9. 二阶系统的时域响应分析

9.1 二阶系统对初始状态的响应

这部分对应**控制之美[卷1]的第五章：二阶系统的时域响应分析（P57）**

二阶系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (1)$$

其中，ω_n 是固有频率，ζ 是阻尼比。

$\zeta>1$ ：**过阻尼系统（Overdamped System）**；

$\zeta=1$ ：**临界阻尼系统（Critically Damped System）**；

$0<\zeta<1$ ：**欠阻尼系统（Underdamped System）**；

$\zeta=0$ ：**无阻尼系统（Undamped System）**。

考虑如下**弹簧—阻尼系统**：

其数学模型为：

$$m\frac{\mathrm{d}x^2(t)}{\mathrm{d}t}=F(t)-B\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-Kx(t) \qquad (2)$$

令其**固有频率** $\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}}$ ，**阻尼比** $\zeta=\frac{B}{2\sqrt{Km}}$ ，.

于是可以将Eq. (2) 转化为：

$$\frac{\mathrm{d}x^2(t)}{\mathrm{d}t}+2\zeta\omega_n\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_n^2x(t)=\frac{1}{m}F(t) \qquad (3)$$

这个系统的特征方程为：

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \qquad (4)$$

特征方程的根为：

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \qquad (5)$$

（上述特征方程可以通过解微分方程得到，也可以通过对Eq. (3)进行拉普拉斯变换后求得其传递函数后得到[**特征方程就是传递函数的分母，特征值则对应了传递函数的极点**]）。

9.2 二阶系统的单位阶跃响应

首先回顾一下单位阶跃响应。

当系统的输入为单位阶跃函数时，输入的拉氏变换为： $U(s)=\frac{1}{s}$ ，输出为：

$$X(s)=G(s)U(s)=\frac{1}{s}\times\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (6)$$

令 Eq. (6)的分母为0，可以求出系统的三个极点，分别为：

$$\begin{cases} s_{p1}=0 \\ s_{p2}=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \\ s_{p3}=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \end{cases} \qquad (7) .$$

添加 TeX 公式 我们以**欠阻尼系统**($0<\zeta<1$)为例分析：

通过待定系数法可以求得：

$$X(s)=\frac{1}{s-p_1}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}j\right]\frac{1}{s-p_2}-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}j\right]\frac{1}{s-p_3} \qquad (8)$$

Eq. (8) 拉氏逆变换得到：

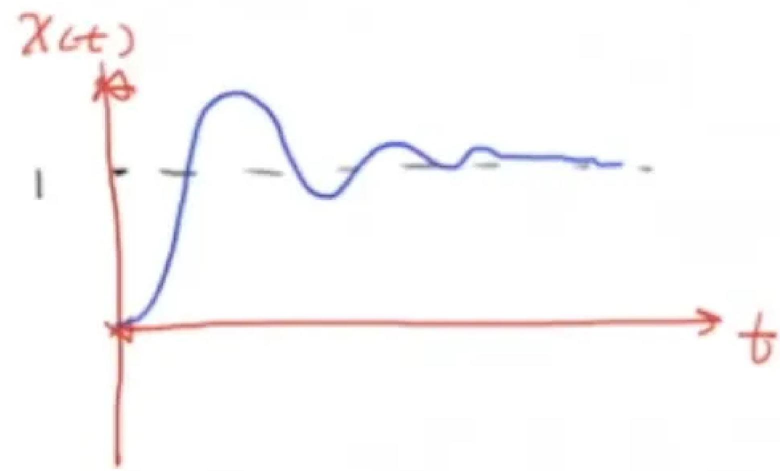
$$x(t)=e^{s_{p1}t}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}j\right]e^{s_{p2}t}-\frac{1}{2}\left[1+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}j\right]e^{s_{p3}t} \qquad (9)$$

定义一个新的参数 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ，称其为**阻尼固有频率（Damped Natural Frequency）；**

将 ω_d 代入公式 Eq. (9)，用欧拉公式，并化简，最终得到**二阶欠阻尼系统单位阶跃响应**的时间函数：

$$x(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\sqrt{\frac{1}{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\varphi) \qquad (10)$$

"1"来自系统输入（极点为 $s_{p1}=0$ ），后半部分是一条振荡且递减的曲线。



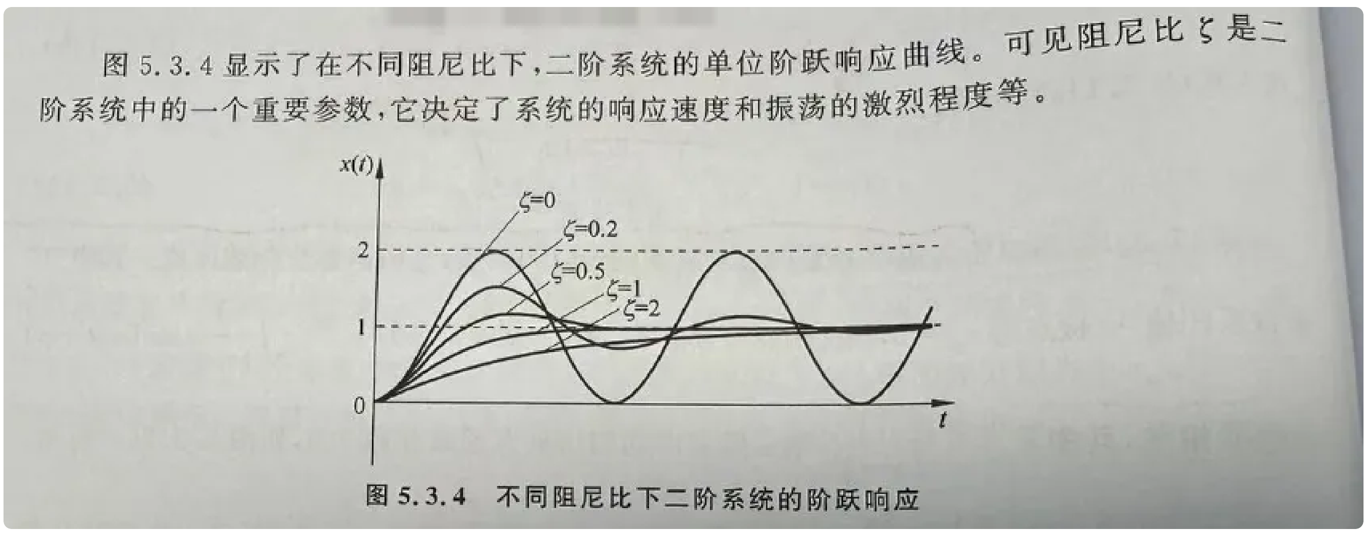


图 5.3.4 显示了在不同阻尼比下，二阶系统的单位阶跃响应曲线。可见阻尼比 ζ 是二阶系统中的一个重要参数，它决定了系统的响应速度和振荡的激烈程度等。

图 5.3.4　不同阻尼比下二阶系统的阶跃响应

9.3 二阶系统性能指标分析

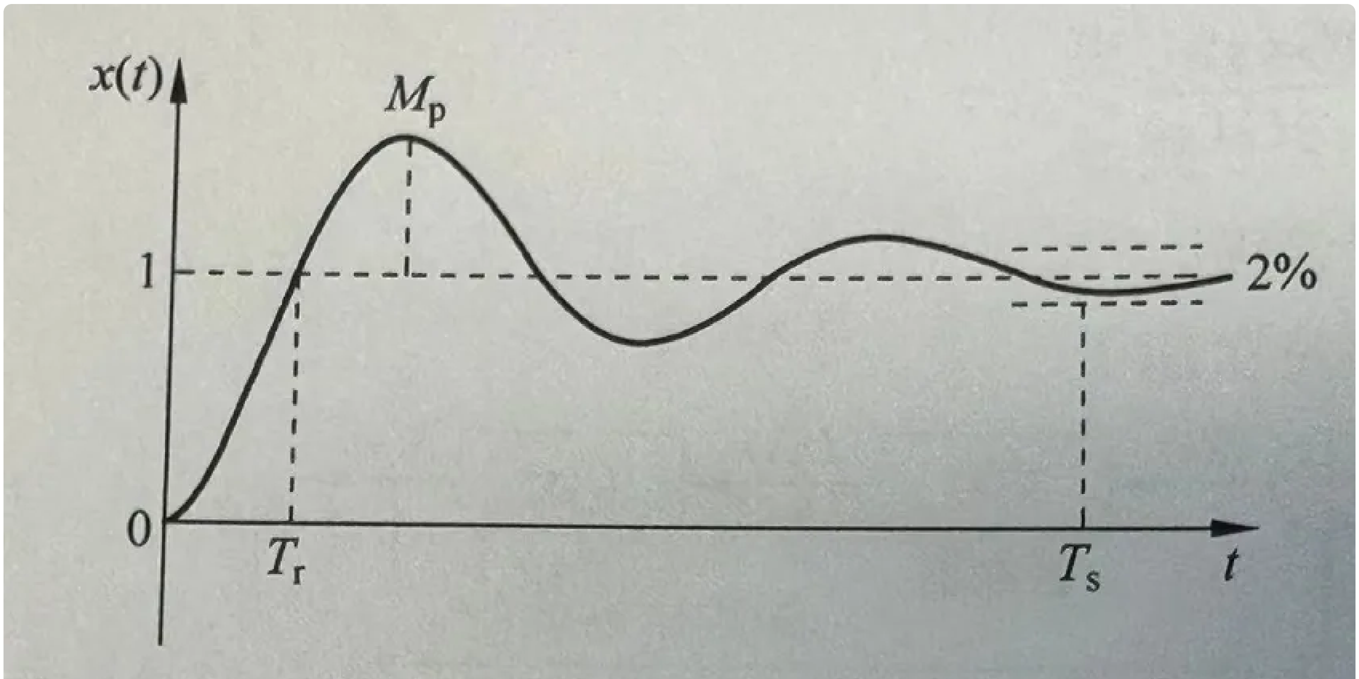
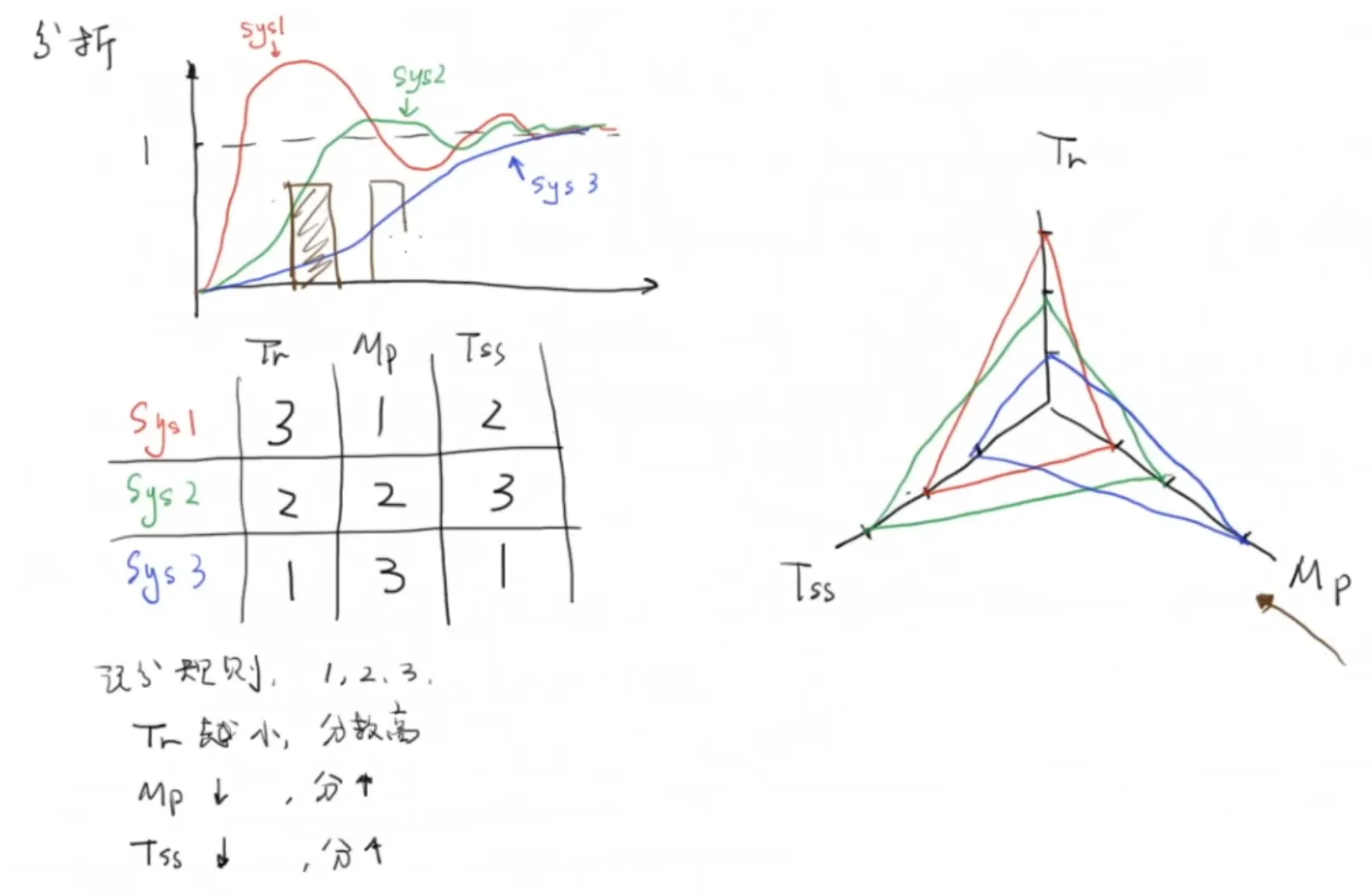


图 5.4.3　二阶系统的单位阶跃响应性能指标

最主要的三个性能指标：

1. **上升时间（Rise Time）** T_r ：系统第一次到达稳定点的时间。这一参数体现了系统的反应速度。
2. **最大超调量（Maximum Overshoot）** M_p **：** 系统输出的最大值（峰值）减去稳态值，再乘以100%。
3. **稳定时间（Settling Time）** T_s **：** 又称调节时间，是指系统进入稳态的误差范围内的时间。一般取最终状态的2%以内。



9.4 生活中的二阶欠阻尼系统实例——灵魂提取器

【动态系统的建模与分析】13_共振现象_二阶系统频率响应_现象部分

共振现象：长短不同，**固有频率**不同，固有频率相同的长短支发生振动。