6. 传递函数(Transfer Function)与拉普拉斯变换

传递函数:

视频链接

传递函数:

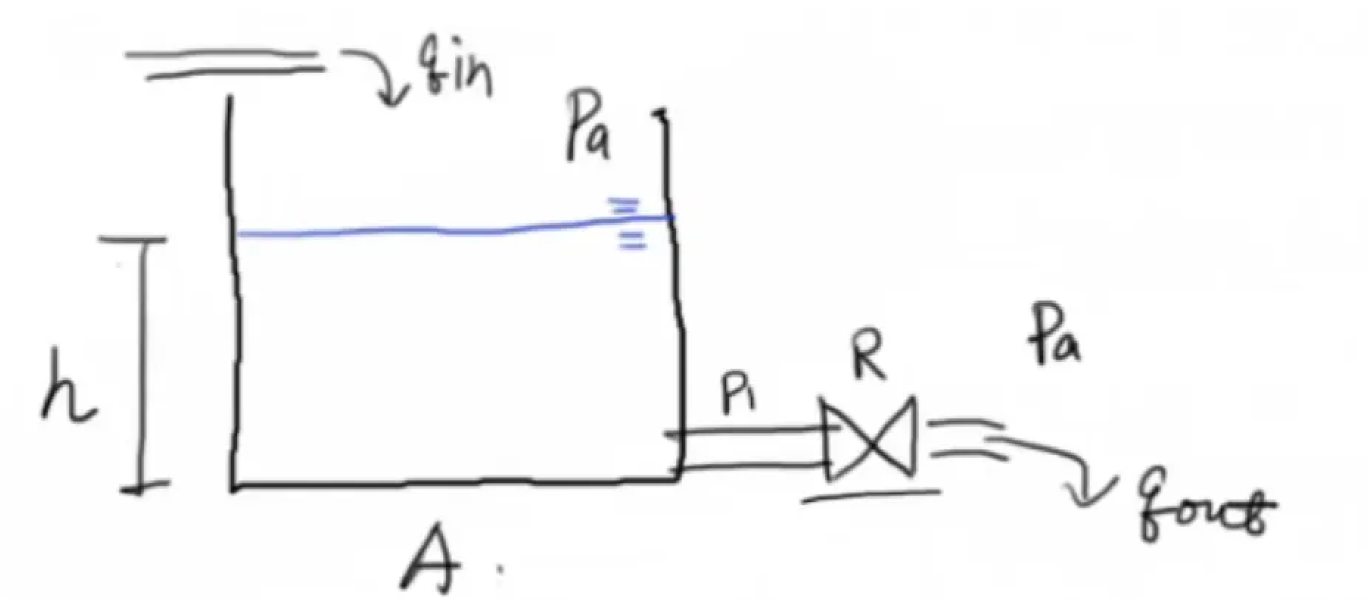
传递函数的定义: 在零初始条件下,系统输出的拉普拉斯变换与系统输入的拉普拉斯变换之间的比值。

$$G(s)=\frac{X(s)}{U(s)} \qquad (1)$$

传递函数的极点: 令系统的传递函数分母等于0时的 s 值,它将决定系统的0表现。

非零初始状态: 在时间零点赋予系统“能量”,使得系统达到初始状态。

在 3. 流体系统建模 一节,我们推导了下图所示系统的数学模型:



$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}=\frac{Q_{in}}{A}-\frac{gh}{AR} \qquad (2)$$

用 x 表示系统的输出 h ,用 u 表示系统的输入 Q_{in} ,并令底面积 $A=1$,得到:

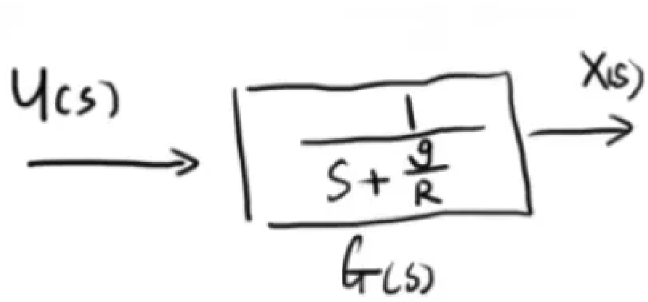
$$\dot{x(t)}=u(t)-\frac{g}{R}x(t) \qquad (3)$$

对Eq. (2)进行拉普拉斯变换,得到:

$$U(s) = (s + \frac{g}{R})X(s) \qquad (4)$$

根据Eq. (1)的定义，我们得到了这个系统的传递函数（注意，这个系统的初始状态为0，即 $h(0) = x(0) = 0$ ）：

$$G(s) = \frac{1}{s + \frac{g}{R}} \qquad (5)$$

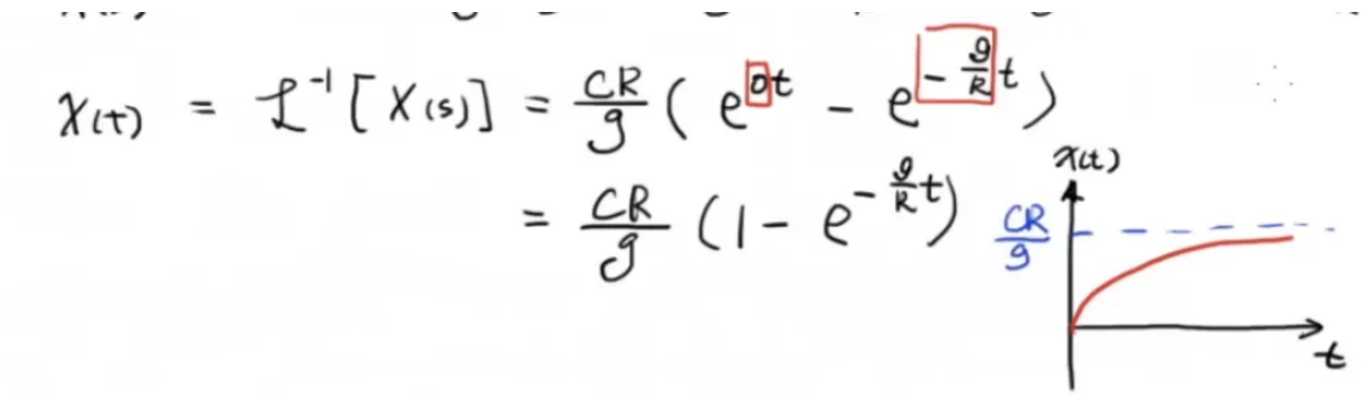


假设系统的输入 $u(t)$ 为常数 c ， $\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}(c) = \frac{c}{s}$ ，

$$X(s) = U(s)G(s) = \frac{c}{s}\frac{1}{s + \frac{g}{R}} = \frac{cR}{g}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{g}{R}}) \qquad (6)$$

我们再对 $X(s)$ 作拉普拉斯逆变换：

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{cR}{g}(1 - e^{-\frac{g}{R}t}) \qquad (7)$$



这里，两个指数函数的系数（ e^{0t} 的0和 $e^{-\frac{g}{R}t}$ 的 $-\frac{g}{R}$ ）就是这个系统的**极点（Poles）**，也就是令传递函数 $G(s)$ 的分母为0，求得的 s .

> 由此可见，我们通过Laplace Transform，把一个系统的**微分方程**（ $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_{in}}{A} - \frac{gh}{AR}$ ）转化为**代数方程**（ $X(s) = \frac{1}{s + \frac{g}{R}}U(s)$ ），同时把**卷积运算**转变为**乘法运算**，并最后通过简单的代数计算得到系统输出的**极点**，并以此为依据快速判断系统的表现！省去了求解微分方程和卷积的麻烦。