2. 稳定性分析 极点

2.1 李雅普诺夫稳定性（Lyapunov Stability）

基本概念

在自动控制领域中，**李雅普诺夫稳定性**可用来描述一个动态系统的稳定性，通常用于确定平衡点或固定点的稳定性。在1892年由俄国数学家亚历山大・李雅普诺夫（Aleksandr Lyapunov）提出。

在讨论李雅普诺夫稳定性时，主要考虑一个动态系统，通常由一组微分方程或差分方程描述。在这个系统中，**平衡点**或固定点是一个系统状态，满足系统的方程并在没有外部扰动时保持不变。

> 当系统初始状态处于平衡点时，状态变量将不会随时间发生改变。

1. **李雅普诺夫意义下的稳定性**

   如果系统状态在附近稍微偏离平衡点后会逐渐恢复到原始平衡点，或至少不显著偏离，则平衡点被认为是稳定的。

2. **渐进稳定性**：如果系统状态在偏离平衡点后最终会回到平衡点，这个平衡点被认为是渐进稳定的。
3. **不稳定性**：如果系统状态在偏离平衡点后继续远离平衡点，那么平衡点是不稳定的。

这里对稳定性定义没有写出严格的数学推导，只关注其直观的概念。

李雅普诺夫函数

李雅普诺夫稳定性分析的关键概念是李雅普诺夫函数。李雅普诺夫函数是一种标量函数，其值随时间的推移而变化。该函数满足以下特性：

1. **正定性**：在平衡点以外，李雅普诺夫函数的值是正的；在平衡点处，它的值为零。

2. **负定导数**：李雅普诺夫函数的时间导数在系统演化过程中是非正的。

如果存在一个李雅普诺夫函数满足这些特性，那么平衡点是稳定的。如果时间导数是严格负定的，那么平衡点是渐进稳定的。

2.2 稳定性与传递函数

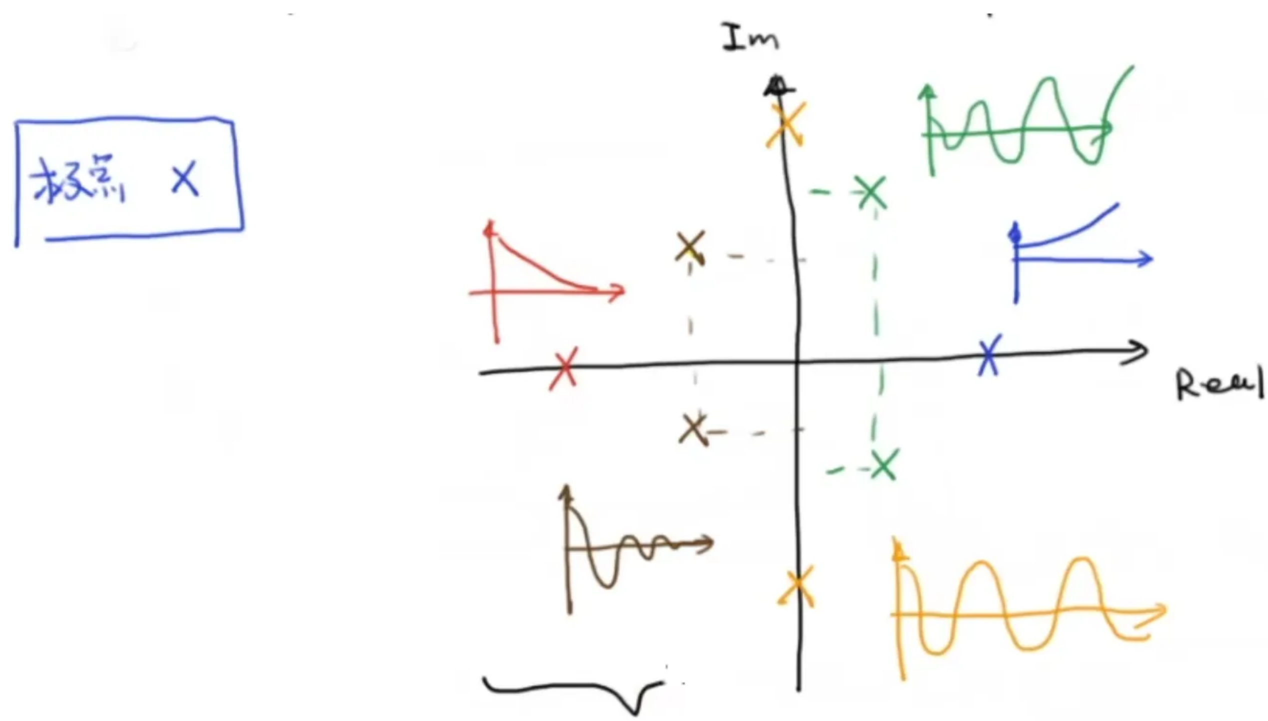
在经典控制理论体系中，会通过分析系统的**单位冲激响应**来判断稳定性，即令系统的输入 $u(t)=\delta(t)$ ，这是因为其拉普拉斯变换 $\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ ，不会引入极点/零点，这相当于分析传递函数本身的特性。此时，输出的拉普拉斯变换为：

$$X(s)=U(s)G(s)=L[\delta(t)]G(s)=G(s) \qquad (1)$$

请注意，在经典控制理论中，稳定特指**渐近稳定**。李雅普诺夫意义下的稳定（即极点在虚轴上的情况）会被称为临界稳定或者不稳定。在这样的定义下，从经典控制理论的角度来看，动态系统稳定的充要条件是：**传递函数的极点均在复平面的左半部分。**

此外，当系统的单位冲激响应满足渐近稳定条件时，针对每一个有界的输入 $u(t)$ ，系统的输出 $x(t)$ 也都会有界，不会发散到无限大。这种性质被称为**有界输入有界输出稳定(BIBO Stable, Bounded Input Bounded Output Stable)**。如果一个系统不满足BIBO稳定，就意味着一个有限的输入可能会导致无穷幅度的输出，这很有可能会对系统造成破坏性的影响。

BIBO稳定严格要求系统单位冲激响应要满足渐近稳定。如果系统的传递函数存在虚轴上的极点(临界稳定)，则不符合BIBO稳定，因为有限的输入也有可能令系统产生共振，使得输出的振幅无限大。



这个图的讲解过程非常清晰，建议搭配王天威老师的视频理解：【【自动控制原理】2_稳定性分析_极点_Stability】

2.3 劳斯判据（Routh Stability Criterion）

分析线性系统的稳定性必须解出系统特征方程的全部根，再依上述稳定的充要条件判别系统的稳定性。但对于高阶系统，解特征方程的根是件很麻烦的事。工程上常用的判别控制系统稳定性的方法是采用代数判据，主要包括著名的劳斯(Routh)稳定判据和赫尔维茨(Hurwith)稳定判据，是劳斯于1877年和赫尔维茨于1895年分别独立提出的，两者在表现形式上各有特色，但从运算上是可以相通的，也常合称为劳斯一赫尔维茨判据。代数判据是个比较简单的判据，它使我们有可能在不分解多项式因式的情况下，就能够确定出位于右半 s 平面内闭环极点数目。

著名的劳斯稳定判据(Routh stability criterion)采用了代数方法，根据多项式方程的系数，分析在一个多项式方程中是否存在**不稳定根**，而不必实际求解这一方程式。该判据是直接判断系统的绝对稳定性。**它的应用只能限于有限项多项式中。**