3. 系统分析实例：一起燃烧卡路里

3.1 数学建模

3.2 比例控制器

- 3.2.1 终值定理
  - 终值定理的定义
  - 终值定理的条件
  - 终值定理的应用举例
- 3.2.2 稳态误差

3.3 Matlab / Simulink 仿真

3.1 数学建模

自动控制原理3：一起燃烧卡路里

变量定义：

热量摄入：E_I (Input)　　单位：kCal

热量支出：E_e (Expenditure) $= \underbrace{E_a}_{\text{额外热量消耗}} + \underbrace{\alpha P}_{\text{正常消耗}}$

热量净摄入：$E_N = E_I - E_e$

P：即BMR，基础代谢率，单位：kCal/day

α：比例系数　$\alpha = \begin{cases} 1.3 \longrightarrow \text{轻体力劳动} \\ 1.5 \longrightarrow \text{中体力} \\ 1.9 \longrightarrow \text{重体力} \end{cases}$

且热量与体重的关系为：$7000\ kCal \approx 1\,kg$

建立微分方程：

$$\frac{dm}{dt} = \frac{E_N}{7000} = \frac{E_I - E_e}{7000} = \frac{E_I - E_a - \alpha P}{7000} \tag{1}$$

对于BMR的计算，选用如下公式：

$$P = 10m + 6.25h - 5a + s \tag{2}$$

其中，m为体重(kg)，h为身高(cm)，a为年龄，$s = \begin{cases} 5, & \text{男性} \\ -161, & \text{女性} \end{cases}$

将Eq.(2)代入Eq.(1)，得到：

$$\frac{dm}{dt} = \frac{E_I - E_a - \alpha(10m + 6.25h - 5a + s)}{7000} \tag{3}$$

由于对于一个人来说，可以近似认为h, a, s都是常数，故令$C = 6.25h - 5a + s$，

$$\frac{dm}{dt} = \frac{E_I - E_a - \alpha(10m + c)}{7000} \tag{4}$$

这个系统的输入为： $u = E_I - E_a - \alpha c$

输出为： $x = m$

即： $\dot{x} = \dfrac{u - 10\alpha m}{7000}$ (5)

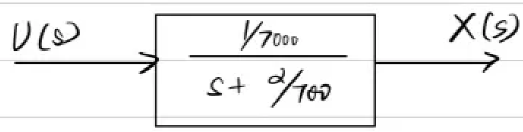
对 Eq.(5) 拉氏变换： $7000sX(s) = U(s) - 10\alpha X(s)$

$$U(s) = (7000s + 10\alpha)X(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{7000s + 10\alpha} \tag{6}$$

$$= \frac{\frac{1}{7000}}{s + \frac{1}{700}\alpha}$$

框图：



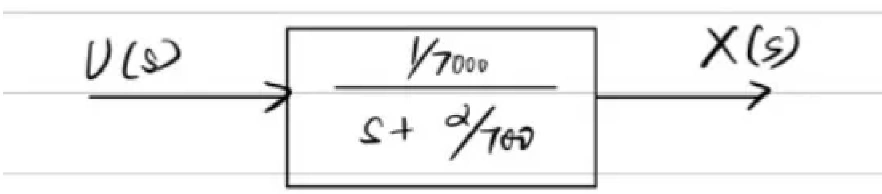
这个系统的传递方程为：

$$G(s) = \frac{1/7000}{s + \alpha/700} \qquad (3.1.6)$$

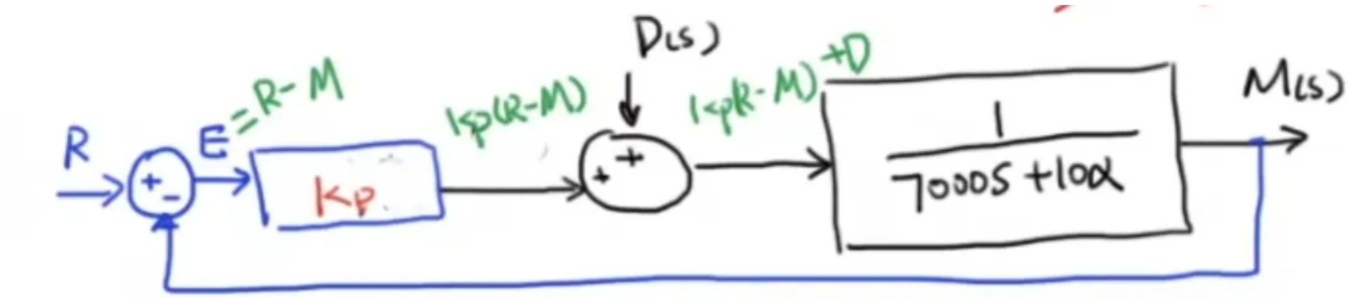
系统的极点为 $s = -\dfrac{\alpha}{700} < 0$ ，因此这个系统是稳定的。

3.2 比例控制器

3.1 节，我们通过数学建模，得到了这个系统的开环形式：



根据 1. 开环系统和闭环系统 / 反馈控制，我们可以通过引入参考值，误差值和扰动，建立出这个系统的闭环形式：



在这个框图中，我们使用了一个比例系数为 K_P 的比例控制器。

$$E(s)=R(s)-M(s) \qquad (3.2.1)$$

此时系统的输入为：

$$\begin{aligned} U(s) &= K_P E(s)+D(s) \\ &= K_P[R(s)-M(s)]+D(s) \end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

系统的输出为：

$$\begin{aligned} M(s) &= U(s)G(s) \\ &= (K_P E(s)+D(s))G(s) \\ &= \{K_P[R(s)-M(s)]+D(s)\}G(s) \\ &= \{K_P[R(s)-M(s)]+D(s)\}\frac{1/7000}{s+\alpha/700} \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

> PS: 这里的 $M(s)$ 和3.1节的 $X(s)$ 是等价的，都表示为系统的输出值，只是我和王天威老师的写法不同。

于是：

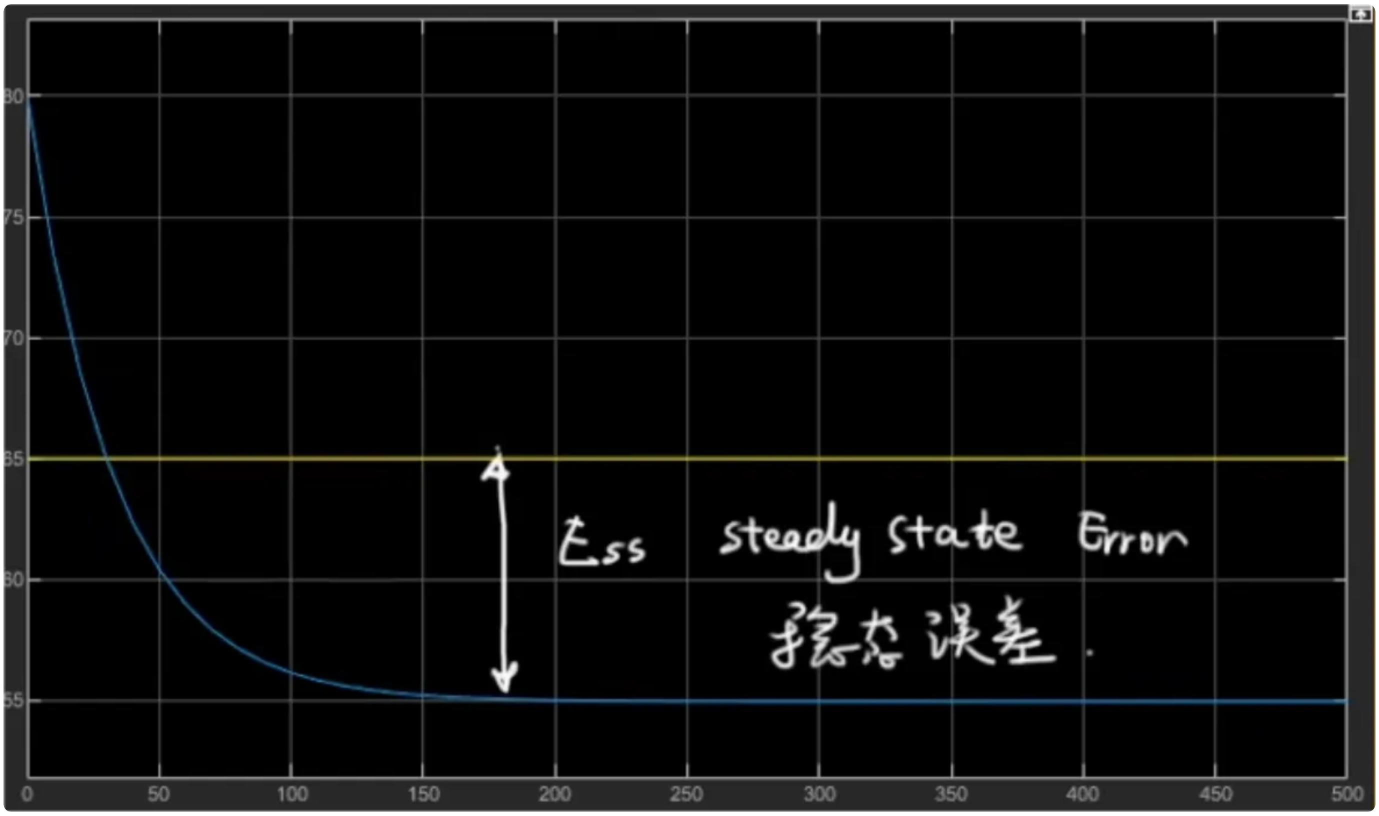
$$M(s)=\frac{K_P R(s)+D(s)}{7000s+10\alpha+K_P} \qquad (3.2.4)$$

如果 $R(s)$ 和 $D(s)$ 都是常数，即它们是稳定的，那么系统的输出的稳定性只会由 Eq. (3.2.4)的分母决定。

令特征方程 $7000s+10\alpha+K_P=0$ ，得到系统的极点： $s=\dfrac{-10\alpha-K_P}{7000}$ ，令 $s<0$ 得到：

$$K_P>-10\alpha \qquad (3.2.5)$$

也就是说，要想让这个系统，再加入比例控制器之后是稳定的，设计的控制器的比例系数需要满足 Eq. (3.2.5)。



然而，只靠比例控制，无法消除**稳态误差（Steady State Error）**。

3.2.1 终值定理

终值定理的定义

终值定理（Final Value Theorem）是一种工具，主要用于分析系统在经过长时间后将趋向的最终值。它在控制理论、信号处理和系统动力学中非常有用，可以帮助我们预测系统在稳定状态下的行为。

终值定理应用于拉普拉斯变换，并且**假设系统在时间趋于无穷大时会达到稳定状态**。终值定理的核心内容是，系统的终值可以通过拉普拉斯域中的传递函数来计算。

具体来说，终值定理表示：如果信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$ ，则在某些条件下，当时间 $t \to \infty$ 趋于无穷大时，信号的终值可以表示为：

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \times F(s) \qquad (3.2.6)$$

$F(s)$ 是信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

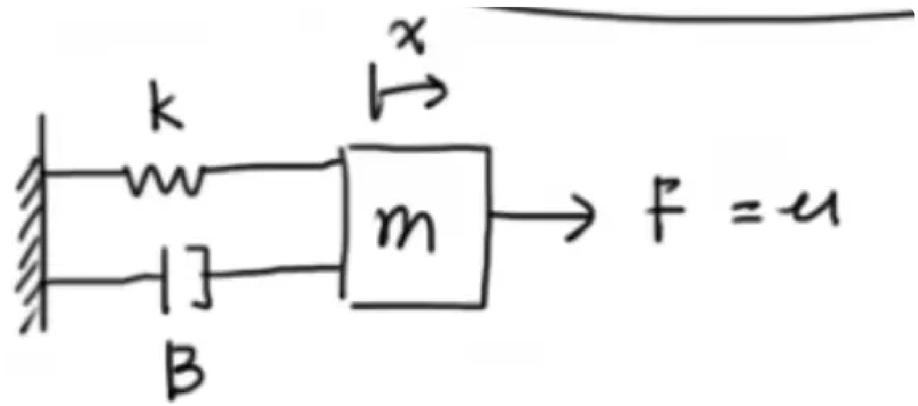
终值定理的条件

终值定理适用于系统在时间趋于无穷大时稳定的情况。具体条件包括：

- **系统必须稳定**：如果系统不稳定或存在振荡，终值定理可能不适用。系统的极点必须在拉普拉斯域的左半平面。
- **无多项式增长**：系统在时间域中不能呈现无限增长。

终值定理的应用举例

考虑 动态系统建模与分析 9. 二阶系统的时域响应分析中的实例：弹簧—阻尼系统。



数学模型为：

$$m\frac{\mathrm{d}x^2(t)}{\mathrm{d}t} = F(t) - B\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - Kx(t) \qquad (3.2.7)$$

拉普拉斯变换为：

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + K} \qquad (3.2.8)$$

对这个系统施加一个单位冲激响应 $u(t) = \delta(t)$ ：

$$\begin{aligned} X(s) &= U(s) \times \frac{1}{ms^2 + Bs + K} \\ &= \frac{1}{ms^2 + Bs + K} \end{aligned} \qquad (3.2.9)$$

根据 Eq. (3.2.6) ，这个系统的终值响应为：

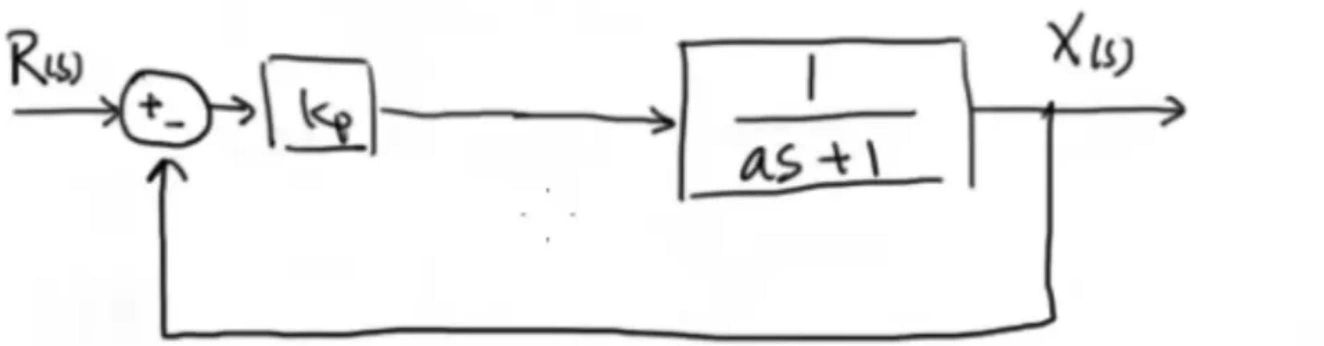
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{s\to 0} s \times X(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{ms^2 + Bs + K} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (3.2.10)$$

同理，如果对这个系统施加一个单位阶跃响应，

$$
\begin{aligned}
X(s) &= U(s) \times \frac{1}{ms^2 + Bs + K} \\
&= \frac{1}{s} \times \frac{1}{ms^2 + Bs + K}
\end{aligned}
\qquad (3.2.11\ \mathrm{a})
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{s\to 0} s \times X(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{ms^2 + Bs + K} \\
&= \frac{1}{K}
\end{aligned}
\qquad (3.2.11\ \mathrm{b})
$$

3.2.2 稳态误差



回到一个比例控制系统，设系统的传递函数为： $G(s) = \frac{1}{as+1}$ ，

$$
\begin{aligned}
X(s) &= U(s)G(s) \\
&= K_P E(s)G(s) \\
&= \{K_P[R(s) - X(s)]\}G(s) \\
&= \{K_P[R(s) - X(s)]\}\frac{1}{as+1}
\end{aligned}
\qquad (3.2.12\ \mathrm{a})
$$

$$
X(s) = \frac{K_P R(s)}{as + 1 + K_P} \qquad (3.2.12\ \mathrm{b})
$$

系统的极点 $s = -\frac{1+K_p}{a}$ ，当 $K_P > -1$ 时，系统稳定，满足终值定理条件。设系统的参考值 $r(t) = c$,则 $R(s) = \frac{c}{s}$ ，代入Eq. (12)，这个系统的终值响应为：：

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}x(t) &= \lim_{s\to 0}s \times X(s) \\
&= \lim_{s\to 0}s \times \frac{K_P R(s)}{as+1+K_P} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{sK_P\frac{c}{s}}{as+1+K_P} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{cK_P}{as+1+K_P} \\
&= \frac{K_P}{1+K_P}c
\end{aligned} \tag{3.2.13}
$$

也就是说，当时间趋于无穷大时，系统稳定，稳态误差为：

$$
e_{ss} = r(t) - \lim_{t\to\infty}x(t) = c - \frac{K_P}{1+K_P}c = \frac{1}{1+K_P}c \tag{3.2.14}
$$

到这里，我们通过计算，知道了为什么只通过P控制器，**无法消除稳态误差**，除非我们将控制器的比例系数 K_P 设计为无穷大，但这在工程实现上是不现实的，过大的比例系数会引起系统的超调！

3.3 Matlab / Simulink 仿真