10. 二阶系统的频率响应分析

10.1 理论分析

回顾 8. 频率响应详细数学推导 / G(jw)滤波器

二阶系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (1)$$

为了分析其频率响应，先计算 $G(\mathrm{j}\omega_i)$ ：

$$G(\mathrm{j}\omega_i)=\frac{\omega_n^2}{-\frac{\omega_i^2}{\omega_n^2}+2\zeta\frac{\omega_i}{\omega_n}\mathrm{j}+1} \qquad (2)$$

令 $\Omega=\dfrac{\omega_i}{\omega_n}$ （只是为了简化运算，并无其他意义），得到：

$$G(\mathrm{j}\omega_i)=\frac{1-\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2+4\zeta^2\Omega^2}-\frac{2\zeta\Omega}{(1-\Omega^2)^2+4\zeta^2\Omega^2}\mathrm{j} \qquad (3)$$

其中，实部为：

$$\mathbf{Re}=\frac{1-\Omega^2}{(1-\Omega^2)^2+4\zeta^2\Omega^2} \qquad (4)$$

虚部为：

$$\mathbf{Im}=-\frac{2\zeta\Omega}{(1-\Omega^2)^2+4\zeta^2\Omega^2}\mathrm{j} \qquad (5)$$

于是，它的**振幅响应**为：

$$\begin{aligned}|G(\mathrm{j}\omega_i)|&=\sqrt{\mathbf{Re}^2+\mathbf{Im}^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{(1-\Omega^2)^2+4\zeta^2\Omega^2}}\end{aligned} \qquad (6)$$

相位响应为：

$$
\begin{aligned}
\angle G(\mathrm{j}\omega_i) &= \arctan\frac{\mathbf{Im}}{\mathbf{Re}} \\
&= -\arctan\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}
\end{aligned} \tag{7}
$$

这里对函数图像的分析暂且不表，详细内容参考：

【动态系统的建模与分析】14_二阶系统频率响应_数学推导部分

以及控制之美(卷1) P120。

这里记住几个重要概念和结论：

求得 $|G(\mathrm{j}\omega_i)|$ 的极值为 $\Omega=\frac{\omega_i}{\omega_n}=\sqrt{1-2\zeta^2}$ ，此时 $|G(\mathrm{j}\omega_i)|$ 达到最大值，输入频率 $\omega_R=\omega_i=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ 称为**共振频率（Resonant Frequency）**，其中， ω_n 是**固有频率**， ζ 是**阻尼比**。

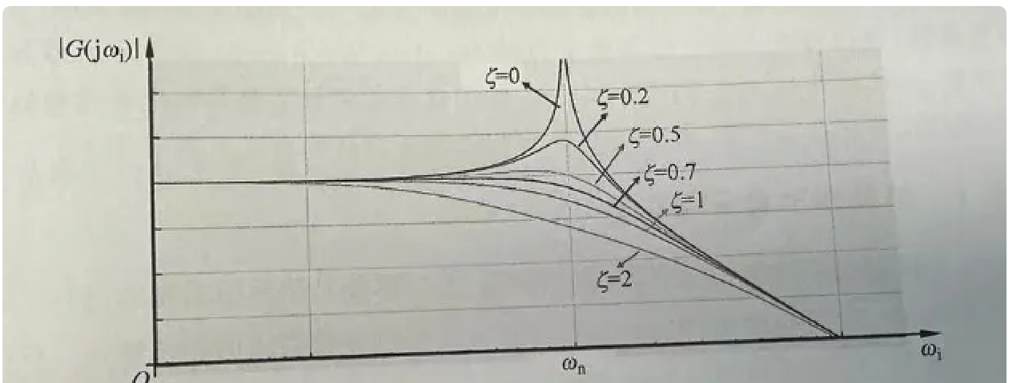
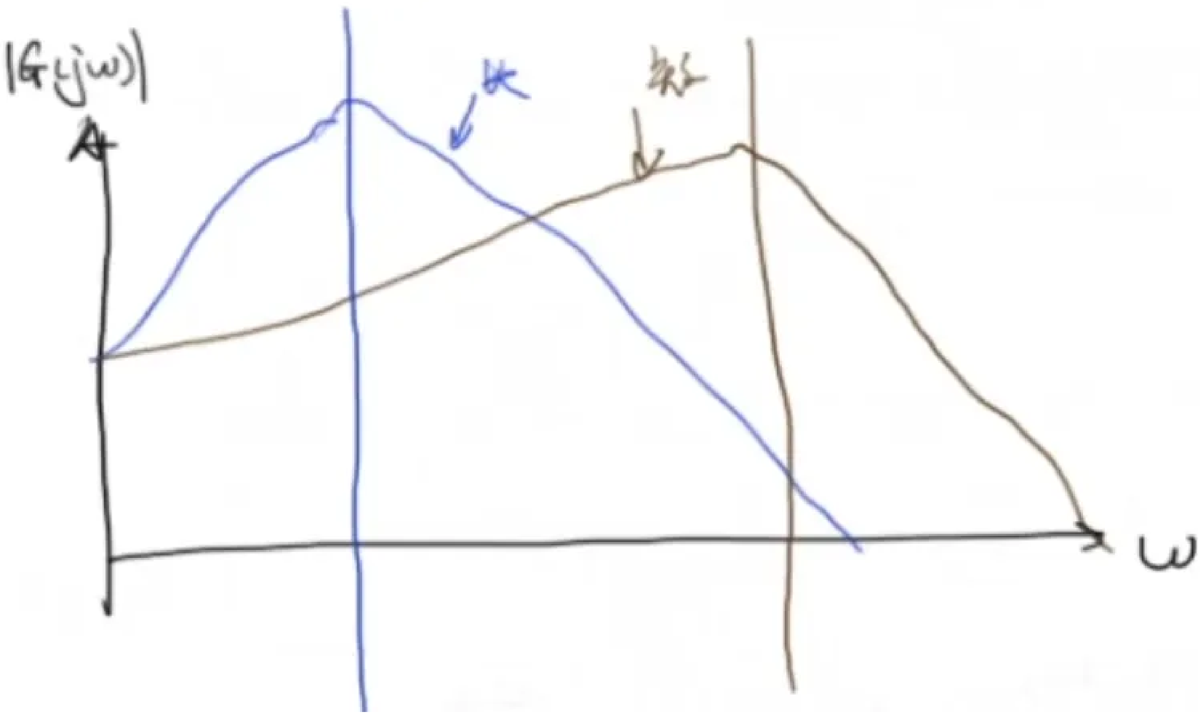


图 9.4.2 二阶系统的振幅频率响应

10.2 运用这节推导的理论解释上一节的共振现象



长短支的固有频率 ω_n 不同，导致分别拨动长短支的时候，两者的**振幅响应**不用，表现为两者的振动幅度不同！