$$

Örnek 236 *Aşağıdaki denklem sistemini sağlayan kaç (a, b, c, d, e) pozitif tamsayı beşlisi vardır?*

$$\begin{cases} a+b+c+d=30 \\ b+c+d+e=20 \\ a+e=14 \end{cases}$$

Örnek 237 *$a + b + c + d = 20$ denklemini sağlayan pozitif (a, b, c, d) dörtlülerinin kaç tanesinde $a > d$ eşitsizliği sağlanır?*

$$\binom{20-2d-1}{3-1} = 444$$

Problem : n bir çift sayı olmak üzere, $x_1+x_2+x_3+x_4 = n$ denklemini ve $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayı çözümlerinin sayısının

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n/2-1} \binom{n-1-2k}{2} = \frac{1}{12}\left(n^3 + 17n - \frac{15}{2}n^2 - 12\right)$$

olduğunu gösteriniz.
Araştırma : En genel halde m ve n birer çift sayı olmak üzere,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m = n$$

denklemini ve $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayı çözümlerinin sayısını hesaplamaya çalışınız.

Örnek 238 *$a + b + c + d + e = 20$ denklemini sağlayan pozitif (a, b, c, d, e) beşlilerinin kaç tanesinde $a > b > c$ eşitsizliği sağlanır?*

Örnek 239 *$P(1) = 30$, $P(-1) = 20$ eşitliğini sağlayan pozitif tamsayı katsayılı kaç tane beşinci dereceden polinom yazılabilir?*

Örnek 240 *Herbirinden 4'er tane olan 5 farklı kalem, Mete ve Hakan'a kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

Örnek 241 *Bir sıra boyunca dizilen 10 sandalyeye, Ali, Buse, Cem ve Deniz, herhangi iki kişi yanyana olmayacak şekilde kaç farklı şekilde oturabilirler?*

Örnek 242 *$1, 2, 3, ..., 27$ sayıları, 3'ün katı olan herhangi iki sayı yanyana olmamak koşuluyla, kaç farklı şekilde dizilebilirler?*

15 Permütasyon Sorularının Diziler Yardımıyla Çözülmesi

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 243 ***Normal kiloya sahip 11 insanın oturabildiği 11 sıraya, şişman birisi, 2 kişilik yere oturabiliyor. Buna göre, bu sıraya normal kilolu veya şişman kişiler kaç farklı şekilde oturtulabilir?***

Örnek 244 ***Aynı sırada bulunan 13 koltuğa, kız ve erkek öğrenciler oturacaklardır. Erkek öğrenciler, herhangi iki kız arasında ve en baştaki ile en sondaki koltuklara hemen yanında kız varsa oturmak istemiyor. Kız öğrenciler de, benzer şekilde oturmak istemiyor. Buna göre, ilk 13 kişilik koltuklara kaç farklı şekilde oturulabilir.***

Örnek 245 ***2 tabanında en az 10 basamaklı negatif olmayan sayıların kaç tanesinde iki tane 1 yanyana değildir?***

Örnek 246 ***$A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ kümesinin her x elemanı için,***

$$f(f(x)) = x$$

koşulunu sağlayan kaç $f : A \to A$ fonksiyonu vardır?

Örnek 247 ***5×5 şeklindeki bir karenin, her bir 1×1 karesinin içine $1, 2, 4, 6, 8$ rakamları yazılacaktır. Çift olan herhangi bir rakamın yanyana ve çift sayıda bulunması koşuluyla, 5×5 bölgemiz kaç farklı şekilde doldurulabilir. (Çift olan rakamların yukarıdan aşağıya çift sayıda olması gerekmiyor.) Örneğin,***

1	2	2	1	1
2	2	4	4	1
6	6	8	8	1
4	4	1	6	6
1	8	8	8	8

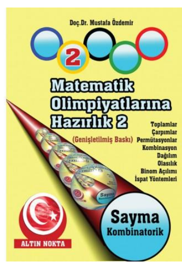
Örnek 248 ***$a_1 = 1$ ve $a_2 = 3$ olmak üzere, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ eşitliğini sağlayan a_n dizisinin genel terimini bulunuz.***

Alıştırma : Siz de, $a_1 = 1$, $a_2 = 11$ olan ve $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ eşitliğiyle verilen a_n dizisinin genel terimini bulunuz.
Yanıt : $a_n = 2(-1)^n + (3)^n$.

Örnek 249 ***$1 \times n$ şeklindeki bir dikdörtgensel bölge, 1 tane 1×1 ve 2 tane 1×2 ölçülerindeki***

 ve 

biçimindeki 3 farklı taşla, bu taşlardan istenilediği kadar kullanılarak döşenecektir. Kaç farklı şekilde döşeme işlemi yapılabilir? $n = 12$ için çözümü bulunuz.
Alıştırma : 1×7 şeklindeki bir dikdörtgensel bölge, 1 tane 1×1 ve 6 tane birbirinden farklı 1×2 ölçülerindeki taşlardan istenilediği kadar kullanılarak döşenecektir. Kaç farklı şekilde döşeme işlemi yapılabilir?
Yanıt : 1261.



Mustafa Özdemir - 2014
ALTIN NOKTA YAYINLARI

16 Ardışık Sayı İçermeyen Altküme Sayısı Problemleri

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 250 $\boldsymbol{A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$ ***kümesinin ardışık sayı içermeyen 4 elemanlı altkümelerinin sayısını bulunuz.***

Kural : $A = \{1,2,3,...,n\}$ *kümesinin ardışık sayı içermeyen r elemanlı altkümelerinin sayısı*

$$\binom{n-r+1}{r}$$

ile bulunur.
İspat : Kitapta.

Alıştırma : $\{1,2,3,...,10\}$ kümesinin
a) Ardışık sayı içermeyen 3 elemanlı altkümelerinin sayısını bulunuz.
a) Ardışık sayı içermeyen 4 elemanlı altkümelerinin sayısını bulunuz.
Yanıt : a) $\binom{10-3+1}{3} = \binom{8}{3} = 56.$
b) $\binom{10-4+1}{4} = \binom{7}{4} = 35.$

Alıştırma : $\{1,2,3,...,20\}$ kümesinin 8 elemanlı altkümelerinin kaçı ardışık sayılar içermez? (UMO - 2011)
Yanıt : $\binom{20-8+1}{8} = \binom{13}{8}.$

Örnek 251 $\boldsymbol{A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}}$ ***kümesinin ardışık sayı içermeyen en az 4 elemanlı altkümelerinin sayısını bulunuz.***

Örnek 252 $\boldsymbol{A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$ ***kümesinin 4 elemanlı altkümelerinden kaçında ardışık iki sayı bulunur?***

Alıştırma : $\{1,2,3,...,10\}$ kümesinin ardışık sayı içermeyen en az 4 elemanlı altkümelerinin sayısını bulunuz.
Yanıt : $\binom{10-4+1}{4} + \binom{10-5+1}{5} = 41.$

Örnek 253 $\boldsymbol{A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$ ***kümesinin ardışık sayı içermeyen boştan farklı tüm altkümelerinin sayısını bulunuz.***

Örnek 254 $\boldsymbol{\{1,2,3,...,11\}}$ ***kümesinin iki ardışık sayı içermeyen kaç altkümesi vardır?*** *(UİMO*-2003*)*

★$A = \{1,2,3,4,...,n-1,n\}$ **kümesinin ardışık sayı içermeyen tüm altkümelerinin sayısını bulunuz.**

Örnek 255 $\boldsymbol{\{1,2,3,...,11\}}$ ***kümesinin iki ardışık sayı içermeyen kaç altkümesi vardır?*** *(UİMO-2003)*

Örnek 256 $\boldsymbol{\{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11\}}$ ***kümesinin elemanları arasında iki ardışık sayı bulunmayan altkümelerinin sayısı kaçtır?*** *(7'nin olmadığına dikkat ediniz.)*

Alıştırma : $A = \{1,2,3,...,18,19\}$ ve $B = \{8,14,18\}$ olmak üzere $A \backslash B$ kümesinin elemanlarıyla, ardışık iki sayı içermeyen kaç altküme oluşturulabilir? (AÜMO - 2014)
Yanıt : $A \backslash B = \{1,2,3,...,7\} \cup \{9,10,11,12,13\} \cup \{15,16,17\} \cup \{19\}$ olduğundan, $a_7 \cdot a_5 \cdot a_3 \cdot a_1 = 34 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 2 = 4420$ elde edilir.

Örnek 257 $\boldsymbol{\{1,2,3,4,6,7,8\}}$ ***kümesinin ardışık sayı içermeyen 3 elemanlı kaç alt kümesi vardır?***

Örnek 258 $\boldsymbol{\{1,2,4,5,6,8,9,10,11\}}$ ***kümesinin elemanları arasında iki ardışık sayı bulunmayan 4 elemanlı altkümelerinin sayısı kaçtır?*** *(UMO* - 1995*)*

Alıştırma : $\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}$ kümesinin ardışık sayı içermeyen üç elemanlı kaç alt kümesi vardır?
Yanıt : $18 + 2 + 3 + 3 + 2 = 28$.

Örnek 259 ***$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin üç tane ardışık tamsayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?***

Örnek 260 ***$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin dört tane ardışık tamsayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?***

Örnek 261 ***$A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ kümesinin üç tane ardışık tamsayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?***

Örnek 262 ***$A = \{1, 2, 3, ..., 8\}$ kümesinin üç tane ardışık tamsayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?***

Alıştırma : $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ kümesinin üç tane ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?
Yanıt : 504.

Örnek 263 ***$A = \{1, 2, 3, ..., 16, 17\}$ ve $B = \{5, 12\}$ olmak üzere, $A \backslash B$ kümesinin üç tane ardışık tamsayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?***

Alıştırma : $A = \{1, 2, 3, ..., 12, 13\}$ ve $B = \{4, 9\}$ olmak üzere, $A \backslash B$ kümesinin üç tane ardışık tamsayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?
Yanıt : $a_3 \cdot a_4 \cdot a_4 = 7 \cdot 13 \cdot 13 = 1183$.

ALTIN NOKTA YAYINLARI

Örnek 264 ***$A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ kümesinin dört tane ardışık tamsayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?***

Örnek 265 ***$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinin dört tane ardışık tamsayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?*** *(UMO-2012)*

Örnek 266 ***$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin 4 elemanlı altkümelerinin kaçında ardışık üç sayı bulunmaz?***

Örnek 267 ***$A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ kümesinin 6 elemanlı altkümelerinin kaçında ardışık dört sayı bulunur?***

Örnek 268 ***$A = \{1, 2, ..., n\}$ kümesinin r elemanlı altkümelerinin kaçında ardışık üç sayı bulunmaz?***

Örnek 269 ***$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin 4 elemanlı altkümelerinden kaçında ardışık üç sayı bulunmaz?***

Örnek 270 ***$A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ kümesinin 6 elemanlı altkümelerinin kaçında ardışık dört sayı bulunur?***

ÇOZUMLERI KITAPTA
BULABİLİRSİNİZ

17 Olasılık

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 271 *5 kız ve 6 erkekten oluşan bir öğrenci grubundan, rasgele seçilen 4 kişinin ikisinin erkek ikisinin kız olma olasılığını bulunuz?*

Örnek 272 *DANDANAKAN kelimesinden seçilen 3 harfin farklı olma olasılığını bulunuz.*

Örnek 273 *Bir sinema salonunda 12'şer koltukluk 15 sıra bulunmaktadır ve koltuklar numaralanmıştır. Birbirinden habersiz bilet alan iki arkadaşın arasında tam bir kişinin olma olasılığı nedir?*

Örnek 274 *ERGENEKON kelimesinin harfleri, rastgele sıralandığında son E harfinin son N harfinden sonra gelme olasılığı nedir?*

Örnek 275 *Bir sıra boyunca dizilen 15 sandalyeye, 4 kişi rastgele oturuyor. Herhangi iki kişinin yanyana olmama olasılığı nedir?*

Örnek 276 *Altı basamaklı bir palindrom sayının 13'e bölünebilme olasılığını bulunuz?*

Örnek 277 *Yüzlerinde $1,2,3,4,5,6$ olan beş zar aynı anda atılıyor. Üste gelen sayıların toplamının 14 olma olasılığını bulunuz.*

Örnek 278 *Aynı hafta içinde doğdukları bilinen üç kişiden, en az ikisinin doğum günlerinin aynı olma olasılığını bulunuz.*

ALTIN NOKTA YAYINLARI

18 Ayrık İki Olayın Herhangi Birinin Olma Olasılığı

Örnek 279 *Bir torbada 3 kırmızı, 4 siyah ve 5 mavi bilye vardır. Torbadan rastgele bir bilye çekilirse, çıkan bilyenin kırmızı veya siyah olma olasılığı nedir?*

Örnek 280 *Yüzleri $1,2,3,4,5,6$ ile numaralandırılmış olan üç zar atılıyor. Üste gelen yüzlerdeki rakamların, bir üçgenin kenarları olma olasılığını bulunuz.*

19 Ayrık Olmayan İki Olaydan Herhangi Birinin Olma Olasılığı

Örnek 281 *1'den 50'ye kadar sayılar kağıtlara yazılarak torbaya dolduruluyor.*
Daha sonra bir kağıt çekiliyor, kağıttaki sayının asal veya rakamlarının toplamı 7 olma olasılığı nedir?

20 Bağımsız Olayların Olasılığı

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 282 *Bir torbada 2 tane kırmızı, 5 tane yeşil top, diğer torbada da 3 yeşil, 5 kırmızı top vardır. İki torbadan da birer top çekiliyor. Her iki topun da aynı renk olma olasılığını bulunuz.*

Örnek 283 *Beyaz torbada 5 mavi, 6 yeşil top, siyah torbada 3 yeşil, 6 mavi top vardır. Beyaz torbadan bir top çekilip rengine bakılmaksızın siyah torbaya atılıyor.*
a) Siyah torbadan bir top çekiliyor, çekilen topun mavi olma olasılığını bulunuz.
b) Siyah torbadan iki top çekiliyor, çekilen topların mavi olma olasılığını bulunuz.

Örnek 284 *Bir zar 4 kez atılıyor, sadece 3 veya 5 sayılarının gelme olasılığını bulunuz?*

Örnek 285 *Bir torbada* $1, 2, 3, ..., 10$ *ile numaralandırılmış birer top vardır. Her defasında bir top çekilip, geri atılıyor. Eğer çekilen top 10 ise, top çekme işlemi bitiriliyor. Buna göre, top çekme işleminin bitirilmesi olasılığının en az* $\frac{1}{5}$ *olması için, en az kaç kez top çekme işlemi yapılmalıdır?*

Örnek 286 *Alper ve Tuğra'nın da bulunduğu 12 kişilik bir grup, herbirinde 4 kişi bulunan kanarya, kartal ve aslan isimli üç gruba ayrılacaktır. Alper ve Tuğra'nın aynı grupta olma olasılığı kaçtır?*

Örnek 287 *Beyaz torbada 5 mavi, 6 yeşil bilye ve siyah torbada 3 yeşil, 6 mavi bilye vardır. Beyaz torbadan alınan iki bilye rengine bakılmaksızın siyah torbaya atılıyor. Sonra da, siyah torbadan alınan iki bilye yine rengine bakılmaksızın beyaz torbaya atılıyor. Bu işlemler sonunda içlerindeki bilyelere göre, ilk baştaki beyaz ve siyah torbaları elde etme olasılığı nedir?*

Örnek 288 $A = \{1, 2, 3, .., 7\}$ *kümesinden iki rakam seçip, bunlarla oluşturulabilecek en büyük sayıya* a *diyelim.* $B = \{1, 2, 3, ..., 8\}$ *kümesinden de iki rakam seçip, bunlarla oluşturulabilecek en büyük sayıya* b *diyelim.* $b > a$ *olma olasılığını bulunuz.*

21 Koşullu Olasılık

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

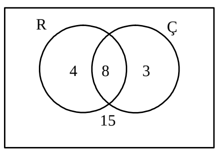
Örnek 289 *Bir çift zarın birlikte atılması deneyinde zarlardan birinin 3 geldiği bilindiğine göre, gelen sayıların çarpımlarının 9'dan küçük olma olasılığı kaçtır?*

Örnek 290 *10 tane erkek ve 8 tane kız öğrencinin bulunduğu bir sınıftan rastgele 2 kişi seçiliyor. Seçilenlerden en az bir tanesi kız ise, her ikisinin de kız olma olasılığı nedir?*

Örnek 291 *52 kağıtlık bir iskambil destesinden 2 kağıt seçiliyor, seçilen bir kağıdın sinek olduğu bilindiğine göre, diğer kağıdın da sinek olma olasılığını bulunuz.*

Örnek 292 *Mete ve Hakan,* $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ *kümesinden rastgele birer eleman seçiyorlar. Bu elemanların toplamının çift sayı olduğu bilindiğine göre, seçtikleri sayıların toplamlarının son rakamının 2 olma olasılığını bulunuz.*

Örnek 293 *30 kişilik bir sınıfta Rusça bilenler 12 kişidir. Rusça ve Çince bilenler ise 8 kişidir. Bu iki dili de bilmeyen 15 kişi var ise, bu sınıftan seçilen bir öğrencinin Rusça bildiği bilindiğine göre, Çince bilme olasılığı kaçtır?*

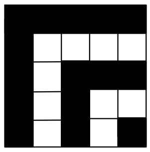


Örnek 294 *Beyaz torbada 5 mavi, 6 yeşil bilye, siyah torbada 3 yeşil, 6 mavi bilye ve gri torbada da 4 yeşil 5 mavi bilye vardır. Torbaların biri rastgele seçiliyor. Seçilen torbadan çekilen iki tane bilyenin yeşil olduğu bilindiğine göre, beyaz torbadan alınmış olma olasılığı nedir?*

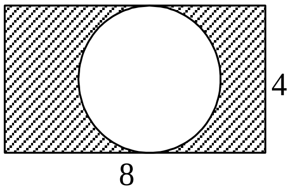
22 Sonsuz Örnek Uzaylı Olaylar

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 295 ***Bir okçu, şekildeki gibi bir tahtaya ok atıyor. Ok tahtaya saplanıyor. Okun karalı olmayan karelerde olma olasılığını bulunuz.***

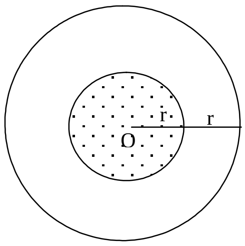


Örnek 296 ***Şekildeki gibi 4×8 ölçülerindeki dikdörtgensel bir bölge içindeki alınan bir noktanın, şekildeki çembersel bölgenin dışından olma olasılığını bulunuz.***



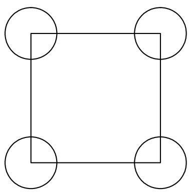
Örnek 297 $[-25, 15]$ ***aralığından rastgele alınmış iki reel sayının çarpımının negatif olma olasılığı kaçtır?*** *(AÜMO - 2012)*

Örnek 298 ***Bir çemberin içerisinde rastgele seçilen bir noktanın, çemberin merkezine, çemberden daha yakın olma olasılığı kaçtır?***



Örnek 299 ***8 birim uzunluğundaki doğru parçası üzerinde rastgele iki nokta işaretleniyor. Oluşan üç parçanın bir üçgen oluşturma olasılığını bulunuz.***

Örnek 300 ***Kenar uzunluğu r birim olan karelerden oluşan zemine, yarıçapı $r/5$ birim olan daire şeklinde bir para atılıyor. Herhangi bir karenin bir köşesinin atılan daire parçası tarafından örtülmüş olma olasılığını bulunuz.***



Örnek 301 ***Analitik düzlemde $|x + y| = 2$ ile sınırlı bölgeden rastgele bir nokta seçiliyor. Bu noktanın x, y pozitif ve $y - x \leq 1$ ve $y + 2x \leq 2$ eşitsizliklerini sağlayan bir nokta olma olasılığını bulunuz.***

Örnek 302 ***Bir dik üçgenin içinde ya da üzerinde alınan herhangi bir noktanın, dik açının olduğu köşeye uzaklığının, diğer köşelere olan uzaklığından daha büyük olmama olasılığını bulunuz.***

Örnek 303 $1 \leq x \leq 4$ ***ve*** $3 \leq y \leq 7$ ***olmak üzere, rasgele alınan x ve y sayılarının toplamının 7'den küçük veya eşit olma olasılığını bulunuz.***

Örnek 304 $0 \le x \le 2$ *ve* $0 \le y, z \le 4$ *olmak üzere, rastgele alınan* x, y *ve* z *sayılarının toplamının* 2*'den küçük veya eşit olma olasılığını bulunuz.*

Örnek 305 *İki arkadaş saat* 08 : 00 *ile* 09 : 00 *arasında Antalya'da saat kulesinin altında buluşmak için anlaşıyor. Erken gelen diğerini* 15 *dakika bekleyecek, sonra gidecektir. Bu iki arkadaşın buluşma olasılığı nedir?*

Örnek 306 *Bir paraşütçü, uçaktan* 2 *km kenara sahip kare şeklindeki bir alana atlıyor. Kare şeklindeki alanın her köşesinde bir büyük ağaç vardır. Eğer, paraşütçü ağaçların gövdesine* 60 *m'den daha yakın alana inerse, paraşüt ağaç dallarına takılıyor. Buna göre, paraşütçünün ağaç dallarına yakalanmama olasılığını bulunuz.*

23 Sayma Sorularında Polinomların Kullanılması

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 307 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *kümesinin elemanlarının toplamı* 8 *olan altküme sayısını bulunuz.*

Örnek 308 1, 2, 3, 4, 5, 6 *sayılarının her biri birer kez kullanılması koşuluyla,* 8 *sayısı bu sayıların herhangi toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabilir?*

yısının pozitif tamsayı parçalanışlarının sayısı ya da, $\{1, 2, 3, ..., n\}$ kümesinin elemanları toplamı m olan altküme sayısı

Örnek 309 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *kümesinin elemanları toplamı* 8 *olan kaç alt kümesi vardır?*

Örnek 310 1, 2, 3, 4 *sayılarının toplamı olarak,* 3 *farklı şekilde yazılabilen kaç pozitif tamsayı vardır?* (Sayılar sadece birer kez kullanılacaktır.)

Örnek 311 $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ *kümesinin elemanları toplamı* 9 *yada* 10 *olmayan kaç altkümesi vardır?*

Örnek 312 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ *kümesinin elemanları toplamı asal sayı olan kaç altkümesi vardır?*

Örnek 313 7 *sayısı,* 1, 2, 3, 4 *sayılarının toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabilir?*

24 Bir Pozitif Tamsayının, Pozitif Tamsayılara Parçalanış Sayısı

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 314 5 *sayısının pozitif tamsayılara parçalanış sayısını bulunuz.*

Örnek 315 6 *sayısının pozitif tamsayılara parçalanış sayısını bulunuz.*

Örnek 316 50 *TL'yi* 1, 5, 10 *ve* 20 *TL'lik paralara kaç farklı şekilde bozdurabiliriz?*

Örnek 317 $x + 5y + 10z + 20t = 50$ *denkleminin kaç tane negatif olmayan tamsayı çözümü vardır?*

Örnek 318 $5x + 7y + 11z = 50$ *denkleminin kaç tane negatif olmayan tamsayı çözümü vardır?*

Örnek 319 $3x + 5y + 7z + 11t = 39$ *denkleminin pozitif tamsayı çözüm dörtlülerinin sayısı kaçtır?*

25 Projektif Geometri Uygulaması

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 320 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ***kümesinin herhangi ikisinin en fazla bir ortak elemanı olacak şekilde, 3 elemanlı altkümelerinin sayısı en fazla kaç olabilir?***

Örnek 321 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ***kümesinin herhangi ikisinin sadece bir ortak elemanı olacak şekilde, 3 elemanlı altkümelerinin sayısı en fazla kaç olabilir?***

Örnek 322 ***Bir düzlem üzerinde noktalar ve çizgiler aşağıdaki koşullara uygun olarak verilmiştir.***
P1. Herhangi iki noktadan sadece bir çizgi geçer.
P2. Herhangi iki çizgi sadece bir noktada kesişir.
P3. Herhangi üçü aynı çizgi üzerinde olmayan dört nokta vardır.
Buna göre, en az kaç nokta ve kaç çizgi olması gerektiğini çözünüz.

Örnek 323 ***Bir matematik sınavında, herhangi iki soruyu çözen bir tek öğrenci vardır ve herhangi iki öğrencinin çözdüğü bir tek ortak soru vardır. Herhangi üçünü aynı öğrencinin çözmediği 4 soru olduğuna göre, bu sınavda en az kaç soru ve kaç öğrenci vardır?***

Örnek 324 $A = \{1,2,3,...,n\}$ ***ve A kümesinin herhangi m elemanlı altkümelerinden oluşan D kümesi verilsin. A kümesinin herhangi iki elemanını içeren D kümesinde bir tek küme vardır. Ayrıca, D kümesindeki herhangi iki kümenin sadece bir ortak elemanı varsa n ve m en az kaçtır? D kümesinde en az kaç eleman vardır?***

Örnek 325 ***Bir matematik sınavında, herhangi iki soruyu çözen bir tek öğrenci vardır. Ayrıca, herhangi iki öğrencinin çözdüğü tam 1 ortak soru olduğuna göre,***
a) Bu sınavda en az kaç soru ve kaç öğrenci vardır?
b) Bu sınavdaki soru sayısının 8'den fazla olduğu bilindiğine göre, en az kaç soru ve kaç öğrenci vardır?

Örnek 326 ***Bir lokantaya giden bir arkadaş grubunda, herhangi iki kişinin yediği sadece bir tek ortak yemek vardır. Menüdeki herhangi iki yemeği yiyen de, sadece bir kişi vardır. Herkes 2'den fazla yemek yediğine göre, menüde en az kaç yemek vardır? Herkes kaç yemek yemiştir?***

Örnek 327 ***Bir*** $N = \{1,2,3,...,n\}$, $n > 3$ ***kümesi ile bu kümenin bazı altkümelerinden oluşan D altküme ailesini göz önüne alalım. N kümesinin, herhangi iki elemanını içeren ve D'de bulunan sadece bir altküme varsa ve D'den alınan herhangi iki altkümenin sadece bir ortak elemanı varsa, aşağıdaki soruları yanıtlayınız.***
a) n en küçük kaçtır?
b) D'deki tüm altkümeler eşit eleman sayısına sahip ise n en küçük kaçtır?

Örnek 328 $\{1,2,3,...,n\}$ ***kümesinin 3 elemanlı altkümelerinden herhangi ikisinin tam 1 ortak elemanı var ise, n sayısı en az kaç olabilir?***

Örnek 329 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ***kümesinin n elemanlı altkümelerinin herhangi ikisinin tam 1 ortak elemanı varsa, n sayısı kaç farklı değer olabilir?***

Örnek 330 ***Bir düzlem üzerinde noktalar ve çizgiler aşağıdaki koşullara uygun olarak verilmiştir.***
P1. Herhangi iki noktadan sadece bir çizgi geçer.
P2. Herhangi iki çizgi sadece bir noktada kesişir.
P3. Herhangi üçü aynı çizgi üzerinde olmayan dört nokta vardır.
Buna göre, bir çizgi üzerinde $n+1$ ***nokta varsa aşağıdakiler doğrudur.***

a) Her çizgi üzerinde $n+1$ nokta vardır.
b) Her noktadan $n+1$ çizgi geçer.
c) Bu düzlemde n^2+n+1 nokta vardır.
d) Bu düzlemde n^2+n+1 çizgi vardır.

Örnek 331 *Herkesin eşit sayıda soru çözdüğü bir matematik sınavında, herhangi iki soruyu çözen bir tek öğrenci vardır. Ayrıca, herhangi iki öğrencinin çözdüğü tam bir ortak soru vardır. Soru sayısının, 25'den fazla olduğu bilindiğine göre, bu sınavda en az kaç soru ve kaç öğrenci vardır? Her öğrenci kaçar soru çözmüştür? Her soru kaç öğrenci tarafından çözülmüştür?*

Örnek 332 $A=\{1,2,3,...,k\}$ *kümesinin herhangi iki elemanının sadece bir kez aynı altkümede olması koşuluyla, A kümesinin 4 elemanlı m tane altkümesi alınıyor. Bu altkümelerin herhangi ikisinin tam 1 ortak elemanı var ise, k sayısı en az kaç olabilir? Koşulun sağlanması için, en az kaç tane 4 elemanlı altkümeye ihtiyaç vardır?*

Örnek 333 $A=\{1,2,3,...,21\}$ *kümesinin k elemanlı herhangi altkümelerinden oluşan kümemiz S olsun. S kümesinde, A kümesinin herhangi iki elemanını içeren sadece bir altküme vardır. S'nin herhangi iki elemanının tam olarak 1 ortak elemanı varsa, k sayısı kaç farklı değer olabilir? S kümesinin eleman sayısı kaçtır?*

ALTIN NOKTA YAYINLARI

25.1 Afin Düzlem Örneği

Örnek 334 *Her öğrencinin en az iki soru çözdüğü aşağıdaki üç özelliği sağlayan bir öğrenci grubu en az kaç kişidir? En az kaç soru vardır?*
A1. Herhangi iki soruyu çözen sadece bir tek kişi vardır.
A2. Herhangi bir öğrencinin çözemediği herhangi bir soruyu çözüp, bu öğrenciyle çözdüğü ortak soru olmayan bir tek kişi vardır.
A3. Aynı öğrenci tarafından çözülmeyen 3 soru vardır.

Örnek 335 *Bir A kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan n elemanlı altkümelerini göz önüne alalım.*
A1. A kümesinin herhangi iki elemanını içeren bir tek altküme vardır.
A2. Herhangi bir altküme ile ortak elemanı olmayan bir altküme daima vardır.
Buna göre, A kümesi en az kaç elemanlıdır?

Örnek 336 *Bir A kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan $n>2$ elemanlı altkümelerini göz önüne alalım.*
A1. A kümesinin herhangi iki elemanını içeren bir tek altküme vardır.
A2. Herhangi bir altküme ile ortak elemanı olmayan altküme daima vardır.
Buna göre, A kümesi en az kaç elemanlıdır?

Örnek 337 *Bir A kümesinin n elemanlı altkümelerinden oluşan T kümesini göz önüne alalım.*
A1. A kümesinin herhangi iki elemanını içeren T'de bir tek altküme vardır.
A2. T'deki herhangi bir altküme ile ortak elemanı olmayan, T'de $n-1$ altküme daha vardır.
Bu koşulları sağlayan en küçük n sayısı için aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.
a) Her eleman , $n+1$ altkümede bulunur.
b) A kümesi n^2 elemanlıdır.
c) T kümesi n^2+n elemanlıdır.

Örnek 338 *Bir A kümesinin 3 elemanlı altkümelerinden oluşan T kümesini göz önüne alalım.*
A1. A kümesinin herhangi iki elemanını içeren T'de bir tek altküme vardır.
A2. T'deki herhangi bir altküme ile ortak elemanı olmayan, T'de 2 altküme daha vardır.
Buna göre,
a) A kümesinin her bir elemanı kaç altkümede bulunur.
b) A kümesi kaç elemanlıdır.
c) T kümesi kaç elemanlıdır.

__Örnek__ **339** ***Bir A kümesinin 5 elemanlı altkümelerinden oluşan T kümesini göz önüne alalım.***
$A1$. A kümesinin herhangi iki elemanını içeren T'de bir tek altküme vardır.
$A2$. T'deki herhangi bir altküme ile ortak elemanı olmayan, T'de 4 altküme daha vardır.
Buna göre,
a) A kümesinin her bir elemanı kaç altkümede bulunur.
b) A kümesi kaç elemanlıdır.
c) T kümesi kaç elemanlıdır.

26 Karışık Örnekler

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 340 *$a \cdot b \cdot c \cdot d = 10\,800$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c, d) doğal sayı dörtlüsü vardır?*

Örnek 341 *x_1, x_2, x_3 ve x_4 sayıları pozitif tek sayı olmak üzere, $\sum_{k=1}^{4} x_k = 98$ eşitliğini sağlayan, n tane sıralı dörtlü varsa $n/100 = ?$* (*AIME* 1998)

Örnek 342 *$0 \leq n \leq 500$ olmak üzere, $A = \{1, 2, 3, ..., 500\}$ kümesinden rastgele seçilen bir m sayısı için, m sayısının n sayısını bölme olasılığı $1/100$ olacak şekilde en büyük n sayısı kaçtır?*

Örnek 343 *a, b ve c sayıları $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinden rastgele seçilen ve farklı olması gerekmeyen 3 sayıdır. $ab + c$ sayısının çift sayı olma olasılığı m/n $(m, n \in Z)$ ise, m nedir?*

Örnek 344 *Sedat sadece 0 ve 1 rakamlarını kullanarak en fazla 8 basamaklı tüm sayıları yazıyor. Buna göre, yazdığı tüm bu sayılarda kaç kez 1 rakamını kullanmıştır?*

Örnek 345 *100 kişilik bir mecliste, meclis başkanlığı için 4 aday vardır. Bir kişi sadece 1 oy verebiliyor.*
a) Her adayın 22'den fazla oy aldığı bilindiğine göre, kaç farklı oylama sonucu olabilir?
b) Her bir adayın aldığı oy, geri kalan üç adayın aldığı oyların toplamından küçük ise kaç farklı oylama sonucu olabilir?
c) Adayların üçünün eşit olduğu kaç farklı oylama sonucu olabilir?

Örnek 346 *$(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{12})$, $(1, 2, 3, ..., 12)$'nin bir permütasyonu olmak üzere,*

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5 > \alpha_6 \quad ve \quad \alpha_6 < \alpha_7 < \alpha_8 < \alpha_9 < \alpha_{10} < \alpha_{11} < \alpha_{12}$$

olacak şekilde, kaç $(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{12})$ permütasyonu vardır.
(*Örneğin*, $(6, 5, 4, 3, 2, 1, 7, 8, 9, 10, 11, 12.)$) (*AIME* 2006)

Örnek 347 *Bir sayının ondalık gösterimi $a_1a_2 \cdots a_k$ olsun. Buna göre, i tek sayı iken, $a_i < a_{i+1}$ ve i çift sayı iken de $a_i > a_{i+1}$ ise bu sayıya yılanımsı sayı diyelim. 1000 ile 9999 arasında kaç tane dört farklı rakama sahip yılanımsı sayı vardır?* (*AIME* 2004)

Örnek 348 *En soldaki iki rakamının toplamı ile en sağdaki iki rakamının toplamı birbirine eşit olan sayılara dengeli sayı diyelim. 1000 ile 9999 arasında kaç dengeli sayı vardır?* (*AIME* 2003)

Örnek 349 *A ve B pozitif tamsayılarının rakamları sıfırdan farklı olmak üzere, $A + B = 1000$ denklemini sağlayan, kaç (A, B) pozitif tamsayı ikilisi vardır?* (*AIME*)

Örnek 350 *Verilen bir rasyonel sayıyı en sade şeklinde yazdıktan sonra, pay ve paydasını çarpalım. 0 ile 1 arasında bu çarpım 20! sayısına eşit olacak şekilde kaç rasyonel sayı vardır?* (*AIME* 1991)

Örnek 351 *1'den 9'a kadar rakamların her birinin tam bir kez bulunduğu tüm dokuz basamaklı sayıları düşünelim. 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarının artan sırada bulunup da 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rakamlarının artan sırada bulunmadığı sayılara iyi sayılar diyelim. Örneğin,* 8 $\underline{1}$ 7 $\underline{2}$ $\underline{3}$ $\underline{4}$ 9 $\underline{5}$ $\underline{6}$ *ve* 9 7 $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$ 8 $\underline{4}$ $\underline{5}$ $\underline{6}$ *sayıları birer iyi sayılardır. Kaç iyi sayı vardır?* (*AÜMO* 2009)

Örnek 352 *10^4'den küçük olan ve en fazla iki tane farklı rakamdan oluşan kaç tane pozitif tamsayı vardır?* (*AIME* 2004)

ALTIN NOKTA YAYINLARI

Örnek 353 *Alper, Tuğra ve Berk bir zarı sırasıyla atıyorlar. İlk 1 atan elenecektir. İlk elenenin Berk olma olasılığı kaçtır?*

Örnek 354 *9999'a tam bölünen, fakat 10'a bölünmeyen, rakamları birbirinden farklı sekiz basamaklı kaç sayı vardır?*

Örnek 355 *S kümesi, iki tabanındaki açılımında tam iki tane 1 olan 1 ile 2^{40} arasındaki sayıların kümesi olsun. S kümesinden rastgele seçilen bir elemanın 9'a bölünebilme olasılığı, p ve q aralarında asal sayılar olmak üzere, p/q ise, $p+q$ toplamını bulunuz.* (*AIME* 2004)

Örnek 356 $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ *kümesi veriliyor.*
a) A kümesinin biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?
b) A kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?
c) A kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren boş kümeden farklı iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?

Örnek 357 $A = \{a, b, c, d, e\}$ *kümesi veriliyor.*
a) A kümesinin biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?
b) A kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?
c) A kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren boş kümeden farklı iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?

Mustafa Özdemir - 2014
ALTIN NOKTA YAYINLARI

27 ÇÖZÜMLÜ TEST

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

1. 1 ve 2008 arasındaki sayılardan kaç tanesi 2, 3 veya 5'e bölünmez?
A) 428 B) 527 C) 535 D) 669 E) 485

2. $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ kümesinden, $a < b < c < d < e$ olacak şekilde a, b, c, d, e sayı dizisi kaç değişik şekilde seçilebilir?
A) 126 B) 100 C) 84 D) 63 E) 96

3. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ olmak üzere, S'nin her bir iki elemanlı altkümesi için bu altkümenin elemanlarının büyük olanları toplanırsa toplam kaç olur?
A) 440 B) 439 C) 329 D) 328 E) 441

4. 2001 öğrencisi bulunan bir okulda öğrencilerin % 80 ile % 85 arasında İspanyolca öğrenen, % 30 ile % 40 arasında Fransızca öğrenen öğrenci vardır. Öğrenciler bu iki dilden en az birini öğrendiğine göre, her iki dili öğrenen öğrenci sayısının olabileceği en büyük M değeri ile en küçük m değeri arasındaki farkı bulunuz. AIME 2001
A) 499 B) 200 C) 298 D) 319 E) 411

5. Bir okulda 840 öğrenci vardır. Okuldaki her 3 öğrenciden biri futboldan, her 5 öğrenciden biri basketbolden ve her 7 öğrenciden biri de voleyboldan hoşlanmaktadır. Bu okulda, bu üç spordan da hoşlanmayan kaç öğrenci vardır?
A) 436 B) 414 C) 384 D) 404 E) Hiçbiri

6. $\{1, 2, 3, ..., 998, 999\}$ kümesinin herhangi iki elemanının toplamını içermeyecek şekilde seçilen altkümesinin eleman sayısı en çok kaç olabilir?
A) 499 B) 500 C) 519 D) 549 E) 620

7. $\{1, 2, ..., 999, 1000\}$ kümesinden, aralarındaki fark 3 veya 5 olmayacak şekilde en fazla kaç sayı seçilebilir?
A) 500 B) 150 C) 499 D) 600 E) Hiçbiri

8. A=$\{1, 2, 3, 4, ..., 999, 1000\}$ kümesinin herhangi iki elemanı arasındaki fark 4 veya 7 olmayacak şekilde seçilen altkümesinin eleman sayısı en fazla kaç olur?
A) 440 B) 450 C) 424 D) 455 E) Hiçbiri

9. Bir tamsayının karesi yada küpü olmayan sayılar sırasıyla yazılarak elde edilen $2, 3, 5, 6, 7, 10, ...$ sayı dizisinin 500'üncü terimi kaçtır? (AIME 1990)
A) 527 B) 528 C) 529 D) 532 E) Hiçbiri

10. A kümesi, $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ kümesinin 90 elemanlı bir altkümesi olmak üzere, A kümesinin elemanlarının toplamı kaç farklı sayı olabilir? (AIME 2006)
A) 900 B) 800 C) 901 D) 801 E) 890

11. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin en az 5 elemanlı alt kümelerindeki tüm elemanların toplamı kaçtır?
A) 2816 B) 2800 C) 2880 D) 2824 E) Hiçbiri

12. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{100}\}$ kümesinin her bir alt kümesindeki tüm elemanların çarpımlarını tek tek hesaplayıp, elde edilen bu çarpımları toplarsak sonuç kaç olur?
A) 1 B) $\frac{100}{101}$ C) 101 D) 100 E) $\frac{101}{2}$

13. 1000 (hariç) ile 2000 (dahil) arasında 5 veya 7'ye bölünen fakat 5 ve 7'ye bölünemeyen kaç sayı vardır?
A) 228 B) 284 C) 235 D) 269 E) Hiçbiri

14. 5 sorulu bir matematik olimpiyatına katılan 2009 öğrenciden, 324 tanesi $1, 2, 3$ ve 4'üncü soruları çözmüş, fakat 5'inci soruyu çözememişlerdir. 312 tanesi ise, 1 ve 2'inci soruyu çözmüşler, fakat $3, 4$ ve 5'inci soruyu çözememişlerdir. 918 tanesi ise, $1, 2$ ve 5'inci soruyu çözememişler fakat 3 ve 4'üncü soruyu çözmüşlerdir. Hiçbir soruyu çözemeyen kaç öğrenci vardır.
A) 420 B) 500 C) 455 D) 660 E) Hiçbiri

15. $A = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x, y, z \leq 5\}$ kümesinde, herhangi (x, y, z) elemanında, x, y ve z sayılarına (x, y, z) elemanının bileşenleri denir. A'nın her bir elemanının bileşenlerinden en büyüklerinin toplamı x ve en küçüklerinin toplamı da y ise, $x + y$ toplamını bulunuz.
A) 900 B) 460 C) 729 D) 750 E) 768

16. Üç elemanlı tüm altkümelerinin elemanları toplamı asal olan ve asal sayılardan oluşan beş elemanlı kaç tane altküme vardır?
A) 6 B) 3 C)1 D)2 E) Hiçbiri

17. $|x| + |y| + |z| \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan kaç (x, y, z) üçlüsü vardır?
A) 25 B) 24 C) 36 D) 12 E) 18

18. En az iki basamaklı polindrom sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında, 2008'inci polindrom sayının rakamları toplamı kaç olur?
A) 10 B) 11 C) 21 D) 13 E) 15

19. ALPER kelimesinin harfleri kullanılarak, ALP içermeyen 5 harfli kaç kelime oluşturulabilir?
A) 1480 B) 3050 C) 114 D) 320 E) 15

20. 2 tabanına göre yazılışında 5 tane 1 ve 5 tane 0 olan tüm pozitif tamsayıların toplamını bulunuz.
A) $182 \cdot 2^9 - 56$ B) $126 \cdot 2^9 - 56$ C) $126 \cdot 2^8$ D) $182 \cdot 2^9$ E) Hiçbiri

21. 3 tabanına göre yazılışında üç tane 2 ve üç tane 0 olan tüm pozitif sayıların toplamını bulunuz.
A) 5828 B) 4860 C) 968 D) 1320 E) Hiçbiri

22. 2, 4 ve 6 rakamları yardımıyla oluşturulan tüm 100 basamaklı sayıların kaç tanesinde yanyana gelen üç rakamın toplamı 3'e bölünür?
A) $9 \cdot 2^{98}$ B) 27 C) 2^{100} D) 9 E) Hiçbiri

23. ERGENEKON kelimesinin permütasyonlarından kaç tanesinde G,K ve R harfleri yanyana gelmez?
A) 12600 B) 12960 C) 1800 D) 10800 E) 9000

24. ERGENEKON sözcüğünün harfleri, bütün sessiz harfler alfabetik sırada geçmek üzere kaç farklı biçimde sıralanabilir?
A) 252 B) 126 C) 504 D) 190 E) Hiçbiri

25. FENERBAHÇE kelimesinin permütasyonlarının kaç tanesinde F,A,N harfleri yan yana gelmez?
A) $7 \cdot 8!$ B) $48 \cdot 8!$ C) $42 \cdot 8!$ D) $7 \cdot 7!$ E) $8 \cdot 8!$

26. FENERBAHÇE kelimesinin harflerinin oluşturduğu permütasyonlardan kaç tanesinde A harfi B ve N'den önce gelir?
A) $\frac{10!}{3! \cdot 3!}$ B) $\frac{2 \cdot 10!}{3 \cdot 3!}$ C) $\frac{10!}{3 \cdot 3!}$ D) $\frac{10!}{6 \cdot 3!}$ E) Hiçbiri

27. 3 ve 5 rakamlarının bulunduğu, 2, 7 ve 9 rakamlarının bulunmadığı 8 basamaklı kaç tane çift sayı vardır?
A) $24 \cdot 7^6 - 40 \cdot 6^6$ B) $18 \cdot 7^6 + 40 \cdot 5^6$ C) $7^6 - 6^6 + 5^6$
D) $24 \cdot 7^6 - 40 \cdot 6^6 + 16 \cdot 5^6$ E) Hiçbiri

28. $2, 3, 4, 5, 6, 7$ rakamlarından oluşan altı basamaklı sayıların içinde kaç tanesinin en az iki ardışık basamağının toplamı çifttir?
A) $6^6 - 5 \cdot 3^5$ B) 6^6 C) $6^6 - 6 \cdot 3^6$ D) $5^6 - 6 \cdot 3^5$ E) Hiçbiri

29. Üç tane 0, üç tane 5, ve üç tane 3 kullanarak dokuz basamaklı 5'e bölünebilen kaç farklı tamsayı yazılabilir?
A) 1260 B) 756 C) 630 D) 770 E) Hiçbiri

30. $\{1, 2, ..., 100\}$ kümesi, boş olmayan ve hiçbiri ardışık herhangi iki sayı içermeyen üç kümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?
A) $2^{96} + 1$ B) $2^{99} - 2$ C) 3^{99} D) $3^{100} - 1$ E) Hiçbiri

31. Beş tane özdeş silgi ile, beş tane birbirinden farklı kalem, beşerli iki gruba kaç değişik şekilde ayrılabilir?
A) 16 B) 32 C) 8 D) 64 E) Hiçbiri

32. 8 kişi üç katlı ve her katında 3 oda olan bir eve, her odada en fazla 1 kişi kalmak üzere kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?
A) $9 \cdot 10!$ B) $9 \cdot 9!$ C) $8 \cdot 8!$ D) $9!$ E) Hiçbiri

33. 10^{2010} sayısının pozitif bölenlerinin 10^{2001} in bir katı olma olasılığı nedir?
A) $\frac{1}{2012^2}$ B) $\frac{100}{2010}$ C) $\frac{10}{2010^2}$ D) $\frac{2001}{2010^2}$ E) Hiçbiri

34. Bir çekmecede n tane çorap vardır. İki tane çorap rastgele seçildiğinde her ikisinin de kırmızı olma olasılığı $\frac{11}{24}$ dür. Buna göre n sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?
A) 11 B) 8 C) 16 D) 12 E) 9

35. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinden rastgele 4 sayı seçiliyor. Bu 4 sayı arasında ardışık sayı bulunmama olasılığı kaçtır?
A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{6}$

36. Bir çekmecede 9 tane farklı renkden 9-ar tane toplam, 81 çorap vardır. Çekmeceden rastgele iki çorap alınıyor. İki çorabında aynı renk olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{2}{5}$

37. Bir oyunda, $n \geq 6$ olan bir tamsayı olmak üzere, n farklı kart kullanılmaktadır. Bu kartlardan oluşturulan 6 kartlı kümelerin sayısı, bu kartlardan seçilen 3 kartlı kümelerin sayısının 6 katıdır. Buna göre n kaçtır? (AIME 2005)
A) 11 B) 12 C) 14 D) 13 E) 16

38. Ondalık gösteriminde en az iki basamak olan bir sayının her basamağı, sağındaki basamaktan daha küçük ise bu pozitif sayıya azalan sayı diyelim. Kaç tane azalan pozitif sayı vardır? (AIME 1992)
A) 500 B) 498 C) 501 D) 499 E) Hiçbiri

39. $\{1000, 1001, 1002, ..., 2000\}$ kümesindeki sayılardan kaç tane ardışık iki sayı seçilebilir ki, bu iki sayı toplandığında toplamada taşıma işlemine gerek kalmaz? (AIME 1992)
A) 150 B) 152 C) 154 D) 156 E) 158

40. Sadece A, B ve C harflerinin kullanıldığı kelimelerde, A'dan sonra B, B'den sonra C ve C'den sonra A harfleri gelmiyor ise, bu kelimeye "iyi kelime" diyelim. 7 harfli kaç tane "iyi kelime" vardır?
A) 180 B) 186 C) 192 D) 128 E) Hiçbiri

41. 4000 ile 7000 arasında kaç tane dört farklı rakama sahip çift sayı vardır? (AIME 1993)
A) 456 B) 448 C) 560 D) 728 E) 714

42. 6 elemanlı bir S kümesi ayrık olmaları gerekmeyen ve birleşimleri S olan iki kümeye kaç değişik şekilde ayrılabilir. (AIME 1993)
A) 345 B) 365 C) 350 D) 325 E) 380

43. 9 yatay ve 9 dikey çizgiden oluşan bir satranç tahtasında m tane dikdörtgen ve n tane de kare vardır. $\dfrac{n}{m}$ ifadesinin en sade halinde pay ve paydanın toplamı kaçtır? (AIME 1997)
A) 120 B) 100 C) 108 D) 116 E) Hiçbiri

44. $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ kümesinin herhangi iki elemanının toplamları birbirinden farklı olacak şekilde seçilen bir alt kümesinin eleman sayısı en fazla kaç olabilir? (KANADA M.O. 2002)
A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) Hiçbiri

45. Dokuz tane kart $1, 2, ..., 9$ şeklinde numaralandırılıyor. Üç tane oyuncunun her biri üç kart seçip kartların numaralarını topluyor. Üç oyuncunun elde ettiği toplamın tek sayı olma olasılığını bulunuz. (AIME 1998)
A) $\frac{1}{21}$ B) $\frac{3}{14}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{7}$ E) Hiçbiri

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

1. Bir okulda öğrencilere 1'den başlayarak sırayla numara verilmiştir. Bu okuldan 150 kız öğrenci ayrılınca, kalanlar arasında kız öğrencilerin erkek öğrencilere oranı 1:2 haline gelir. Bu sefer de 450 erkek öğrenci ayrılınca kalan öğrenciler arasında erkek öğrenci - kız öğrenci oranı 1:5 olur. Okulun başlangıçtaki öğrencileri arasında numarası ne 3 ne de 5'e bölünen kaç öğrenci vardır?

A) 450 B) 480 C) 540 D) 840 E) 900

UİMO - 1998

2. $\{1, 2, \ldots, 127\}$ kümesi, her birinin içindeki elemanların toplamı aynı olan n ayrık altkümenin bileşimi olarak yazılabiliyorsa, n aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 5 B) 7 C) 10 D) 27 E) Hiçbiri

UİMO - 2001

3. $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ kümesinin tüm altkümeler kümesinde $A_1 \cap A_2$ boş küme olacak şekilde, kaç tane (A_1, A_2) sıralı altküme ikilisi vardır?

A) 2^{10} B) 3^{10} C) 4^{10} D) $\dfrac{10!}{2}$ E) $\dfrac{10!}{3!7!}$

UİMO - 1997

4. $\{1, 2, ..., 99, 100\}$ kümesinden herhangi ikisinin farkı 7 olmayacak şekilde en çok kaç eleman seçilebilir?

A) 53 B) 52 C) 51 D) 50 E) 49

UMO - 2007

5. $\{1, 2, \ldots, 2004\}$ kümesinin tek sayıda eleman içeren kaç altkümesi vardır?

A) 2^{1002} B) $2^{2002} - 2$ C) $2^{2003} - 1$ D) 2^{2003} E) Hiçbiri

UİMO - 2004

6. Bir okulda Matematik, Fen Bilgisi ve Sosyal Bilgiler derslerinin her birini 50 öğrenci seviyor. 71 öğrenci bu derslerden sadece birini severken, 35 öğrenci tam olarak ikisini seviyor. Üç dersin hepsini birden seven öğrenci sayısı kaçtır?

A) 3 B) 7 C) 10 D) 12 E) Hiçbiri

UİMO - 2001

7. Farklı pozitif tamsayılardan oluşan bir kümenin en büyük iki elemanının çarpımının 3/7'si, geriye kalan elemanların toplamına eşitse, kümedeki sayılardan en büyüğünün alabileceği en küçük değer nedir?

A) 7 B) 8 C) 14 D) 15 E) 21

UİMO - 2007

8. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x - 3\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = (x-3)^2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = (x-3)^3\}$ kümelerinin en az ikisine ait olan noktaların kümesi kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Hiçbiri

UMO - 1997

9. $1 < n < 200$ koşulunu sağlayan ve 1'den büyük hiçbir tamsayının karesi ile bölünmeyen kaç n tamsayısı vardır?

A) 116 B) 112 C) 121 D) 111 E) Hiçbiri

UMO - 1997

10. 10 elemanlı bir kümenin, hiçbiri bir diğerinin altkümesi olmayacak şekilde en çok kaç altkümesi bulunur?

A) 1024 B) 420 C) 252 D) 210 E) 126

UMO - 1998

11. 6 elemanlı bir küme hiçbiri boş olmayan 3 ayrık altkümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?
A) 243 B) 180 C) 120 D) 105 E) 90

UMO - 1998

12. S, 15 pozitif tamsayıdan oluşan bir küme olsun. S'nin boş olmayan herhangi farklı iki alt kümesindeki sayıların çarpımının da farklı olması için, S kümesindeki sayılardan en büyük olanı en az kaç olmalıdır?
A) 30 B) 31 C) 45 D) 47 E) Hiçbiri

UMO - 1998

13. $S = \{1, 2, 3, ..., 32\}$ olmak üzere, S'nin hangi k elemanlı A altkümesini alırsak alalım, A kümesinde, a, b'yi, b, c'yi bölecek şekilde farklı a, b, c sayılarının bulunmasını sağlayan en küçük k değeri nedir?
A) 17 B) 24 C) 25 D) 29 E) Hiçbiri

UMO - 2000

14. Elemanlarının hepsi 102'den küçük olan ve herhangi iki elemanının toplamını içermeyen bir pozitif tamsayı kümesinin en çok kaç elemanı olabilir?
A) 49 B) 50 C) 51 D) 54 E) 62

UMO - 2004

15. $x, y, z \leq 9$ pozitif tamsayılar olmak üzere, her (x, y, z) üçlüsü için, bu sayılardan en büyüğü ile en küçüğünün toplamına bu üçlünün gücü diyoruz. Bu tür tüm (x, y, z) üçlülerinin güçlerinin toplamı kaçtır?
A) 9000 B) 8460 C) 7290 D) 6150 E) 6000

UMO - 2007

16. 1, 2, 3, 4 rakamlarının permütasyonuyla elde edilen 4 rakamlı sayıların tümünün toplamı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 66660 B) 66000 C) 66600 D) 60000 E) 66666

UMO - 1993

17. İçinde a, b ve c'nin bulunduğu 10 değişik harfin permütasyonlarından kaç tanesinde a, b ve c harflerinden ikisi yanyana gelmez?
A) $8 \cdot 9!$ B) $4 \cdot 9!$ C) $84 \cdot 9!$ D) $89 \cdot 8!$ E) $42 \cdot 8!$

UMO - 1993

18. Ondalık yazılımında 4 ve 7 rakamları bulunup, 0 ve 8 rakamları bulunmayan kaç tane 10 basamaklı sayı vardır?
A) $2\binom{10}{2}8^8 - 6\binom{10}{2}8^7$ B) $2\binom{10}{2}8^8$ C) $8^{10} - 2 \cdot 7^{10} + 6^{10}$
D) $8! - 2 \cdot 7! + 6!$ E) $10^8 - 2 \cdot 10^7 + 6^6$

UMO - 1995

19. a, b, c, d, e, f, g, h, i, j harfleri, a, b'den ve c de d'den önce gelmek koşulu ile kaç değişik biçimde sıralanabilir?
A) $8!$ B) $\dfrac{10!}{4!5!}$ C) $4 \cdot 6!$ D) $\dfrac{10!}{4}$ E) Hiçbiri

UMO - 1997

20. Ondalık yazılımlarında hiçbir rakamın yan yana tekrarlanmadığı ve $1 \leq n \leq 10^{1997}$ koşulunu sağlayan kaç n tamsayısı vardır?
A) $\dfrac{9^{1997} - 1}{8}$ B) 9^{1997} C) $\dfrac{9^{1998} - 9}{8}$ D) $10 \cdot 9^{1996}$ E) Hiçbiri

UMO - 1997

21. İçlerinde 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rakamlarının tam olarak birer kez geçtiği 7 basamaklı tamsayıları küçükten büyüğe doğru dizersek, 2001inci sıradaki sayı kaç olur?

A) 3675421 B) 3652417 C) 3542617 D) 3467512 E) 3412576

UİMO - 2001

22. Ondalık yazılımında tüm basamakları tek sayı olan 5 basamaklı tamsayılardan kaç tanesinin en az iki ardışık basamağının toplamı 10 dur?

A) 2500 B) 1845 C) 1190 D) 3125 E) Hiçbiri

UMO - 2001

23. $A = \{1,2,3,4\}$ kümesinin her a elemanı için, $f \circ f(a) = a$ koşulunu sağlayan kaç tane $f : A \to A$ fonksiyonu vardır?

A) 10 B) 1 C) 6 D) 9 E) 24

UMO - 1993

24. Ondalık yazılımında ilki ve sonuncusu dışında her basamağındaki rakamın, sağ ve solundaki iki rakamın toplamının 5 moduna göre denk olduğu kaç tane 7 basamaklı sayı vardır?

A) 90 B) 128 C) 1440 D) 2880 E) 3200

UİMO - 1998.

25. $\{1, 2, ..., 2006\}$ kümesi, boş olmayan ve hiçbiri ardışık herhangi iki sayı içermeyen üç kümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?

A) $3^{2006} - 3 \cdot 2^{2006} + 1$ B) $2^{2005} - 2$ C) 3^{2004} D) $3^{2005} - 1$ E) Hiçbiri

UMO - 2006

26. 10 farklı kitap üç raflı bir kitaplığa, hiçbir raf boş kalmayacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

A) $36 \cdot 10!$ B) $50 \cdot 10!$ C) $55 \cdot 10!$ D) $81 \cdot 10!$ E) Hiçbiri

UMO - 2007

27. Rakamlarının sayı değerleri çarpımı 90 olan kaç tane beş basamaklı pozitif tamsayı vardır?

A) 180 B) 155 C) 215 D) 135 E) 105

UMO - 1994

28. YARIŞMA sözcüğünün harfleriyle, her harf bu sözcükte olduğu sayıda kullanılmak üzere, anlamlı veya anlamsız, iki kelimeden oluşan kaç cümle yazılabilir?

A) 2520 B) 5040 C) 15120 D) 20160 E) Hiçbiri

UMO - 2008

29. Dört 0, beş 1, ve bir 2 kullanarak on basamaklı kaç farklı tamsayı yazılabilir?

A) 1260 B) 1134 C) 756 D) 630 E) Hiçbiri

UMO - 2004

30. OLİMPİYAT sözcüğünün harfleri, bütün sesli harfler art arda geçmek üzere kaç farklı biçimde sıralanabilir?

A) $2 \cdot 3! \cdot 6!$ B) $\dfrac{9!}{2!}$ C) $6! \cdot 4!$ D) $9!$ E) Hiçbiri

UİMO - 2007

31. 9 ardışık bölümden oluşan bir şeridin her bölümü kırmızı veya beyaza boyanıyor. Herhangi bitişik iki bölüm birlikte beyaza boyanamıyorsa, bu boyama kaç değişik biçimde yapılabilir?

A) 34 B) 89 C) 128 D) 144 E) 360

UMO - 2007

32. Bir matematik dersinde öğretmen tahtaya yazdığı soruyu, Ali, Betül, Cem, Çağla, Dursun, Emre ve Fatma'nın gruplar halinde çözmesini istiyor. Her grup iki veya üç kişiden oluşacaksa, bu yedi öğrenci kaç farklı biçimde gruplara ayrılabilir?

A) 70 B) 105 C) 210 D) 280 E) 630

UMO - 2007

33. 20 toptan 10 tanesinin üstünde 0 yazılı olup, diğer 10 tanesi de, her birine farklı bir numara düşecek biçimde, 1'den 10'a kadar olan tamsayılar kullanılarak numaralanmıştır. Bu 20 toptan 10 top kaç değişik biçimde seçilebilir?

A) 1023 B) 2048 C) 1024 D) 1847 E) Hiçbiri

UİMO - 2001

34. $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$ kümesinin elemanları arasında iki ardışık sayı bulunmayan 4 elemanlı altkümelerinin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 29 B) 26 C) 78 D) 126 E) 42

UMO - 1995

35. 20 kişilik bir toplulukta, 10 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca, 10 kişi de Fransızca biliyor. Bu topluluğun üç kişilik bir altkümesinde İngilizce bilen en az bir kişi, Almanca bilen en az bir kişi ve Fransızca bilen en az bir kişi varsa, bu altkümeye bir komite diyoruz. Bu toplulukta en çok kaç farklı komite olabilir?

A) 380 B) 1020 C) 120 D) 1140 E) 570

UMO - 2005

36. 0, 1, 2,..., 9 sayılarını, tek sayılar kendi içlerinde, çift sayılar da yine kendi içlerinde artan olmak koşuluyla, kaç değişik biçimde sıralayabiliriz?

A) 126 B) 189 C) 252 D) 315 E) Hiçbiri

UMO - 2000

37. S kümesinin her elemanı T kümesinin her elemanından küçük olmak üzere, 1'den 100'e kadar olan tamsayılardan 10'ar elemanlık S ve T kümeleri kaç değişik şekilde seçilebilir?

A) $\frac{1}{2}\binom{100}{10}\binom{90}{10}$ B) $\binom{100}{10}^2$ C) $\binom{100}{20}$ D) $\binom{100}{10}\binom{90}{10}$ E) Hiçbiri

UMO - 1997

38. Her adımda tam olarak iki sayının yerleri değiştirilmek üzere, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dizilişinden iki adımda elde edilebilecek farklı dizilişlerin sayısı nedir?

A) 100 B) 176 C) 88 D) 441 E) 120

UMO - 2001

39. ABRAKADABRA kelimesinin harfleri, rastgele sıralandığında ilk A harfinin ilk B harfinden önce gelme olasılığı nedir?

A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{2}{3}$ E) Hiçbiri

UMO - 2003

40. En fazla 3, 5, 7 ve 8 top alabilen dört kutuya birbirinin aynı olan 19 top kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

A) 40 B) 36 C) 34 D) 35 E) Hiçbiri

UMO - 1999

41. 7 kırmızı, 7 beyaz topu, her kutuda tam olarak 2 top olması koşuluyla, 7 kutuya kaç değişik biçimde dağıtabiliriz?

A) 163 B) 393 C) 858 D) 1716 E) Hiçbiri

UMO - 2000

42. 10 şekeri olan Ali, her gün en az bir şeker yiyorsa, şekerlerinin tümünü günlere dağılımı itibariyle kaç değişik biçimde yiyebilir?

A) 126 B) 243 C) 1025 D) 64 E) 512

UMO - 2006

43. $xyz = 10^6$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) doğal sayı üçlüsü vardır?

A) 568 B) 784 C) 812 D) 816 E) 824

UMO - 2005

44. Birbirinin aynı olan 30 top, A ve B deki topların toplam sayısı, C ve D dekilerin toplam sayısından fazla olmak üzere, A, B, C, D kutularına kaç değişik biçimde dağıtılabilir?

A) 2600 B) 2728 C) 2856 D) 1472 E) Hiçbiri

UMO - 1999

45. 13 kişilik bir topluluk, her birinde en az bir kişi bulunan iki alt topluluğa kaç farklı şekilde ayrılabilir?

A) 63 B) 168 C) 169 D) 4095 E) 8191

UMO - 1994

46. $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{13} \leq 2006$ eşitsizliğini sağlayan kaç $(x_1, x_2, ..., x_{13})$ pozitif tamsayı on üçlüsü vardır?

A) $\dfrac{2006!}{13!1993!}$ B) $\dfrac{2006!}{14!1992!}$ C) $\dfrac{1993!}{12!1981!}$ D) $\dfrac{1993!}{13!1980!}$ E) Hiçbiri

UMO - 2006

47. Verilen altı değişik rengi kullanarak bir küpün her yüzünü farklı bir renge boyuyoruz. Küpün istenildiği kadar ve istenen istikametlerde döndürülmesiyle elde edilen iki boyamayı aynı kabul edersek, bu boyama işlemi kaç değişik biçimde yapılabilir?

A) 180 B) 90 C) 12 D) 6 E) 30

UMO - 1993

48. Bir kübün yüzlerine 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarını işaretleyerek bir zar yapmak istiyoruz. Ortak bir ayrıta sahip iki yüze komşu yüzler dersek, ardışık sayıların komşu yüzler üstünde yer alması koşuluyla, bu zarı kaç değişik biçimde yapabiliriz?

A) 10 B) 14 C) 18 D) 56 E) Hiçbiri

UMO - 1998

49. 16 kişilik bir grup içinde rastgele seçilen 6 kişi, 6 sandalyeden oluşan bir sıraya rastgele oturtuluyor. Ahmet ve Betül bu 16 kişiden ikisi ise, yan yana oturtulmuş olmaları olasılığı nedir?

A) $\dfrac{1}{10}$ B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{1}{12}$ D) $\dfrac{1}{24}$ E) Hiçbiri

UİMO - 1996

50. Bir kitap rafında 15'i mavi, 2'si kırmızı kaplı 17 kitap dizili durmaktadır. Bu raftan rastgele ardışık üç kitap alındığında bunların içinde en az bir tane kırmızı kaplı kitabın bulunması olasılığının $\dfrac{1}{5}$ olduğu bilinmektedir. Aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) Kırmızı kaplı kitaplardan hiçbiri kitap sırasının en başında değildir

B) İki kırmızı kaplı kitabın arasında tam olarak bir mavi kaplı kitap vardır.

C) İki kırmızı kaplı kitap bitişiktir.

D) Kırmızı kaplı kitaplardan biri kitap sırasının en sonundadır.

E) Hiçbiri

UİMO - 1998

51. 7 yolcu 3 vagondan oluşan boş bir teren rastgele birer vagon seçerek binerler. Birinci vagonda tam olarak iki yolcu bulunma olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{224}{729}$ B) $\dfrac{512}{2187}$ C) $\dfrac{560}{2187}$ D) $\dfrac{448}{729}$ E) $\dfrac{452}{2187}$

UMO - 1993

52. Bir torbada her birinin üzerinde 1'den 20'ye kadar olan tamsayılardan biri yazılı 20 top bulunmaktadır. Üstünde aynı sayı yazılı olan herhangi iki top yoktur. Bu torbadan bir top çekilir ve üstündeki sayı kaydedildikten sonra top torbaya geri konur. Bu işlem 10 defa tekrar ederse, çıkan 10 sayının hepsinin birbirinden farklı olma olasılığı nedir?

A) $\dfrac{\binom{20}{10}}{20^{10}}$ B) $\dfrac{\binom{29}{10}}{20^{10}}$ C) $\dfrac{10^{20}}{20^{10}}$ D) $\dfrac{\binom{20}{10}10!}{20^{10}}$ E) $\dfrac{10^{10}}{20^{20}}$

UMO - 1994

53. İki torbadan birinde beş beyaz, diğerinde ise dört beyaz, bir siyah top vardır. Bu iki torbadan biri rastgele seçilerek, içinden yine rastgele bir top çekilecektir. Çekilişten önce bu iki torbadan birine bir siyah top daha eklenirse, çekilen topun siyah olma olasılığı en fazla kaç olur?

A) $\dfrac{11}{60}$ B) $\dfrac{17}{60}$ C) $\dfrac{1}{7}$ D) $\dfrac{1}{6}$ E) Hiçbiri

UMO - 1999

54. Rastgele seçilen altı basamaklı bir doğal sayının tam olarak iki basamağında 1 bulunması olasılığı nedir?

A) $\dfrac{63}{755}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{81}{800}$ D) $\dfrac{7}{45}$ E) $\dfrac{51}{101}$

UMO - 1994

55. Bir torbada 10 kırmızı, 4 beyaz top vardır. Toplar, seçilen toplar geriye konulmaksızın, birer birer torbadan çekilmektedir. Sekizinci top da çekildikten sonra, beyaz topların tümünün çekilmiş olması olasılığı nedir?

A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{8}{51}$ C) $\dfrac{10}{143}$ D) $\dfrac{2}{7}$ E) $\dfrac{15}{64}$

UMO - 1994

56. Bir dolapta bulunan on değişik çift ayakkabı arasından karanlıkta sekiz tane tek ayakkabı rastgele alınır. Bu sekiz ayakkabı içinde on çiftten hiçbirinin hem sağ hem sol tekinin bulunmaması olasılığı denir?

A) $\dfrac{\binom{10}{8}2!2^8}{\binom{20}{8}}$ B) $\dfrac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}}$ C) $\dfrac{\binom{10}{1}\binom{9}{6}2^6}{\binom{20}{8}}$ D) $\dfrac{2^8}{\binom{20}{8}}$ E) $\dfrac{\binom{10}{8}2^8}{\binom{20}{8}}$

UMO - 1994

57. Bir salona giren üç kişi eldivenlerini vestiyere bırakıyor. Eldivenleri geri alırken, her birine rastgele iki eldiven veriliyor. Her birinin kendisine ait olan eldiveni almış olma olasılığı nedir?

A) $\dfrac{1}{90}$ B) $\dfrac{1}{15}$ C) $\dfrac{1}{18}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{6}$

UMO - 1995

58. Üstlerinde 1, 1, 3, 4, 4 ve 5 yazılı altı kart bir torbaya konur. Torbadan rastgele, sırayla ve çekilenler geri konmaksızın üç kart çekilip, üstlerindeki rakamlardan çekiliş sırasına göre oluşturulan üç basamaklı sayının 3'e bölünme olasılığı kaçtır?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{3}{7}$ E) Hiçbiri

UMO - 1999

59. Bir sırada 9 koltuk bulunmaktadır. 6 kişi bu sıralarda rastgele oturduktan sonra yan yana iki boş koltuk kalması olasılığı nedir?

A) $\dfrac{1}{12}$ B) $\dfrac{4}{12}$ C) $\dfrac{2}{12}$ D) $\dfrac{7}{12}$ E) $\dfrac{5}{12}$

UMO - 1995

60. 3 kırmızı, 3 mavi, 3 yeşil top rastgele sıralandığında, en az iki kırmızı topun yan yana gelme olasılığı nedir?

A) $\dfrac{7}{12}$ B) $\dfrac{6}{12}$ C) $\dfrac{5}{12}$ D) $\dfrac{8}{12}$ E) $\dfrac{4}{12}$

UMO - 1996

61. Bir tiyatro salonunda onar koltukluk on sıra bulunmaktadır ve koltuklar numaralanmıştır. Birbirinden habersiz bilet alan iki arkadaşın koltuklarının yan yana düşmesi olasılığı nedir?

A) $\dfrac{1}{55}$ B) $\dfrac{1}{50}$ C) $\dfrac{2}{55}$ D) $\dfrac{1}{25}$ E) Hiçbiri

UMO - 2002

62. Üçer kişilik üç aileden oluşan dokuz kişi, üç odaya, her birine üç kişi olmak üzere, rastgele girerler. Tam olarak bir ailenin bireylerinin aynı odaya girmiş olması ve diğer iki odadan hiçbirinde tam bir ailenin bulunmaması olasılığı nedir?

A) $\dfrac{3}{28}$ B) $\dfrac{27}{140}$ C) $\dfrac{9}{140}$ D) $\dfrac{3}{7}$ E) $\dfrac{27}{280}$

UMO - 1996

63. İçinde 4 kırmızı, 3 beyaz top bulunan bir torbadan iki top rastgele çıkarıldıktan sonra, yine rastgele üçüncü bir top çekiliyor. Bu topun kırmızı olma olasılığı nedir?

A) $\dfrac{4}{7}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) $\dfrac{3}{5}$ D) $\dfrac{3}{7}$ E) Hiçbiri

UİMO - 1997

64. Yüzleri $1, 2,$ 3, 5, 6 ve 9 sayıları olan bir zar üç kez atıldığında gelen sayıların toplamının üç ile bölünebilmesi olasılığı nedir?

A) $\dfrac{1}{27}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{8}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{26}{27}$

UİMO - 1997

65. Saat kısmı 1'den 12'ye kadar olan sayıları gösteren dijital bir saatin, dakika kısmı doğru çalışmakta, ancak saat kısmı bir bozukluk sonucu, saat başlarında n : 59'dan sonra, ($n+1$ ve $2n$, mod 12 düşünülmek üzere), $(n+1)$: 00 olacağına, $2n$: 00'a atlamaktadır. (Örneğin, saat, 7:00'a ayarlanırsa, bir saat sonra 8:00 yerine 2:00 olmaktadır.) Saati gelişi güzel bir zamana ayarlar ve aradan bir gün geçtikten sonra saate bakarsak, saat kısmının 4'ü gösteriyor olma olasılığı kaçtır?

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{12}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) Hiçbiri

UMO - 1999

66. A ve B isimli Türk takımları Avrupa Kupası'nda son 16 takım arasında yer alıyor. Bu takımların kura ile eşleştirilmesiyle oynanan sekiz maçta yenilen takımlar eleniyor. Kalan takımlar ise yeniden kura ile eşleştirilerek, tek bir takım kalana kadar kupa bu şekilde sürüyor. Her maçta her takımın diğerini yenme olasılığı aynı ise, A ve B takımlarının karşılaşma olasılığı nedir?

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{1}{16}$ D) $\dfrac{1}{32}$ E) Hiçbiri

UMO - 2003

67. İçlerinde siyah ve beyaz toplar bulunan iki torbada toplam 25 top var. Her torbadan rastgele birer top alındığında her ikisinin de beyaz olma olasılığı $0,54$ ise, her ikisinin de siyah olma olasılığı nedir?

A) $0,46$ B) $0,16$ C) $0,04$ D) Verilenler bu olasılığı belirlemek için yeterli değildir. E) Hiçbiri

UMO - 1997

68. Elimizde 50'si beyaz, 50'si siyah olmak üzere toplam 100 top var. Bunların tamamını her torbada en az bir top bulunacak şekilde iki torbaya dağıtıyoruz. Bu torbalardan birini rastgele seçerek, içinden yine rastgele bir top seçiyoruz. Birinci torbadaki beyaz top sayısını x, siyah top sayısını da y ile gösterelim. Tüm dağılımlar arasında, çekilen topun beyaz olması olasılığını en büyük yapan (x, y) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, 2)$ B) $(49, 48)$ C) $(25, 25)$ D) $(50, 0)$ E) Hiçbiri

UMO - 1996

69. Tüm basamaklarındaki rakamlar birbirinden farklı olan ve 11111'e bölünen on basamaklı kaç tamsayı vardır?

A) 0 B) 1264 C) 2842 D) 3456 E) 11111

UMO - 2000

70. A ve B'den oluşan 9 harfli dizilerden kaç tanesi $BABA$ kelimesini içerir?

A) 186 B) 156 C) 158 D) 154 E) 192

71. Tüm basamakları 0'dan farklı olan ve basamaklarındaki rakamlar nasıl sıralanırsa sıralansın oluşan sayıların hepsinin 7'ye bölündüğü kaç tane altı basamaklı pozitif tamsayı vardır?
A) 77 B) 11 C) 255 D) 133 E) 166

UMO - 2005

72. $\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin, her $1 \leq k \leq 4$ için $(\alpha_1 \cdots \alpha_k)$, $\{1,...,k\}$ kümesinin bir permütasyonu olmayacak şekilde, kaç değişik $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$ permütasyonu vardır?
A) 13 B) 65 C) 71 D) 461 E) Hiçbiri

UMO - 2000

73. Kaç (m,n) pozitif tamsayı ikilisi için, $2008 \cdot 2009 \cdot 2010$ sayısı mn ile bölünür?
A) $2^5 \cdot 3 \cdot 5$ B) $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5$ C) $2 \cdot 3^7 \cdot 5$ D) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ E) Hiçbiri

UMO - 2009

74. KARABURUN kelimesindeki harfler, herhangi iki ünlü yan yana gelmeyecek ve içinde UK geçmeyecek şekilde kaç farklı biçimde dizilebilir?
A) 3600 B) 3512 C) 3720 D) 3560 E) 3660

UİMO - 2009

ALTIN NOKTA YAYINLARI

75. Tam olarak yedi farklı rakamın kullanıldığı kaç tane sekiz basamaklı sayı vardır?
A) $\binom{7}{3}^2 \cdot 7!$ B) $\binom{9}{4}^2 \cdot 6! \cdot 8$ C) $\binom{8}{3}^2 \cdot 7! \cdot 3$ D) $\binom{8}{3}^2 \cdot 7!$ E) $\binom{9}{3}^2 \cdot 6! \cdot 3$

UMO - 2009

76. İlk rakamı tek olup, çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tamsayıların sayısı A ve ilk rakamı çift olup çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tamsayıların sayısı B ise, $A - B$ kaçtır?
A) 4647 B) 5000 C) 0 D) 3200 E) Hiçbiri

UMO - 2009

77. $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin tüm a elemanları için,

$$f(f(a)) = a$$

koşulunu sağlayan kaç $f : A \to A$ fonksiyonu vardır?
A) 1 B) 106 C) 127 D) 232 E) Hiçbiri

UMO - 2012

78. On tabanına göre tersten yazılım ile kendisi aynı olup 3 ile tam bölünebilen, yedi basamaklı kaç pozitif tamsayı vardır? (UİMO - 2010)
A) 6300 B) 4200 C) 3600 D) 3000 E) 2700

UİMO - 2010

79. $\{50, 100, 1000, 2000, 2010, 2011, 2012, 3000\}$ kümesinin üç elemanlı kaç altkümesinin elemanları toplamı 3 ile bölünür?
A) 30 B) 27 C) 24 D) 20 E) 18

UİMO - 2011

80. 1000 elemanlı bir kümenin 500 elemanlı alt kümelerinin sayısı aşşağıdaki sayılardan hangisine bölünmez?
A) 3 B) 5 C) 11 D) 13 E) 17

UMO - 2010

81. $\{1,2,3,...,n\}$ kümesi iki kümeye nasıl ayrılırsa ayrılsın, altkümelerden en az birindeki iki farklı elemanın toplamı bir tamkare oluyorsa n sayısı en az kaçtır? (UMO - 2009)

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

UMO - 2009

82. $\{1, 2, 3, ..., 33\}$ kümesi, her atkümedeki en az bir sayı, aynı altkümedeki iki farklı sayının toplamına eşit olacak biçimde en çok kaç altkümeye ayrılabilir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

UİMO - 2009

83. Tüm tamsayılar kümesi, farkları asal bir sayıya eşit olan herhangi iki tamsayı aynı altkümeye düşmeyecek şekilde, n altkümeye ayrılabiliyorsa, n en az kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Hiçbiri

UMO - 2009

84. Her biri dört elemanlı n kümeden, hangi farklı ikisini alırsak alalım, bu iki kümeden yalnızca birine ait olan tüm elemanlardan oluşan küme, başlangıçdaki n kümeden birine eşitse, n en çok kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 15 E) Hiçbiri

UMO - 2009

85. 4 siyah, 4 beyaz ve 4 kırmızı top, iki kırmızı top yan yana gelmemek koşuluyla kaç farklı biçimde sıralanabilir?

A) 8084 B) 8742 C) 8820 D) 8642 E) 8284

UİMO - 2011

86. 11 farklı kitap üç raflı bir kitaplığa, en çok bir raf boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

A) $75 \cdot 11!$ B) $62 \cdot 11!$ C) $68 \cdot 12!$ D) $12 \cdot 13!$ E) $6 \cdot 3!$

UMO - 2010

87. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?

A) 2059 B) 2124 C) 2187 D) 2315 E) 2316

UMO - 2012

88. $\{1, 2, 3, ..., 17\}$ kümesinin farkları 4 olan herhangi iki eleman içermeyen kaç alt kumesi vardır?

A) 3490 B) 6480 C) 6656 D) 6966 E) 8264

UİMO - 2012

89. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ rakamlarının her birini bir kez kullanarak 11 ile bölünen yedi basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

A) 720 B) 576 C) 432 D) 288 E) 144

UİMO - 2012

90. Dördü beyaz, dördü kırmızı tişört giyen sekiz öğrenci ikişer kişilik dört sıraya farklı renkte tişört giyen iki öğrenci aynı sırada oturmamak koşuluyla kaç farklı biçimde oturabilir?

A) 1728 B) 2304 C) 2880 D) 3456 E) 9216

UİMO - 2012

91. Ahmet 30 şekeri, herhangi iki günde yediği seker sayısının farkı 3'e bölünmemek koşuluyla üç günde kaç farklı biçimde yiyebilir?

A) 330 B) 300 C) 275 D) 240 E) 165

UİMO - 2012

92. 18 özdeş top 4 farklı kutuya tam olarak 2 kutuda tek sayıda top bulunacak şekilde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

A) 1050 B) 1014 C) 990 D) 972 E) 1062

UİMO - 2013

93. 2 beyaz ve 4 kırmızı taş en çok 4 öbeğe kaç farklı biçimde ayrılabilir?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

UİMO - 2013

94. $n \geq 4$ kişilik bir partide, her 3 kişinin tam olarak 1 ortak arkadaşı varsa n kaç farklı değer alabilir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) Sonsuz Sayıda E) Hiçbiri

UMO - 2008

95. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinin dört tane ardışık tamsayı içermeyen kaç altkumesi vardır?

A) 596 B) 648 C) 679 D) 812 E) 773

UMO - 2012

96. Köşeleri, düzlemdeki herhangi üçü doğrudaş olmayan 20 noktadan oluşan bir kümeye ait olan en çok kaç geniş açılı üçgen bulunabilir?

A) 6 B) 20 C) $2\binom{10}{3}$ D) $3\binom{10}{3}$ E) $\binom{20}{3}$

UMO - 2012

97. $\{1, 2, 3, ..., 20\}$ kümesinin 8 elemanlı altkümelerinden kaçı ardışık sayılar içermez?

A) $\binom{13}{8}$ B) $\binom{13}{9}$ C) $\binom{14}{8}$ D) $\binom{20}{15}$ E) $\binom{14}{9}$

UMO - 2011

98. 5 tabanına göre yazılımında 3 ve 4 rakamları geçmeyen en küçük 111'inci pozitif tamsayı nedir?

A) 756 B) 755 C) 752 D) 750 E) 760

UMO - 2013

99. 16 beyaz ve 4 kırmızı top herbiri 5 top alabilen 4 kutuya rastgele dağıtılıyor. Her kutuda tam olarak 1 kırmızı top olma olasılığı nedir?

A) $\dfrac{5}{64}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{4^4}{\binom{16}{4}}$ D) $\dfrac{5^4}{\binom{20}{4}}$ E) $\dfrac{3}{32}$

UMO - 2013

100. Yalnızca 1,2,3 rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan kaç farklı 10 basamaklı pozitif tamsayı yazılabilir?

A) 642 B) 564 C) 510 D) 456 E) 768

UMO - 2013

29 Akdeniz Üniversitesi Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı Soruları (Kombinatorik)

Bu bölümdeki soruların çözümlerini Akdeniz Üniversitesi ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATLARI kitabında bulabilirsiniz?

1. $|x| + |y| < 20$ eşitsizliğinin tamsayı çözümlerinin sayısı kaçtır?
A) 400 B) 600 C) 661 D) 761 E) 790

AÜMO - 1996

2. 33 farklı nesne, her kişiye 11'er nesne düşmek üzere, üç kişiye kaç farklı şekilde paylaştırılabilir?
A) $\binom{33}{11}\binom{22}{11}$ B) $\binom{33}{11}+\binom{22}{11}$ C) $\binom{33}{11}$ D) $11!$ E) $\dfrac{33!}{11!}$

AÜMO - 1996

3. Bir kareli kâğıt üzerindeki karelerin köşe noktalarına kafes noktaları denir. Kenar uzunluğu 1 cm olan küçük karelere bölünmüş, 204×272 cm boyutlarında dikdörtgen biçiminde bir kareli kâğıt düşününüz. Kafes noktaları bu dikdörtgenin köşegenini kaç parçaya böler?
A) 62 B) 64 C) 68 D) 70 E) 71

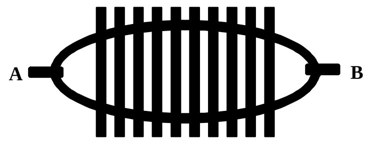
AÜMO - 1996

4. Üç avcı bir hedefe ateş ediyorlar. Bu avcılardan birincisinin hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{2}$, ikincisinin hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{3}$ ve üçüncüsünün hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{4}$'tür. Bu avcılar üçü birden aynı hedefe birer kez ateş ettiklerinde hedefe tam iki vuruşun isabet etme olasılığı nedir?
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{1}{2}$

AÜMO - 1996

5. A ve B kentlerini birleştiren iki yol, şekilde görüldüğü gibi, 10 tane küçük yol ile kesişiyor. Geçilen noktalardan bir daha geçmeksizin A'dan B'ye kaç değişik yolla gitmek mümkündür?
A) $\binom{10}{2}\binom{10}{8}$ B) 1024 C) $\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ D) 2048 E) Hiçbiri

AÜMO - 1997



6. Düzlem üzerindeki 101 noktadan, herhangi iki üçlünün en az bir ortak noktası bulunacak biçimde nokta üçlüleri seçiliyor. Bu özelliğe sahip nokta üçlülerinin maksimal sayısı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 1996 B) 1997 C) 3996 D) 4910 E) 4950

AÜMO - 1997

7. 10 tane farklı nesne ve bundan başka 10 tane de birbirinin aynısı olan nesne verilmiştir. Bu 20 nesneden kaç değişik biçimde 10 nesne seçmek mümkündür?
A) $\binom{20}{10}$ B) $\frac{20!}{10!}$ C) $10!$ D) $\binom{20}{10}2^{10}$ E) 2^{10}

AÜMO - 1997

8. Düzlem üzerinde verilmiş 15 noktanın 6'sı bir doğru üzerindedir ve bunların dışında başka hiçbir üç nokta bir doğru üzerinde değildir. Köşeleri bu 15 noktada bulunan kaç üçgen vardır?
A) 435 B) 450 C) 465 D) 860 E) Hiçbiri

AÜMO - 1998

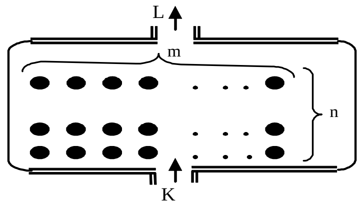
9. 0, 1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak yazılabilen tüm dört basamaklı çift sayıların en baştaki rakamlarının toplamı nedir?
A) 540 B) 525 C) 510 D) 495 E) 410

AÜMO - 1998

10. İki çocuk birlikte 10 menekşe, 15 lale, 14 karanfil topladı. Her çocuğa, her çiçekten en az 3'er tane düşmek üzere, tüm çiçekler kaç farklı şekilde bölüştürülür?
A) 2640 B) 1998 C) 900 D) 600 E) 450

AÜMO - 1998

11. K noktasından kalkan bir gezgin m×n tane noktadan oluşan matris üzerindeki noktalardan geçerek L noktasına ulaşmak istemektedir. Gezi sırasında uygulanacak kurallar şunlardır:
(a) Bir satırdan yukardaki satıra geçerken istenilen nokta seçilebilir.
(b) Hareketler yukarı, sola ve sağa olabilir; geçilen bir noktadan bir daha geçmek ve aşağı dönmek yasaktır.
Buna göre, bu gezi kaç değişik biçimde yapılabilir?



A) $m!n!$ B) m^{2n} C) n^m D) m^n E) n^{2m}

AÜMO - 1998

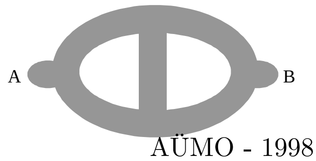
12. Bir küpün yüzlerinin belirlediği düzlemler, uzayı kaç parçaya ayırır?
A) 16 B) 24 C) 25 D) 27 E) 32

AÜMO - 1998

14. $8 \times 8 = 64$ haneli satranç tahtası üzerinde kaç tane farklı kare çizilebilir? (Her kare tamsayıda hane içermelidir; boyutları, veya zapt ettikleri yerler farklı olan karelere farklı diyoruz. Örneğin, 64 tane 1×1 karesi çizmek mümkündür.)
A) 204 B) 132 C) 200 D) 120 E) 256

AÜMO - 1999

14. Bir parkta, şekilde görüldüğü gibi, iki girişi (A ve B) olan bir yol ağı bulunmaktadır. Bu parkta, girişlerden birinden başlayıp her yoldan her iki yönde de tam bir kez geçmek ve hiç U-dönüşü yapmamak koşuluyla bir tur yürüyüş kaç farklı biçimde yapılabilir?



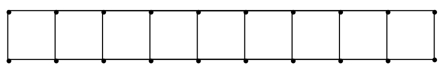
A) 0 B) 2 C) 5 D) 6 E) 8

AÜMO - 1998

15. Bir küpün her bir yüzünü, siyah veya beyaza boyuyoruz. (Bütün yüzleri aynı renkle boyamaya da izin veriliyor). Kaç farklı durum söz konusudur? (Küpün herhangi bir dönmesi sonucunda çakışabilen durumlar aynı kabul ediliyor.)
A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 2^6

AÜMO - 1999

16. 1×9 boyutlarında bir dikdörtgen, şekilde görüldüğü gibi 9 tane eşit kareye bölünmüş ve bu karelerin köşeleri işaretlenmiştir.



Köşeleri, işaretlenmiş noktalarda bulunan kaç tane ikizkenar üçgen çizilebilir?
A) 30 B) 38 C) 44 D) 56 E) 76

AÜMO - 1999

17. 99 doğru, düzlemi n parçaya bölmüştür. n'nin 300'ü aşmadığı biliniyorsa, n'nin alabileceği kaç farklı değer vardır?
A) 6 B) 5 C) 4 D) 7 E) 3

AÜMO - 1999

18. İçinde 13 kırmızı ve 8 mavi top bulunan bir torbadan rastgele bir miktar top çekiliyor. Çekilen topların en az 6'sının kırmızı ve en az 4'ünün mavi olmasını garanti etmek için en az kaç top çekilmelidir?
A) 10 B) 19 C) 15 D) 17 E) 12

AÜMO - 2000

19. 318 sayfalık bir kitabın tüm sayfalarındaki sayfa numaraları kesiliyor; sonra her sayfa numarasının bulunduğu parça, her bir parçada bir rakam bulunacak şekilde kesilerek küçük parçalara ayrılıp, bu küçük parçalar bir torbaya dolduruluyor ve torbadan rastgele bir parça çekiliyor. Çekilen parçadaki rakamın 1 olma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{11}{98}$ C) $\frac{19}{94}$ D) $\frac{23}{92}$ E) $\frac{1}{3}$

AÜMO - 2000

20. 30 farklı kitap, her bir bölmesi 30 kitap alabilen 7 bölmeli bir rafa kaç değişik biçimde dizilebilir? (bazı bölmeler boş kalabilir).

A) $\binom{30}{7}$ B) $\frac{36!}{6!}$ C) 23! D) $\frac{37!}{7!}$ E) $\frac{30!}{7!}$

AÜMO - 2000

21. 8×8 boyutlu bir *kare bulmaca* hazırlanacaktır. 8 siyah kare öyle yerleştirilecektir ki, soldan sağa ve yukarıdan aşağıya oluşacak en az 2 harfli sözcük sayısı olabilecek en büyük değerine kavuşsun. Bu en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 B) 32 C) 30 D) 28 E) Hiçbiri

AÜMO - 2001

22. 30 farklı kitap 3 kişiye, kişilerdeki kitapların sayısı bir aritmetik dizi oluşturacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir? (Aritmetik dizinin ilk terimi sıfır olabilir.)

A) $3 \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}$ B) $3 \cdot 4^{10} \cdot \binom{30}{10}$ C) $3 \cdot 2^{10} \cdot \binom{30}{10}$

D) $2 \cdot 3^{10} \cdot \binom{30}{10}$ E) Hiçbiri

AÜMO - 2001

23. 60 ardışık doğal sayı içinden, toplamları 3'e bölünebilen üç farklı sayı kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 11420 B) 10240 C) 11240 D) 10420 E) 12440

AÜMO - 2001

24. Bir çember üzerinde sabit bir A noktası alalım. Çember üzerinde alınan bir B noktası için, AB kirişinin uzunluğunun yarıçap uzunluğundan büyük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

AÜMO - 2002

25. $0, 1, 2, \ldots, 9999$ sayıları içinde 7 ve 8 rakamlarının ikisinin de kullanıldığı kaç tane sayı vardır?

A) 982 B) 964 C) 972 D) 974 E) 962

AÜMO - 2002

26. $1, 2, \ldots, 999, 1000$ sayıları verilsin. Bu sayılardan azalan aritmetik dizi oluşturacak şekilde kaç tane sayı üçlüsü seçilebilir? (Örneğin, 3, 2, 1 ve 9, 6, 3 birer azalan aritmetik dizidir.)

A) 245500 B) $\frac{1}{3}\binom{500}{3}$ C) 247500 D) $\frac{1}{3!}\binom{1000}{3}$ E) 249500

AÜMO - 2002

27. 3×3 karelik bir tahtanın her karesine bir tamsayı yazılıyor. Eğer her satır ve her sütundaki sayıların çarpımı 7 veya (-7)'ye eşitse, böyle yazılışa "iyi yazılış" diyelim. Kaç farklı "iyi yazılış" vardır?

A) 1152 B) 1536 C) 3072 D) 3600 E) 2510

AÜMO - 2004

28. Düzlemde 10 tane nokta verilmiştir. Köşeleri bu noktalarda olan üçgenlerin sayısı 118 olduğuna göre, bu noktaların en az ikisinden geçen doğru sayısı kaçtır?

A) 55 B) 45 C) 41 D) 36 E) 43

AÜMO - 2004

29. 8×8 karelik bir satranç tahtasında, bu karelerle oluşturulan ve alanı çift sayı olan dikdörtgenlerin sayısı kaç tanedir? (Bir karenin alanı 1 br^2'dir).

A) 400 B) 512 C) 648 D) 896 E) 972

AÜMO - 2004

30. 5 aynı kalem, 7 aynı defter ve 9 aynı silgi iki çocuk arasında kaç farklı şekilde paylaştırılabilir? *Not:* Çocuklardan bazılarının hiçbir şey almadığı durumlar da sayılacaktır.

A) $2^5 2^7 2^9$ B) $\binom{5}{2}\binom{7}{2}\binom{9}{2}$ C) $\dfrac{21!}{5!7!9!}$ D) 315 E) 480

AÜMO - 2005

31. 2'lik sayı tabanına göre yazılışında dört tane 1 ve altı tane 0 olan tüm pozitif sayıların toplamını bulunuz.

A) $84(2^9+1)$ B) $28(2^{11}-1)$ C) $84(2^9-1)$
D) $112(2^{10}-1)$ E) $14(2^{11}+1)$

AÜMO - 2005

32. 6 basamaklı pozitif sayılar içinde, 6 rakamını içeren ve 3'e bölünen sayıların sayısına n diyelim. n sayısının son rakamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 0 C) 3 D) 8 E) 6

AÜMO - 2005

33. $2 \leq |x| + |3y| \leq 9$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane (x, y) tamsayı ikilisi vardır?

A) 64 B) 62 C) 56 D) 60 E) 58

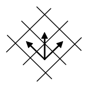
AÜMO - 2006

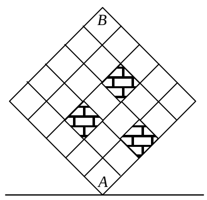
34. 5'lerin sayısı 2'lerin sayısından fazla olması koşuluyla; 2, 3 ve 5 rakamlarıyla oluşturulan 11 basamaklı sayılardan kaç tanesi 18 ile tam bölünür?

A) 360 B) 375 C) 390 D) 405 E) 425

AÜMO - 2006

35. A karesinde bulunan bir karınca, şekildeki gibi,





sadece üç yönde hareket edebilmektedir. Taralı karelerden geçmemek koşuluyla, karınca B karesine kaç farklı yoldan ulaşabilir?

A) 80 B) 24 C) 64 D) 16 E) 40

AÜMO - 2006

36. $-2 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 1$ ve $-1 \leq z \leq 1$ olmak üzere, tüm (x, y, z) tamsayı üçlülerini göz önüne alalım. Bir (x, y, z) üçlüsü için x, y ve z'nin en büyüğü ile en küçüğünün toplamına bu üçlünün "gücü" diyelim. Örneğin, $(3, -1, 0)$'ın gücü $3 + (-1) = 2$'dir. Yukarıdaki gibi oluşturulan tüm üçlülerin "güçler" toplamı nedir?

A) 0 B) 12 C) 17 D) 23 E) 27

AÜMO - 2006

37. xoy koordinat sisteminde $1 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 4$ olmak üzere, köşeleri tamsayı koordinatlı (x, y) noktalarında bulunan kaç üçgen vardır?

A) 528 B) 520 C) 516 D) 560 E) 544

AÜMO - 2007

38. 3, 5 ve 7 rakamları yardımıyla oluşturulan tüm 10 basamaklı sayıların kaç tanesinde yanyana gelen üç rakamın toplamı 3'e bölünmez?

A) 1024 B) 1536 C) 2304 D) 3456 E) 7776

AÜMO - 2007

39. $a_1 = 2$ ve $a_2, a_3, ..., a_9, a_{10}$ sayıları $\{0, 1\}$ kümesinin elemanları olmak üzere, $a_1a_2 \cdots a_9a_{10}$ on basamaklı sayılarını düşünelim. Bu sayıların kaç tanesi için, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$ eşitliği sağlanır?

A) 68 B) 72 C) 84 D) 88 E) 96

AÜMO - 2008

40. Aralarındaki uzaklık 999 km olan A ve B noktaları arasında, bu noktalar dahil, her 1 km'lik mesafede A'dan ve B'den olan uzaklığı gösteren tabelalar konmuştur. Böylece, 1000 tabela üzerinde aşağıdaki şekilde sayılar yazılmıştır :

$$\boxed{0 \mid 999}\,,\ \boxed{1 \mid 998}\,,\ \boxed{2 \mid 997}\,, ...,\boxed{998 \mid 1}\,,\ \boxed{999 \mid 0}$$

Bu tabelaların kaç tanesinde yazılmış sayılarda sadece iki farklı rakam kullanılmıştır? (Örneğin, $\boxed{722 \mid 227}$ tabelasında sadece iki rakam kullanılmıştır: 2 ve 7).

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

AÜMO - 2008

41. 10 özdeş kalem, 5 farklı kutuya, kutulardan en fazla ikisi boş kalacak biçimde, kaç farklı şekilde paylaştırılabilir?

A) 360 B) 546 C) 486 D) 780 E) 906

AÜMO - 2008

42. 5×7 dikdörtgeni satranç tahtasında olduğu gibi, 1×1 karelere (birim karelere) bölünmüştür. Bir veya birkaç birim kareden oluşan tüm dikdörtgenleri düşünelim. Bu dikdörtgenlerin alanlar toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2940 B) 2960 C) 2860 D) 2980 E) 2890

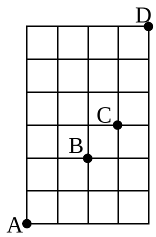
AÜMO - 2008

43. $A = \{-1, -2, -3, ..., -97, -98\}$ kümesinin, boş olmayan her alt kümesi için, bu alt kümenin elemanlarının çarpımını hesaplayalım. Ortaya çıkan tüm çarpımların toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) $98! - 97!$ E) $98! - 1$

AÜMO - 2009

44. Şekilde, 6 satır ve 4 sütunu olan tablonun sol alt köşesinden (A noktasından) sağ üst köşesine (D noktasına), çizgiler üzerinde sağa veya yukarıya hareket edilerek gidilecektir. B ve C noktalarının en az birinden geçmek koşuluyla, kaç farklı yol izlenebilir?



A) 118 B) 124 C) 122 D) 130 E) 132

AÜMO - 2009

45. 1'den 9'a kadar rakamların her birinin tam bir kez bulunduğu tüm dokuz basamaklı sayıları düşünelim. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ rakamlarının artan sırada bulunup da $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ rakamlarının artan sırada bulunmadığı sayılara iyi sayılar diyelim. Örneğin, $8\ \underline{1}\ 7\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ 9\ \underline{5}\ \underline{6}$ ve $9\ 7\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{3}\ 8\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}$ sayıları birer iyi sayılardır. Kaç tane iyi sayı vardır?

A) 372 B) 396 C) 414 D) 432 E) 456

AÜMO - 2009

46. En fazla 5, 6, 7 ve 13 kalem alabilen 4 kalemliğe 24 özdeş kalem kaç değişik şekilde dağıtılabilir?

A) 114 B) 115 C) 117 D) 118 E) 120

AÜMO - 2010

47. Ahsen, hesap makinesinde yazdığı bir sayı, 2 'den küçük olana kadar $\sqrt{\ }$ (karekök) tuşuna basıyor. Ahsen, bu işlemi, 1 ile 2010 (1 ve 2010 dahil) arasındaki sayıların kaçında tuşa çift sayıda basarak yapar?

A) 1765 B) 1766 C) 1767 D) 1768 E) 1769

AÜMO - 2010

48. $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\rangle$ gösterimi

$$\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\frac{a_5}{5^5}$$

toplamını ifade etmektedir. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 rakamları $\{0,1,2,3,4\}$ kümesinden seçilmek üzere, tüm $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\rangle$ sayılarının oluşturduğu kümenin elemanları büyükten küçüğe sıralanıyorlar. Buna göre, baştan 2222. sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\langle 1,0,1,2,3\rangle$ B) $\langle 1,1,2,1,0\rangle$ C) $\langle 2,1,1,0,2\rangle$
D) $\langle 1,1,1,3,0\rangle$ E) $\langle 1,2,1,0,3\rangle$

AÜMO - 2010

49. Bir toplulukta, en az 3 kişinin yılın aynı ayı, haftanın aynı günü ve günün aynı saatinin içinde doğduğu kesin bilindiğine göre bu topluluk en az kaç kişiden oluşmaktadır?

A) 4033 B) 2948 C) 3956 D) 4125 E) 2016

AÜMO - 2011

50. Aşağıdaki harf tablosunda, her satırdan sadece bir harf seçilmesi ve harflerin bulunduğu karelerin mutlaka birbirine dokunması şartıyla aşağıdan yukarıya veya yukarıdan aşağıya kaç tane FERMAT kelimesi oluşturulabilir? (Bir örnek yanda verilmiştir.)

A	K	D	E	N	İ	Z
K	T	F	F	F	F	T
D	E	A	E	E	A	E
E	R	R	M	M	R	R
N	M	M	R	R	M	M
İ	A	E	A	A	E	A
Z	F	T	T	T	T	F

ÖRNEK :

A	K	D	E	N	İ	Z
K	T	**F**	F	F	F	T
D	**E**	A	E	E	A	E
E	R	**R**	M	M	R	R
N	M	**M**	R	R	M	M
İ	A	E	**A**	A	E	A
Z	F	T	T	**T**	T	F

A) 50 B) 51 C) 54 D) 58 E) Hiçbiri

AÜMO - 2011

51. Pozitif tamsayılar 1'den başlayarak artan sırada yazılıyor. 1'i kutu içerisine alıyoruz. Daha sonra, $1^2 = 1$ tane sayıyı atlayarak 3'ü kutu içine alıyoruz. Bir sonraki kutu içine alınacak sayıyı da, $2^2 = 4$ tane sayı atlayarak buluyoruz. Bu şekilde, sırasıyla $3^2, 4^2, \ldots$ tane sayı atlanarak, sayıları kutu içine alıyoruz. Aşağıda örnek verilmiştir.

$$\boxed{1}, 2, \boxed{3}, \underbrace{4,5,6,7}_{2^2 \text{ terim atlandı}}, \boxed{8}, \underbrace{9,10,\ldots 16,17}_{3^2 \text{ terim atlandı}}, \boxed{18}, \underbrace{19,\ldots,34}_{4^2 \text{ terim atlandı}}, \boxed{35}, 36, \ldots$$

Buna göre, 21'inci kutunun içindeki sayı kaçtır?

A) 2891 B) 2786 C) 2938 D) 2985 E) 2878

AÜMO - 2011

52. $a\cdot b\cdot c\cdot d = 10^5$ eşitliğini sağlayan a, b, c, d doğal sayı dörtlülerinden kaç tanesi için, $a\cdot b\cdot c$ çarpımı 100'e bölünmez?

A) 416 B) 448 C) 432 D) 464 E) Hiçbiri

AÜMO - 2011

53. Doğal sayıların **ikilik** tabanda yazılışında sadece 1 ve 0 rakamları bulunur. Örneğin, $5 = (101)_2$'dir. $512, 513, 514, \ldots, 2047$ sayıları **ikilik** tabanda yazıldığında, kaç tanesinin 0'larının sayısı 1'lerinin sayısından fazla olacaktır?

A) 484 B) 516 C) 642 D) 768 E) Hiçbiri

AÜMO - 2011

54. Alper ile Burcu, hiç beraberliğin olmadığı bir tür oyun oynuyorlar. **Birinci** oyunda kaybeden diğerine 1 ceviz veriyor. **İkinci** oyunda kaybeden diğerine 2 ceviz, **üçüncü** oyunda kaybeden diğerine

4 ceviz veriyor ve oyunlar bu şekilde sürdürülerek, her oyunda kaybeden oyuncu, diğerine bir önceki oyunda verilenin iki katı ceviz veriyor. Alper, başta, 591 cevize sahipken, cevizlerinin tamamını (ne eksik, ne fazla) en az sayıda oyun oynayarak kaybediyor ve oyun bitiyor. Alper hangi oyunları kazanmıştır?

A) 2,3,7,8 B) 2,6,7,8 C) 3,4,6,9 D) 4,5,7,8 E) Hiçbiri

AÜMO - 2011

55. Aynı sınıftaki Alper, Berk, Cem ve Derya isimli öğrenciler bir test sınavına giriyorlar. Sınav sonunda, sınav sonuçlarına göre bu öğrenciler arasında kaç değişik sıralama yapılabilir?
(Örneğin, Alper ve Cem'in girdiği iki kişilik bir sınavda; Alper birinci, Cem ikinci; Cem birinci, Alper ikinci ve Alper ve Cem eşit olacak şekilde üç sıralama yapılabilir.)

A) 80 B) 75 C) 72 D) 76 E) 81

AÜMO - 2012

56. $[-25, 15]$ aralığından rastgele alınmış iki reel sayının çarpımının negatif olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{32}$ B) $\frac{13}{32}$ C) $\frac{15}{32}$ D) $\frac{17}{32}$ E) $\frac{19}{32}$

AÜMO - 2012

57. Dört bileşenli $(0,0,0,0)$ dörtlüsünden, her defasında sadece bir bileşenin 1 br artması koşuluyla $(2,1,1,2)$ dörtlüsünü kaç farklı şekilde elde edebiliriz?

A) 72 B) 90 C) 180 D) 120 E) 108

AÜMO - 2012

58. xoy koordinat düzlemi verilsin. x ve y koordinatları tamsayılar olmak üzere, (x, y) noktasında bulunan çekirge, her zıplayışında 5 br zıplayarak yine tamsayı koordinatlı bir noktaya düşüyor. Başlangıçta $(0,0)$ noktasında bulunan çekirge $(1,0)$ noktasına gelmek için en az kaç defa zıplamalıdır?

A) 6 B) 2 C) 5 D) 4 E) 3

AÜMO - 2012

59. $[0, 50]$ aralığından alınmış x, y, z tamsayılarından oluşturulan kaç farklı (x, y, z) üçlüsü için

$$(y+z)^2 - (x+y)^2 = (y-z)^2 - (x-y)^2$$

eşitliği sağlanır?

A) $50 \cdot 100$ B) $50 \cdot 101$ C) $51 \cdot 101$ D) $51 \cdot 100$ E) 51^2

AÜMO - 2012

60. 9999'a tam bölünen, fakat 10'a bölünmeyen, rakamları birbirinden farklı sekiz basamaklı kaç sayı vardır?

A) 1712 B) 1920 C) 1728 D) 1536 E) Hiçbiri

AÜMO - 2012

61. $\{1, 2, 3, ..., 2012\}$ kümesinin, en büyük ve en küçük elemanlarının toplamı 2013 olan altkümelerinin sayısının 7'ye bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 5 C) 2 D) 6 E) 1

AÜMO - 2013

62. Bir karenin her kenarı üzerinde, köşe noktaları olmayan 4'er nokta işaretlenmiştir. Aynı kenar üzerinde bulunmayan herhangi iki işaretlenmiş nokta alınıyor ve bu noktalar bir doğru parçası ile birleştiriliyor. Bu parçaların herhangi üçünün ortak noktası olmasın. Bu parçaların kesişiminden ortaya çıkan noktaların toplam sayısı kaçtır?

A) 1500 B) 1564 C) 1600 D) 1624 E) Hiçbiri

AÜMO - 2013

63. Rakamları birbirinden farklı ve birbirinin ters sırada yazılışı olan iki tane üç basamaklı sayının toplamı olarak yazılabilen sayılara Gizemli Sayı diyelim. Kaç tane Gizemli sayı vardır?

A) 142 B) 120 C) 162 D) 153 E) 136

AÜMO - 2014

64. 15 özdeş matematik ve 5 özdeş fizik kitabı, herhangi iki fizik kitabı arasında en az iki matematik kitabı olması koşuluyla bir rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?

A) 792 B) 796 C) 812 D) 714 E) 786

AÜMO - 2014

65. $A = \{1, 2, 3, ..., 18, 19\}$ ve $B = \{8, 14, 18\}$ olmak üzere $A \backslash B$ kümesinin elemanlarıyla, ardışık iki sayı içermeyen kaç altküme oluşturulabilir?

A) 2380 B) 3640 C) 4420 D) 3960 E) 4230

AÜMO - 2014

66. 5×5 şeklindeki bir karenin, her 1×1 karesinin içine $1, 2, 4, 6, 8$ rakamları yazılacaktır. Çift olan herhangi bir rakamın yanyana ve çift sayıda bulunması koşuluyla, 5×5 karesi kaç farklı şekilde doldurulabilir. (Çift olan herhangi bir rakamın yukarıdan aşağıya çift sayıda olması gerekmiyor. Yan tarafta bir örnek doldurma verilmiştir.)

1	**1**	**1**	**8**	**8**
4	**4**	**2**	**2**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**
6	**6**	**6**	**6**	**1**
4	**4**	**1**	**8**	**8**

A) 65^5 B) 29^5 C) 45^5 D) 6^{10} E) $5 \cdot 29^5$

AÜMO - 2014

67. a, b, c birbirinden farklı negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $3^a + 3^b + 3^c$ formundaki sayıları, küçükten büyüğe doğru sıralarsak, 101'inci sayı için $a + b + c$ toplamı kaç olur?

A) 18 B) 17 C) 19 D) 16 E) 15

AÜMO - 2014

Part IV

Binom Açılımı

Bu bölümdeki problemlerle ilgili <u>konu anlatımını</u> ve <u>soruların çözümlerini</u> MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

<u>Örnek</u> 358 *x ve y reel sayılar olmak üzere,*

$$\begin{cases} x-y=12 \\ x^4+32xy^3+12x^2y^2=17 \\ 4y^4+2x^3y+3x^2y^2=16 \end{cases}$$

olduğuna göre, y'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

30 Binom Katsayılarının Özellikleri

Bu bölümdeki problemlerle ilgili <u>konu anlatımını</u> ve <u>soruların çözümlerini</u> MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

<u>Örnek</u> 359 $9\binom{99}{9}+11\binom{98}{8}$ *ifadesinin sonunda kaç tane sıfır vardır?*

<u>Örnek</u> 360 $\binom{101}{1}-\binom{101}{2}+\binom{101}{3}-\cdots+\binom{101}{99}-\binom{101}{100}$ *toplamını hesaplayınız.*

<u>Örnek</u> 361 $T=\binom{100}{2}+\binom{101}{3}+\binom{102}{4}+\cdots+\binom{200}{102}$ *toplamını hesaplayınız.*

<u>Örnek</u> 362 $\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\cdots+\binom{50}{48}$ *toplamını hesaplayınız.*

<u>Örnek</u> 363 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ *olduğunu toplam özelliğini kullanarak gösterelim.*

<u>Örnek</u> 364 $(x+1)^{13}$ *ifadesinin açılımında katsayılardan kaç tanesi tektir?*

<u>Örnek</u> 365 $(x+1)^{13}$ *ifadesinin açılımında katsayıların 3'e bölünme olasılığı kaçtır?*

<u>Örnek</u> 366 $\binom{13}{r}$ *ifadesi hangi r değerleri için bir tek sayıdır?*

<u>Örnek</u> 367 $\binom{15}{r}$ *ifadesi hangi r değerleri için 3'e bölünür?*

<u>Örnek</u> 368 *Pascal üçgeninin $1, 2012, \ldots$. şeklinde devam eden 2012'inci satırındaki sayıların kaç tanesi 5'e bölünmez?*

<u>Örnek</u> 369 $\binom{2015}{r}$ *sayısı 101'e bölünecek şekildeki tüm r değerlerinin toplamını bulunuz.*

Alıştırma : $\binom{101}{r}$ sayısı 19'a bölünecek şekilde kaç r değeri vardır. Bu r değerlerinin toplamını bulunuz.

Yanıt : 60, $\sum\limits_{k=0}^{4}(150+12\cdot 19k)=3030.$

<u>Örnek</u> 370 $\left(2x^2-\dfrac{5}{4x^3}\right)^{10}$ *ifadesinin açılımında x^{10} teriminin katsayısı kaçtır?*

<u>Örnek</u> 371 $10^{2008}+12^{2008}$ *sayısının 121'e bölümünden kalan kaçtır?*

Örnek 372 $S=1+3\binom{101}{1}+3^2\binom{101}{2}+3^3\binom{101}{3}+\cdots+3^{101}\binom{101}{101}$ *toplamının 17'ye bölümünden kalan kaçtır?*

Alıştırma : $S=1+2\binom{101}{1}+2^2\binom{101}{2}+2^3\binom{101}{3}+\cdots+2^{101}\binom{101}{101}$ toplamının 19'a bölümünden kalan kaçtır?
Yanıt : 10.

Örnek 373 $S=\binom{101}{1}+3^2\binom{101}{3}+3^4\binom{101}{5}+3^6\binom{101}{7}+\cdots+3^{100}\binom{101}{101}$ *toplamının 19'a bölümünden kalan kaçtır?*

Alıştırma : $S=\binom{100}{0}+3^2\binom{100}{2}+3^4\binom{100}{4}+3^6\binom{100}{6}+\cdots+3^{100}\binom{100}{100}$ toplamının 19'a bölümünden kalan kaçtır?
Yanıt : 1.
Alıştırma : $S=\binom{100}{1}+3^2\binom{100}{3}+3^4\binom{100}{5}+3^6\binom{100}{7}+\cdots+3^{98}\binom{100}{99}$ toplamının 19'a bölümünden kalan kaçtır?
Yanıt : 1.

Örnek 374 $\binom{100}{0}^2+\binom{100}{1}^2+\binom{100}{2}^2+\cdots+\binom{100}{100}^2$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

Örnek 375 $\binom{100}{0}\binom{100}{1}+\binom{100}{1}\binom{100}{2}+\binom{100}{2}\binom{100}{3}+\cdots+\binom{100}{99}\binom{100}{100}$ *ifadesini kısaltınız.*

Problem : Siz de, benzer şekilde,

$$\binom{100}{0}\binom{100}{2}+\binom{100}{1}\binom{100}{3}+\binom{100}{2}\binom{100}{4}+\cdots+\binom{100}{98}\binom{100}{100}$$

ifadesini bulunuz.

31 Multinom Açılımı

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 376 $(x+3y+2z)^7$ *ifadesinin açılımında,* $x^3y^2z^2$ *teriminin katsayısı kaçtır?*

Örnek 377 $(1+\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^4$ *ifadesinin açılımında rasyonel terimlerin toplamını bulunuz.*

Örnek 378 $(x+3x^2+x^3)^7$ *ifadesinin açılımında,* x^{11} *teriminin katsayısı kaçtır?*

Örnek 379 $(a+b+c+d+e+f)^{10}$ *ifadesinin açılımında kaç tane terim vardır?*

Örnek 380 $(x+x^2+x^3)^5$ *ifadesinin açılımında kaç tane terim vardır?*

Örnek 381 $(x+x^3+x^6)^5$ *ifadesinin açılımında kaç tane terim vardır?*

32 Karışık Örnekler

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 382 $\binom{50}{0}+2\binom{50}{1}+3\binom{50}{2}+\cdots+51\binom{50}{50}$ *toplamı 2'nin en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür.*

Örnek 383 $(1+\sqrt{2})^{99}$ *irrasyonel sayısını ondalık olarak yazalım. Virgülden sonraki 27'inci rakam kaçtır?*

Örnek 384 $\binom{200}{100}$ *sayısının en büyük iki basamaklı asal çarpanı kaçtır?*(*AIME* 1983)

Örnek 385 $\frac{1}{2!17!}+\frac{1}{3!16!}+\frac{1}{4!15!}+\frac{1}{5!14!}+\frac{1}{6!13!}+\frac{1}{7!12!}+\frac{1}{8!11!}+\frac{1}{9!10!}=\frac{N}{1!18!}$ *olduğuna göre*, $\left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor$ *tamdeğerini hesaplayınız.* (*AIME* - 2000)

Örnek 386 $\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}}$ *ifadesini hesaplayınız.*

Örnek 387 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(n)=\sum\limits_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}2^{-k}$ *olduğuna göre*,

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(1000)$$

toplamını hesaplayınız.

Örnek 388 $a\neq -1$ *olmak üzere*, a *gerçel sayısı*,

$$a^5+5a^4+10a^3+3a^2-9a-6=0$$

eşitliğini sağlıyorsa, $(a+1)^3$ *nedir?* (*UMO* 2002)

Örnek 389 $(1+x+x^2)^9$ *ifadesinin açılımında* x^5 *in katsayısı nedir?* (*UMO* 2002)

Örnek 390 $\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ *olmak üzere*,

$$\binom{n}{p}+\binom{n+1}{p}+\binom{n+2}{p}+\cdots+\binom{n+r-1}{p}+\binom{n+r}{p}=\binom{n+r+1}{p+1}$$

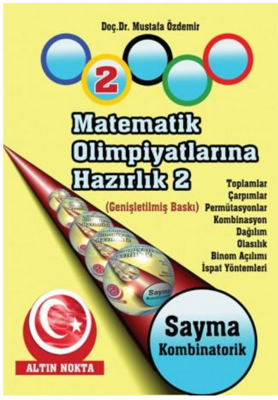
olduğundan yararlanarak

$$S=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+97\cdot98\cdot99$$

toplamını hesaplayınız. (*TÜBİTAK Liselerarası Mat. Yar.* 1977)

Örnek 391 $\binom{2013}{1}+2013\binom{2013}{3}+2013^2\binom{2013}{5}+\cdots+2013^{1006}\binom{2013}{2013}$ *toplamının 41'e bölümünden kalan kaçtır?* (*UMO - 2013*)

ÇOZUMLERI KITAPTA BULABİLİRSİNİZ



33 ÇÖZÜMLÜ TEST

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

1. $\frac{1}{16}x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$ ve $y^4 - 2xy^3 - \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 + 5 = 0$ olduğuna göre y kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 1

2. a ve b aralarında asal sayılar olmak üzere, $(ax+b)^{2000}$ ifadesinin açılımında, x^2 ve x^3 terimlerinin katsayıları eşit ise, $a+b$ kaçtır? (AIME 2000)

A) 478 B) 479 C) 667 D) 489 E) 1234

3. $6^{2007} + 8^{2007}$ sayısının 49'a bölümünden kalan kaçtır?

A) 7 B) 21 C) 14 D) 28 E) 35

4. 101^{10} sayısının son on rakamının toplamı kaçtır?

A) 11 B) 15 C) 13 D) 19 E) 14

5. $\sum\limits_{k=0}^{50} \binom{100}{2k}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2^{50} B) 2^{100} C) 2^{99} D) 2^{49} E) 2^{51}

6. $\binom{101}{1} - \binom{101}{2} + \binom{101}{3} - \cdots + \binom{101}{99} - \binom{101}{100}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2^{98} B) 2^{99} C) -2^{98} D) 1 E) 0

7. $(x+4y)^{100}$ ifadesinin açlımında, $x^{97}y^3$ teriminin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $64\binom{100}{3}$ B) $\binom{100}{3}$ C) $4^{97}\binom{100}{3}$ D) $4\binom{100}{97}$ E) Hiçbiri

8. x sayısının hangi pozitif tamsayı değeri için, $(2x+9)^{10}$ ifadesinin açılımında x^4 terimi komşu terimlerden daha büyüktür?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 7

9. $(2x+3y+4z+5)^{11}$ ifadesinin açılımında kaç tane terim vardır?

A) 78 B) 286 C) 364 D) 165 E) 1001

10. $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 + 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 + \cdots + 96\cdot97\cdot98\cdot99\cdot100$ toplamı $97\cdot98\cdot99\cdot100\cdot101$ çarpımının kaç katıdır?

A) 240 B) 16 C) 180 D) $\binom{101}{97}$ E) Hiçbiri

11. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^{100} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{x})^{100} = ?$

A) $\sum\limits_{k=0}^{50}\binom{100}{2k}x^k$ B) $\sum\limits_{k=0}^{50}\binom{100}{k}x^k$ C) $\sum\limits_{k=0}^{50}\binom{50}{k}x^{2k}$

D) $\sum\limits_{k=0}^{50}\binom{100}{2k}\sqrt{x}^k$ E) $\sum\limits_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\sqrt{x}^k$

12. $(x+2y)^{20}$ ifadesinin açılımında ardışık iki terimin katsayıları eşittir. Buna göre, bu terimleri hangileridir?

A) 7'inci ve 8'inci terimler B) 4'üncü ve 5'inci terimler

C) 6'ıncı ve 7'inci terimler D) 8'inci ve 9'uncu terimler

E) 10'uncu ve 11'inci terimler

13. $(2x+ky)^{10}$ ifadesinin açılımında katsayıları eşit olan ardışık iki terimin olması için, k aşağıdakilerden hangisi olabilir.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{8}{7}$ D) $\frac{1}{5}$ E) 0

14. $\frac{1}{1!\cdot 101!}+\frac{1}{3!\cdot 99!}+\frac{1}{5!\cdot 97!}+\cdots+\frac{1}{101!\cdot 1!}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2^{99}}{99!}$ B) $\frac{2^{100}}{99!}$ C) $\frac{2^{100}}{100!}$ D) $\frac{2^{100}}{101!}$ E) $\frac{2^{101}}{102!}$

15. $\sum\limits_{k=50}^{100}\binom{100}{k}\binom{k}{50}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\binom{100}{50}$ B) $\binom{100}{50}2^{50}$ C) $100\cdot 2^{50}$ D) $\binom{100}{50}2^{100}$ E) 2^{50}

16. $\binom{100}{50}\binom{50}{50}+\binom{100}{51}\binom{51}{50}+\cdots+\binom{100}{100}\binom{100}{50}$ toplamı 2'nin en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür?

A) 51 B) 52 C) 53 D) 55 E) 50

17. $\binom{50+0}{0}+\binom{50+1}{1}+\cdots+\binom{50+99}{99}+\binom{50+100}{100}=?$

A) $\binom{151}{100}$ B) $\binom{150}{100}$ C) $\binom{151}{101}$ D) $\binom{150}{99}$ E) $\binom{151}{99}$

18. $0\le k\le m\le n$ tamsayıları için, $\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}^{-1}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{n-1}{n-m}$ B) $\frac{n+1+m}{n+1}$ C) 1 D) $\frac{n+1}{n+1-m}$ E) $\frac{n+1}{n-m}$

19. $\sum\limits_{k=0}^{1000}k\binom{1000}{k}$ ifadesi 2'nin en büyük kaçıncı kuvvetine bölünür?

A) 1000 B) 999 C) 1002 D) 1001 E) 998

20. $n\ge 1$ tamsayısı için, $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{n}\left(2^{n+1}-1\right)$ B) $\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}+1\right)$ C) $\frac{1}{n}\left(2^{n}-1\right)$

D) $\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$ E) Hiçbiri

21. m,n doğal sayıları için, $\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{n-1}{m}+\binom{n}{m}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\binom{n+1}{m+1}$ C) $\binom{n+1}{m}$ D) $\binom{n}{m+1}$ E) $\binom{n}{m-1}$

22. $\sum\limits_{k=0}^{100}k3^k\binom{100}{k}=m2^{200}$ olduğuna göre $m=?$

A) 150 B) 75 C) 80 D) 100 E) 50

23. $\sum\limits_{k=0}^{121}k9^k\binom{121}{k}=x^2$ olduğuna göre $x=?$

A) $11\cdot 10^{60}$ B) $33\cdot 10^{30}$ C) $33\cdot 10^{60}$ D) $33\cdot 10^{120}$ E) $11\cdot 10^{30}$

24. $\sum\limits_{k=0}^{100}\frac{5^k}{k+1}\binom{100}{k}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{6^{101}-1}{505}$ B) $\frac{6^{101}}{505}$ C) $\frac{6^{101}}{100}$ D) 6^{101} E) Hiçbiri

25. $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^7-\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^7$ ifadesinin açılımında x^4 teriminin katsayısı kaçtır?

A) 105 B) 112 C) 81 D) 101 E) 51

ALTIN NOKTA YAYINLARI

26. $\sum_{k=1}^{10} 5^k \binom{11}{k}$ ifadesinin son rakamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 7

27. $\left(1 + x^6 + x^{11}\right)^{20}$ ifadesinin açılımında x^{39} teriminin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 19380 B) 4845 C) 285 D) 1140 E) Hiçbiri

28. $\left(1 + 3x + 2x^3\right)^{10}$ ifadesinin açılımında x^4 teriminin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6\frac{10!}{8!} + 3^4 \frac{10!}{4!6!}$ B) $6 \cdot \frac{10!}{8!}$ C) $3^4 \frac{10!}{4!6!}$ D) $6^2 \frac{10!}{8!} + 3^6 \frac{10!}{4!6!}$ E) $6^6 \frac{10!}{4!6!}$

29. $1 \cdot 1998 + 2 \cdot 1997 + 3 \cdot 1996 + \cdots + 1997 \cdot 2 + 1998 \cdot 1 = \binom{n}{3}$ eşitliğini sağlayan n tamsayısını bulunuz.

A) 2000 B) 1997 C) 1999 D) 2001 E) 1998

30. $(xy - 3x + 7y - 21)^n$ ifadesinin açılımında benzer terimler toplandıktan sonra en az 1996 terim olması için en küçük n pozitif tamsayısını bulunuz. (AIME 1996)

A) 41 B) 37 C) 43 D) 38 E) Hiçbiri

31. 1'den 500'e kadar olan n tamsayılarından kaç tanesi için, $\binom{2n}{n}$ sayısı 4'e bölünmez?

A)1 B) 3 C) 9 D) 10 E) Hiçbiri

32. $(x+1)^{25}$ ifadesinin açılımında katsayılardan kaç tanesi tektir?

A) 0 B) 8 C) 9 D) 7 E) Hiçbiri

33. $\binom{41}{r}$ sayısı kaç tane r değeri için tektir?

A) 0 B) 7 C) 9 D) 8 E) Hiçbiri

34 Akdeniz Üniversitesi Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı Soruları (Binom Açılımı)

1. $11^{100} - 1$ sayısının sonunda kaç tane sıfır vardır?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

AÜMO - 1996

2. $4^{2002} + 6^{2002}$ sayısının 25'e bölünmesinden elde edilen kalan kaçtır?
A) 4 B) 18 C) 12 D) 24 E) 2

AÜMO - 2002

3. $(x + y + z)^{18}$ ifadesinin açılımında kaç terim vardır?
A) 90 B) 120 C) 150 D) 190 E) 210

AÜMO - 1997

4. $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} + x_{20})^3$ ifadesinin açılımında benzer terimler toplandıktan sonra ortaya çıkan ifade kaç terimlidir? (Örnek : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ifadesi dört terimlidir.)
A)1550 B)1540 C)1570 D) 400 E) 8000

AÜMO - 2000

5. n bir doğal sayı olmak üzere, $\dfrac{1}{1!19!} + \dfrac{1}{3!17!} + \dfrac{1}{5!15!} + \cdots + \dfrac{1}{19!1!} = \dfrac{2^k}{2n+1}$ eşitliğini sağlayan k tamsayısı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 0

AÜMO - 2010

6. $(3x^2 + 2x + y + 4z)^{10}$ açılımındaki terimlerden biri rastgele seçiliyor. Seçilen terimde x^7 çarpanının bulunma olasılığı kaçtır?
A) $\dfrac{2}{13}$ B) $\dfrac{1}{13}$ C) $\dfrac{2}{15}$ D) $\dfrac{1}{15}$ E) $\dfrac{1}{12}$

AÜMO - 2013

7. Pascal üçgeninin "Şehrazad Satırı" diye adlandırdığımız,

$$1, 1001, ..., 1001, 1$$

şeklindeki 1001'inci satırındaki sayıların kaç tanesi 5'e bölünmez?
A) 48 B) 16 C) 24 D) 36 E) 30

AÜMO - 2014

Part V
İspat Yöntemleri

35 Doğrudan İspat

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 392 *Bir tek sayının karesinin 4'e bölümünden kalan 1'dir. Gösteriniz.*

Örnek 393 *İlk n tane sayma sayısının toplamının $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 394 $2x+3y=10$ *denkleminin pozitif tamsayılarda çözümünün olması için y sayısının çift olması gerekir. Gösteriniz.*

Örnek 395 $ax^2+bx+c=0$ *denkleminin köklerinin*

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ve \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 396 $\underbrace{111...1}_{100\ tane}\underbrace{222...2}_{100\ tane}$ *sayısının iki ardışık sayının çarpımı olarak yazılabileceğini gösteriniz.*

Örnek 397 $A=444...4$, $2n$ *basamaklı ve* $B=88...8$ *ise n basamaklı bir sayı olsun.* $A+2B+4$ *sayısının bir tamkare olduğunu gösteriniz.* (*J. Blk. M.O.* 2003)

Örnek 398 *x ve y iki tamsayının karesinin toplamı olarak yazılabiliyorsa, xy'nin de iki tamsayının karesinin toplamı olarak yazılabildiğini gösteriniz.*

Örnek 399 $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *ve* $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *ise* $x^y=y^x$ *olduğunu gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1974)

Örnek 400 $x,y\in\mathbb{R}^+$ *olmak üzere,* $x^3-y^3=x-y$ *olduğuna göre* $x^2+y^2<1$ *olduğunu gösteriniz.* (*SSCB M.O.* 1981)

36 Ters Durum İspatı

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 401 $12xy+9x^2+4y^2\neq 25$ *ise* $3x+2y\neq 5$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 402 *Bir sayının karesinin 4'e bölümünden kalan 1 ise bu sayı tek sayıdır. Gösteriniz.*

Örnek 403 *İki sayının çarpımı tek ise bu sayıların her ikisi de tektir. Gösteriniz.*

Örnek 404 *İki tamsayının kareleri toplamı 3'e bölünebiliyorsa bu sayının her ikisi de 3 ile tam bölünür. İspatlayınız.*

37 Olmayana Ergi (Çelişkiyle ispat) Tekniği

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 405 *x rasyonel sayı ve y irrasyonel sayı ise $x+y$ toplamının irrasyonel sayı olduğunu gösteriniz.*

Örnek 406 *Kendi kendisiyle toplandığında kendisini veren sayı sıfırdır. Gösteriniz.*

Örnek 407 *$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel sayı olmadığını gösteriniz.*

Örnek 408 *$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $n^{2010}+n^{1005}+1$ sayısının hiçbir doğal sayının karesi olamayacağını gösteriniz.*

Örnek 409 *x^2+y ve $x+y^2$ tamkare olacak şekilde x ve y pozitif tamsayılarının olmadığını gösteriniz.* (*SSCB M.O.* 1966)

Örnek 410 *$a_1 < a_2 < \cdots < a_{43} < a_{44}$ sayıları 125'i aşmayan pozitif tamsayılar olsun. Bu sayılardan ardışık olanların farkları $d_1, d_2, ..., d_{43}$ olsun. Bu 43 farkın arasında bir sayının en az 10 kez bulunacağını gösteriniz.*

Örnek 411 *$x^2+y^2=3\left(z^2+u^2\right)$ denklemini sağlayan (x,y,z,u) pozitif tamsayı dörtlüsü bulunmadığını ispatlayınız.*

Örnek 412 *$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,*

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{1/n}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{1/n}$$

sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

Örnek 413 *Aralarında asal olan iki sayının çarpımı ile toplamının en büyük ortak bölenlerinin 1 olduğunu gösteriniz.*

38 Tümevarım İle İspat

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 414 *Herhangi n pozitif tamsayısı için, $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$ olduğunu gösteriniz.*

Örnek 415 *Her n doğal sayısı için, $5n^3+13n-24$ sayısının 6'nın katı olduğunu gösteriniz.*

Örnek 416 *Her $n \in \mathbb{N}$ ve -1'den büyük x reel sayısı için, $(1+x)^n \geq 1+nx$ olduğunu gösteriniz.* (*Bernoulli Eşitsizliği*)

Örnek 417 *$f_0=1$, $f_1=1$ ve $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisini göz önüne alalım. (Bu dizi verilen kurala göre $1,1,2,3,5,8,13,21,...$ şeklinde devam eder.) Buna göre, $n \geq 1$ için*

$$f_{n-1}f_{n+1}=f_n^2+(-1)^{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 418 *Her $n=0,1,2,...$ için $11^{n+2}+12^{2n+1}$ ifadesinin 133'e tam olarak bölünebildiğini ispat ediniz.*

ALTIN NOKTA YAYINLARI

Örnek 419 *n pozitif tamsayısı için, $(1+x)^{2^n} \equiv x^{2^n} + 1 \pmod{2}$ olduğunu tümevarımı kullanarak ispatlayınız.*

Örnek 420 *$S(n) = (1^2+1)\,1! + (2^2+1)\,2! + \cdots + (n^2+1)\,n!$ toplamını hesaplayınız.*

Alıştırmalar

1. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.

2. $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + (n+1)\,2^n = n \cdot 2^{n+1}$ olduğunu tümevarımla ispatlayınız.

3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n! \geq 2^{n-1}$ olduğunu tümevarım yöntemi ile ispat ediniz.

4. $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ ve $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisi için, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$ olduğunu ispatlayınız.

5. Her $n \geq 1$ için, $3^{3n+3} - 26n - 27$ sayısının 169'a bölünebildiğini gösteriniz.

6. $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ olduğunu tümevarım ile ispatlayınız.

39 Var Olduğunu Gösterme

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 421 *Verilen birbirinden farklı herhangi x ve y reel sayıları için,*

$$\begin{cases} mx + ny > 0 \\ nx + my < 0 \end{cases}$$

olacak şekilde m ve n tamsayılarının bulunabileceğini gösteriniz. (*KANADA M.O.* 1972)

Örnek 422 *Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir doğal sayıya "güzel sayı" diyelim.*
i) Sayının kendisi bir tamkaredir.
ii) Sayı, her parçası da yine bir tamkare olacak şekilde 3 parçaya ayrılabilsin.
Buna göre, 19'a bölünebilen 11 basamaklı güzel sayının var olduğunu gösteriniz.

Örnek 423 *$a^4 = b^3 + c^2$ eşitliğini sağlayan (a, b, c) tamsayı üçlüsünün olduğunu gösteriniz.* (*SSCB. M. O.* 1980)

Örnek 424 *Rakamları toplamına bölünebilen rakamları sıfırdan farklı sonsuz sayıda sayı bulunabileceğini gösteriniz.* (*KANADA M. O.* 1984)

40 Tek Olduğunu Gösterme

Örnek 425 *Birim elemanın 1 olduğu ve birleşme özelliğinin olduğu bir çarpma işleminde, $AB = BA = 1$ ise B, A'nın tersi olarak tanımlanıyor. Bu işleme göre, A'nın bir tek tersi olabileceğini kanıtlayınız.*

41 Güvercin Yuvası İlkesi

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 426 *$1, 4, 7, ..., 100$ sayılarından seçilen 20 elemanlı herhangi bir kümede toplamı 104 olan iki elemanın olacağını ispatlayınız.* (*Putnam* 1978)

Örnek 427 *$1, 2, 3, ..., 119, 120$ sayılarından seçilen 61 sayı arasında en az iki tanesinin ortak asal böleni olmadığını gösteriniz.*

Örnek 428 *$1, 5, 9, 13, ..., 101$ sayılarından 15 sayı seçiliyor. Bu 15 sayı arasında, toplamları 104 olan iki sayının daima bulunabileceğini gösteriniz.*

<u>Örnek</u> 429 $\{5, 10, 15, 20, ..., 125\}$ *kümesinin* n *elemanlı bir altkümesi alınıyor. Altküme nasıl seçilirse seçilsin, toplamı* 150 *olan iki eleman olduğuna göre,* n *sayısı en az kaç olabilir?*

<u>Örnek</u> 430 $1, 2, 3, ..., 100$ *sayılarından seçilen* 11 *elemanlı herhangi bir kümenin elemanları toplamı aynı olan iki ayrık altkümesinin olacağını ispatlayınız.*

<u>Örnek</u> 431 *Koordinat düzleminde, tamsayı koordinatlı* A, B, C, D, E *noktaları veriliyor. Bu noktalardan ikisini birleştiren ve en az bir tane daha tamsayı koordinatlı noktadan (verilen* 5 *nokta arasında olmayabilir) geçen bir doğru parçasının daima bulunabileceğini gösteriniz.*

<u>Örnek</u> 432 *Her* 8 *sayıdan, farkları* 7*'ye bölünen iki sayının seçilebileceğini ispatlayınız.*

<u>Örnek</u> 433 *Herhangi* n *pozitif tamsayısı için,* 5 *ve* 0 *rakamlarıyla oluşturulan ve* n*'ye bölünen bir sayının daima bulunabileceğini ispatlayınız.*

<u>Örnek</u> 434 *Herhangi <u>üç tamsayıdan</u>* $a^3b - ab^3$ *sayısı* 10*'a bölünebilecek şekilde <u>iki tane</u>* a *ve* b *sayısı seçilebileceğini gösteriniz.*

<u>Örnek</u> 435 *Asal çarpanları sadece* 5, 7 *ve* 11 *asal sayılarından oluşan* 9 *tane sayı içinde çarpımları tamkare olan iki sayı bulunduğunu ispatlayınız.*

<u>Örnek</u> 436 $1, 2, 3, ..., 100$ *sayılarından seçilen herhangi* 52 *sayıdan, aralarındaki fark* 10 *olan iki sayı olacağını gösteriniz.*

<u>Örnek</u> 437 *Son* 3 *rakamı* 001 *ile sona eren,* 3*'ün bir kuvvetinin daima bulunabileceğini ispatlayınız.*

<u>Örnek</u> 438 $2017^n - 1$ *sayısının son* 2017 *rakamı sıfır olacak şekilde bir pozitif tamsayının <u>var olduğunu</u> gösteriniz.*

<u>Örnek</u> 439 63*'ten küçük* 6 *farklı pozitif tamsayı içinden,* $b < a \leq 2b$ *olacak şekilde* a *ve* b *sayılarının bulunacağını gösteriniz.*

<u>Örnek</u> 440 *"*$\{1, 2, ..., 9\}$ *kümesinin* 5 *elemanlı hangi* 6 *altkümesini alırsak alalım, bunlardan en az bir ortak elemana sahip* k *tanesi bulunur" önermesinin doğru olmasını sağlayan en büyük* k *tamsayısı nedir?* (*UMO* 2006)

<u>Örnek</u> 441 $i = 1, 2, \cdots, 2010$ *için,* a_i *ler sıfırdan farklı rakamları göstermek üzere,* 2010 *basamaklı* $n = a_1 a_2 \cdots a_{2010}$ *sayısı göz önüne alınıyor. Ya* n *sayısı, ya da* n *sayısının tüm rakamlarının yerlerine olmamak koşuluyla, bazı rakamlarının yerlerine* 0

<u>Örnek</u> 442 *Bir torbada* 11 *mavi,* 8 *sarı ve* 4 *kırmızı top vardır. Torbadan rastgele top alınıyor. En az kaç top alınmalı ki,*
a) Aynı renkten en az 3 *top bulunsun.*
b) Her renkten en az bir top bulunsun.
c) En az 6 *tane sarı top bulunsun*

<u>Örnek</u> 443 *İçinde* 15 *sarı,* 10 *mavi ve* 8 *kırmızı top bulunan bir torbadan rasgele bir miktar top çekiliyor. Çekilen topların en az* 6*'sının kırmızı, en* 3*'ünün sarı ve en az* 4*'ünün mavi olmasını garanti etmek için en az kaç top çekilmelidir?*

Alıştırma : İçinde 13 kırmızı ve 8 mavi top bulunan bir torbadan rasgele bir miktar top çekiliyor. Çekilen topların en az 6'sının kırmızı ve en az 4'ünün mavi olmasını garanti etmek için en az kaç top çekilmelidir? (AÜMO - 2000)
Yanıt : $13 + 4 = 17$.

Örnek 444 ***Bir kutuda mavi ve kırmızı olmak üzere toplam 20 kalem vardır. Herhangi 9 kalemden en az biri mavi, herhangi 15 kalemden en az biri ise kırmızıdır. Buna göre, bu kutudaki kırmızı kalemlerin sayısı, en az kaç olabilir?***

Örnek 445 ***Her biri 20'den büyük olan pozitif tamsayıların oluşturduğu bir kümenin, herhangi bir elemanı, başka bir elemanının 2 katı olmayacak şekilde seçilen altkümesinin eleman sayısı en fazla kaç olabilir?***

Örnek 446 ***99 tane nesneyi, 7 tane kutuya dağıtmak istiyoruz. Kutuların birindeki nesnelerin sayısının en az k tane olmasını garanti eden en büyük k değeri kaçtır?***

Örnek 447 ***n tane nesneyi, m tane kutuya dağıtmak istiyoruz. Kutuların birindeki nesnelerin sayısının en az k tane olmasını garanti eden en büyük k değeri kaçtır?***

Örnek 448 ***Bir sınıfta en az kaç kişi olmalı ki, grubun içinde aynı ayda doğmuş 5 kişi kesinlikle bulunsun?***

Örnek 449 ***Bir toplulukta, en az 5 kişinin, yılın aynı ayı ve haftanın aynı günü doğduğu kesin bilindiğine göre bu topluluk en az kaç kişiden oluşmaktadır?***

Alıştırma : Bir toplulukta, en az 3 kişinin yılın aynı ayı, haftanın aynı günü ve günün aynı saatinin içinde doğduğu kesin bilindiğine göre bu topluluk en az kaç kişiden oluşmaktadır? (AÜMO - 2012)
Yanıt : $2(7 \cdot 12 \cdot 24) + 1 = 4033$.

Örnek 450 ***30 kişilik bir sınıfta yapılan 5 soruluk bir sınavda, herhangi 20 kişiden en az 3 kişi tam olarak 4 soru ve en az 5 kişi tam olarak 2 soru doğru çözmüştür. En az kaç öğrenci, 2 veya 4 soru çözmüştür?***

Alıştırma : 50 kişilik bir sınıfta yapılan 4 soruluk bir sınavda, herhangi 40 kişiden en az 1 kişi tam olarak 3 soruyu, en az 2 kişi tam olarak 2 soruyu, en az 3 kişi tam olarak 1 soruyu doğru, en az 4 kişi ise bütün soruları yanlış çözmüştür. Tek sayıda soru çözen öğrencilerin sayısı en az kaçtır? (UMO - 2008)
Yanıt : $(50 - 40 + 1) + (50 - 40 + 3) = 24$.

42 Karışık Problemler

Bu bölümdeki problemlerle ilgili konu anlatımını ve soruların çözümlerini MATEMATİK OLİMPİYATLARINA HAZIRLIK CİLT 2 kitabında bulabilirsiniz?

Örnek 451 *Her $k \geq 3$ tamsayısı için, çarpmaya göre terslerinin toplamları 1 olan k tane pozitif tamsayı bulunabileceğini gösteriniz.*

Örnek 452 *m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, 2^k+1 formundaki sayıların $m+2n(m-1)$ formunda yazılamayacağını ispatlayınız.*

Örnek 453 *m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, 2^k+1 formunda olmayan sayıların $m+2n(m-1)$ formunda yazılabileceğini ispatlayınız.*

Örnek 454 *$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ sayısı rasyonel olacak şekilde bir n pozitif tamsayısının olmadığını ispatlayınız.*

Örnek 455 *1'den başka ortak böleni olmayan a, b ve c pozitif tamsayıları için, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ sayısı tamkare olacak şekilde, sonsuz sayıda (a,b,c) üçlüsü bulunabileceğini gösteriniz.*

Örnek 456 *$a_1, a_2, \cdots, a_n$ tamsayıları veriliyor. $a_{r+1}+a_{r+2}+\cdots+a_s$ toplamı n'ye bölünebilecek şekilde, $0 \leq r < s \leq n$ koşulunu sağlayan r ve s sayılarının olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 457 *$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ sayısı rasyonel sayı ise, $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ ve $\sqrt{c}$ sayılarının her birinin rasyonel olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 458 *a sıfırdan farklı pozitif bir tamsayı olsun. a sayısı bir tamkaredir ancak ve ancak her $b \in \mathbb{N}^+$ için, $a+bc$ tamkare olacak şekilde bir $c \in \mathbb{N}^+$ sayısı vardır. Gösteriniz.*

Örnek 459 *$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve m, n pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$a^m+b^m = c^m \quad \text{ve} \quad a^n+b^n = c^n$$

ise, $m = n$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 460 *a, b ve c sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,*

$$a+b+c \quad ve \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

ifadelerinin ikisi birden 0 olamaz. Gösteriniz.

Örnek 461 *$x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,*

$$x^2+xy+y^2$$

sayısının birler basamağı 0 ise, onlar basamağının da 0 olacağını ispatlayınız.

Örnek 462 *Son dört rakamı aynı olan 2'nin kuvveti yoktur. İspatlayınız.*

Örnek 463 *k tane 0'dan ve 2 tane 1'den oluşan, 1000...0001 sayısı asal ise, $k+1$ sayısı, 2'nin bir kuvvetidir. Gösteriniz.*

Örnek 464 *$x = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$, $n+1$ basamaklı sayısı için,*

$$a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1 \leq a_0 = 5$$

ise, x sayısına güzel sayı diyelim. x ve x^2 sayılarının her ikisi de güzel sayı olacak şekilde sonsuz sayıda güzel sayı bulunduğunu gösteriniz.

Örnek 465 *İlk dört ve son dört basamağı 2009 olan ve 2007'ye bölünen bir sayının bulunduğunu gösteriniz.*

Örnek 466 1 *ve* 3 *rakamlarıyla oluşturulan*

$$A=\{1,3,11,13,31,33,111,113,...\}$$

kümesinde, aritmetik olarak artan üç farklı sayının bulunamayacağını ispatlayınız.

Örnek 467 $S(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ *olsun.*

$$S(1)+S(2)+\cdots+S(n-1)=nS(n)-n$$

olduğunu gösteriniz. (*KANADA M.O.* 1973)

Örnek 468 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ *negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,* $S=\sum_{i<j} x_i x_j$ *olsun. karesi* $(2S)/(n^2-n)$ *sayısından büyük olmayan en az bir* x_i *sayısının olduğunu gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1972)

Örnek 469 1*'den büyük bir sayının iki veya daha fazla ardışık pozitif tamsayının toplamı olarak yazılabilmesi için gerek ve yeter şart*

Örnek 470 1984 *tane ardışık sayının toplamının bir tamkare olamayacağını gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1984)

Örnek 471 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}(1+2+\cdots+n)$ *olduğunu gösteriniz.* (*KANADA M.O.* 1974)

Örnek 472 $\frac{n-1}{2(n+1)}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 473 $\frac{1}{1999}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$ *eşitsizliğini ispatlayınız.*

Örnek 474 $m_1,m_2,...,m_s$ *ve* $n_1,n_2,...,n_k$ *pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} m_i n_j=\left(\sum_{i=1}^{s} m_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 475 $4,12,32,80,192,...,(n+1)2^n$ *sayı dizisinin ilk* n *sayısının ortalamasını bulunuz.*

Örnek 476 $T_n=1+2+\cdots+n$ *ve* $S_n=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}$ *olduğuna göre,*

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{1996}}>1001$$

olduğunu gösteriniz. (*Asya Pasifik M.O* 1997)

Örnek 477 $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}$ *toplamını hesaplayınız.*

Örnek 478 $S_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}$ *toplamının her* $n\geq 2$ *için,* $\frac{5}{4}$*'ten küçük olacağını ispatlayınız.*

Örnek 479 $|a|>1$ *olmak üzere,* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{a^{k-1}}=\left(\frac{a}{a-1}\right)^2$ *olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 480 $1\leq k\leq n$ *tamsayıları için,* $\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}2^{n-r}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 481 *$m < n$ pozitif tamsayıları için,*

$$\frac{n^n}{m^m(n-m)^{n-m}} > \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Asya Pasifik M.O.* 2000)

Örnek 482 *n sayısı 2'nin kuvveti değil ise $\binom{2n}{n}$ sayısının daima 4'e bölünebildiğini gösteriniz.*

Örnek 483 *$n \geq 1$ olmak üzere, $\binom{3n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{n}{k}$ olduğunu ispatlayınız.*

Örnek 484 *n bir pozitif tamsayı olmak üzere,*

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)^n + \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)^n - 2$$

ifadesinin bir tamsayının karesi olduğunu ispatlayınız.

Örnek 485 *n pozitif bir tamsayı ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x \geq 1$ ve $y \geq 1$ olsun.*

$$x^n + y^n = z^n + 1 \quad \text{ve} \quad x + y = z + 1$$

ise, x, y ve n'den en az birinin 1 olduğunu ispatlayınız.

Örnek 486 *Her m pozitif tamsayısı için, $\left(\sqrt{2010}+\sqrt{2009}\right)^{2m}$ sayısı ile aralarındaki fark $\dfrac{1}{(4 \cdot 2009)^m}$'den büyük olmayan bir tamsayının bulunabileceğini ispatlayınız.*

Örnek 487 *n pozitif tamsayısının rakamları toplamı 100, $44n$ sayısının rakamları toplamı da 800 ise, $3n$ sayısının rakamları toplamı kaçtır?* (*Rusya M.O.* 1999)

Örnek 488 *Onluk sistemdeki yazılımında rakamlarının küpleri toplamı kendisinden büyük olan en büyük sayının 1999 olduğunu gösteriniz.*

Örnek 489 *Üç tane ardışık sayının çarpımının bir tamsayının bir kuvveti olamayacağını gösteriniz.*

Örnek 490 *n pozitif tamsayısı için, $2n+1$ ve $3n+1$ sayıları tamkare ise, $5n+3$ asal değildir. Gösteriniz.*

Örnek 491 *$a_1 = 1$ ve $n > 1$ için, $a_n = \left\lfloor \dfrac{n^3}{a_{n-1}} \right\rfloor$ olarak tanımlanıyor. Buna göre, $f(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{2k+11}$ ise, $f(100)$ kaçtır?*

Örnek 492 *a pozitif tamsayı olmak üzere, x ve y tamsayıları için, $4a+1 = x^2+y^2$ eşitliği sağlanıyorsa,*

$$a = \frac{n^2+n}{2} + \frac{m^2+m}{2}$$

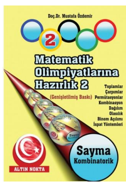
olacak biçimde n ve m tamsayıları olduğunu gösteriniz.

Örnek 493 *$a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $a+2b$ ve $b+2a$ sayıları tamkare ise, a ve b sayılarının her birinin 3'ün katı olduğunu gösteriniz.*

Örnek 494 *Aşağıdaki iç içe parantezlerden oluşan işlemin sonucunu bulunuz.*

$$2010+\frac{1}{2}\left(2009+\frac{1}{2}\left(2008+\frac{1}{2}\left(2007+\cdots+\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}\cdot 2\right)\right)\right)\cdots\right)$$

Örnek 495 *n bir tamsayı ise, $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \dfrac{n+1}{2} \right\rceil = n$ olduğunu gösteriniz.* (*Harvard MIT Math. Tournament 2002*)



Part VI
ÇALIŞMA SORULARI

Bu bölümde birinci ve ikinci cildin konularıyla ilgili dünya olimpiyatlarında sorulan klasik olimpiyat problemleri verilmiştir. Bu soruları, eğer gerekiyorsa, ispat yöntemlerini kullanarak çözmeye çalışınız.

1. Paydası 1703 olan 1'den küçük sadeleşemeyen tüm kesirlerin toplamını bulunuz.

2. $n > 1$ pozitif tamsayısı için, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ toplamının tamsayı olamayacağını gösteriniz. (BREZİLYA M.O. 1983)

3. $(\sqrt{2} - 1)$ sayısının tüm kuvvetlerinin, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ formunda yazılabileceğini ispatlayınız. (KANADA M.O. 1994)

4. $1,\ 2+3,\ 4+5+6,\ 7+8+9+10,\ ...$ şeklinde devam eden sayılardan n'inci toplamı hesaplayınız. (İSVEÇ M.O. 1983)

5. Her n pozitif tamsayısı için, $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ sayısının 3804'e bölünebildiğini gösteriniz. (MEKSİKA M.O. 1987)

6. A, $\{1, 2, 3, ..., 17\}$ kümesinin 8 elemanlı bir altkümesidir. A kümesinde, aynı farka sahip üç farklı eleman çiftinin olduğunu ispatlayınız. (KANADA M.O 1999)

7. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \geq 1$ için, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ve $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ sayılarının hangisi büyüktür. Gösteriniz. (KANADA M.O 1969)

8. $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ pozitif rasyonel sayıları sadeleşemez ve $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$ olduğuna göre, $b = d$ olduğunu ispatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1987)

9. $n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+m) = 1000$ toplamını sağlayan tüm m ve n pozitif tamsayılarını bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1964)

10. $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ve $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ olmak üzere, p, q, r sıfırdan farklı gerçel sayıları ve n pozitif tamsayısı için, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{pa^n + qc^n + re^n}{pb^n + qd^n + rf^n}$ olduğunu ispatlayınız. (KANADA M.O 1969)

11. Ortadaki rakamı silindiğinde elde edilen sayıya bölünen 5 basamaklı tüm sayıları bulunuz. (KANADA M.O 1971)

12. $m^3 = n^3 + n$ denklemini sağlayan tüm m ve n tamsayılarını bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1969)

13. $(3 + \sqrt{5})^n$ sayısının kesir kısmı $0,99$ sayısından büyük olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı var mıdır? (İSVEÇ M.O. 1975)

14. 10201 sayısı bir sayının 2'den büyük bir tabanda yazılmış hali olsun. Bu sayının taban ne olursa olsun asal olamayacağını ispatlayınız. (KANADA M.O 1972)

15. Rakamları 3 veya 7 olabilen, 7 basamaklı 21 ile tam bölünebilen tüm sayıları bulunuz. (MEKSİKA M.O. 2001)

16. $\{100, 101, 102, ..., 1000\}$. kümesinin elemanları geometrik olarak artan en büyük elemanlı altkümesini bulunuz. (KANADA M.O 1972)

17. a ve b negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $8a + 15b$ formunda yazılamayan en büyük sayı kaçtır? (KANADA M.O 1974)

18. $7 + 7b + 7b^2$ sayısı bir tamsayının dördüncü kuvveti olacak şekilde en küçük b pozitif tamsayısı kaçtır? (KANADA M.O 1977)

19. $a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}+\dfrac{1}{(a-b)^2}$ sayısının bir rasyonel sayının karesi olduğunu ispatlayınız. (İSVEÇ M.O. 1976)

20. $f(m)$ sayısı m tane 6'dan oluşan 66...66 sayısını göstermek üzere, $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ toplamını hesaplayınız. (İSVEÇ M.O. 1978)

21. $x,y,z\in\mathbb{R}$ için, $x+y+z=5$ ve $xy+yz+xz=3$ olduğuna göre, z'nin en büyük değeri için, x ve y'yi bulunuz. (KANADA M.O 1978)

22. Hiçbir rakamı 0 olmayan ve rakamları toplamı ile bölünen sonsuz sayıda tamsayı olduğunu gösteriniz. (KANADA M.O 1984)

23. En soldaki rakamı en başa geldiğinde 2 katı elde edilen tamsayı var mıdır? Gösteriniz. (KANADA M.O 1985)

24. n tane 1 ve $n+1$ tane 2 sayısından oluşan $N=11...122...25$ sayısının bir tamkare olduğunu ispatlayınız. (İSVEÇ M.O. 1981)

25. $a_1,a_2,...,a_{14}$ pozitif sayıları, $\sum 3^{a_i}=6558$ eşitliğini sağladıklarına göre, a_i sayılarının 2'şer kez $1,2,...,7$ değerlerinin aldığını gösteriniz. (İSVEÇ M.O. 1984)

26. $n!$ sayısı 2^{n-1} sayısı ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart n'nin 2'nin kuvveti olmasıdır. İspatlayınız. (KANADA M.O 1985)

27. $a!+b!+c!=2^n$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz. (İRLANDA M.O. 2001)

28. $2^{1/2}4^{1/4}8^{1/8}...(2n)^{1/2n}<4$ olduğunu gösteriniz. (İRLANDA M.O. 1996)

29. k tek sayı olmak üzere, $(1+2+\cdots+n)$ sayısının $(1^k+2^k+\cdots+n^k)$ sayısını böldüğünü ispatlayınız. (KANADA M.O 1986)

30. S pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olmak üzere, $P(S)$ kümesi, S kümesinin elemanlarının çarpımını göstersin. $M(S)$ ise, S'nin boştan farklı tüm T altkümeleri için elde edilen $P(T)$ değerlerinin aritmetik ortalamasını göstersin. K kümesi ise, S kümesine bir tamsayı daha ilave edilerek elde edilen kümeyi göstermek üzere, $M(S)=13$ ve $M(K)=49$ ise, K kümesini bulunuz. (KANADA M.O 1988)

31. $|||||x^2-x-1|-2|-3|-4|-5|=x^2+x-30$ denklemini çözünüz. (İSVEÇ M.O. 1984)

32. 1989^{1989} rakamları toplamı a, a'nın rakamları toplamı b ve bu şekilde devam edilerek en sonunda elde edilen sayı kaçtır? (KANADA M.O 1989)

33. $f(x)=\dfrac{9^x}{3+9^x}$ ise, $f(1/1996)+f(2/1996)+f(3/1996)+\cdots+f(1995/1996)$ toplamını hesaplayınız. (KANADA M.O 1995)

34. $\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 40\}$ kümesinin herhangi ikisinin çarpımı tamkare olmayacak şekilde 26 elemanlı bir altkümesini bulunuz. Aynı koşulu sağlayan 27 elemanlı bir altkümenin bulunamayacağını ispatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1995)

35. $g(n)=(n^2-2n+1)^{1/3}+(n^2-1)^{1/3}+(n^2+2n+1)^{1/3}$ olduğuna göre,

$$1/g(1)+1/g(3)+1/g(5)+\cdots+1/g(999999)$$

toplamını hesaplayınız. (Avustralya 1991)

36. $\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 9\}$ kümesinin, herhangi iki elemanının toplamı farklı olan altkümesini, eleman sayısı en fazla olacak şekilde belirleyiniz. (KANADA M.O 2002)

37. a) Verilen 52 tamsayı arasında toplamı veya farkı 100 olan iki sayının daima bulunacağını gösteriniz.

b) Verilen 100 tamsayıdan oluşan bir kümenin elemanları toplamı 100 ün katı olan boş kümeden farklı bir altkümesini bulabiliriz. Gösteriniz. (British M.O. 1966)

38. $a, b \in \mathbb{R}$ için, $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$, $b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$ olduğuna göre, $a + b = ?$ (İSVEÇ M.O. 2002)

39. $\dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n}$ tamkare olacak şekilde en küçük $n > 1$ tamsayısını bulunuz. (British M.O. 1994)

40. $(13 + \sqrt{x})^{1/3} + (13 - \sqrt{x})^{1/3}$ tamsayı olacak şekilde tüm pozitif x reel sayılarını bulunuz. (İRLANDA M.O. 2001)

41. Tüm rakamları tek sayı olan ve herhangi iki komşu rakamı arasındaki fark 2 olan 1000 basamaklı kaç sayı vardır? (İRLANDA M.O. 1997)

42. $\dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{12}$ olduğunu ispatlayınız. (İRLANDA M.O. 1992

43. p bir tek asal sayı olmak üzere, $m^2 = n\,(n + p)$ eşitliğini sağlayan sadece bir (m, n) pozitif tamsayı çifti olduğunu gösteriniz. n ve m'yi p cinsinden yazınız. (British M.O. 1992)

44. En soldaki rakamı en sağa yazıldığında $\dfrac{7}{2}$'si elde edilen en küçük pozitif tamsayıyı bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1985)

45. $\dfrac{19^{92} - 91^{29}}{90}$ sayısı tamsayı mıdır? (İSVEÇ M.O. 1992)

46. $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - y^2 - z^2 = 2ayz$, $-x^2 + y^2 - z^2 = 2bzx$, $-x^2 - y^2 + z^2 = 2cxy$ ve $xyz \neq 0$ ise, $x^2(1 - b^2) = y^2(1 - a^2) = xy(ab - c)$ olduğunu ispatlayınız. Bu eşitlikten yararlanarak $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$ ifadesinin x, y ve z'den bağımsız olduğunu gösteriniz. (British M.O. 1988)

47. $(n + 1)^m = n! + 1$ denkleminin pozitif tamsayılarda tüm çözümlerini bulunuz. (British M.O. 1983) (BREZİLYA M.O. 1984)

48. Her n pozitif tamsayısı için, $n^2 + n - 1$ ve $n^2 + 2n$ sayılarının aralarında asal olduğunu ispatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1987)

49. En az üç rakamı 5 olan ve rakamları toplamı rakamları çarpımına eşit olan 1989 rakamlı bir pozitif tamsayının olmadığını ispatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1989)

50. $n > 0$ için, $1 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{4n}$ sayısının asal olamayacağını ispatlayınız. (British M.O. 1979)

51. n^2 sayısı, m nin, m^3 sayısı n^2 nin, n^4 sayısı m^3 ün ve m^5 sayısı n^4 ün ve n^6 sayısı da m^5 in katı olacak şekilde m ve n tamsayıları vardır. İspatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1989)

52. Bir sayının sondaki iki rakamı silinerek 0 yazılıyor ve silinen son iki rakam aynı şekilde en sol başa yazılıyor. Elde edilen sayı orjinal sayının 2 katı olacak şekilde bir sayı bulunuz. $(a_1 a_0 a_n a_{n-1} \ldots a_2 0 = 2 \cdot a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$ (MEKSİKA M.O. 1987)

53. Her hangi $n > 2$ pozitif tamsayısı için, çarpmaya göre terslerinin toplamları 1 olan n farklı pozitif tamsayı bulabileceğimizi ispatlayınız. (BREZİLYA M.O. 1980)

54. 12 tane sayı bir saatin çevresine yerleştiriliyor. Saatin etrafında, toplamları 21 veya daha fazla olan herhangi üç komşu sayının bulabileceğimizi ispatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1994)

55. Hangi n sayısı için, $1, 2, 3, \ldots, 16$ sayıları 4×4 boyutunda bir satranç tahtasına yerleştirildiğinde, tüm satır ve sütunlardaki sayıların toplamları birbirinden farklı fakat, n sayısının bir katı olur? (MEKSİKA M.O. 1996)

56. 1, 2, ..., 16 sayılarının 4×4 bir satranç tahtasına, satranç tahtasının herhangi bir kenarı ortak olan iki karesi arasındaki fark en fazla 4 olacak şekilde yerleştirilebileceğini, fakat, fark en fazla 3 olacak şekilde yerleştirilemeyeceğini ispatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1997)

57. 1 sayısının, birbirinden farklı $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif sayılarının çarpmaya göre terslerinin toplamı olarak sonsuz farklı şekilde yazılabileceğini ispatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1997)

58. Karesi 10^7'den küçük kaç tane pozitif tamsayı vardır? (İSVEÇ M.O. 1963)

59. Verilen bir pozitif tamsayının rakamlarının kareleri toplamını hesaplayalım. Bu işleme devam ederek sonlu adımda 1 sayısına ulaşabilirsek, bu sayıya uysal sayı diyelim. $(n, n+1)$ şeklinde her ikisi de uysal sayı olan sonsuz sayıda ardışık uysal sayı çifti bulabileceğimizi ispatlayınız. (MEKSİKA M.O. 1998)

60. $\sqrt{x-3}$ ve $\sqrt{x+1}$ sayıları rasyonel olacak şekilde $(3,4)$ aralığında bir x rasyonel sayısı bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1979)

61. Birler basamağı ile onlar basamağı arasına 0 yazıldığında, kendisinin bir katı elde edilen 2 veya daha fazla basamaklı tüm pozitif tamsayıları bulunuz. (MEKSİKA M.O. 2003)

62. $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $a^3 = a+1$ ve $b^6 = b+3$ ise, $a > b$ olduğunu gösteriniz. (BREZİLYA M.O. 1994)

63. 1998'den küçük herhangi ikisi aralarında asal olan 15 pozitif tamsayıdan en az birinin asal olması gerektiğini ispatlayınız. (BREZİLYA M.O. 1998)

64. $x^y = z$, $y^z = x$, $z^x = y$ eşitliklerini sağlayan $x = y = z = 1$'den başka x, y ve z pozitif reel sayıları var mıdır? (İSVEÇ M.O. 1981)

65. a_k, k rakamının sayıda kaç kez bulunduğunu göstermek üzere, tüm $a_0a_1...a_9$ 10 basamaklı sayılarını bulunuz. (BREZİLYA M.O. 1986)

66. n pozitif tamsayısı, $\dfrac{n(n+3)}{3}$ sayısı tamkare olacak şekilde bir sayı ise, n sayısının 3 ün katı olduğunu ve $n+1$ ile $\dfrac{n}{3}$ sayılarının tamkare olduğunu ispatlayınız. (BREZİLYA M.O. 1989)

67. n sayısı 2^n+1 sayısını bölecek şekilde sonsuz sayıda n pozitif tamsayısı bulunduğunu ispatlayınız. (İSVEÇ M.O. 1975)

68. n sayısı 2'den büyük olan bir pozitif tamsayı olduğuna göre, $\dfrac{b}{a} > 2$ olacak şekildeki $a < b < n$ çiftlerinin sayısının $\dfrac{b}{a} < 2$ olacak şekilde $a < b < n$ çiftlerinin sayısına eşit olduğunu gösteriniz. (İSVEÇ M.O. 1986)

69. $2n^3 - m^3 = m \cdot n^2 + 11$ eşitliğini sağlayan tüm m ve n tamsayılarını bulunuz. (İSVEÇ M.O. 1994)

70. $[\![x]\!]$, x'den büyük olmayan en küçük tamsayıyı gösterdiğine göre,

$$([\![1^{1/2}]\!] - [\![1^{1/3}]\!]) + ([\![2^{1/2}]\!] - [\![2^{1/3}]\!]) + \cdots + ([\![2003^{1/2}]\!] - [\![2003^{1/3}]\!])$$

toplamını hesaplayınız. (İRLANDA M.O. 2003)

71. 4 basamaklı *abab* sayısının on tabanında bir tamsayının küpü olamayacağını gösteriniz. Bir tamsayının küpü olacak şekildeki en küçük $b > 1$ tabanını bulunuz. (İRLANDA M.O. 1998)

72. {0, 1, 2, ..., 1997} kümesinin 1000 elemandan daha fazla elemana sahip bir altkümesinin, 2'nin bir kuvveti olan elemanı veya toplamları 2'nin bir kuvveti olan farklı elemanlarının mutlaka olacağını gösteriniz. (İRLANDA M.O. 1997)

73. $s(n)$ sayısı n sayısının rakamlarının toplamını göstediğine göre, $s(2n) \leq 2s(n) \leq 10s(2n)$ olduğunu ve $s(k) = 1996 \cdot s(3k)$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısının bulunduğunu gösteriniz. (İRLANDA M.O. 1996)

74. Hangi pozitif tamsayılar iki veya daha fazla sayıdan oluşan bir sayı dizisinin hem çarpımlarına hem de toplamlarına eşittir. Örneğin, $10 = 5+2+1+1+1 = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$. (İRLANDA M.O. 1993)

75. n elemanlı bir A kümesi için, $\emptyset \neq B \subseteq C \subseteq A$ olacak şekilde kaç tane (B, C) kümesi bulunabilir? (İRLANDA M.O. 1992)

76. 5 ardışık pozitif sayının çarpımının bir tamsayının karesi olamayacağını gösteriniz. (Shortlist 1984)

77. n^2 sayısı sıfırdan farklı m tane aynı rakamdan oluşuyor ise, m sayısının en büyük değeri kaç olabilir? (İRLANDA M.O. 1989)

78. $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi veriliyor. X_i, $i = 1,2,...,7$ kümeleri, X kümesinin üç elemanlı farklı altkümeleri ve X_i kümelerinin birleşimi X olmak üzere, kaç tane $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)$ altküme yedilisi vardır? (İRLANDA M.O. 1988)

79. $S = 1 + \dfrac{1}{2^{\frac{1982}{1983}}} + \dfrac{1}{3^{\frac{1982}{1983}}} + \cdots + \dfrac{1}{\left(2^{1983}\right)^{\frac{1982}{1983}}}$ olduğuna göre, $[\![S]\!]$ değerini bulunuz. (Shortlist 1983)

80. Bir odada 1985 kişi vardır. Her kişi en fazla 5 dil konuşabiliyor. Herhangi üç kişiden, en az ikisinin ortak konuştuğu bir dil var olduğuna göre, odada en az 200 kişi tarafından konuşulan bir dil olduğunu ispatlayınız. (Balkan M.O. 1985)

81. $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ ve $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$ sayıları ardışık tamsayılar olacak şekilde, tüm $x \geq y \geq 1$ reel sayılarını bulunuz. (Balkan M.O. 1987)

82. $5^{1985} - 1$ sayısını, 5^{100}'den büyük üç tamsayının çarpımı şeklinde yazınız. (Shortlist 1985)

83. $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ için, $\dfrac{1}{yz-x^2} + \dfrac{1}{zx-y^2} + \dfrac{1}{xy-z^2} = 0$, olduğuna göre, $\dfrac{x}{(yz-x^2)^2} + \dfrac{y}{(zx-y^2)^2} + \dfrac{z}{(xy-z^2)^2} = 0$ olduğunu ispatlayınız. (Shortlist 1985)

84. Düzlemde, sadece 1985 farklı noktada kesişen 100 farklı doğru bulunabilir mi? (Shortlist 1985)

85. Verilen bir n pozitif tamsayısı için, 5^m sayısının ondalık açılımı, 5^n sayısının ondalık açılımına yeni rakamlar ilave edilmesiyle elde edilebilecek şekilde, n pozitif tamsayısısından daha büyük bir m tamsayısı bulunduğunu gösteriniz. (Balkan M.O. 1984)

86. $2^n - 1 = ab$ olmak üzere, 2^m, $2^n - 2 + a - b$ ifadesini bölen 2'nin en büyük kuvveti ise, m'nin çift sayı olduğunu ispatlayınız. (Balkan M.O. 2001)

87. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24}$ toplamını hesaplayınız. (KANADA M.O. 1997)

88. $mn+n$ ve $mn+m$ sayılarının her ikiside tamkare olacak şekilde (m,n) tamsayı çiftinin olmadığını gösteriniz.

89. n pozitif tamsayısı için, $n^4 + m$ sayısı asal olmayacak şekilde sonsuz sayıda m pozitif tamsayısı olduğunu ispatlayınız. (IMO 1969)

90. $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ kümesi, elemanlarının çarpımı birbirine eşit olacak şekilde iki altkümeye ayrılabilmesi için, n pozitif tamsayısının olabileceği tüm değerleri bulunuz. (IMO 1970)

91. 10, 11, ..., 99 sayıları arasından seçilen 10 elemanlı herhangi bir küme için, elemanlarının toplamı aynı olan ayrık iki altkümesinin daima bulunabileceğini ispatlayınız. (IMO 1972)

92. m ve n negatif olmayan sayıları için, $(2m)!(2n)!$ ifadesinin $m!n!(m+n)!$ sayısının bir katı olduğunu ispatlayınız. (IMO 1972)

93. 4444^{4444} sayısının ondalık yazılımındaki rakamların toplamı A ve A sayısının ondalık yazılımındaki rakamların toplamı da B olsun. B sayısının rakamlarının toplamını bulunuz. (IMO 1975)

94. N sayısı 11'e bölünebilen 3 basamaklı bir sayı olmak üzere, $N/11$ sayısı, N sayısının rakamlarının kareleri toplamına eşit olacak şekilde tüm N sayılarını bulunuz. (IMO 1960)

95. Son rakamı 6 olan ve son rakamı ilk başa yazıldığında 4 katı elde edilen en küçük doğal sayıyı bulunuz. (IMO 1962)

96. a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sayıları birbirinden farklı reel sayılar olmak üzere,

$$|a_i - a_1|x_1 + |a_i - a_2|x_2 + |a_i - a_3|x_3 + |a_i - a_4|x_4 = 1$$

denklemlerini çözünüz. (IMO 1966)

97. Bir spor yarışmasında n gün içinde m madalya ödülü verilecektir.. Birinci gün, 1 madalya ve geri kalan madalyaların 1/7'si veriliyor, ikinci gün, iki madalya ve geri kalan madalyaların 1/7'si veriliyor. Bu şekilde devam ederek, son gün geri kalan n madalya veriliyor. Kaç günde kaç madalya ödülü verilmiştir. (IMO 1967)

98. $[\![x]\!]$, x sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıyı gösterdiğine göre, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\left[\!\left[\tfrac{n+1}{2}\right]\!\right] + \left[\!\left[\tfrac{n+2}{4}\right]\!\right] + \left[\!\left[\tfrac{n+4}{4}\right]\!\right] + \cdots + \left[\!\left[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]\!\right] + \cdots$$

toplamını hesaplayınız.(IMO 1968)

99. Toplamları 1976 olan pozitif tamsayıların, çarpımları en büyük kaç olabilir? (IMO 1976)

100. m ve n, $m < n$ eşitsizliğini sağlayan pozitif tamsayılar olmak üzere, 1978^n ve 1978^m sayılarının son üç rakamları aynı ise, $m+n$ toplamı en küçük olacak şekilde m ve n değerlerini bulunuz. (IMO 1978)

101. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\dfrac{m}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{1318} + \dfrac{1}{1319}$ eşitliği sağlanıyor ise, m sayısının 1979'a bölünebildiğini ispatlayınız. (IMO 1979)

102. Her A_i kümesi 17 elemanlı ve her bir A_i kümesindeki elemanların toplamı aynı olmak üzere, $\{1, 2, ..., 1989\}$ kümesinin $A_1, A_2, ..., A_{117}$ ayrık kümelerinin birleşimi olarak ifade edilebileceğini gösteriniz. (IMO 1989)

103. $S = \{1, 2, ..., 280\}$ olmak üzere, S kümesinin her bir n elemanlı altkümesi, ikişerli olarak aralarında asal olan 5 sayıyı içerecek şekilde en küçük n sayısını bulunuz. (IMO 1991)

KAYNAKLAR

1. Aliyev İ., Özdemir M., Şıhaliyeva D., *Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları Sorular ve Çözümler*, TÜBİTAK Yayınları, 2007.
2. Alizade R., Ufuktepe Ü., *Sonlu Matematik*, TÜBİTAK Yayınları, 2006.
3. Andreescu T.; Feng Z., 101 *Problems in Algebra from The Training of The USA IMO Team*, Australian Mathematics Trust, 2001.
4. Andreescu T., Feng Z., 102 *Combinatorial Problems from The Training of The USA IMO Team,* Birkhäuser, 2002.
5. Andreescu T., Feng Z., 103 *Trigonometry Problems from The Training of The USA IMO Team*, Birkhäuser, 2005.
6. Andrescu T, Andrica D., Feng Z., 104 *Number Theory Problems from The Training Of The USA IMO Team*, Birkhäuser 2007.
7. Andrescu T., Enescu B., *Mathematical Olympiad Treasures,* Birkhäuser, 2006.
8. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads,* 1996-1997: *Problems and Solutions From Around The World*, The Math. Association of America, 1998.
9. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads,* 1997-1998: *Problems and Solutions from Around The World*, The Math. Association of America, 1999.
10. Andrescu T, Feng Z., *Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around The World* 1998-1999, The Math. Association of America, 2000.
11. Andrescu T, Feng Z., George L., *Mathematical Olympiads,* 1999-2000: *Problems and Solutions from Around The World*, The Math. Association of America, 2002.
12. Andrescu T, Feng Z., George L., *Mathematical Olympiads,* 2000-2001: *Problems and Solutions from Around The World*, The Math. Association of America, 2003.
13. Arthur E., *Problem - Solving Strategies*, 1999, Springer.
14. Balcı M., *Matematik Analiz*, Cilt 1., Balcı Yayınları, 2008.
15. Bin X., Peng Yee L., *Mathematical Olympiad in China Problems and Solutions*, East China Normal University Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
16. Don R., *Number Theory, An Introduction*, Marcel Dekker, Newyork, 1996.
17. Dickson L. E., *First Course in The Theory of Equations,* J.Wiley & Sons, 1922.
18. Doob M., *The Canadian Mathematical Olympiad* 1969–1993, University of Toronto Press, 1993.
19. Felda Darjo, (by Translated), 40 *National Math. Olymp. in Slovenia,* Soc. of. Math., Phy. and Astr. of Slovenia, 1996.
20. Fomin D., Kirichenko A., *Leningrad Mathematical Olympiads* 1987–1991, MathPro Press, 1994.
21. Fomin D., Genkin S., Itenberg I., *Mathematical Circles*, American Mathematical Society, 1996.
22. Gerald L. A., Klosinski L. F., Larson L. C., *The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions:* 1965-1984, 1985, The Mathematical Association of America.
23. Gözükızıl Ö. F., Yaman M.**,** *Olasılık Problemleri*, Sakarya Kitabevi, 2005.
24. Greitzer S. L., *Uluslararası Matematik Olimpiyatları* 1959 - 1977, TÜBİTAK Yayınları, 1984.
25. Gürlü Ö., *Meraklısına Geometri*, Zambak Yayınları, 2005.
26. Honsberger R., *From Erdos to Kiev Problems of Olympiad Caliber*, The Mathematical Association of America, 1996.
27. Honsberger R., *In Polya's Footsteps, Miscellaneous Problems And Essays*, The Mathematical Association of America, 1997.
28. Honsberger R, *Mathematical Diamonds*, The Mathematical Association of America, 2003.
29. Karakaş H. İ., Aliyev İ., *Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri,* TÜBİTAK Yayınları 1999.
30. Karakaş H. İ., Aliyev İ., *Analiz ve Cebirde ilginç olimpiyat problemleri ve Çözümleri*, TÜBİTAK Yayınları 1999.
31. Kazarinoff N. D., *Geometric Inequalities,* New Mathematical Library,Vol. 4, Random House, 1961.
32. Klamkin M, *USA Mathematical Olympiads* 1972-1986 *Problems And Solutions*, Mathematical Association of America, 1989.
33. Klamkin M., *International Mathematical Olympiads,* 1978–1985, NewMathematical Library, Vol. 31, Mathematical Association of America, 1986.
34. Kızılırmak A., Akbulut F., *Cevdet Bilsay'dan Bir Demet*, Ege Ün. Yay., Bornova, 1975.
35. Kuczma M., *144 Problems of The Austrian–Polish Mathematics Competition 1978–1993*, The

Academic Distribution Center, 1994.
36. Larson L. C., *Problem - Solving Through Problems*, Springer - Verlag, 1992.
37. Lidsky V., Ovsyannikov L., Tulaikov A., and Shabunin M., *Problems in Elementary Mathematics*, Mir, Moscow: 1973
38. Nesin A., *Matematiğe Giriş III, Sayma*, Nesin Yayıncılık, 2009.
39. Nesin A., *Matematiğe Giriş 1, Sezgisel Kümeler Kuramı*, Nesin Yayıncılık, 2008.
40. Salkind C. T., *The Contest Problem Book*, Random Hause, 1961.
41. Shanks D., *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, 1978, Chelsea Pub. Company, New York.
42. Shklarsky D. O., Chentzov N. N., Yaglom I. M., *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Pub. 1994.
43. Yücesan R., *Meraklısına Matematik*, Zambak Yayınları, 2005.
44. Terzioğlu N., İçen O., Saban G., Şahinci H., *Analiz Problemleri*, Şirketi Mürettibiye Basımevi, 1962.
45. Töngemen M., *Tübitak Ulusal Matematik Olimpiyat Soru ve Çözümleri,* 1993-2006, Altın Nokta Yayınları, 2006.
46. TÜBİTAK, *Liselerarası Mat. Yarışması Soruları ve Çözümleri,* 1969-1983, TÜBİTAK Yayınları, 1983.
47. Türk Matematik Derneği, *Matematik Dünyası Dergileri,* 2000 - 2008.
48. Özdeğer A., Özdeğer N., *Çözümlü Analiz Problemleri Cilt* 1, Kuşak Ofset, 1995.
49. Öztunç M. K., *Trigonometri Problemleri*, İrem Yayınevi, 1965.

WEB KAYNAKLARI

1. The art of problem solving, http://www.artofproblemsolving.com.
2. Estonian Math Competitions,
http://www.math.olympiaadid.ut.ee/eng/html/index.php
3. Mathematical Excalibur Journal, http://www.math.ust.hk/excalibur/.
4. Crux Mathematicorum with Math. Mayhem, Canadian Math. Society,
http://journals.cms.math.ca/CRUX/.
5. Bulgarian Competitions in Mathematics and Informatics,
http://www.math.bas.bg/bcmi/index.html.
6. Problems from Olympiads,
http://www.imomath.com/index.php?options=oth|other&p=0.
7. Canadian Math. Olympiads, http://www.math.ca/Competitions/CMO/
8. Wisconsin Math. Enginering and Science Talent Saerch Problem Page,
http://www.math.wisc.edu/~talent/problems.html.
9. Kalva Math.Problems , John Scholes, http://www.kalva.demon.co.uk/.
10. William Lowell Putnam Mathematics Competition Problems,
http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml.
11. AMC USAMO/MOSP/IMO & Others Problems,
http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/problemUSAMO-IMOarchive.shtml.
12. Problems in Elemantary Number Theory, http://www.problem-solving.be/pen/.
13. Lecture Notes of Dr.David A. Santos, http://faculty.ccp.edu/faculty/dsantos/.
14. The Harvard MIT Mathematic Tournament, http://web.mit.edu/hmmt/www/.