10. 二阶系统对初始条件的动态响应

这部分对应**控制之美[卷1]的第五章：二阶系统的时域响应分析（P57）**

二阶系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (1)$$

其中， ω_n 是固有频率， ζ 是阻尼比。

$\zeta > 1$ ：**过阻尼系统（Overdamped System）**；

$\zeta = 1$ ：**临界阻尼系统（Critically Damped System）**；

$\zeta < 1$ ：**欠阻尼系统（Underdamped System）**；

$\zeta = 0$ ：**无阻尼系统（Undamped System）**。

考虑如下**弹簧—阻尼系统**：

其数学模型为：

$$m\frac{\mathrm{d}x^2(t)}{\mathrm{d}t} = F(t) - B\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - Kx(t) \qquad (2)$$

令其固有频率 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$ ，阻尼比 $\zeta = \dfrac{B}{2\sqrt{Km}}$ ，

于是可以将Eq. (2) 转化为：

$$\frac{\mathrm{d}x^2(t)}{\mathrm{d}t} + 2\zeta\omega_n\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_n^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t) \qquad (3)$$

这个系统的特征方程为：

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \qquad (4)$$

特征方程的根为：

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{5}$$

（上述特征方程可以通过解微分方程得到，也可以通过对Eq. (3)进行拉普拉斯变换后求得其传递函数后得到[**特征方程就是传递函数的分母，特征值则对应了传递函数的极点**]）