3. 一个详细的建模例子

前两节1. 2.提到的系统状态方程：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (1)$$

定义如下系统：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 0.1x_2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_2(k) + 0.5u(k) \end{cases} \qquad (2)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$$

(3)

我们可以知道，这个系统的状态矩阵 $\boldsymbol{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，控制矩阵 $\boldsymbol{B}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ ；

在上一节中，我们推导了最优化MPC中 $\boldsymbol{X}_k$ 的表达式：

$$\boldsymbol{X}(k) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{U}(k) \qquad (4)$$

假设预测步长为3，即 $N = 3$,则：

$$
X(k) = \begin{bmatrix} x(k|k) \\ x(k+1|k) \\ x(k+2|k) \\ x(k+3|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \\ x_1(k+1|k) \\ x_2(k+1|k) \\ x_1(k+2|k) \\ x_2(k+2|k) \\ x_1(k+3|k) \\ x_2(k+3|k) \end{bmatrix} \qquad U(k) = \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ u(k+2|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ u(k+2|k) \end{bmatrix}
$$

(5)

其中，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= [\boldsymbol{I}_{n\times n}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 \ldots, \boldsymbol{A}^N]^T \\
&= [\boldsymbol{I}_{n\times n}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{A}^3]^T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0.1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0.3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0.7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}_{8\times 2}
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{N-2}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}_{8\times 3} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} & 0 \\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}_{8\times 3} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.05 & 0 \\ 2 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}_{8\times 3}
\end{aligned} \tag{7}
$$

在上一节我们还推导出了代价函数的一般形式：

$$
J = \boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{x}_k + 2\boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{E} \boldsymbol{U}_k + \boldsymbol{U}_k^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{U}_k \tag{8}
$$

其中， $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{M}^T \overline{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{M}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{M}^T \overline{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{C}^T \overline{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{C} + \overline{\boldsymbol{R}}$,

$\overline{\boldsymbol{Q}}, \overline{\boldsymbol{R}}$ 分别是状态矩阵和输入（控制）矩阵权重系数的增广矩阵：

$$
\overline{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \cdots & 0 \\ \vdots & \boldsymbol{Q} & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{F} \end{bmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{9}
$$

将 $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 代入Eq.(8)，我们就得到了这个系统的代价函数 J 。