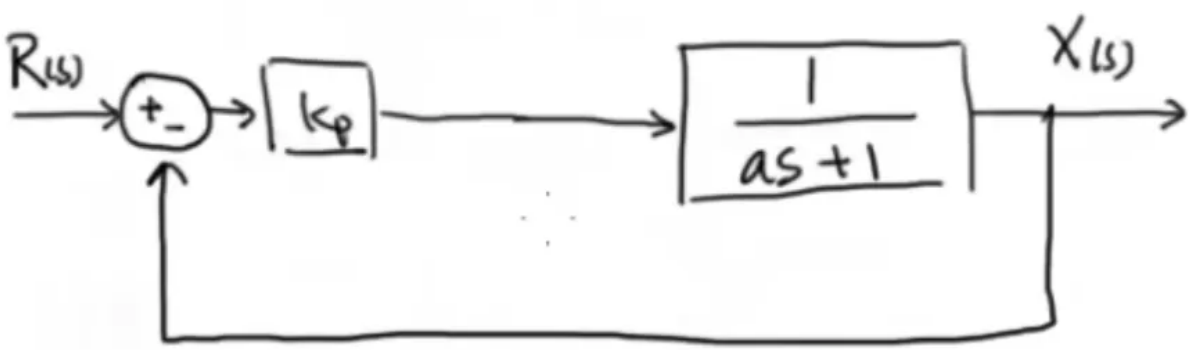
4. PI控制器



还是这个系统，经过 自动控制原理 3. 系统分析实例：一起燃烧卡路里 中的分析，我们知道了几个结论：

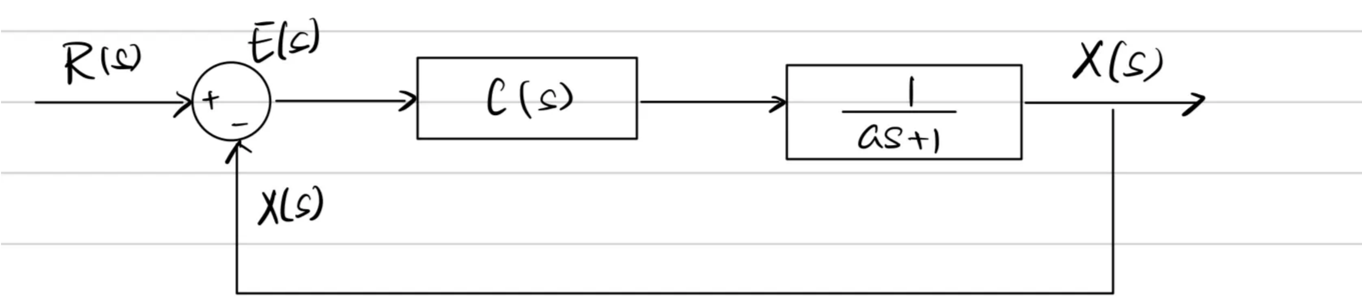
1. 当 $K_P > -1$ 时，系统稳定，满足终值定理条件。
2. 设系统的参考值 $r(t) = c$,则 $R(s) = \frac{c}{s}$ ，这个系统的终值响应为：：

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{s\to 0} s \times X(s) \\ &= \frac{K_P}{1+K_P}c\end{aligned} \tag{4.1}$$

3. 当时间趋于无穷大时，系统稳定，稳态误差为：

$$e_{ss} = r(t) - \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{1+K_P}c \tag{4.2}$$

我们要设计一个新的控制器 $C(s)$ ，它的作用是消除系统的稳态误差，于是，我们得到了新的控制框图：



$$X(s) = \frac{1}{as+1} \cdot C(s) \cdot \left[R(s) - X(s)\right]$$

$$(as+1)\, X(s) = C(s)\, R(s) - C(s)\, X(s)$$

$$X(s) \left[as+1 + C(s) \right. = C(s)\, R(s)$$

$$X(s) = \frac{C(s)\, R(s)}{as+1+C(s)} \qquad (4.3)$$

新的系统，终值响应为：

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{s\to 0} s \times X(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s \times \frac{C(s)R(s)}{as+1+C(s)} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{c}{s}C(s)}{as+1+C(s)} \qquad\qquad (4.4)\\
&= \lim_{s\to 0} \frac{C(s)}{1+C(s)} c \\
&= \lim_{s\to 0} c - \frac{1}{1+C(s)} c
\end{aligned}$$

我们要消除稳态误差，也就是让 $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$ ，所以：

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{1+C(s)} \to 0 \qquad (4.5\text{ a})$$

$$\lim_{s\to 0} C(s) \to \infty \qquad (4.5\text{ b})$$

什么情况下，当 $s \to 0$ 时， $C(s) \to \infty$ 呢？我们想到了令 $C(s) = \frac{1}{s}$ ，它们满足了我们的条件，并且，它的原函数为： $c(t) = \int \mathrm{d}t$ （积分的拉普拉斯变换）。

接下来，如果我们令 $C(s) = \frac{K_I}{s}$ ，K_I 称为**积分增益。**

代入 Eq. (4.3) 得到：

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{\frac{K_I}{s} \times \frac{c}{s}}{as+1+\frac{K_I}{s}} \qquad\qquad (4.6)\\
&= \frac{c}{s} \times \frac{K_I}{as^2+s+K_I}
\end{aligned}$$

不难看出，等式 Eq. (4.6)，在数学形式上与 二阶系统的阶跃响应 是一致的。