

11. 伯德图 (Bode Plot)

11.1 概念

11.2 典型系统的频率响应

11.2.1 积分器

11.2.2 一阶系统

11.2.3 比例微分系统

11.2.4 比例控制系统

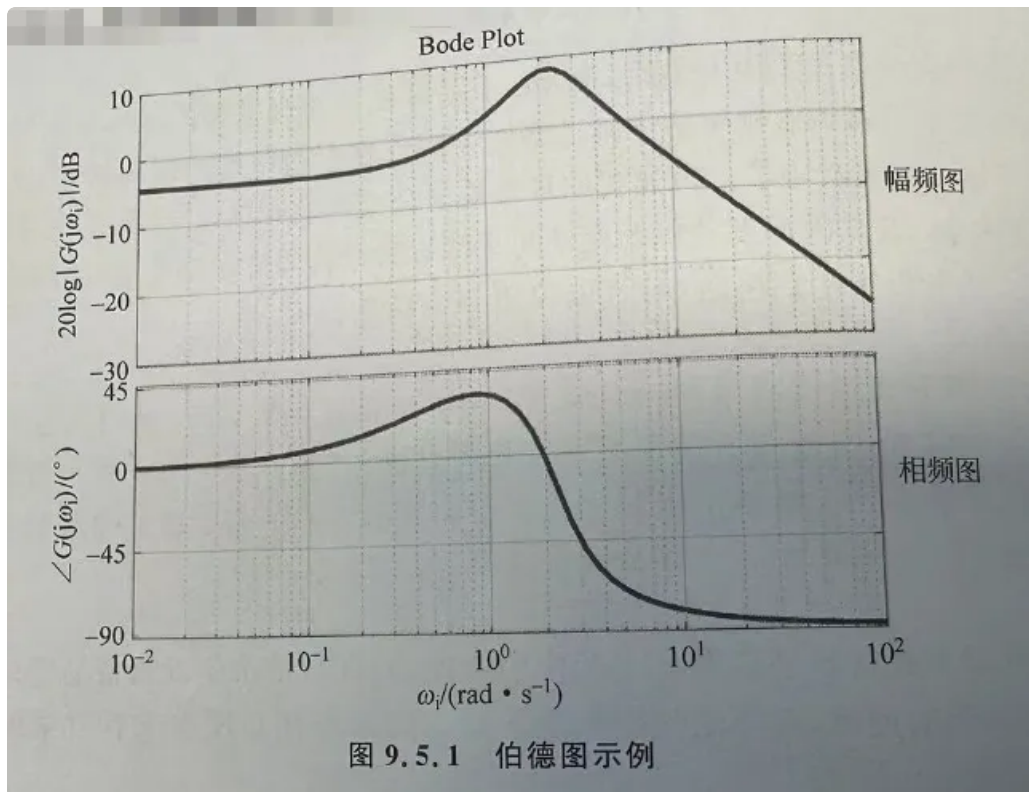
11.2.5 超前补偿器

11.2.6 滞后补偿器

11.3 稳定裕度

11.1 概念

分为幅频图 (Magnitude Plot) 和相频图 (Phase Plot) .



那么幅频图中的纵轴单位 $20\log|G(j\omega_i)|/\text{dB}$ 是哪来的?

首先，我们看分贝（Decibel）的定义：

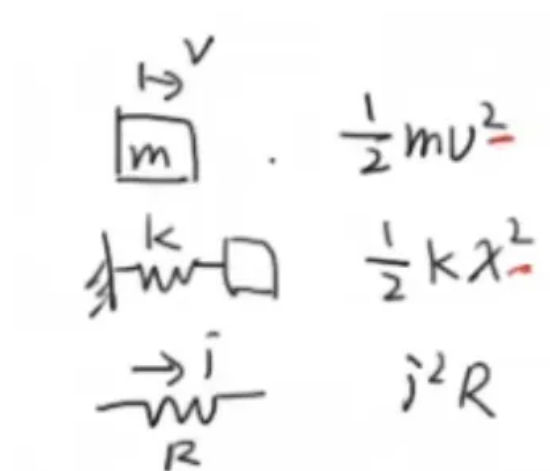
$$L_{dB} = 10 \log \frac{P_m}{P_r} \quad (1)$$

其中， P_m 是测量功率（Measurement Power）， P_r 是参考功率（Reference Power）。

而功率（又或者说是能量）与振幅的平方成比例。即：

$$P = f(M^2) \quad (2)$$

为什么呢？



于是：

$$\begin{aligned} L_{dB} &= 10 \log \frac{P_m}{P_r} \\ &= 10 \log \left(\frac{M_o}{M_i} \right)^2 \\ &= 20 \log \frac{M_o}{M_i} = 20 \log |G(j\omega_i)| \end{aligned} \quad (3)$$

因此，伯德图的幅频运算满足对数运算的性质，即：

$$20 \log MN = 20 \log M + 20 \log N \quad (4)$$

相位运算则满足：

$$\angle G_1(j\omega_i) G_2(j\omega_i) = \angle G_1(j\omega_i) + \angle G_2(j\omega_i) \quad (5)$$

由 Eq.(3) 和 Eq.(4) 我们可以得到一个结论，串联系统的伯德图等于其子系统伯德图的叠加。

11.2 典型系统的频率响应

11.2.1 积分器

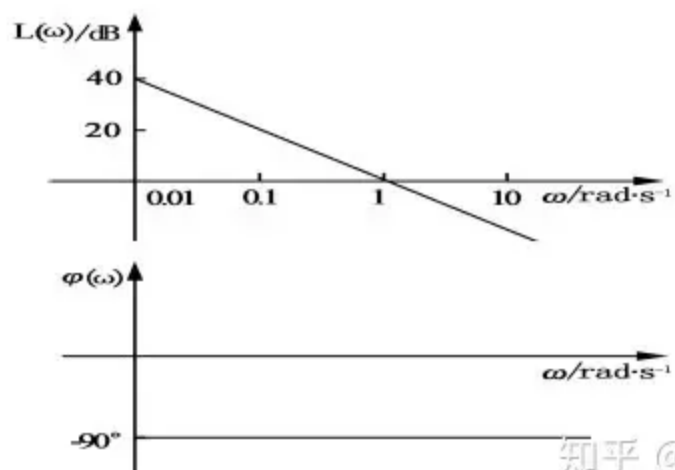
积分环节的传递函数： $G(s) = \frac{1}{s}$ 频率特性： $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

幅频特性： $A(\omega) = \frac{1}{\omega}$ 相频特性： $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

对数幅频特性：

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = -20\lg \omega$$

Bode 图如图所示。



知乎 @金鸡一唱天下白

11.2.2 一阶系统

惯性环节的传递函数：
$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

频率特性：

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{-j \arctan \omega T} \\ &= \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \end{aligned}$$

幅频特性：
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

相频特性：
$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

实频特性：
$$p(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}$$

虚频特性：
$$\theta(\omega) = -\frac{T\omega}{1 + \omega^2 T^2}$$

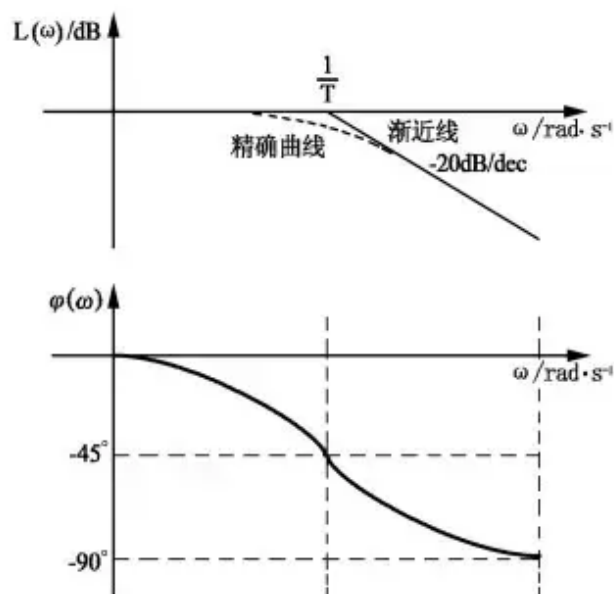


图5-10 惯性环节的Bode图

对数幅频特性：
$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

对数相频特性：
$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

Bode 图如图 5-10 所示。

知乎 @金鸡一唱天下白

11.2.3 比例微分系统

PD控制器的两个缺点：

1. 使用时需要额外的能量来源；
2. 对高频噪声敏感（放大高频噪声）。

11.2.4 比例控制系统

比例环节的传递函数： $G(s)=K$

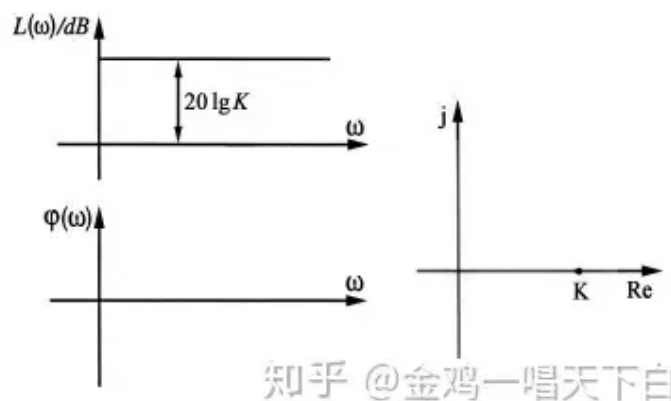
频率特性： $G(j\omega)=K$

幅频特性： $A(\omega)=K$

相频特性： $\varphi(\omega)=0$

对数幅频特性： $L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg K$

对数幅频特性为一水平线，相频特性与横坐标重合。



知乎 @金鸡一唱天下白

11.2.5 超前补偿器

其相位响应为正，因此命名为超前补偿器。且不需要额外的能量来源。这种控制器可以提前作出预测，**提高系统的响应速度。**

11.2.6 滞后补偿器

相位滞后，且不需要额外的能量来源。滞后补偿器的响应滞后于输入，有助于**消除系统的稳态误差。**

11.3 稳定裕度

分为幅值裕度（Gain Margin）和相角裕度（Phase Margin）。