4. Laplace Transform

什么是卷积?

在信号处理中，卷积用于描述**线性时不变系统**对输入信号的响应。

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

> 直观描述一个卷积：一个弹簧，给它一个冲击，它会表现为振动。但是如果给它一个连续作用的变化的力，**弹簧当下的振动即是过去所有振动的叠加**。这才是卷积的根本意思，即过去的响应会影响当下。

考虑如下电路：

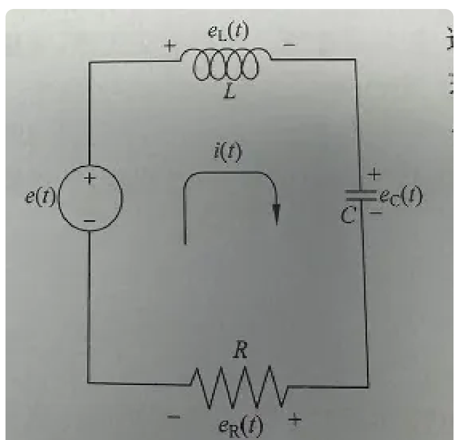


图 2.1.8 电阻电感电容电路

系统各个元件的电压为：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{电感电压：} e_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \\
&\text{电容电压：} e_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \\
&\text{电阻电压：} e_R(t) = i(t)R
\end{aligned}\right\}$$

根据基尔霍夫电压定律：

$$e_L(t)+e_C(t)+e_R(t)-e(t)=0 \qquad (1)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t+i(t)R-e(t)=0 \qquad (2)$$

对Eq.（2）两边同时求导并整理，得到：

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=Li''+Ri'+\frac{1}{C}i \qquad (3)$$

Eq.（3）描述了电流 $i(t)$ 与电压 $e(t)$ 之间的关系，它是一个关于电流的二阶微分方程。

写成卷积形式（我们不关心下面函数的具体形式，只需要知道 $g(t)$ 作为这个系统的单位冲激响应，建立了电流 $i(t)$ 与电压 $e(t)$ 之间的**卷积运算关系**）：

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} * g(t) \\ &= u(t) * g(t) \end{aligned} \qquad (4)$$

什么是Laplace Transform?

对于上述系统，我们要分析系统的输出（ $i(t)$ ），就需要分析卷积 $u(t)*g(t)$ ，或者求解微分方程。然而，直接求解它们的过程非常复杂。

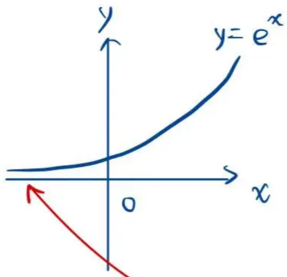
因此，我们引入了拉普拉斯变换，将系统的微分方程转化为代数方程，同时将卷积运算变为乘法运算，并把一个时域上的函数 $f(t)$ 转换成一个复数域上的函数 $F(s)$ ， $s=\sigma+j\omega$ 。

定义为：

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \qquad (5)$$

举例：对 $f(t)=e^{-at}$ 作拉氏变换：

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st}\, dt$$



$$= \int_0^\infty e^{-(a+s)t}\, dt = -\frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t}\Big|_0^\infty$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t}\right)}_{\text{趋于0}} + \frac{1}{a+s} = \frac{1}{a+s}$$

拉普拉斯变换具有**线性叠加性**：

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = aF(s)+bG(s) \qquad (6)$$

常见拉式变换公式：

常用拉氏变换对

f(t)	F(s)
脉冲函数 $\delta(t)$	1
阶跃函数 $u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t\cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2\cdot u(t)$	$\frac{1}{s^3}$
$t^n\cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

额外补充：分部积分法

分部积分法是一种用于计算两个函数乘积的积分的方法，它是积分运算的一个重要技巧。这个方法基于乘积的导数法则，即 $d(uv) = udv + vdu$ ，通过对这个等式进行整理和积分，我们可以得到分部积分公式：

$$\int \mathrm{udv} = uv - \int v\mathrm{du}$$

回到最上面的系统，对其进行拉氏变换，得到：

$$sE(s) - e(0) = L(s^2I(s) - si(0) - i'(0)) + R(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{C}I(s) \tag{6}$$

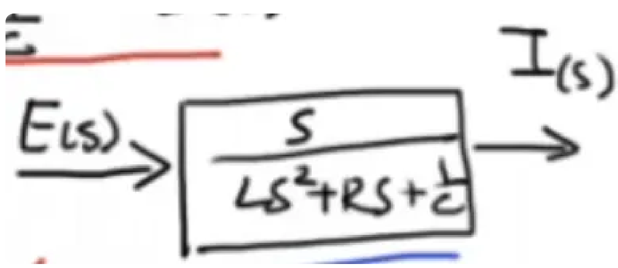
我们假设系统的初始状态均为0，得到：

$$\begin{aligned} sE(s) &= Ls^2I(s) + RsI(s) + \frac{1}{C}I(s) \\ &= (Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})I(s) \end{aligned} \tag{7}$$

继续整理公式：

$$E(s) = (Ls + R + \frac{1}{sC})I(s) \tag{8}$$

最终，我们将一个微分方程Eq.（3）转换成了一个代数方程Eq.（8）。继续下去，我们把方程写成 $I(s) = G(s)E(s)$ 的形式，并画出这个方程的框图：



这里的 $G(s)$ ，就是我们后面会提到的：**传递函数**！