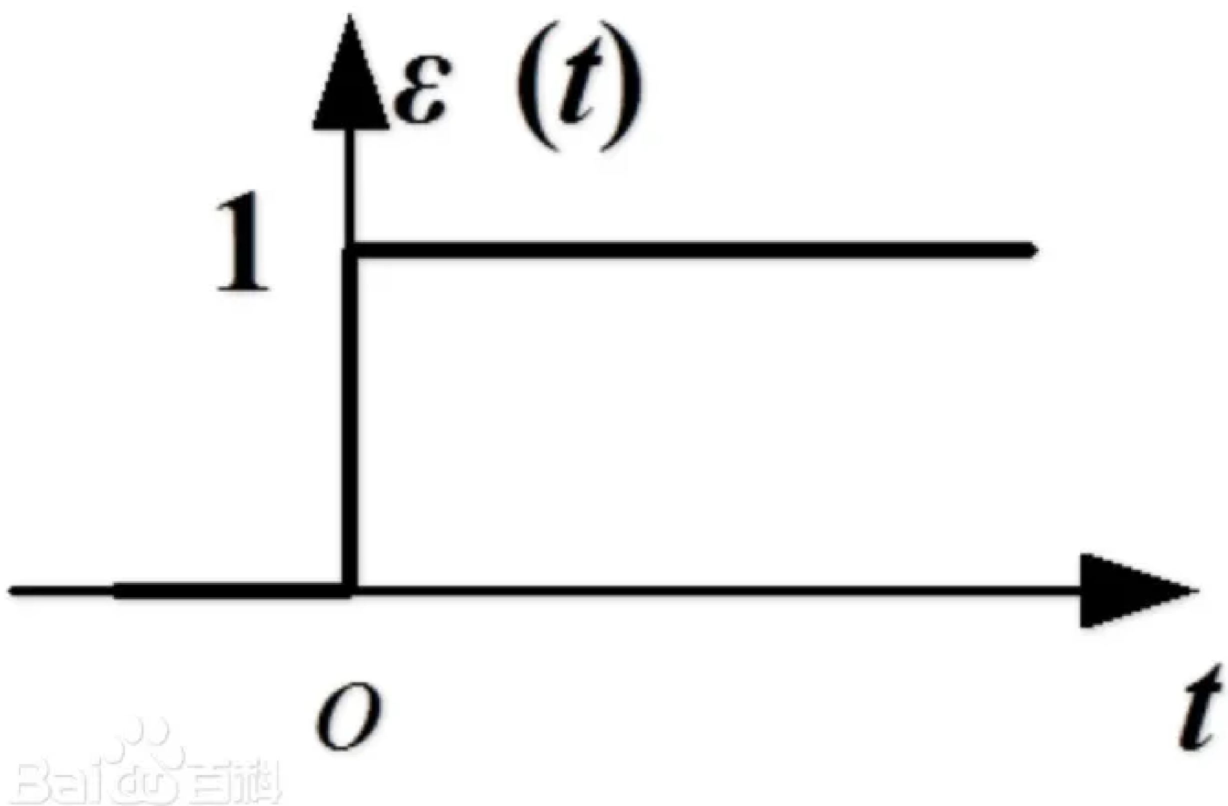
7. 一阶系统的单位阶跃响应(Step Response)

单位阶跃函数（Unit Step）

数学表达式：

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0 \\ 1, & \text{if } t \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$



其Laplace Transform为：

$$U(s) = \frac{1}{s} \qquad (2)$$

单位冲激函数（Unit Impulse）

又称狄拉克函数（Dirac Delta），其数学表达式为：

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & \text{if } t=0\\ 0, & \text{if } t\neq 0\end{cases} \qquad (3)$$

又或者：

$$\begin{cases}\delta(t)=0, & \text{if } t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases} \qquad (4)$$

其Laplace Transform为：

$$U(s)=1 \qquad (5)$$

一阶（线性时不变）系统的时域响应

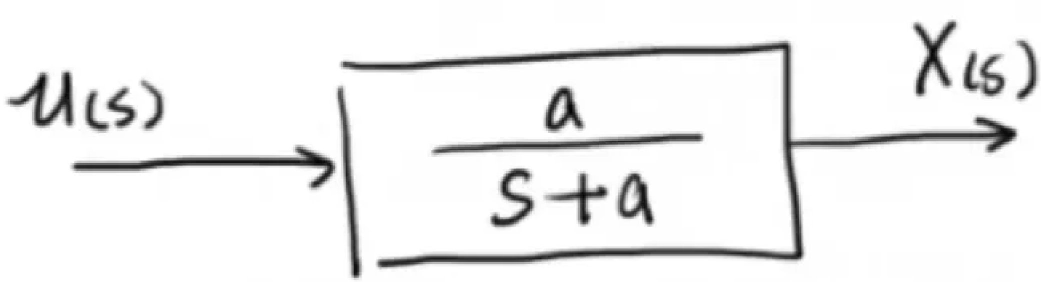
典型一阶系统的微分方程为：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+ax(t)=au(t) \qquad (6)$$

拉普拉斯变换后可以得到它的传递函数：

$$G(s)=\frac{a}{s+a} \qquad (7)$$

系统的极点是 $s_{pole}=-a$.

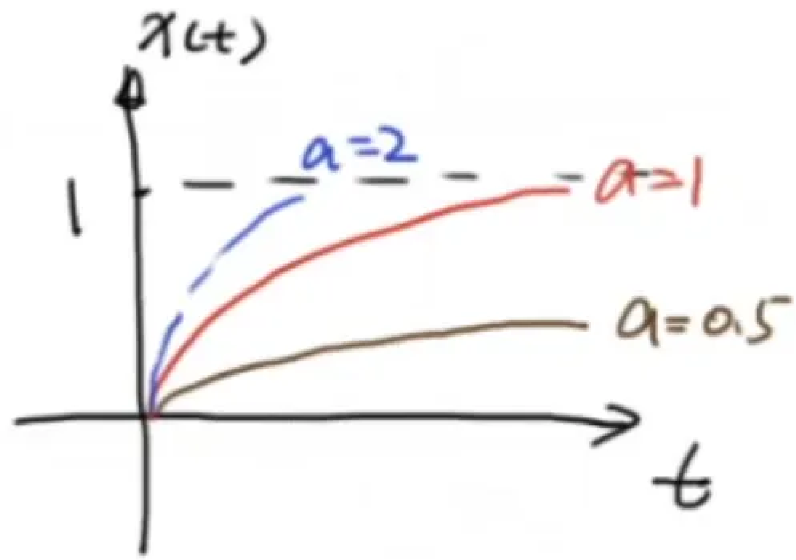


当系统的输入 $u(t)$ 为**单位阶跃响应**，输出为：

$$X(s)=U(s)G(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{a}{s+a}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a} \qquad (8)$$

对 Eq. (8) 进行逆拉普拉斯变换得到：

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}]=e^{0t}-e^{-at}=1-e^{-at} \qquad (9)$$



两个一阶系统的重要性能指标：

1. **时间常数（Time Constant）：** 反映了系统的**响应速度**（t越小，响应速度越快）。

$$t = \tau = \frac{1}{a} \qquad (10)$$

2. **调节时间或稳定时间（Settling Time）：** 表示系统输出与终值之间的差距达到**2%**以内所需要的时间。

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{a} \qquad (11)$$

对于一阶系统和单位阶跃响应，只考虑 $t \geq 0$ 时， Eq. (6)变为：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a(1 - x(t)) \qquad (12)$$