文章编号:1672-8262(2010)01-104-03　　中图分类号:O17,TP2　　文献标识码:A

多种数值积分方法比较分析

邢诚[1*],王建强[1],贾志强[2]
(1. 武汉大学测绘学院,湖北 武汉 430079; 2. 天津市勘察院,天津 300191)

摘　要:数值积分是计算方法或数值分析理论中非常重要的内容,数值积分方法也是解决实际计算问题的重要方法。本文对几种常用的数值积分方法进行了简要的分析,并用这几种方法对被积函数是普通函数做了数值积分,龙贝格(Romberg)积分方法效果较好。

关键词:数值积分;计算方法;数值分析;Romberg 方法

1　引　言

微积分的发明是人类科学史上一项伟大的成就,在科学技术中,积分是经常遇到的一个重要计算环节,比如 PID 调节器就涉及积分计算。在一定条件下,虽然有 Newton-Leibniz 公式可以计算定积分的值,但在很多情况下,$f(x)$的原函数不易求得,或非常复杂。此外,在实际工程中,函数 $f(x)$ 是用函数表形式给出而没有解析表达式,这就更无法使用 Newton-Leibniz 公式了。因此,探讨近似计算的数值积分方法是有明显的实际意义的,即有必要研究定积分的数值计算方法,以解决定积分的近似计算。数值积分的计算方法很多,如 Newton-Cotes 方法、Romberg 方法、Gauss 方法等[1,2,3]。其中 Newton-Cotes 方法是一种利用插值多项式来构造数值积分的常用方法,但是高阶的 Newton-Cotes 方法的收敛性没有保证,因此,在实际计算中很少使用高阶的 Newton-Cotes 公式。Romberg 方法收敛速度快、计算精度较高,但是计算量较大。Gauss 方法积分精度高、数值稳定、收敛速度较快,但是节点与系数的计算较麻烦、而且要求已知积分函数 $f(x)$。近十年来,随着计算机的高速发展,数值积分环节在工程应用领域越来越广泛,国内外众多学者在数值积分应用领域提出了许多新方法[4,5,6,7],有效解决了许多工程实际问题。本文对 Newton-Cotes 方法、Romberg 方法作了简要分析,并做了数值试验。

2　数值计算方法分析

定义:一个求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k) \tag{1}$$

如果对所有的次数不超过 m 的多项式严格相等,而对一些 $m+1$ 次多项式不相等,则称该公式代数精度为 m。式中,$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ 仅与 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的选取有关而与被积函数 $f(x)$ 无关。

2.1　Newton-Cotes 求积公式

Newton-Cotes 求积公式的推导见参考文献[8],它的基本公式为:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C(n,k) f(x_k) \tag{2}$$

$C(n,k)$ 为求积公式的系数,是 n 和 k 的函数。当 $n=1$ 时,式(2)所形成的求积公式为梯形公式:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)] \tag{3}$$

梯形积分的代数精度为 1,有两个积分节点。

当 $n=2$ 时,式(2)所形成的公式为 Simpson 公式:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \tag{4}$$

Simpson 公式的代数精度为 3,有 3 个积分节点。由于只增加一个节点,其代数精度增加 2,因此,Simpson 公式比梯形积分公式优越。

当 $n=4$ 时,式(2)所形成的公式为 Cotes 公式:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{90}\left[7f(a)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7f(b)\right] \tag{5}$$

Cotes 求积公式的代数精度为 5,有 5 个积分节点,节点系数的数值范围明显增大。一般地,对 Newton-Cotes 积分中,n 为偶数时的代数精度为 $n+1$,效果要比 n 为奇数时的积分公式优越。因此,本文没有列出 $n=3$ 时的公式。Newton-Cotes 公式并不是 n 越大越好,当 n 过大时,如 $n=8$ 时,系数会出现负值,这会导致公式的数值稳定性不好。

---

* 收稿日期:2009—06—24

作者简介:邢诚(1982—),男,博士研究生,主要从事大地测量学与测量工程研究。

2.2 复化求积公式

对于求$f(x)$在$[a,b]$上的数值积分，把积分区间划分为n等分，记$x_0,x_1,\cdots,x_n$为等分点，记$h=(b-a)/n$为步长，在每个小区间上使用梯形积分，这样便得到复化梯形公式：

$$T_n=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}f(x_n)\right] \tag{6}$$

变步长复化梯形公式：

$$T_{2n}=\frac{b-a}{2n}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+\sum_{i=1}^{2n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}f(x_{2n})\right]=\frac{T_n+M_n}{2} \tag{7}$$

其中，$M_n=\frac{b-a}{2n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{2j-1})$。

复化 Simpson 公式：

$$I_k=\frac{b-a}{2n}[f(x_{2(k-1)})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})] \tag{8}$$

变步长复化 Simpson 公式：

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}I_k=\frac{b-a}{6n}[f(x_0)+f(x_{2n})+4\sum_{k=1}^{n}f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})] \tag{9}$$

2.3 Romberg 积分方法

Romberg 求积方法是以复化梯形公式为基础，应用 Richardson 外推法导出的数值求积方法，推导过程见参考文献[8,9]。假设变步长复化梯形公式得到一系列T_k，则利用这些序列进行组合可以得到更为准确的积分值。把梯形序列外推3次，得到 Simpson 序列[式(10)]、Cotes 序列[式(12)]和 Romberg 序列[式(12)]，一般情况下，利用这些序列已经可以很好地满足实际需要了。

$$T_{k-1}^2=\frac{4T_k^1-T_{k-1}^1}{3} \tag{10}$$

$$T_{k-1}^3=\frac{16T_k^2-T_{k-1}^2}{15} \tag{11}$$

$$T_{k-1}^4=\frac{64T_k^3-T_{k-1}^3}{63} \tag{12}$$

3 算例分析

采用这些积分方法对4种普通函数进行数值积分，积分区间为[0,2]，它们的原函数都有解析表达式，因此可以计算出数值积分误差，数值计算误差结果见表1。

计算误差 表1

被积函数	梯形积分	Simpson 积分	Cotes 积分	复化梯形积分 n=100	复化 Simpson 积分 $n=100$
x^4	0.96000d1	0.26667d0	0.00000d0	0.10667d-2	0.42667d-7
$1/(1+x)$	0.23472d0	0.12988d-1	0.64697d-3	0.29628d-4	0.52624d-8
$\sin(x)$	0.20000d1	0.94351d-1	0.14293d-2	0.16450d-3	0.10825d-7
$\mathrm{Exp}(x)$	0.20000d1	0.31671d-1	0.18625d-3	0.21297d-3	0.56789d-8

从表1可以看出，梯形积分方法的误差最大，近似效果最差，Simpson 方法的精度比梯形积分高了一个数量级，它的代数精度比梯形积分的代数精度高，能更好地近似积分值，Cotes 积分方法的误差比 Simpson 积分精度高两个数量级。因此，一般情况下，代数精度越高，积分公式计算精度也越高。复化梯形积分方法比单独的梯形积分精度高，它的积分精度和被积函数有关，还和复化积分时的步长有关。复化 Simpson 积分公式比单独的 Simpson 积分公式高近7个数量级，效果明显。对x^4的积分结果可以看出，由于 Simpson 积分的代数精度为3，不能完全等于x^4，而 Cotes 积分的代数精度为5，可以严格等于x^4，因此积分误差为0。

Romberg 积分方法的计算结果如图1所示，积分区间为[0,2]，图中(a)，(b)，(c)分别是表1中后3个试验函数，被积函数x^4通过 Cotes 积分已经严格等于解析解，所以没有给出计算结果。图中粗实线代表梯形序列T_k^1，点线代表 Simpson 序列T_k^2，细实线代表 Cotes 序列T_k^3，虚线代表 Romberg 序列T_k^4。

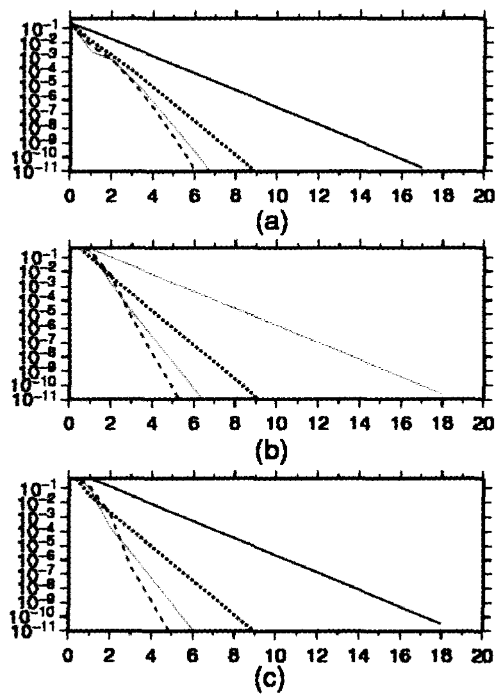

图1 Romberg 积分方法误差

由图1可以看出,通过序列的线性组合,数值计算精度得到提高,由梯形序列得到的Simpson序列效果最明显,序列几乎减少了一半。后面的序列组合虽然也得到很大提高,但是组合效果随着序列组合次数的增加而降低。

4 结 论

本文通过理论分析和数值计算实验可以得出以下结论:一般来说,Newton-Cotes方法的代数精度越高,数值积分的效果越好;当积分区间较大时候,可以采用复化积分方法可以得到较好的效果;变步长积分方法不仅可以很好地控制计算误差,并且可以寻找到适当的积分步长;Romberg积分方法可以更好地利用变步长复化积分公式得到的积分序列得到更为精确的数值结果,是一个较好的数值积分方法。

参考文献

[1] 沈剑华. 数值计算基础[M]. 上海:同济大学出版社,1999:73~109

[2] 王能超. 数值分析简明教程[M]. 北京:高等教育出版社,1997:66~96

[3] RICHARD L, BURDEN J, FAIRES D. Numerical analysis (Seventh Edition) [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001:186~226

[4] 熊华,杨国孝. 一类振荡函数的数值积分方法[J]. 北京理工大学学报,1999,19(3):280~284

[5] 郭汉伟,何建国,伊家贤等. 基于多分辨率分析的数值积分算法[J]. 国防科技大学学报,2000,22(4):94~96

[6] 薛峰,丁纯,薛禹胜. 数值积分自动中止的算法及其工程应用[J]. 电力系统自动化,2001(10):9~13

[7] WANG X H, HE Y G, ZENG Z Z. Numerical integration studybased on triangle basis neural network algorithm [J]. Journal of Electronics & Information Technology. 2004,26(3):394~399

[8] 甄西丰. 实用数值计算方法[M]. 北京:清华大学出版社,2006

[9] 吴勃英. 数值分析[M]. 北京:高等教育出版社,2007

Comparison and Analysis of Some Numerical Integration Methods

Xing Cheng[1], Wang JianQiang[1], Jia ZhiQiang[2]

(1. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China;

2. Tianjin Institute of Geotechnical Investigation & Surveying, Tianjin 300191, China)

Abstract: Numerical integration is an very important content of calculation method and numerical analysis, and the numerical integration method is also an important method to solve practical calculation problems. Some commonly used numerical integration methods were analyzed, and some examples were given at the cases that the integrands were normal functions by using these numerical integration methods. The results achieved by Romberg method were better.

Key words: numerical integration; calculation method; numerical analysis; Romberg method

(上接第103页)

Mass Transit Control Network Laid Discussion Frequently Asked Questions

Qin FeiXiang[1], Chen GongLiang[2]

(1. Shaanxi Provincial Academy of Engineering Surveying and Mapping III, XiAn 710054, China;

2. Shanghai Municipal Institute of Surveying & Mapping, Shanghai 200063, China)

Abstract: With the development of economic globalization and the deepening of reform and opening up, the rapid development of urban construction in Shanghai, especially in the last fifteen years, urban transport development fast track. The author of this article in light of their own on the 11th Shanghai Rail Transit Line 2 control network deployment experience, analysis of track laid in network traffic control frequently asked questions, their theoretical study, the main starting point for analysis of reliability, In the long edge of correction, traverse survey precision control, and data analysis.

Key words: Starting point; Naturalized correct; Traverse precision