8. 频率响应详细数学推导 / G(jw)滤波器

系统频率响应中的重要结论：

当正弦函数 $u(t)$ 通过一个**线性时不变系统**之后，在稳定的状态下，系统的输出 $x(t)$ 也是一个正弦函数。而且 $x(t)$ 与 $u(t)$ 的频率相同，但是**振幅和相位**发生了改变。

首先从正弦输入的一般形式入手，表达式为：

$$u(t) = A\sin(\omega_i t) + B\cos(\omega_i t) \qquad (1)$$

Eq. (1) 可以转换为：

$$u(t) = M_i\sin(\omega_\mathrm{i}\mathrm{t} + \varphi_\mathrm{i}) \qquad (2)$$

其中， $M_i = \sqrt{A^2 + B^2}, \varphi_i = \arctan\frac{B}{A}$.

考虑将Eq. (2)施加到一个线性时不变系统 $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ 中，通过一系列计算可以得到系统最终的稳态输出为：

$$x_{xx}(t) = |G(\mathrm{j}\omega_i)|M_i\sin(\angle G(\mathrm{j}\omega_i) + \omega_i t + \varphi_i) \qquad (3)$$

由公式Eq. (3)可以知道，相较于输出，系统的稳态输出振幅变化了 $|G(\mathrm{j}\omega_i)|$ 倍（振幅响应），相位移动了 $\angle G(\mathrm{j}\omega_i)$ （相位响应）。

举例

以一个积分器为例，如图1.(a)所示，传递函数为 $G(s) = \dfrac{1}{s}$ 。（ps：为什么积分的拉普拉斯变换是 $\dfrac{1}{s}$ ？）

对于一个函数 $f(t)$ ，它的积分 $g(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}[g(t)]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

那么：

$$G(\mathrm{j}\omega_i)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega_i}=-\frac{1}{\omega_i}\mathrm{j} \qquad (4)$$

$G(\mathrm{j}\omega_i)$ 在复平面中的图像如图1.(b) 所示，故 $|G(\mathrm{j}\omega_i)|=\frac{1}{\omega_i},\angle G(\mathrm{j}\omega_i)=-\frac{\pi}{2}$ 。

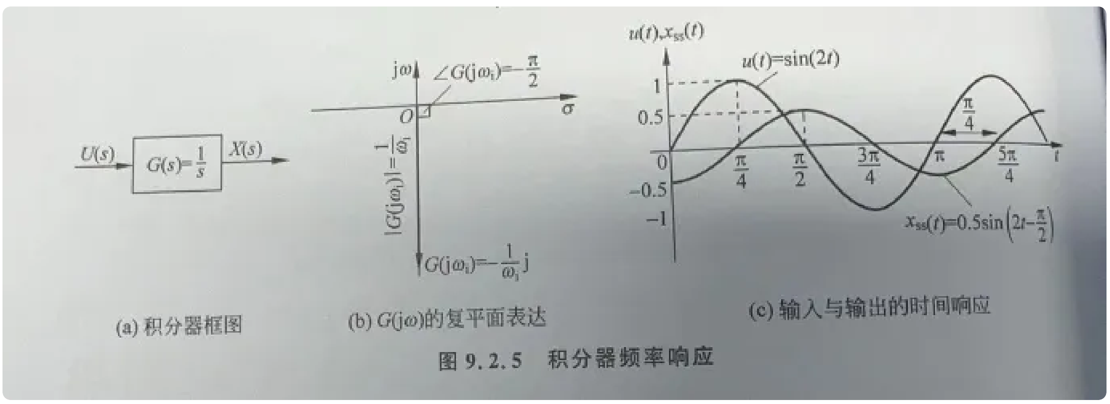

图1. 积分器频率响应

当系统的输入为 $u(t)=M_i\sin(\omega_{\mathrm{i}}\mathrm{t}+\varphi_{\mathrm{i}})$ 时，系统的稳态输出为：

$$\begin{aligned} x_{xx}(t) &= |G(\mathrm{j}\omega_i)|M_i\sin(\angle G(\mathrm{j}\omega_i)+\omega_i t+\varphi_i) \\ &= \frac{1}{\omega_i}M_i\sin(\omega_i t+\varphi_i-\frac{\pi}{2}) \end{aligned} \qquad (5)$$

也就是说， $u(t)$ 通过积分器之后，振幅变为原来的 $\frac{1}{\omega_i}$ 倍**（缩小了）**，且输入的频率 ω_i 越高，输出的振幅 $\frac{M_i}{\omega_i}$ 就越小，从信号处理的角度来看，**积分器就是一个低通滤波器！**

理解

上面说到，积分器就是一个低通滤波器，实际上，**一阶系统的传递函数也是一个低通滤波器**，一阶系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{a}{s+a} \qquad (5)$$

a 被称为**截止频率**。具体的推导可以见视频：【动态系统的建模与分析】9_一阶系统的频率响应_低通滤波器_Matlab/Simulink分析。

为什么一阶系统可以过滤掉高频信号? 从数学公式上理解，一阶系统的振幅响应为 $|G(\mathrm{j}\omega_i)| = \sqrt{\frac{1}{(\frac{\omega_i}{a})^2+1}}$ ，可以看出，输入信号的频率 ω_i 越高，输出信号的振幅 $|G(\mathrm{j}\omega_i)|$ 越小，这样就把高频信号给“过滤”掉了，达到了降噪的效果（实际应用中，传感器噪声通常是更高频的）；从直观上理解，一阶系统通常都包含一个**“容器”**，在电路中表现为电容，在水位内表现为水箱，在体重中表现为脂肪，通过这些“容器”，让系统对输入的响应产生了**缓冲和延迟**，从而抵消了输入的高速变化带来的影响。

高通滤波器的传递函数：

$$G(s) = \frac{s}{s+a}, a > 0 \qquad (6)$$