הרצאות בטופולוגיה אלגברית של פרופ' איל קפלן תשפ"ב

נכתב על ידי ארז ברקוביץ

6 ביולי 2022

לאיל אין שום קשר לטעויות שנפלו בסיכום, כל הטעויות הן שלי.

תוכן העניינים

0.1 מטרות הקורס

בשנות ה 20-30 ניסו להתאים למרחבים טופולוגים מבנים אלגברים (חבורות). אנחנו נדבר על:

- חבורות הומוטופיה / (קו-) הומולוגיה.
- מרחבי כיסוי.

איל צייר על הלוח מתיחה של מסלולים כאילו הם גומיות בתור אינטואיציה.

0.2 סימונים

X זה מרחב טופולוגי (מ"ט).

I זה קטע היחידה $[0,1]$.

$\pi_1(X,x_0)$ זו החבורה היסודית.

$\left(\tilde{X},p\right)$ זה מרחב כיסוי של X.

$S^n=\left\{v\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|\,\|v\|=1\right\}$.

$D^n=\{v\in\mathbb{R}^n|\,\|v\|\leq1\}$.

$e^n=\{v\in\mathbb{R}^n|\,\|v\|<1\}$.

1 מושגי יסוד

1.1 הומוטופיה של מסלולים

הגדרה 1. מסלול במ"ט X זה פונקציה רציפה $f:I\to X$. $f(0)=x_0$ תקרא נקודת ההתחלה, ו $f(1)=x_1$ נקודת הסיום.

הגדרה 2. הומוטופיה של מסלולים ב X זו פונ' $F:I\times I\to X$ רציפה, כך ש $F(0,t)=x_0$ ו $F(1,t)=x_1$ לכל $t\in I$. נסמן $f_t(s)=F(s,t)$, t זה "האינדקס של הפונקציה". נאמר כי f_0 ו f_1 הן הומוטופיות ונסמן $f_0\simeq f_1$.

דוגמה 3. יהיו f_1,f_2 מסילות ב $\mathbb{R}^n$ כך ש $f_i(0)=x_0$ ו $f_i(1)=x_1$. נגדיר $F:I\times I\to\mathbb{R}^n$ לפי $F(s,t)=(1-t)f_1(s)+tf_2(s)$. F רציפה כחיבור וכפל של רציפות, בנוסף:

$$F(0,t)=(1-t)f_1(0)+tf_2(0)=(1-t)x_0+tx_0=x_0$$

$$F(1,t)=(1-t)f_1(1)+tf_2(1)=(1-t)x_1+tx_1=x_1$$

$$F(s,0)=f_1(s)$$

$$F(s,1)=f_2(s)$$

אזי $f_1\simeq f_2$ הומוטופיות.

אותה הוכחה נכונה לכל TVS (Top-Vector-Space) קמור.

הערה 4. בקורס בטופולוגיה הוכחנו כי אם פונקציה $f:X\to Y$ היא רציפה על כל $C_i\subseteq X$, עבור $\{C_i\}$ משפחה סופית של קבוצות סגורות המכסה את X, אזי f רציפה על כל X.

טענה 5. הומוטופיה היא יח"ש RTS . מחלקות השקילות נקראות מחלקות הומוטופיה, ומסומנות $[f]$.

הוכחה. רפלקסיביות: תהי f מסילה נגדיר $F:I\times I\to X$ לפי $F(s,t)=f(s)$. F רציפה כי f רציפה, לכל t מתקיים $F(0,t)=f(0)$ ו $f(1,t)=f(1)$. לבסוף $F(s,0)=f(s)=F(s,1)$ ולכן F היא הומוטופיה בין f ל f, כלומר $f\simeq f$.

סימטריות: יהיו f,g מסילות כך ש $f\simeq g$, אזי קיימת הומוטופיה F כך ש $F(s,0)=f(s)$ ו $F(s,1)=g(s)$. נגדיר $G:I\times I\to X$ לפי $G(s,t)=F(s,1-t)$, G רציפה כהרכבה של רציפות. לכל t מתקיים:

$$G(0,t)=F(0,1-t)=x_0$$

$$G(1,t)=F(1,1-t)=x_1$$

בנוסף $G(s,0)=F(s,1)=g(s)$ ו $G(s,1)=F(s,0)=f(s)$, אזי $g\simeq f$.

טרנזיטיביות: יהיו f,g,h מסלולים כך ש $f\simeq g$ ו $g\simeq h$, כלומר קיימת הומוטופיה F מ f אל g וגם קיימת הומוטופיה G מ g אל h. נגדיר $H:I\times I\to X$ לפי:

$$H(s,t)=\begin{cases}F(s,2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ G(s,2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

נעיר ש H מוגדרת היטב עבור $t=\frac{1}{2}$ כי $G(s,0)=g(s)=F(s,1)$, H רציפה לפי הערה 4. F הומוטופיה אזי $g(0)=F(0,t)=f(0)$ לכל t, גם G הומוטופיה אזי $h(0)=G(0,t)=g(0)$ לכל t, מכאן $x_0=f(0)=g(0)=h(0)$ וגם לכל t מתקיים $H(0,t)=x_0$. באותו האופן $x_1=f(1)=g(1)=h(1)$ ולכל t מתקיים $H(1,t)=x_1$. לבסוף $H(s,0)=F(s,0)=f(s)$ ו $H(s,1)=G(s,1)=h(s)$ לכן $f\simeq h$. □

הגדרה 6. עבור שני מסלולים f,g כך ש $f(1)=g(0)$, נגדיר הרכבה/כפל של f ו g להיות פונקציה $f\cdot g:I\to X$ לפי:

$$f\cdot g(s)=\begin{cases}f(2s) & 0\leq s\leq\frac{1}{2}\\ g(2s-1) & \frac{1}{2}\leq s\leq 1\end{cases}$$

טענה 7. כפל של מסלולים לא תלוי בנציגים של מחלקות ההומוטופיה.

הוכחה. יהיו f,g שני מסלולים כך ש $f(1)=g(0)$, נניח כי f',g' גם שני מסלולים כך ש $f\simeq f'$ ו $g\simeq g'$, נוכיח כי $f\cdot g\simeq f'\cdot g'$. יש לנו הומוטופיה F מ f אל f' והומוטופיה G מ g אל g'. נגדיר $H:I\times I\to X$ על ידי:

$$H(s,t)=\begin{cases}F(2s,t) & 0\leq s\leq\frac{1}{2}\\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2}\leq s\leq 1\end{cases}$$

נעיר ש H מוגדרת היטב עבור $s=\frac{1}{2}$ מכיוון ש $F(1,t)=f(1)=g(0)=G(0,t)$. H רציפה לפי הערה 4. לכל t מתקיים:

$$H(0,t)=F(0,t)=f(0)=f'(0)$$

$$H(1,t)=G(1,t)=g(1)=g'(1)$$

לבסוף:

$$H(s,0)=\begin{cases}F(2s,0) & 0\leq s\leq\frac{1}{2}\\ G(2s-1,0) & \frac{1}{2}\leq s\leq 1\end{cases}=\begin{cases}f(2s) & 0\leq s\leq\frac{1}{2}\\ g(2s-1) & \frac{1}{2}\leq s\leq 1\end{cases}=f\cdot g(s)$$

$$H(s,1)=\begin{cases}F(2s,1) & 0\leq s\leq\frac{1}{2}\\ G(2s-1,1) & \frac{1}{2}\leq s\leq 1\end{cases}=\begin{cases}f'(2s) & 0\leq s\leq\frac{1}{2}\\ g'(2s-1) & \frac{1}{2}\leq s\leq 1\end{cases}=f'\cdot g'(s)$$

אזי $f\cdot g\simeq f'\cdot g'$ כנדרש. □

הגדרה 8. א) לולאה זו מסילה f כך ש $f(0)=f(1)$.

ב) קבוצת מחלקות ההומוטופיה של מסילות בנק' x_0 מסומנת $\pi_1(X,x_0)$.

ג) x_0 נקראת נק' היחוס BasePoint .

1.2 החבורה היסודית

משפט 9. $\pi_1(X,x_0)$ היא חבורה ביחס לפעולה $[f]\cdot[g]=[f\cdot g]$, זו החבורה היסודית של X בנק' x_0.

למה 10. תהי $\phi:I\to I$ רציפה כך ש $\phi(0)=0$ ו $\phi(1)=1$, נניח כי f מסילה. אזי $f\circ\phi$ היא גם מסילה ו $f\simeq f\circ\phi$.

הוכחה. דבר ראשון $f\circ\phi$ רציפה כהרכבה של רציפות ולכן מסילה. נגדיר הומוטופיה לפי $F(s,t)=(1-t)f(s)+t(f\circ\phi)(s)$, F רציפה כסכום ומכפלה של רציפות. לכל t מתקיים:

$$F(0,t)=(1-t)f(0)+tf(\phi(0))=(1-t)f(0)+tf(0)=f(0)$$
$$F(1,t)=(1-t)f(1)+tf(\phi(1))=(1-t)f(1)+tf(1)=f(1)$$

הוכחנו ש F אכן הומוטופיה. $F(s,0)=f(s)$ ו $F(s,1)=f\circ\phi(s)$ אזי $f\simeq f\circ\phi$. $\square$

הערה 11. ϕ נקראת רה-פרמטריזציה.

למה 12. יהיו f,g,h מסלולים כלשהם כך ש $(f\cdot g)\cdot h$ מוגדר. אזי גם $f\cdot(g\cdot h)$ מוגדר וגם:

$$f\cdot(g\cdot h)\simeq(f\cdot g)\cdot h$$

הוכחה. דבר ראשון צריך להסביר למה $g\cdot h$ מוגדר ואז למה $f\cdot(g\cdot h)$ מוגדר. נתון כי $(f\cdot g)\cdot h$ מוגדר אזי $h(0)=f\cdot g(1)=g(1)$ ולכן $g\cdot h$ מוגדר. עוד הפעם $(f\cdot g)\cdot h$ מוגדר אזי $f\cdot g$ גם מוגדר ולכן $f(1)=g(0)=g\cdot h(0)$ אז $f\cdot(g\cdot h)$ מוגדר. נחשב את הביטויים:

$$f\cdot(g\cdot h)(s)=\begin{cases}f(2s) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ g\cdot h(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}=\begin{cases}f(2s) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ g(4s-2) & \frac{1}{2}\le s\le\frac{3}{4}\\ h(4s-3) & \frac{3}{4}\le s\le 1\end{cases}$$

$$(f\cdot g)\cdot h(s)=\begin{cases}f\cdot g(2s) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ h(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}=\begin{cases}f(4s) & 0\le s\le\frac{1}{4}\\ g(4s-1) & \frac{1}{4}\le s\le\frac{1}{2}\\ h(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

נגדיר רה-פרמטריזציה ϕ על ידי:

$$\phi(s)=\begin{cases}2s & 0\le s\le\frac{1}{4}\\ s+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\le s\le\frac{1}{2}\\ \frac{s}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

נחשב את $f\cdot(g\cdot h)(\phi(s))$ בחלקים:

א) בתחום $0\le s\le\frac{1}{4}$, מתקיים $0\le\phi(s)\le\frac{1}{2}$ ולכן:

$$f\cdot(g\cdot h)(\phi(s))=f(2\phi(s))=f(4s)=(f\cdot g)\cdot h(s)$$

ב) בתחום $\frac{1}{4}\le s\le\frac{1}{2}$, מתקיים $\frac{1}{2}\le\phi(s)\le\frac{3}{4}$ ולכן:

$$f\cdot(g\cdot h)(\phi(s))=g(4\phi(s)-2)=g(4s-1)=(f\cdot g)\cdot h(s)$$

ג) בתחום $\frac{1}{2}\le s\le 1$, מתקיים $\frac{3}{4}\le\phi(s)\le 1$ ולכן:

$$f\cdot(g\cdot h)(\phi(s))=h(4\phi(s)-3)=h(2s-1)=(f\cdot g)\cdot h(s)$$

לפי למה 10 נקבל:

$$f\cdot(g\cdot h)\simeq(f\cdot(g\cdot h))\circ\phi=(f\cdot g)\cdot h$$

$\square$

מסקנה 13. פעולת הכפל ב $\pi_1(X,x_0)$ היא באמת אסוציאטיבית.

הגדרה 14. תהי f מסילה. נגדיר $1_f:I\to X$ לפי $1_f(s)=f(1)$. גם נגדיר $1'_f:I\to X$ לפי $1'_f(s)=f(0)$.

טענה 15. 1_f ו $1'_f$ הן מסילות, בנוסף מתקיים $f\cdot 1_f\simeq f\simeq 1'_f\cdot f$.

הוכחה. דבר ראשון 1_f ו $1'_f$ הן פונקציות קבועות ולכן רציפות, נוכיח ש $f\cdot 1_f\simeq f$ הצד השני דומה. נגדיר רה פרמטריזציה ϕ לפי:

$$\phi(s)=\begin{cases}2s & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

ישירות מבבגדרה של כפל:

$$f\cdot 1_f(s)=\begin{cases}f(2s) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ 1_f(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}=\begin{cases}f(2s) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ f(1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}=\begin{cases}f(\phi(s)) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ f(\phi(s)) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}=f\circ\phi(s)$$

לפי למה 10 יוצא $f\cdot 1_f=f\circ\phi\simeq f$. $\square$

טענה 16. יהי $f:I\to X$ מסלול, נגדיר את המסלול ההפוך $\overline{f}:I\to X$ לפי $\overline{f}(s)=f(1-s)$. אזי $f\cdot\overline{f}\simeq 1'_f$ וגם $\overline{f}\cdot f\simeq 1_f$.

הוכחה. תחילה נוכיח $f\cdot\overline{f}\simeq 1'_f$. רוצים להגדיר הומוטופיה F מ $f\cdot\overline{f}$ אל $1'_f$, $f\cdot\overline{f}$ זה בעצם ללכת על f ואז לחזור חזרה על f בכיוון ההפוך, $1'_f$ זה להישאר בנקודת ההתחלה של f. אנחנו נרצה כל פעם ללכת על f עד מרחק t ואז לחזור על f בכיוון ההפוך, נקטין את t מ 1 עד ל 0, ואז נקבל הומוטופיה מ $f\cdot\overline{f}$ אל $1'_f$. פורמלית נגדיר הליכה על f עד מרחק t להיות המסילה:

$$f_t\left(s\right)=\begin{cases}f\left(s\right) & 0\leq s\leq 1-t\\ f\left(1-t\right) & 1-t\leq s\leq 1\end{cases}$$

נגדיר את ההליכה חזרה להיות $g_t\left(s\right)=\overline{f_t}\left(s\right)=f_t\left(1-s\right)$. ועכשיו נגדיר את ההומוטופיה ככפל של שתי המסילות $F\left(s,t\right)=\left(f_t\cdot g_t\right)\left(s\right)$. כלומר:

$$F\left(s,t\right)=\begin{cases}f_t\left(2s\right) & 0\leq s\leq\frac{1}{2}\\ g_t\left(2s-1\right) & \frac{1}{2}\leq s\leq 1\end{cases}=\begin{cases}f\left(2s\right) & 0\leq s\leq\frac{1-t}{2}\\ f\left(1-t\right) & \frac{1-t}{2}\leq s\leq\frac{1}{2}\\ f\left(1-t\right) & \frac{1}{2}\leq s\leq\frac{1+t}{2}\\ f\left(2-2s\right) & \frac{1+t}{2}\leq s\leq 1\end{cases}$$

עכשיו ברור ש f רציפה כי היא רציפה על כיסוי של קבוצות סגורות. לכל t מתקיים $F\left(0,t\right)=f\left(0\right)$ וגם $F\left(1,t\right)=f\left(0\right)$ אזי F הומוטופיה. F הומוטופיה בין $F\left(s,0\right)=\left(f_0\cdot g_0\right)\left(s\right)=\left(f\cdot\overline{f}\right)\left(s\right)$ ל $F\left(s,1\right)=\left(f_1\cdot g_1\right)\left(s\right)=f\left(0\right)=1'_f\left(s\right)$ כנדרש.

עכשיו נוכיח $\overline{f}\cdot f\simeq 1_f$. נשים לב כי $\overline{\overline{f}}=f$ וגם $1'_{\overline{f}}=1_f$, לכן $\overline{f}\cdot f=\overline{f}\cdot\overline{\overline{f}}\simeq 1'_{\overline{f}}=1_f$. □

מסקנה 17. עבור מסילות בנקודה x_0 נקבל $f\cdot\overline{f}\simeq 1_{x_0}\simeq\overline{f}\cdot f$. סיימנו את ההוכחה ש $\pi_1\left(X,x_0\right)$ היא חבורה.

דוגמה 18. לכל $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קמורה ו $x_0\in X$ החבורה היסודית היא טריוויאלית $\pi_1\left(X,x_0\right)=0$.

הערה 19. ניתן להכליל את הדוגמה לכל TVS כי כל TVS הוא קמור.

הגדרה 20. יהי $h:I\to X$ מסלול מ x_0 אל x_1. נגדיר פונקציה $\beta_h:\pi_1\left(X,x_1\right)\to\pi_1\left(X,x_0\right)$ על ידי:

$$\beta_h\left(\left[f\right]\right)=\left[h\right]\cdot\left[f\right]\cdot\left[\overline{h}\right]$$

β_h מוגדרת היטב כי הוכחנו שכפל מסלולים לא תלוי בבחירת הנציגים. אפילו נקבל שאם $h\simeq h'$ אזי $\beta_h\left(\left[f\right]\right)=\beta_{h'}\left(\left[f\right]\right)$.

משפט 21. β_h הינו איזומורפיזם של חבורות.

הוכחה. נזכור ש $\left[\overline{h}\right]=\left[h\right]^{-1}$. נבדוק ש β_h מכבד כפל:

$$\beta_h\left(\left[f\right]\cdot\left[g\right]\right)=\beta_h\left(\left[f\cdot g\right]\right)=\left[h\right]\cdot\left[f\cdot g\right]\cdot\left[\overline{h}\right]=\left[h\right]\cdot\left[f\right]\cdot\left[g\right]\cdot\left[h\right]^{-1}=\left[h\right]\cdot\left[f\right]\cdot\left[h\right]^{-1}\cdot\left[h\right]\cdot\left[g\right]\cdot\left[\overline{h}\right]=\beta_h\left(\left[f\right]\right)\cdot\beta_h\left(\left[g\right]\right)$$

כדי להוכיח שזה לא סתם הומומורפיזם נראה שיש לו הומומורפיזם הופכי, קל לנחש שזה $\beta_{\overline{h}}$:

$$\beta_{\overline{h}}\left(\beta_h\left(f\right)\right)=\left[\overline{h}\right]\cdot\left(\left[h\right]\cdot\left[f\right]\cdot\left[\overline{h}\right]\right)\cdot\left[\overline{\overline{h}}\right]=\left(\left[\overline{h}\right]\cdot\left[h\right]\right)\cdot\left[f\right]\cdot\left(\left[\overline{h}\right]\cdot\left[h\right]\right)=1_{x_1}\cdot\left[f\right]\cdot1_{x_1}=\left[f\right]$$

$$\beta_h\left(\beta_{\overline{h}}\left(f\right)\right)=\left[h\right]\cdot\left(\left[\overline{h}\right]\cdot\left[f\right]\cdot\left[\overline{\overline{h}}\right]\right)\cdot\left[\overline{h}\right]=\left(\left[h\right]\cdot\left[\overline{h}\right]\right)\cdot\left[f\right]\cdot\left(\left[h\right]\cdot\left[\overline{h}\right]\right)=1_{x_0}\cdot\left[f\right]\cdot1_{x_0}=\left[f\right]$$

$\square$

הגדרה 22. אם X קשיר מסילתית אז נוכל להגדיר את החבורה היסודית The Fundamental Group of X להיות:

$$\pi_1\left(X\right)=\pi_1\left(X,x_0\right)$$

הגדרה 23. X נקרא פשוט קשר Simply Connected אם X קשיר מסילתית וגם $\pi_1\left(X\right)=0$.

טענה 24. X פשוט קשר אם ורק אם יש מחלקת הומוטופיה יחידה של מסלולים בין x_0 ו x_1 לכל שתי נקודות $x_0,x_1\in X$.

1.3 מרחבי כיסוי

הגדרה 25. מרחב כיסוי של X הוא מ"ט $\tilde{X}$ ופונ' רציפה $p:\tilde{X}\to X$ כך ש p על, ולכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $x\in U\subseteq X$ כך ש $p^{-1}\left(U\right)$ היא איחוד זר של קבוצות פתוחות V_t. ובנוסף לכל t הצמצום של p אל V_t, כלומר $p:V_t\to U$ היא הומיאומורפיזם.

במקרה כזה נאמר גם כי U מכוסה היטב evenly coverd .

דוגמה 26. א) $\tilde{X}=X$ ו $p=\mathrm{id}$.

ב) $\tilde{X}=X\times Y$ ו p היא ההטלה על X.

ג) $X=P\mathbb{R}^2=\left(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\right)/\sim$ כאשר $x\sim y$ אם"ם $y=\lambda x$ עבור $\lambda\in\mathbb{R}$. $\tilde{X}=S^2$ ו $p\left(x\right)=\{x,-x\}$.

ד) $S^1=\tilde{X}=X$. נצייר סליל עם שני סיבובים מעל מעגל היחידה, ונסגור את הסליל כך שיהיה הומיאומורפי אל S^1. הסליל מייצג את $\tilde{X}$. מעל כל נקודה ב S^1 נמתח קו ישר, הקו חותך את הסליל בשתי נקודות בדיוק, כי לסליל יש שני ליפופים. את שתי הנקודות שבהן הקו חותך את הסליל נשלח אל הנקודה ב S^1 שנמצאת מתחתן. זו ההגדרה ש p, נשים לב כי p לא חח"ע.

דרך אחרת לכתוב את אותו הדבר היא להשתמש בעובדה ש $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1$, על ידי $t\mapsto\exp\left(2\pi it\right)$. נגדיר $p:\mathbb{R}/2\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ לפי $p\left(t+2\mathbb{Z}\right)=t+\mathbb{Z}$.

ה) $\tilde{X}=T=S^1\times S^1$ ו $X=S^1$. הפעם p זה לא פשוט הטלה על רכיב. כדי להגדיר את p צריך נמלה אחת שרצה פי 3 יותר מהר מנמלה אחרת, הנמלה המהירה רצה כל הרכיב הראשון S^1, והנמלה השנייה רצה על הרכיב השני. כל פעם שהנמלה המהירה משלימה סיבוב שולחים את המיקום של הנמלה השנייה או משהו.

דוגמה 27. דוגמה חשובה! $\tilde{X}=\mathbb{R}$ ו $X=S^1$, נגדיר $p:\mathbb{R}\to S^1$ לפי $p\left(s\right)=\exp\left(2\pi is\right)$. נחשוב על p בצורה הבאה. נשכן $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ לפי $\psi\left(s\right)=\left(\cos 2\pi s,\sin 2\pi s,s\right)$ זה סליל אינסופי. ואז נטיל על $\mathbb{R}^2$ את שני הרכיבים הראשונים. מציירים סליל אינסופי מעל מעגל. דיאגרמה:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{R}^3 \arrow[d] \\
 & S^1
\end{tikzcd}$$

המטרה שלנו היא להבין איך להרים מסלול ב S^1 אל הסליל האינסופי.

הגדרה 28. בהינתן דיאגרמה:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

הרמה של f אל Z היא חץ $\tilde{f}$ כך שהדיאגרמה הבאה חילופית:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\tilde{f}"] & Y
\end{tikzcd}$$

כלומר $g \circ \tilde{f} = f$.

למה 29. יהי X מ"ט ו $\tilde{X}$ מרחב כיסוי עם $p : \tilde{X} \to X$ מתאימה. תהי $F : Y \times I \to X$ פונ' רציפה ונניח $\tilde{F} : Y \times \{0\} \to \tilde{X}$ הרמה רציפה נתונה של הצמצום של F על $Y \times \{0\}$. אזי יש הרמה יחידה של F, נסמנה $\tilde{F}$ (בלי להתבלבל עם $\tilde{F}$ הנתונה), הממשיכה את $\tilde{F}$ הנתונה והיא רציפה. בשפה של תורת הקטגוריות אם נתון:

$$\begin{array}{cccc} & \tilde{F} & & \tilde{X} \\ & & \nearrow & \downarrow & p \\ F: & Y \times \{0\} & \to & X \end{array}$$

אזי:

$$\begin{array}{cccc} & \exists! \tilde{F} & & \tilde{X} \\ & & \nearrow & \downarrow & p \\ F: & Y \times I & \to & X \end{array}$$

הוכחה. תחילה נבנה הרמה $\tilde{F} : N \times I \to \tilde{X}$, עבור איזושהי נקודה $y_0 \in Y$ וסביבה $y_0 \in N \subseteq Y$. לכל $z \in I$ מתקיים $F(y_0, z) \in X$, אז לפי ההגדרה של מרחב כיסוי קיימת קבוצה פתוחה $F(y_0, z) \in U_z \subseteq X$ כך ש U_z מכוסה היטב. F רציפה אזי קיימת סביבה $N_z \times (a_z, b_z)$ של (y_0, z) בטופולוגיית המכפלה (יכול להיות ש (a_z, b_z) זה בעצם קטע סגור אם $a_z = 0$ או $b_z = 1$), כך ש $F(N_z \times (a_z, b_z)) \subseteq U_z$. לכל $z \in I$ הגדרנו קטע פתוח $z \in (a_z, b_z) \subseteq I$, אז יש לנו כיסוי פתוח $I = \cup_{z \in I} (a_z, b_z)$. כיוון ש I קומפקטי יש מספר סופי של z עבורם הסביבות (a_z, b_z) מכסות את I. ניקח חיתוך סופי של N_z (הסביבות של y_0) עבור ה-z-ים הנ"ל, כלומר $N = \cap N_z$ חיתוך סופי, N סביבה של y_0 כחיתוך סופי של סביבות. יש לנו מספר סופי של z-ים עבורם (a_z, b_z) מכסים את כל $I = [0, 1]$, לכן אפשר לקחת חלוקה מספיק עדינה של $I = [0, 1]$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

כך שלכל $0 \le i \le n-1$ קיים איזשהו z מהקבוצה הסופית של ה-z-ים עבורו $[t_i, t_{i+1}] \subseteq (a_z, b_z)$. הבנייה הזאת נותנת לנו $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq F(N_z \times (a_z, b_z)) \subseteq U_z$ לכל i, ואז נוכל להגדיר $U_i = U_z$ עבור ה-z המתאים, ועכשיו לכל i מתקיים $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ כאשר U_i פתוחה וגם מכוסה היטב.

עכשיו נגדיר את $\tilde{F}$ על $N_i \times [0, t_i]$ ברקורסיה על i, כך שלכל i מתקיים ש N_i היא סביבה של y_0 (בתוך Y) המוכלת ב N וגם $N_{i+1} \subseteq N_i$, בנוסף $p \circ \tilde{F} = F$ על $N_i \times [0, t_i]$ וגם נדרוש ש $\tilde{F}$ תיהיה רציפה על $N_i \times [0, t_i]$. עבור $i = 0$ ניקח $N_0 = N$, צריך להגדיר את $\tilde{F}$ על $N \times \{0\}$, אבל היא כבר מוגדרת ב $Y \times \{0\}$ אז סיימנו. נניח כי הגדרנו את $\tilde{F}$ עבור i ונגדיר עבור $i + 1$. מכיוון ש $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ עבור U_i מכוסה היטב, קיימת קבוצה $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$ פתוחה כך ש $p : \tilde{U}_i \to U_i$ היא הומיאומורפיזם וגם $\tilde{F}(y_0, t_i) \in \tilde{U}_i$.

נסביר למה: U_i מכוסה היטב ולכן $p^{-1}(U_i)$ שווה לאיחוד זר של קבוצות פתוחות $p^{-1}(U_i) = \cup_j V_i^j$, כך שלכל j מתקיים כי $p : V_i^j \to$

U_i הומיאומורפיזם. לפי הנחת האינדוקציה כבר הגדרנו את $\tilde{F}$ על (y_0,t_i) כך ש $p\left(\tilde{F}\left(y_0,t_i\right)\right)=F\left(y_0,t_i\right)\in U_i$, ולכן $\tilde{F}\left(y_0,t_i\right)\in$ $p^{-1}\left(U_i\right)=\cup_j V_i^j$. אזי קיים j_0 עבורו $\tilde{F}\left(y_0,t_i\right)\in V_i^{j_0}$, נבחר $\tilde{U}_i=V_i^{j_0}$ ונקבל את כל מה שדרשנו. נגדיר את N_{i+1} כך שיקיים:

$$N_{i+1}\times\{t_i\}=\left(\tilde{F}\mid_{N_i\times\{t_i\}}\right)^{-1}\left(\tilde{U}_i\right)\cap\left(N_i\times\{t_i\}\right)$$

מההגדרה ברור כי $N_{i+1}\subseteq N_i$, בנוסף $(y_0,t_i)\in N_i\times\{t_i\}$ וגם $\tilde{F}\left(y_0,t_i\right)\in\tilde{U}_i$ לכן $(y_0,t_i)\in\left(\tilde{F}\mid_{N_i\times\{t_i\}}\right)^{-1}\left(\tilde{U}_i\right)$ כלומר $y_0\in N_{i+1}$. לפי הנחת האינדוקציה $\tilde{F}$ רציפה היכן שהיא מוגדרת אז $N_{i+1}\times\{t_i\}$ פתוחה בתוך $N_i\times\{t_i\}$ כי היא מקור של קבוצה פתוחה $\tilde{U}_i$, ולכן $N_{i+1}\times\{t_i\}$ סביבה של (y_0,t_i). מכאן N_{i+1} היא סביבה של y_0 בתוך N_i, אבל N_i היא סביבה של y_0 בתוך Y ולכן גם N_{i+1} היא סביבה של y_0 בתוך Y.

ועכשיו אנחנו יודעים $\tilde{F}\left(N_{i+1}\times\{t_i\}\right)\subseteq\tilde{U}_i$. כעת נגדיר את $\tilde{F}$ על $N_{i+1}\times[t_i,t_{i+1}]$ לפי $\tilde{F}=p^{-1}\circ F$, עבור $p^{-1}:U_i\to\tilde{U}_i$ הומיאומורפיזם. ננסה להסביר למה ההגדרה הזו מתלכדת עם ההגדרה של $\tilde{F}$ על $N_i\times[0,t_i]$ בחיתוך של שני תחומי ההגדרה $N_{i+1}\times\{t_i\}$. בתחום $N_i\times[0,t_i]$ מתקיים לפי הנחת האינדוקציה כי $p\circ\tilde{F}=F$, ולכן על $N_{i+1}\times\{t_i\}\subseteq N_i\times[0,t_i]$ מתקיים לפי ההגדרה הישנה $p\circ\tilde{F}=F$. בנוסף הראנו כי לפי ההגדרה הישנה $\tilde{F}\left(N_{i+1}\times\{t_i\}\right)\subseteq\tilde{U}_i$, נזכור ש $p:\tilde{U}_i\to U_i$ היא הומיאומורפיזם. אזי על $N_{i+1}\times\{t_i\}$ העובדה ש $p\circ\tilde{F}=F$ וגם $F\left(N_{i+1}\times\{t_i\}\right)\subseteq U_i$ וגם $p:\tilde{U}_i\to U_i$ הומיאומורפיזם, גוררת פתרון יחיד (כי p הפיכה על $F\left(N_{i+1}\times\{t_i\}\right)$) ל $p\circ\tilde{F}=F$ והוא $\tilde{F}=p^{-1}\circ F$ עבור $p^{-1}:U_i\to\tilde{U}_i$. אבל $\tilde{F}=p^{-1}\circ F$ זו בדיוק ההגדרה החדשה של $\tilde{F}$, כלומר ההגדרות שקולות!

לבסוף $\tilde{F}$ רציפה על $N_{i+1}\times[0,t_{i+1}]$ כי: היא רציפה על $N_{i+1}\times[t_i,t_{i+1}]$ כהרכבה של רציפות והיא גם רציפה על $N_{i+1}\times[0,t_i]$ לפי הנחת האינדוקציה, וביחד היא רציפה על כל $N_{i+1}\times[0,t_{i+1}]$ לפי הערה 4.

סיימנו את האינדוקציה וקיבלנו $\tilde{F}:N_n\times I\to\tilde{X}$ רציפה המקיימת $p\circ\tilde{F}=F$, ו N_n היא סביבה של y_0, כאשר לקחנו נקודה שרירותית $y_0\in Y$.

המשך ההוכחה היה בהרצאה הבאה, אבל אני שם את זה פה.

בפעם הקודמת בנינו הרמות $\tilde{F}:N\times I\to\tilde{X}$ לכל $y\in Y$ כאשר N איזושהי סביבה של y.

עבור יחידות, למקרה $Y=\{y_0\}$ די להראות כי אם $\tilde{F},\tilde{F}':I\to X$ הרמות של $F:I\to X$ כך ש $\tilde{F}\left(0\right)=\tilde{F}'\left(0\right)$ אזי $\tilde{F}=\tilde{F}'$.

ניקח חלוקה $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1$ כמו בפעם הקודמת, כך ש $F\left([t_i,t_{i+1}]\right)\subseteq U_i$ עבור U_i מכוסה היטב (זה אומר $p^{-1}\left(U_i\right)=\cup_j V_i^j$). נוכיח באינדוקציה על i כי על הקטע $[0,t_i]$ מתקיים $\tilde{F}=\tilde{F}'$. בסיס: $i=0$ טריוויאלי. צעד: כיוון ש $[t_i,t_{i+1}]$ ו $\tilde{F}$ רציפה אז גם $\tilde{F}\left([t_i,t_{i+1}]\right)$ קשיר בתוך $\tilde{X}$. ולכן $\tilde{F}\left([t_i,t_{i+1}]\right)$ מוכל בדיוק ב $V_i^{j_1}$ אחת. באותו האופן $\tilde{F}'\left([t_i,t_{i+1}]\right)$ מוכלת ב $V_i^{j_2}$ אחת. אבל $\tilde{F}$ ו $\tilde{F}'$ מסכימות על t_i ולכן הן מוכלות באותו V_i^j, כלומר $j_1=j_2$. p הינו הומיאומורפיזם מ V_i^j אל U_i, ולכן העובדה ש $p\circ\tilde{F}=p\circ\tilde{F}'$ על $[t_i,t_{i+1}]$ (זה נכון על כל I) וגם $\tilde{F}\left([t_i,t_{i+1}]\right),\tilde{F}'\left([t_i,t_{i+1}]\right)\subseteq V_i^j$ גוררת כי $\tilde{F}=\tilde{F}'$ על $[t_i,t_{i+1}]$. לפי הנחת האינדוקציה $\tilde{F}=\tilde{F}'$ על $[0,t_i]$ וביחד $\tilde{F}=\tilde{F}'$ על $[0,t_{i+1}]$ כנדרש.

כעת נעבור מהבניה של $\tilde{F}:N\times I\to\tilde{X}$ לבניה של $\tilde{F}:Y\times I\to\tilde{X}$. נניח שבנינו $\tilde{F}_y:N_y\times I\to\tilde{X}$ לכל $y\in Y$. אם $N_y\cap N_{y'}\neq\emptyset$ אז לכל $z\in N_y\cap N_{y'}$ מתקיים $\tilde{F}_y=\tilde{F}_{y'}$ על $\{z\}\times I$ מהיחידות, התנאי לקיום היחידות הוא $\tilde{F}_y\left(z,0\right)=\tilde{F}_{y'}\left(z,0\right)$, והוא מתקיים כי שתיהן הרמות של $F\mid_{Y\times\{0\}}$. לכן ניתן להגדיר את $\tilde{F}$ על כל $Y\times I$, לכל $z\in Y$ ניקח $\tilde{F}_y$ כך ש כך ש $z\in N_y$ ונגדיר $\tilde{F}\left(z,x\right)=\tilde{F}_y\left(z,x\right)$, ההגדרה לא תלויה בבחירה של $\tilde{F}_y$ לפי מה שבדיוק הראנו.

$\tilde{F}$ היא רציפה כי היא רציפה על קבוצות פתוחות $N_y\times I$ המכסות את $Y\times I$, בנוסף $\tilde{F}$ היא הרמה של F כי היא הרמה על כל $N_y\times I$.
$\tilde{F}$ יחידה כי היא יחידה על כל $I\times\{y\}$ לכל $y\in Y$. $\square$

מסקנה 30. יהי $\tilde{X}$ מרחב כיסוי של X, ותהי $p:\tilde{X}\to X$ כנ"ל.

1. לכל מסלול $f:I\to X$ המתחיל ב $x_0\in X$, ולכל $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ יש הרמה יחידה למסלול $\tilde{f}:I\to\tilde{X}$ המתחיל ב $\tilde{x}_0$.

2. לכל הומוטופיה $F:I\times I\to X$ של מסלולים כך ש $F(0,t)=x_0$ (לכל t) ו $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ יש הרמה יחידה להומוטופיה $\tilde{F}:I\times I\to\tilde{X}$ של מסלולים כך ש $\tilde{F}(0,t)=\tilde{x}_0$ (לכל t).

הוכחה. 1. למה 29 עם $Y=\{y_0\}$.

2. נשים לב כי $F(s,0):I\times\{0\}\to X$ הוא בעצם מסלול $X\to I$ המתחיל ב $x_0=F(0,0)$. אזי לפי 1 לכל $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ יש הרמה $\tilde{F}:I\times\{0\}\to\tilde{X}$ יחידה המתחילה ב $\tilde{x}_0$. עכשיו נפעיל את למה 29 על $F:I\times I\to X$ עם $\tilde{F}:I\times\{0\}\to\tilde{X}$, ונקבל המשכה יחידה $\tilde{F}:I\times I\to\tilde{X}$. מכיוון ש $F(0,t)=x_0$ ו $F(1,t)=x_1$ מסלולים, וגם $\tilde{F}\mid_{\{0\}\times I}$ ו $\tilde{F}\mid_{\{1\}\times I}$ ההרמות שלהם, מהיחידות ב 1 נובע כי $\tilde{F}(0,t)$ ו $\tilde{F}(1,t)$ הינם קבועים. כעת $\tilde{F}(0,t)=\tilde{F}(0,0)=\tilde{x}_0$ כלומר כל המסלולים מתחילים ב $\tilde{x}_0$ כנדרש. $\square$

1.4 החבורה היסודית של המעגל ושימושים

משפט 31. $\pi_1\left(S^1\right)=\mathbb{Z}$.

אם ניקח נקודת יחוס $x_0=(1,0)$, אזי $\pi_1\left(S^1,(1,0)\right)$ נוצרת על ידי $[\omega]$, כאשר $\omega\left(s\right)=\exp\left(2\pi is\right)=\left(\cos 2\pi s,\sin 2\pi s\right)$.

הוכחה. נסמן $\omega_n\left(s\right)=\exp\left(2\pi ins\right)$, אזי $[\omega^n]=[\omega_n]$ לכל $n\in\mathbb{Z}$. נגדיר פונקציה $\psi:\mathbb{Z}\to\pi_1\left(S^1,(1,0)\right)$ לפי $\psi\left(n\right)=[\omega_n]$, המטרה שלנו היא להוכיח כי ψ הינו איזומורפיזם של חבורות. קל לבדוק כי ψ הינו הומומורפיזם של חבורות, צריך להוכיח ש $[\omega_{n+m}]=[\omega_n]\cdot[\omega_m]$ וזה מושאר כתרגיל לקורא. ניקח את $\mathbb{R}$ להיות מרחב הכיסוי של S^1 עם הפונקציה $p:\mathbb{R}\to S^1$ המוגדרת לפי $p\left(x\right)=\exp\left(2\pi ix\right)$, נשים לב כי $p^{-1}\left(x_0\right)=p^{-1}\left(1,0\right)=\mathbb{Z}$.

ψ על: יהי $[f]\in\pi_1\left(S^1,(1,0)\right)$ כלומר $f:I\to S^1$ לולאה ביחס ל x_0. בגלל ש $0\in p^{-1}\left(x_0\right)$ אז לפי מסקנה 1 יש ל f הרמה יחידה $\tilde{f}:I\to\mathbb{R}$ המתחילה ב 0. איפה $\tilde{f}$ מסיימת? נזכור ש $p\circ\tilde{f}\left(1\right)=f\left(1\right)=x_0$ ולכן $\tilde{f}\left(1\right)\in p^{-1}\left(x_0\right)=\mathbb{Z}$, נסמן $n=\tilde{f}\left(1\right)$. יהי $\tilde{\omega}_n:I\to\mathbb{R}$ המסלול המוגדר על ידי $\tilde{\omega}_n\left(s\right)=ns$, זה מסלול מ 0 ל n בתוך $\mathbb{R}$. מכיוון ש $\mathbb{R}$ הוא TVS כל שני מסלולים המתחילים ונגמרים באותן נקודות הם הומוטופים, אזי $\tilde{\omega}_n$ ו $\tilde{f}$ הם הומוטופים ונסמן את ההומוטופיה בניהם ב $\tilde{F}$. נשים לב כי $p\circ\tilde{\omega}_n=\exp\left(2\pi ins\right)=\omega_n$ וגם $p\circ\tilde{f}=f$ (מהגדרת $\tilde{f}$), לכן $p\circ\tilde{F}:I\to S^1$ היא הומוטופיה מ f אל ω_n. כלומר $[f]=[\omega_n]=\psi\left(n\right)$ אז מצאנו מקור ל $[f]\in\pi_1\left(S^1,(1,0)\right)$ כנדרש.

ψ חח"ע: נניח כי $[\omega_n]=[\omega_m]$ כלומר $\omega_n\simeq\omega_m$, נוכיח ש $n=m$. נסמן ב F את ההומוטופיה בין ω_n ל ω_m, כלומר $F\left(s,0\right)=\omega_n\left(s\right)$ ו $F\left(s,1\right)=\omega_m\left(s\right)$. לכל $t\in I$ מתקיים:

$$F\left(0,t\right)=\omega_n\left(0\right)=\omega_m\left(0\right)=x_0=(1,0)$$

וגם $0\in p^{-1}\left(x_0\right)$, אזי לפי מסקנה 2 יש הרמה יחידה להומוטופיה $\tilde{F}:I\times I\to\mathbb{R}$ של מסלולים כך ש $\tilde{F}\left(0,t\right)=0$ לכל $t\in I$. לפי מסקנה 1 יש ל ω_n ו ω_m הרמות יחידות למסלולים $\tilde{\omega}_n$ ו $\tilde{\omega}_m$ המתחילים ב 0. אבל גם $\tilde{F}\left(s,0\right)$ ו $\tilde{F}\left(s,1\right)$ הן הרמות של ω_n ו ω_m בהתאמה המתחילות ב $\tilde{x}_0$. היחידות ממסקנה 1 מחייבת ש:

$$\tilde{F}\left(s,0\right)=\tilde{\omega}_n\left(s\right)$$
$$\tilde{F}\left(s,1\right)=\tilde{\omega}_m\left(s\right)$$

$\tilde{F}$ הומוטופיה של מסלולים אז $\tilde{F}\left(1,t\right)$ קבוע! מכאן:

$$\tilde{\omega}_n\left(1\right)=\tilde{F}\left(1,0\right)=\tilde{F}\left(1,t\right)=\tilde{F}\left(1,1\right)=\tilde{\omega}_m\left(1\right)$$

נשאר לנו להוכיח כי $\tilde{\omega}_n\left(1\right)=n$ וגם $\tilde{\omega}_m\left(1\right)=m$, אנחנו נוכיח כי $\tilde{\omega}_n=ns$. נשים לב כי המסלול ns מ 0 אל n ב $\mathbb{R}$ הוא רציף ולכן באמת מסלול, בנוסף $p\left(ns\right)=\omega_n$. כלומר ns היא הרמה של ω_n אל מרחב הכיסוי $\mathbb{R}$, נשים לב כי ns מתחיל ב 0 בדיוק כמו $\tilde{\omega}_n$, אז לפי היחידות במסקנה 1 נקבל $\tilde{\omega}_n=ns$ כנדרש. הוכחנו:

$$n=\tilde{\omega}_n\left(1\right)=\tilde{\omega}_m\left(1\right)=m$$

לכן ψ חח"ע. $\square$

משפט 32. המשפט היסודי של האלגברה.

לכל פולינום $p(z)\in\mathbb{C}[z]$ לא קבוע יש שורש ב $\mathbb{C}$.

הוכחה. יהי פולינום $p(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k+z^n$ כך ש $p(z)\neq 0$, נוכיח כי $n=0$. לכל רדיוס $r\geq 0$ נגדיר פונקציה $F:I\times[0,\infty)\to S^1$ לפי:

$$F(s,r)=f_r(s)=\frac{p(r\exp(2\pi is))/p(r)}{|p(r\exp(2\pi is))/p(r)|}$$

F רציפה כי p אף פעם לא מתאפס. הצמצום $F\mid_{I\times I}$ הוא הומוטופיה של לולאות ב S^1, כי לכל $r\in I$ מתקיים $F(0,r)=1=F(1,r)$.
הלולאה $f_0(s)=1$ היא קבועה אז $[f_1(s)]=[f_0(s)]=0$.

יהי $r\geq 0$ נגדיר $\phi:I\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש $\phi(0)=0$ ו $\phi(1)=r$. אזי $F(s,\phi(r)):I\times I\to S^1$ היא גם הומוטופיה של לולאות, וכמו מקודם $[f_r(s)]=0$.

יהי $r\geq\max\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|,1\right\}$, אזי לכל $|z|=r$ ולכל $t\in I$ מתקיים:

$$t\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k\right|\leq\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k\right|\leq\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\left|z^k\right|=\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|r^k\leq\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|r^{n-1}=r^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\leq r^n=|z^n|$$

לכן לפולינום $p_t(z)=t\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k+z^n$ אין שורשים על $|z|=r$ לכל $t\in I$. עבור r קבוע גדול כנ"ל נגדיר:

$$F'(s,t)=\frac{p_t(r\exp(2\pi is))/p_t(r)}{|p_t(r\exp(2\pi is))/p_t(r)|}$$

F' רציפה כי $p_t(r\exp(2\pi is))\neq 0$ לכל $s,t\in I$. נשים לב שלכל $t\in I$ מתקיים $F'(1,t)=1=F'(0,t)$ אזי F' היא הומוטופיה של מסלולים, אבל איזה מסלולים?

$$\begin{aligned}F'(s,0)&=\frac{p_0(r\exp(2\pi is))/p_0(r)}{|p_0(r\exp(2\pi is))/p_0(r)|}=\frac{(r\exp(2\pi is))^n/r^n}{|(r\exp(2\pi is))^n/r^n|}=\exp(2\pi ins)=\omega_n(s)\\F'(s,1)&=F(s,r)=f_r(s)\end{aligned}$$

בגלל ש F' הומוטופיה נקבל $[\omega_n(s)]=[f_r(s)]=0$. נזכור כי $\pi_1\left(S^1\right)=\mathbb{Z}$ וכי $[\omega_n(s)]=n$ אז בעצם הוכחנו $n=0$ מ.ש.ל. $\square$

הגדרה 33. פונקציה רציפה $F:X\times I\to Y$ נקראת הומוטופיה. נסמן $f_t(x)=F(x,t)$ ונאמר כי $f_0,f_1:X\to Y$ הן הומוטופיות, נסמן $f_0\simeq f_1$.

הגדרה 34. יהי X מ"ט ו $A\subseteq X$ תת מ"ט.

1. פונקציה רציפה $r:X\to A$ נקראת נסג retraction אם $r\mid_A=\mathrm{id}_A$. באופן שקול אם השיכון $i:A\to X$ מקיים $r\circ A=\mathrm{id}_A$.
2. נסג עיוותי deformation retraction זו הומוטופיה בין id_X לבין נסג r. כלומר זה פונקציה רציפה $F:X\times I\to X$ כך ש $F(x,0)=\mathrm{id}_X$ וגם $F(x,1)=r(x)$.

3. נסג עיוותי חזק strong deformation retraction הוא נסג עיוותי F כך שלכל $a \in A$ ולכל $t \in I$ מתקיים $F(a,t) = a$.

הערה 35. כל נסג r מקיים $r \circ r = r$.

דוגמה 36. א. לכל מ"ט X ואיבר $a \in X$ קיים נסג $r : X \to \{a\}$.

ב. לא כל נסג הוא נסג עיוותי. למשל $r : X \to \{a\}$ כאשר X לא קשיר מסילתית.

ג. $X = \mathbb{R}^{n+1} - 0$ ו $A = S^n$, אזי $F(x,t) = \left(1 - t + \frac{t}{\|x\|}\right) x$ הוא נסג עיוותי חזק.

ד. $X = S^1 \times I$ ו $A = S^1 \times \{0\}$, אזי $F((z,s),t) = (z, s(1-t))$ הוא נסג עיוותי חזק.

משפט 37. משפט נקודת השבת של Brouwer

לכל פונקציה רציפה $h : D \to D$ כאשר $D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \|x\| \le 1 \right\}$ יש נקודת שבת.

הוכחה. נניח בשלילה כי $h(x) \neq x$ לכל $x \in D$. נרצה להגדיר נסג $r : D \to S^1$. תהי נקודה $x \in D$ אז גם $h(x) \in D$, ו $h(x) \neq x$ אז יש קו יחיד העובר דרך x ו $h(x)$. נצייר קרן אינסופית המתחילה ב $h(x)$ ועוברת דרך הנקודה x, הקרן הזאת חותכת את S^1 באיזושהי נקודה y. נגדיר $r(x) = y$, ועבור $x \in S^1$ נשים לב כי $r(x) = y = x$, בנוסף קל לראות ש r רציפה ולכן r נסג.

עכשיו נוכיח שאין נסג מ D אל S^1 ונקבל סתירה. תהי f_0 לולאה ב S^1, $D \supseteq S^1$ אז f_0 היא לולאה גם ב D. מכיוון ש D קמור יש הומוטופיה של מסלולים F בתוך D בין f_0 ללולאה הקבועה $x_0 \in S^1$, כאשר x_0 היא נקודת ההתחלה של f_0. נתבונן בפונקציה $r \circ F : I \times I \to S^1$, $r \circ F$ רציפה כהרכבה של רציפות. לכל $t \in I$ מתקיים $r \circ F(1,t) = r(x_0) = x_0 = r(x_0) = r \circ F(0,t)$ לכן $r \circ F$ היא הומוטופיה של מסלולים ב S^1. המסלולים הם:

$$r \circ F(s,0) = r(f_0(s)) = f_0(s)$$

$$r \circ F(s,1) = r(x_0) = x_0$$

כלומר הוכחנו שכל לולאה ב S^1 הומוטופית ללולאה קבועה, בסתירה ל $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \neq 0$. □

הערה 38. א. המשפט נכון לכל $K \subseteq \mathbb{R}^2$ קומפקטית וקמורה.

ב. $\partial D = S^1$ השפה של D.

משפט 39. Borsuk-Ulam

לכל $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ רציפה יש $x \in S^2$ כך ש $f(x) = f(-x)$.

הוכחה. נניח בשלילה שלא קיימת נקודת שבת, נגדיר $g : S^2 \to S^1$ לפי:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \in S^1$$

g רציפה כי ל f אין נקודת שבת. נגדיר לולאה $\phi : I \to S^2$ לפי $\phi(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 0)$. נסמן $h = g \circ \phi : I \to S^1$ גם לולאה. נזכור ש $\mathbb{R}$ הוא מרחב כיסוי של S^1 עם ההטלה $p(s) = \exp(2\pi i s)$. אז יש ל h הרמה יחידה $\tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ המתחילה ב $\tilde{x}_0$ לכל

$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(h(0))$. לכל $0 \le s \le \frac{1}{2}$ מתקיים:

$$h\left(s+\frac{1}{2}\right) = g\left(\phi\left(s+\frac{1}{2}\right)\right) = g\left(\left(\cos\left(2\pi s+\pi\right), \sin\left(2\pi s+\pi\right), 0\right)\right) =$$
$$g\left(-\left(\cos\left(2\pi s\right), \sin\left(2\pi s\right), 0\right)\right) = -g\left(\phi\left(s\right)\right) = -h\left(s\right)$$

לכן לכל $0 \le s \le \frac{1}{2}$ מתקיים $p \circ \tilde{h}(s) = -h(s) = h\left(s+\frac{1}{2}\right) = p \circ \tilde{h}\left(s+\frac{1}{2}\right)$, מכאן $\exp\left(2\pi i\left(\tilde{h}(s) - \tilde{h}\left(s+\frac{1}{2}\right)\right)\right) = -1$. כלומר $\tilde{h}(s) = \tilde{h}\left(s+\frac{1}{2}\right) + \frac{r(s)}{2}$ כאשר $r : \left[0,\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{Z}$ וגם $2 \nmid r(s)$. אבל r רציפה כי $\tilde{h}$ רציפה ולכן r קבועה. לכן: $\tilde{h}(0) = \tilde{h}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{r}{2} = \tilde{h}(1) + r$, כלומר $\tilde{h}$ זה מסלול מ $\tilde{h}(0)$ אל $\tilde{h}(0) - r$. כרגיל $\mathbb{R}$ הוא TVS ולכן $\tilde{h}$ הומוטופי למסלול $\tilde{\omega}_{-r} : I \to \mathbb{R}$ שמוגדר על ידי $\tilde{\omega}_{-r}(s) = \tilde{h}(0) - rs$, נשים לב כי $p \circ \tilde{\omega}_{-r} = \omega_{-r}$ כאשר נקודת היחוס ב S^1 היא $h(0)$. נרכיב את p על ההומוטופיה בין $\tilde{h}$ ל $\tilde{\omega}_{-r}$ ונקבל הומוטופיה בין h ל ω_{-r}. מהחישוב $\pi_1\left(S^1, h(0)\right) = \mathbb{Z}$ נובע:

$$[h] = [\omega_{-r}] \neq 0$$

כי r קבוע אי זוגי ובפרט $r \neq 0$. מצד שני ϕ מסלול על S^2 ולכן null homotopic, אזי גם $h = g \circ \phi$ null homotopic פשוט מרכיבים את g על ההומוטופיה ב S^2, סתירה! $\square$

הערה 40. א. המשפט נכון לכל מימד n.

ב. הנקודות $x, -x$ נקראות antipodal.

מסקנה 41. נניח $S^2 = \cup_{i=1}^{3} A_i$ עבור A_i סגורות, אז יש i ו $x \in S^2$ כך ש $\{x, -x\} \subseteq A_i$.

הוכחה. נגדיר $S^2 \to \mathbb{R} : d_i(x) = \inf\{|x-y| : y \in A_i\}$, זו פונ' רציפה. נגדיר $f(x) = (d_1(x), d_2(x))$ גם רציפה, לפי משפט בורסוק אולם יש $x, -x$ כך ש:

$$d_1(x) = d_1(-x)$$
$$d_2(x) = d_2(-x)$$

אם $d_1(x) = 0$ אז ניקח $i = 1$, אם $d_2(x) = 0$ אז ניקח $i = 2$, אחרת ניקח $i = 3$. $\square$

הערה 42. א. 3 זה אופטימלי.

ב. עבור S^n זה נכון עבור $n+1$ קבוצות סגורות.

משפט 43. יהיו X, Y מ"ט קשירים מסילתית, אזי:

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

הוכחה. פונ' $f\,:\,Z\to X\times Y$ היא רציפה אם ורק אם היא רציפה רכיב רכיב. אזי לולאה $f\,:\,I\to X\times Y$ עם נק' יחוס (x_0,y_0) שקולה לזוג לולאות $f_1\,:\,I\to X$ ו $f_2\,:\,I\to Y$ עם נק' יחוס x_0 ו y_0. באופן דומה הומוטופיה $F\left(s,t\right)$ בין לולאות ב $X\times Y$ שקולה לזוג הומוטופיות H,G בין הלולאות המתאימות, לפי $F_t\left(s\right)=\left(G_t\left(s\right),H_t\left(S\right)\right)$. סה"כ נקבל איזומורפיזם של חבורות מ $\pi_1\left(X\times Y\right)$ אל $\pi_1\left(X\right)\times\pi_1\left(Y\right)$ לפי $[f=(f_1,f_2)]\mapsto\left(\left[f_1\right],\left[f_2\right]\right)$. $\square$

דוגמה 44. $\pi_1\left(S^1\times\cdots\times S^1\right)=\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}$.

2 מבוא לתורת הקטגוריות

הגדרה 45. קטגוריה C היא זוג סדור $(\mathrm{Obj}(C), \mathrm{Mor}(C))$ של מחלקות המקיים את האקסיומות הבאות:

1. לכל מורפיזם $f \in \mathrm{Mor}(C)$ מוגדרים באופן יחיד $\mathrm{dom}f, \mathrm{cod}f \in \mathrm{Obj}(C)$.
2. לכל שני מורפיזמים $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ כך ש $\mathrm{dom}f = \mathrm{cod}g$ מוגדר המורפיזם $f \circ g \in \mathrm{Mor}(C)$ המקיים $\mathrm{cod}(f \circ g) = \mathrm{cod}f$ וגם $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}g$.
3. לכל שלושה מורפיזמים $f, g, h \in \mathrm{Mor}(C)$ כך ש $\mathrm{dom}f = \mathrm{cod}g$ וגם $\mathrm{dom}h = \mathrm{cod}f$ מתקיים $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.
4. לכל אובייקט $a \in \mathrm{Obj}(C)$ קיים מורפיזם $1_a \in \mathrm{Mor}(C)$ כך ש $\mathrm{cod}1_a = \mathrm{dom}1_a = a$. ובנוסף לכל שני מורפיזמים $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ כך ש $\mathrm{dom}f = a$ ו $\mathrm{cod}g = a$ מתקיים $1_a \circ g = g$ וגם $f \circ 1_a = f$.

אברי $\mathrm{Mor}(C)$ נקראים מורפיזמים או לפעמים חצים, ואברי $\mathrm{Obj}(C)$ נקראים אובייקטים.

הגדרה 46. תהי C קטגוריה. עבור שני אובייקטים $a, b \in \mathrm{Obj}(C)$ נגדיר את $\mathrm{Hom}_C(a,b) = C(a,b)$ להיות המחלקה של כל המורפיזמים $f \in \mathrm{Mor}(C)$ המקיימים $\mathrm{dom}f = a$ וגם $\mathrm{cod}f = b$.

דוגמה 47. Set , Grp , Ab , Rng , R-mod , Top . האובייקטים ב *Top זה זוגות (X, x_0) של מ"ט עם נקודת יחוס $x_0 \in X$, המורפיזמים הם העתקות רציפות ϕ כך ש $\phi(x_0) = y_0$.

הגדרה 48. יהיו B, C קטגוריות, פנקטור functor מ C אל B מסומן $T : C \to B$ הוא זוג פונקציות: $T : \mathrm{Obj}(C) \to \mathrm{Obj}(B)$ ו $T : \mathrm{Mor}(C) \to \mathrm{Mor}(B)$. כך שלכל שני מורפיזמים $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ המקיימים $\mathrm{dom}f = \mathrm{cod}g$ מתקיים $\mathrm{dom}T(f) = \mathrm{cod}T(g)$ וגם $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$. בנוסף לכל אובייקט $a \in \mathrm{Obj}(C)$ מתקיים $T(1_a) = 1_{T(a)}$.

דוגמה 49. א. פנקטור הזהות.

ב. $P : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ שמוגדר לפי $P(x) = $ power set of x ו $P(f) = $ image of f on $P(\mathrm{dom}f)$.

ג. $\mathrm{GL}_n : \mathrm{CRing} \to \mathrm{Grp}$. $R \mapsto \mathrm{GL}_n(R)$ ו $\mathrm{GL}_n(\psi)(a_{ij}) = \psi(a_{ij})$ כאשר a_{ij} היא מטריצה.

ד. $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Grp}$ ע"י $G \mapsto [G,G]$ ו $\psi \mapsto \psi|_{[G,G]}$?

ה. $()^* : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Grp}$ חבורת ההפיכים, מורפיזם פשוט הולך לצמצום שלו?

הערה 50. אפשר להרכיב פנקטורים.

הגדרה 51. פנקטור $T : C \to B$ נקרא איזומורפיזם של קטגוריות אם קיים פנקטור אחר $H : B \to C$ כך ש $I_B = T \circ H$ וגם $I_C = H \circ T$, נסמן $T^{-1} = H$.

זה שקול לכך ששתי הפונקציות T, אחת על אובייקטים ואחת על מורפיזמים, הן חח"ע ועל.

הגדרה 52. יהיו $S, T : C \to B$ שני פנקטורים. העתקה טבעית מ S אל T היא פונקציה τ המתאימה לכל $c \in \mathrm{Obj}(C)$ מורפיזם $\tau(c) \in \mathrm{Mor}(B)$ כך ש $\tau(c) \in \mathrm{Hom}_B(S(c), T(c))$. ובנוסף לכל שני אובייקטים $c, d \in \mathrm{Obj}(C)$ ולכל מורפיזם $f \in \mathrm{Hom}_C(c,d)$

הדיאגרמה הבאה חילופית:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & S(c) \arrow[r, "\tau(c)"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(c) \arrow[d, "T(f)"] \\ d & S(d) \arrow[r, "\tau(d)"'] & T(d) \end{tikzcd}$$

כלומר $S(f)\circ\tau(c)=\tau(d)\circ S(f)$ ($T(f)\circ\tau(c)$). נסמן $\tau:S\to T$.

דוגמה 53. דטרמיננטה של מטריצות היא העתקה טבעית בין GL_n אל $()^*$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "f"'] & \mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n(f)"'] & R^* \arrow[d, "f^*"] \\ R' & \mathrm{GL}_n(R') \arrow[r, "\det"'] & (R')^* \end{tikzcd}$$

הגדרה 54. תהי $\phi:X\to Y$ העתקה רציפה כך ש $\phi(x_0)=y_0$, נסמן $\phi:(X,x_0)\to(Y,y_0)$. נגדיר $\phi_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ לפי $\phi_*([f])=[\phi\circ f]$.

טענה 55. ההגדרה של ϕ_* לא תלויה בנציגים, ובנוסף ϕ_* הומומורפיזם של חבורות.

הוכחה. נניח f,g שתי לולאות ב X עם נקודת יחוס x_0 כך ש $[f]=[g]$, כלומר קיימת הומוטופיה של מסלולים F מ f אל g. אזי $\phi\circ F$ היא הומוטופיה של מסלולים מ $\phi\circ f$ אל $\phi\circ g$ כלומר $\phi_*([f])=[\phi\circ f]=[\phi\circ g]=\phi_*([g])$ כנדרש. נניח f,g שתי לולאות ב X עם נקודת יחוס x_0, אזי $\phi\circ(f\cdot g)=(\phi\circ f)\cdot(\phi\circ g)$ ולכן ϕ_* הומו' של חבורות. $\square$

משפט 56. π_1 הוא פנקטור

נגדיר פנקטור $\mathrm{Top}_*\to\mathrm{Grp}$ לפי $(X,x_0)\mapsto\pi_1(X,x_0)$ ו $\phi\mapsto\phi_*$ כאשר $\phi:(X,x_0)\to(Y,y_0)$.

הוכחה. נניח שיש לנו שלושה מורפיזמים $(X,x_0)\xrightarrow{\phi}(Y,y_0)\xrightarrow{\psi}(Z,z_0)$ בקטגוריה Top_*. דבר ראשון $\mathrm{dom}\psi_*=\pi_1(Y,y_0)=\mathrm{cod}\phi_*$ אז רק צריך לבדוק האם $(\psi\circ\phi)_*=\psi_*\circ\phi_*$. תהי $[f]\in\pi_1(X,x_0)$ אזי:

$$(\psi\circ\phi)_*([f])=[(\psi\circ\phi)\circ f]=[\psi\circ(\phi\circ f)]=\psi_*([\phi\circ f])=\psi_*(\phi_*([f]))=\psi_*\circ\phi_*([f])$$

זה נכון לכל $[f] \in \pi_1 \left(X, x_0\right)$ אזי $\left(\psi \circ \phi\right)_* = \psi_* \circ \phi_*$. בנוסף קל וחומר כי $\left(\mathrm{id}_X\right)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. $\square$

3 משפט ואן קמפן

למה 57. יהי $X=\cup A_\alpha$ איחוד של קבוצות פתוחות וקשירות מסילתית. נניח שקיים $x_0\in X$ כך ש $x_0\in\cap A_\alpha$, וגם לכל α,β הקבוצה $A_\alpha\cap A_\beta$ קשירה מסילתית. אזי כל לולאה ב X עם נקודת יחוס x_0, הומוטופית למכפלה של לולאות, כך שכל לולאה מוכלת ב A_α כלשהו.

הוכחה. תהי $f:I\to X$ לולאה ביחס ל x_0. בגלל שקטע היחידה I הוא קומפקטי, קיימת חלוקה $0=s_0<s_1<\cdots<s_n=1$ כך שלכל i קיים α עבורו $f([s_{i-1},s_i])\subseteq A_\alpha$, נסמן $A_i=A_\alpha$. נרצה להגדיר מסילות $f_i\mid_{[s_{i-1},s_i]}$ אבל אנחנו רוצים שהתחום שלהן יהי I, לכן נגדיר $f_i:I\to A_i$ לפי:

$$f_i(s)=f(s_{i-1}+s\cdot(s_i-s_{i-1}))$$

נשים לב כי:

$$f\simeq f_1\cdot f_2\cdots f_n$$

כיוון ש $A_i\cap A_{i+1}$ קשירה מסילתית קיים מסלול $g_i:I\to A_i\cap A_{i+1}$ מ x_0 אל $f(s_i)\in A_i\cap A_{i+1}$. כעת:

$$f\simeq(f_1\cdot\overline{g}_1)\cdot(g_1\cdot f_2\cdot\overline{g}_2)\cdot(g_2\cdot f_3\cdot\overline{g}_3)\cdots(g_{n-1}\cdot f_n)$$

ולכל i מתקיים כי $(g_{i-1}\cdot f_i\cdot\overline{g}_i):I\to A_i$ היא לולאה ביחס ל x_0. □

תזכורת:

דברנו קצת על קטגוריות ופנקטורים. הגדרנו את פנקטור החבורה היסודית π_1 של מ"ט עם נקודה Top_*. זה כמובן לא פנקטור חח"ע, למשל $\pi_1(\mathbb{R}^n)=0$ לכל n טבעי אבל לכל $n\neq m$ המרחבים הטופולוגים $\mathbb{R}^n$ ו $\mathbb{R}^m$ לא הומיאומורפים.

מסקנה 58. לכל $n\geq 2$ מתקיים $\pi_1(S^n)=0$.

הוכחה. נכתוב $S^n=A_1\cup A_2$ ע"י A_i פתוחות קשירות מסילתית כך ש $A_1\cap A_2$ גם כן קשיר מסילתית. נראה כי $A_i\cong\mathbb{R}^n$ ולכן $\pi_1(A_i)=0$. לפי הלמה כל לולאה ב S^n עם נק יחוס x_0 תיהיה הומוטופית ללולאה ב $\pi_1(A_1)$ כפול לולאה ב $\pi_1(A_2)$, וכל אחת מהן הומוטופית ללולאה קבועה, לכן $\pi_1(S^n)=0$.

אנחנו ניקח את הקבוצות A_i להיות $S^n\setminus\{p_i\}$ כאשר $p_1\neq p_2$, ואכן $S^n\setminus\{p\}\cong\mathbb{R}^n$ לכל $p\in S^n$. נבחר $p=(0,0,\ldots,1)$ ונגדיר $f:S^n\setminus\{p\}\to\mathbb{R}^n$ לפי:

$$f(x_1,\ldots,x_{n+1})=\frac{1}{1-x_{n+1}}\cdot(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

f היא באמת הומיאומורפיזם. □

טענה 59. לכל $n\neq 2$ מתקיים $\mathbb{R}^n\ncong\mathbb{R}^2$.

הוכחה. עבור $n=1$ לוקחים נקודה מפרידה. נניח $n>2$, לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\mathbb{R}^n\setminus\{x\}\cong S^{n-1}\times\mathbb{R}$. אם מניחים $x=0$ אז ההומיאומורפיזם הוא $y\mapsto\left(\frac{y}{\|y\|},\|y\|\right)$, וכמובן ש $\mathbb{R}^+\approx\mathbb{R}$ על ידי log. סה"כ:

$$\pi_1\left(\mathbb{R}^n\setminus\{x\}\right)=\pi_1\left(S^{n-1}\right)\times\pi_1\left(\mathbb{R}\right)=\pi_1\left(S^{n-1}\right)=\begin{cases}\mathbb{Z} & n=2\\ 0 & n>2\end{cases}$$

□

הערה 60. אפשר להראות בעזרת הומולוגיה שלכל $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ו $V\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחות לא ריקות, אם $m\neq n$ אז $V\ncong U$.

משפט 61. נניח X נסג על $A\subseteq X$, כאשר $i:A\hookrightarrow X$ שיכון טבעי. נניח $x_0\in X\cap A$ אזי:

$$i_*:\pi_1\left(A,x_0\right)\hookrightarrow\pi_1\left(X,x_0\right)$$

הינו שיכון של חבורות.

בנוסף אם A נסג עיוותי חזק של X, אזי i_* הינו איזומורפיזם.

הוכחה. i רציף אז לפי טענה 55 i_* הינו הומומורפיזם של חבורות. נניח $r:X\to A$ כך ש $r\circ i=\mathrm{id}_A$, כלומר r נסג. החבורה היסודית היא פנקטור 56, אזי $r_*\circ i_*=\left(r\circ i\right)_*=\left(\mathrm{id}_A\right)_*=\mathrm{id}_{\pi_1(A,x_0)}$ ולכן i_* חח"ע.

עכשיו נניח ש A נסג עיוותי חזק של X. תהי F_t Strong def ret של X על A. כלומר: $F:X\times I\to X$ רציפה, $F_0=\mathrm{id}_X$, $F_1=r$, וגם לכל t מתקיים $F_t\mid_A=\mathrm{id}_A$. אז לכל לולאה $f:I\to X$ ביחס ל x_0, הפונקציה $F\left(f\left(s\right),t\right)$ היא הומוטופיה מ f אל לולאה ב A, בידקו! נסמן את הלולאה ש f הומוטופית אליה ב A ב $g:I\to A$. עכשיו:

$$i_*\left([g]\right)=[i\circ g]=[g]=[f]$$

הראנו שלכל $[f]\in\pi_1\left(X,x_0\right)$ קיים מקור, לכן i_* הינו איזומורפיזם. □

מסקנה 62. S^1 הוא לא נסג של D^2 (עיגול היחידה) שכן $\pi_1\left(D^2\right)=0$ אבל $\pi_1\left(S^1\right)=\mathbb{Z}$.

הערה 63. עבור חבורה G ות"ח $H<G$, נאמר כי G נסג על H אם יש אפימורפיזם $\phi:G\to H$ כך ש $\phi\mid_H=\mathrm{id}_H$. בסימונים הנ"ל אם נזהה את $\pi_1\left(A,x_0\right)$ עם התמונה שלה ב $\pi_1\left(X,x_0\right)$ תחת i_*, אז r_* הוא נסג כזה. במקרה כזה אם H ת"ח נורמלית, אזי $G\cong H\times\ker\phi$ (אחרת $G\cong H\ltimes\ker\phi$).

הגדרה 64. להומוטופיה $F:X\times I\to Y$, $F_t\left(x\right)=F\left(x,t\right)$. נאמר כי זו הומוטופיה $\left(X,A\right)\to\left(Y,B\right)$ כאשר $A\subseteq X$ ו $B\subseteq Y$ אם $F_t\left(A\right)\subseteq B$ לכל t.

בפרט אם $A=\{x_0\}$ ו $B=\{y_0\}$ צריך להתקיים $F_t\left(x_0\right)=y_0$ ואז נאמר כי F_t הומוטופיה שומרת נקודות יחוס.

הערה 65. אם $F_t:\left(X,x_0\right)\to\left(Y,y_0\right)$ (כלומר F_t הומו' שומרת נק' יחוס), אזי $\left(F_0\right)_*=\left(F_1\right)_*$.

הגדרה 66. יהיו $\left(X,x_0\right),\left(Y,y_0\right)\in\mathrm{Top}_*$, נאמר כי הם שקולים הומוטופית ונסמן $\left(X,x_0\right)\approx\left(Y,y_0\right)$ אם יש $\phi:\left(X,x_0\right)\to\left(Y,y_0\right)$ ו $\psi:\left(Y,y_0\right)\to\left(X,x_0\right)$ כך ש $\phi\circ\psi\simeq\mathrm{id}_Y$ ו $\psi\circ\phi\simeq\mathrm{id}_X$ ע"י הומוטופיה שומרת נק' יחוס.

דוגמה 67. א) אם X,Y הם הומיאומורפים אז הם גם שקולים הומוטופית.

ב) נניח A נסג עיוותי חזק של X, אז לכל $x_0\in A$ מתקיים $(X,x_0)\approx(A,x_0)$ שקולים הומוטופית.

למה 68. תהי $F_t:X\to Y$ הומו' ונגדיר $h:I\to Y$ ע"י $h(t)=F_t(x_0)$. אזי הדיאגרמה הבאה חילופית:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y,F_1(x_0)) \arrow[dd, "\beta_h"] \\ \pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "(F_1)_*"] \arrow[dr, "(F_0)_*"'] & \\ & \pi_1(Y,F_0(x_0)) \end{tikzcd}$$

נזכיר כי $\beta_h([f])=\left[h\cdot f\cdot\overline{h}\right]$ ו β_h הוא איזומורפיזם של חבורות.

הוכחה. אנחנו צריכים להוכיח ש $\beta_h\circ(F_1)_*=(F_0)_*$. תהי $f:I\to X$ לולאה ביחס ל x_0, צריך להראות ש:

$$\left[h\cdot(F_1\circ f)\cdot\overline{h}\right]=\beta_h([F_1\circ f])=\beta_h\circ(F_1)_*[f]\overset{?}{=}(F_0)_*(f)=[F_0\circ f]$$

נחפש הומוטופיה בין $h\cdot(F_1\circ f)\cdot\overline{h}$ ל $F_0\circ f$. נגדיר $h_t:I\to Y$ ע"י $h_t(s)=h(ts)$, אזי:

$$h_t(0)=h(0)=F_0(x_0)$$
$$h_t(1)=h(t)=F_t(x_0)$$

כלומר h_t זה מסלול ב Y מ $F_0(x_0)$ אל $F_t(x_0)$. f היא לולאה ב X ביחס ל x_0, אזי $F_t\circ f$ היא לולאה ב Y ביחס ל $F_t(x_0)$. ביחד נקבל שלכל t הפונקציה $h_t\cdot(F_t\circ f)\cdot\overline{h}_t$ היא לולאה ביחס ל $F_0(x_0)$. למעשה זו הומוטופיה בין $h_0\cdot(F_0\circ f)\cdot\overline{h}_0=F_0\circ f$ ל $h_1\cdot(F_1\circ f)\cdot\overline{h}_1=h\cdot(F_1\circ f)\cdot\overline{h}$ בדיוק כמו שחיפשנו. □

משפט 69. אם $\phi:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ שקילות הומוטופית אזי:

$$\phi_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,\phi(x_0))$$

הינו איזומורפיזם של חבורות.

הוכחה. דבר ראשון לפי טענה 55 ϕ_* הומומורפיזם של חבורות. קיימת $\psi:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ כך ש $\psi\circ\phi\simeq\mathrm{id}_X$ וגם $\phi\circ\psi\simeq\mathrm{id}_Y$.
נתבונן בהרכבות:

$$\pi_1(X,x_0)\overset{\phi_*}{\to}\pi_1(Y,y_0)\overset{\psi_*}{\to}\pi_1(X,x_0)\overset{\phi_*}{\to}\pi_1(Y,y_0)$$

$\mathrm{id}_X \simeq \phi \circ \psi$ אז קיימת הומוטופיה F כך ש $F_0 = \psi \circ \phi$ ו $F_1 = \mathrm{id}_X$. לפי הלמה הקודמת:

$$\beta_h = \beta_h \circ \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)} = \beta_h \circ (\mathrm{id}_X)_* = \beta_h \circ (F_1)_* = (F_0)_* = (\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$$

β_h הינו איזומורפיזם אז ϕ_* חח"ע. באופן דומה $\beta_{h'} = \phi_* \circ \psi_*$ ולכן ϕ_* על. $\square$

הגדרה 70. נאמר כי X הוא כוויץ contractible אם X שקול הומוטופית לאיזושהי נקודה $x_0 \in X$. בפרט $\pi_1(X) = 0$ ו X פשוט קשר (אבל לא להפך).

3.1 מכפלות חופשיות

הגדרה 71. תהי S קבוצה. החבורה החופשית F_S מורכבת ממילים, מילה היא שרשור סימנים מתוך $S \cup S^{-1}$. המילה הריקה תסומן ב 1.

הכפל בחבורה הוא שרשור של מילים, למשל:

$$(s_1 s_2)(s_3 s_3) = s_1 s_2 s_3 s_4$$

$$(s_1 s_2)\left(s_2^{-1} s_1^{-1}\right) = 1$$

הערה 72. א. תהי G חבורה ו S קבוצה, לכל פונקציה $f : S \to G$ קיים הומומורפיזם יחיד $\phi : F_S \to G$ כך שהדיאגרמה:

$$\begin{array}{ccc} S & \overset{\subseteq}{\to} & F_S \\ & \searrow & \downarrow & \phi \\ f & & G \end{array}$$

היא חילופית. ההומומורפיזם מוגדר לפי:

$$\phi\left(s_1^{\pm} \cdots s_n^{\pm}\right) = f(s_1)^{\pm} \cdots f(s_n)^{\pm}$$

ב. החבורה האבלית החופשית על קבוצה S מוגדרת להיות $F_S / [F_S : F_S]$, אפשר גם להגדיר אותה עם תכונת האוניברסליות מסעיף א'.

ג. כל חבורה G היא מנה של חבורה חופשית, למשל F_G.

הגדרה 73. יהי $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ אוסף של חבורות. נגדיר את המכפלה החופשית $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ להיות אוסף המילים $g_1 \cdots g_m$ מאורך סופי $m \geq 0$, כך ש $e_{G_{\alpha_i}} \neq g_i \in G_{\alpha_i}$ לכל i ובנוסף $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ לכל i. מילה כנ"ל נקראת מצומצמת reduced . הכפל במכפלה החופשית הוא שרשור, ואז צמצום איברים מאותה החבורה G_α עד שמתקיים התנאי $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ לכל i. המילה הריקה היא מאורך $m = 0$ והיא איבר היחידה.

דוגמה 74. אם $G_\alpha = \mathbb{Z}$ לכל $\alpha \in A$, אזי $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ זו החבורה החופשית שנוצרת על ידי $S = \{1_\alpha \in \mathbb{Z}\}_\alpha$.

טענה 75. תכונת האוניברסליות של המכפלה החופשית

לכל מערכת $\phi_\alpha : G_\alpha \to H$ של הומומורפיזמים קיים הומומורפיזם יחיד $\Phi : *G_\alpha \to H$ כך שהדיאגרמה:

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \overset{i_\alpha}{\to} & *G_\alpha \\ & \searrow & \downarrow & \Phi \\ \phi_\alpha & & H \end{array}$$

היא חילופית לכל α. i_α זה השיכון שאתם חושבים עליו. ההומומורפיזם מוגדר לפי:

$$\Phi(g_1 \cdots g_m) = \phi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \phi_{\alpha_m}(g_m)$$

משפט 76. Van Kampen

יהי $X=\cup_\alpha A_\alpha$ איחוד של קבוצות פתוחות קשירות מסילתית A_α, ותהי $x_0 \in X$ כך ש $x_0 \in \cap_\alpha A_\alpha$. נניח גם כי $A_\alpha \cap A_\beta$ קשירה מסילתית לכל α, β. אזי ההומומורפיזם:

$$\Phi : *_\alpha \pi_1 \left(A_\alpha, x_0\right) \to \pi_1 \left(X, x_0\right)$$

המתקבל מהמערכת $i_\alpha : \pi_1 \left(A_\alpha, x_0\right) \to \pi_1 \left(X, x_0\right)$ לפי תכונת האוניברסליות, הינו אפימורפיזם.

אם בנוסף נניח כי $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ קשיר מסילתית לכל α, β, γ אזי הגרעין $\ker \Phi$ הוא התת חבורה הנורמלית הנוצרת על ידי האיברים:

$$i_{\alpha\beta}\left(\omega\right) \cdot i_{\beta\alpha}\left(\omega\right)^{-1}$$

לכל $\omega \in \pi_1 \left(A_\alpha \cap A_\beta, x_0\right)$. כאשר:

$$i_{\alpha\beta} : \pi_1 \left(A_\alpha \cap A_\beta, x_0\right) \to \pi_1 \left(A_\alpha, x_0\right)$$

מתקבל מההכלה $e_{\alpha\beta} : A_\alpha \cap A_\beta \to A_\alpha$, כלומר $i_{\alpha\beta} = \left(e_{\alpha\beta}\right)_*$. במקרה זה:

$$\left(*_\alpha \pi_1 \left(A_\alpha, x_0\right)\right) \Big/ \left\langle\left\langle i_{\beta\alpha}\left(\omega\right) \cdot i_{\alpha\beta}\left(\omega\right)^{-1} \middle| \omega \in \pi_1\left(A_\alpha \cap A_\beta\right)\right\rangle\right\rangle = \left(*_\alpha \pi_1 \left(A_\alpha, x_0\right)\right) / \ker \Phi \cong \pi_1 \left(X, x_0\right)$$

הוכחה. נביא פה רק חלק מההוכחה.

לפי ההגדרה של Φ, אם $\left[f_{\alpha_i}\right] \in \pi_1\left(A_{\alpha_i}\right)$ ו $\left[f_{\alpha_1}\right] \cdots \left[f_{\alpha_n}\right]$ מילה מצומצמת, אזי:

$$\Phi\left(\left[f_{\alpha_1}\right] \cdots \left[f_{\alpha_n}\right]\right) = i_{\alpha_1}\left(\left[f_{\alpha_1}\right]\right) \cdots i_{\alpha_n}\left(\left[f_{\alpha_n}\right]\right)$$

יהי $[f] \in \pi\left(X, x_0\right)$. לפי למה 57 אפשר להציג את $[f]$ כמכפלה של לולאות ב X ביחס ל x_0 שנמצאות בתוך A_{α_i}, נסמן את הלולאות ב f_{α_i}.
אם נחשוב על f_{α_i} כלולאות ב A_{α_i} ולא ב X, אז $i_{\alpha_i}\left(\left[f_{\alpha_i}\right]\right)$ היא המחלקה של הלולאה ב X. לכן:

$$\Phi\left(\left[f_{\alpha_1}\right] \cdots \left[f_{\alpha_n}\right]\right) = i_{\alpha_1}\left(\left[f_{\alpha_1}\right]\right) \cdots i_{\alpha_n}\left(\left[f_{\alpha_n}\right]\right) = [f]$$

כלומר Φ על כנדרש.

עכשיו נניח כי $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ קשיר מסילתית לכל α, β, γ. נתבונן בדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \cap A_\beta \arrow[r, "e_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "e_{\alpha\beta}"'] & A_\beta \arrow[d, "e_\beta"] \\
A_\alpha \arrow[r, "e_\alpha"'] & X
\end{tikzcd}$$

היא חילופית כי כל החצים פה הם פשוט הכלות. כלומר $e_\beta e_{\beta\alpha} = e_\alpha e_{\alpha\beta}$ לכן:

$$i_\beta i_{\beta\alpha} = (e_\beta)_* (e_{\beta\alpha})_* = (e_\beta e_{\beta\alpha})_* = (e_\alpha e_{\alpha\beta})_* = (e_\alpha)_* (e_{\alpha\beta})_* = i_\alpha i_{\alpha\beta}$$

זה שיוויון פונקציות, כלומר לכל $\omega \in \pi_1 (A_\alpha \cap A_\beta)$ מתקיים $i_\beta \circ i_{\beta\alpha} (\omega) = i_\alpha \circ i_{\alpha\beta} (\omega)$. לכן:

$$\Phi \left(i_{\beta\alpha} (\omega) \cdot i_{\alpha\beta} (\omega)^{-1} \right) = \Phi (i_{\beta\alpha} (\omega)) \cdot \Phi \left(i_{\alpha\beta} (\omega)^{-1} \right) = i_\beta (i_{\beta\alpha} (\omega)) \cdot i_\alpha \left(i_{\alpha\beta} (\omega)^{-1} \right) = i_\beta (i_{\beta\alpha} (\omega)) \cdot i_\alpha (i_{\alpha\beta} (\omega))^{-1} = 1$$

נסמן ב N את התת חבורה הנורמלית הנוצרת על ידי $i_{\beta\alpha} (\omega) \cdot i_{\alpha\beta} (\omega)^{-1}$, כלומר:

$$N = \left\langle \left\langle i_{\beta\alpha} (\omega) \cdot i_{\alpha\beta} (\omega)^{-1} \middle| \omega \in \pi_1 (A_\alpha \cap A_\beta) \right\rangle \right\rangle$$

אז הוכחנו כי $N \subseteq \ker \Phi$. נראה כעת כי:

$$\hat{\Phi} : (*_\alpha \pi_1 (A_\alpha)) / N \to \pi_1 (X)$$

הוא חח"ע, וזה יוכיח כי $N = \ker \Phi$. נגדיר פירוק של $[f] \in \pi_1 (X)$ להיות מכפלה $i_{\alpha_1} ([f_1]) \cdots i_{\alpha_k} ([f_k])$ (בתוך $*_\alpha \pi_1 (A_{\alpha_i})$) כך ש $[f_i] \in \pi_1 (A_{\alpha_i})$ וגם:

$$[f] = \Phi (i_{\alpha_1} ([f_1]) \cdots i_{\alpha_k} ([f_k]))$$

מכיוון ש Φ על לכל $[f]$ יש פירוק. נאמר ששני פירוקים של $[f]$ הם שקולים אם אחד מתקבל מהשני על ידי סדרה שמורכבת מהפעולות:

1. אם $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ אז $i_{\alpha_i} ([f_i]) \, i_{\alpha_{i+1}} ([f_{i+1}]) \mapsto i_{\alpha_i} ([f_i \cdot f_{i+1}])$.
2. אם f_i מוכל ב $A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_j}$ אז $i_{\alpha_i} ([f_i]) \mapsto i_{\alpha_j} ([f_i])$, כלומר חושבים על $[f_i]$ בתור איבר של $\pi_1 (A_{\alpha_j})$ במקום איבר של $\pi_1 (A_{\alpha_j})$.

אחרי פעולה 1 המכפלה עדיין תיהיה פירוק של f כי i_{α_i} הוא הומומורפיזם של חבורות. אחרי פעולה 2 המכפלה עדיין תיהיה פירוק של f כי הוכחנו כבר ש:

$$i_{\alpha_i} \left(i_{\alpha_i \alpha_j} ([f_i]) \right) = i_{\alpha_j} \left(i_{\alpha_j \alpha_i} ([f_i]) \right)$$

נשים לב שהתנאי השני זה היחס ש N נותנת לנו. נרצה להוכיח שכל שני פירוקים של $[f]$ הם שקולים, ואז נוכל להוכיח ש $\hat{\Phi}$ חח"ע. נניח כי:

$$\Phi\left(i_{\alpha_1}([g_1])\cdots i_{\alpha_n}([g_n])\right)=\hat{\Phi}\left(i_{\alpha_1}([g_1])\cdots i_{\alpha_n}([g_n])+N\right)=[f]=$$
$$\hat{\Phi}\left(i_{\alpha_1}([f_1])\cdots i_{\alpha_n}([f_n])+N\right)=\Phi\left(i_{\alpha_1}([f_1])\cdots i_{\alpha_n}([f_n])\right)$$

לכן $i_{\alpha_1}([f_1])\cdots i_{\alpha_n}([f_n])$ ו $i_{\alpha_1}([g_1])\cdots i_{\alpha_n}([g_n])$ הם פירוקים של $[f]$, לפי הלמה שעוד לא הוכחנו הם שקולים, כלומר:

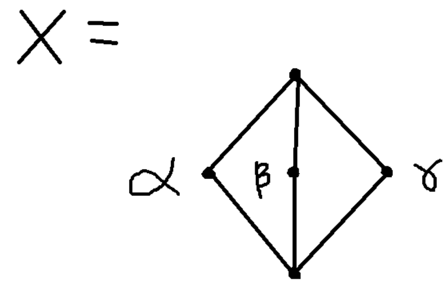
$$i_{\alpha_1}([f_1])\cdots i_{\alpha_n}([f_n])+N=i_{\alpha_1}([g_1])\cdots i_{\alpha_n}([g_n])+N$$

אז $\hat{\Phi}$ חח"ע כנדרש. אני לא אכתוב את ההוכחה שכל שני פירוקים הם שקולים כי צריך לצייר הרבה, בהוכחה שהשתמשנו בלמת הריבועים:

תהי $F:I\times I\to X$ רציפה, נסמן $f_i(s)=F(s,i)$ ו $g_i(s)=F(i,s)$, אזי $f_0\cdot g_1\simeq g_0\cdot f_1$. $\square$

דוגמה 77. א. $\pi_1(\infty)=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

ב. נתבונן במרחב הטופולוגי הבא בתור תת מרחב של המישור האוקלידי:



נגדיר $A_\alpha=X-\alpha$, $A_\beta=X-\beta$, $A_\gamma=X-\gamma$. החיתוך של כל שתי קבוצות הוא קשיר מסילתית, אבל החיתוך של שלוש הקבוצות הוא לא קשיר מסילתית.

אם נפעיל את משפט ואן קמפן עבור $X=A_\alpha\cup A_\beta$ נקבל:

$$\pi_1(X)\cong\pi_1(A_\alpha)*\pi_1(A_\beta)\cong\pi_1\left(S^1\right)*\pi_1\left(S^1\right)\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$$

כי הגרעין של Φ הוא אפס. למה הגרעין הוא אפס? הגרעין $\ker\Phi$ הוא התת חבורה הנורמלית הנוצרת על ידי האיברים:

$$i_{\alpha\beta}(\omega)\cdot i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$$

לכל $\omega\in\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta,x_0)$. נשים לב כי $A_\alpha\cap A_\beta$ זה בערך קו ישר, לכן $\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta,x_0)=e$. אז לכל $\omega\in\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta,x_0)$ מתקיים $i_{\alpha\beta}(\omega)\cdot i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}=e$, כלומר $\ker\Phi=e$.

עבור $X=A_\alpha\cup A_\beta\cup A_\gamma$ אנחנו יכולים להשתמש רק בחלק הראשון של משפט ואן קמפן, אז אנחנו לא יכולים לחשב את הגרעין. אנחנו רק יודעים כי:

$$(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z})\,/\ker\Phi\cong\pi_1(X)$$

3.2 סכום טריז

הערה 78. א. תיהיה Y קבוצה, X_i מ"ט, ו $f_i : X_i \to Y$ פונקציות. הטופולוגיה הסופית על Y היא החלשה ביותר כך ש f_i רציפות. $O \in \tau$ אם ורק אם $f_i^{-1}(O)$ פתוחה לכל i.

ב. באופן שקול אם יש יח"ש $\sim$ על X. אז טופולוגיית המנה על $Y = X/\sim$ היא הטופולוגיה החלשה ביותר כך ש $x \mapsto [x]_\sim$ רציפה.

ג. פונקצייה רציפה $f : X \to Y$ נקראת העתקת מנה אם היא על, וגם $O \subseteq Y$ פתוחה אם ורק אם $f^{-1}(O) \subseteq X$ פתוחה.

ד. תכונת האוניברסליות: יהיו X, Y מ"ט ו $\sim$ יח"ש על X. לכל $f : X \to Y$ רציפה כך ש $x \sim x'$ גורר $f(x) = f(x')$, קיימת $h : (X/\sim) \to Y$ רציפה יחידה כך שהדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd}
& X/\sim \\
X \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "\exists!h"']
\end{tikzcd}$$

היא חילופית, כאשר $\phi(x) = [x]_\sim$.

דוגמה 79. א. נגדיר יח"ש על $\mathbb{R}^n$ לפי $x \sim y$ אם"ם $x - y \in \mathbb{Z}^n$, אזי $\mathbb{R}^n/\sim \cong S^1 \times \cdots \times S^1$.

ב. $D^2/S^1 \cong S^2$ היח"ש הוא זיהוי של S^1 עם נקודה.

ג. זר אינסופי $\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ היח"ש הוא זיהוי של $\mathbb{Z}$ עם נקודה.

הגדרה 80. יהיו Y_i מ"ט, הטופולוגיה על $\bigsqcup Y_i$ (איחוד זר) היא הטופולוגיה הסופית המושרית מההכלות $f_i : Y_i \hookrightarrow \bigsqcup Y_i$. כלומר $O \subseteq \bigsqcup Y_i$ פתוחה אם ורק אם $O \cap Y_i \subseteq Y_i$ פתוחה לכל i.

דוגמה 81. אם לכל $i \in A$ מתקיים $Y_i = Y$ אז $\bigsqcup_{i \in A} Y_i \cong Y \times A$, כאשר הטופולוגיה על A היא דיסקרטית.

הערה 82. א. תכונת האוניברסליות. יהיו Y_i ו Z מ"ט, יהיו $f_i : Y_i \hookrightarrow \bigsqcup Y_i$ הכלות. לכל משפחה של פונקציות רציפות $h_i : Y_i \to Z$, קיימת פונקציה רציפה יחידה $g : \bigsqcup Y_i \to Z$ כך שהדיאגרמה הבאה חילופית לכל i:

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\
\bigsqcup Y_i \arrow[r, "\exists!g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

בנוסף פונקציה $f : \bigsqcup Y_i \to Z$ היא רציפה אם ורק אם $f \circ f_i : Y_i \to Z$ רציפה לכל i.

ב. $\bigsqcup$ שומר על האוסדורפיות, תכונת מניה ראשונה...

דוגמה 83. א. $\mathbb{R} \bigsqcup \mathbb{R}$ זה פשוט שני ישרים מקבילים.

ב. נסמן ב $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \bigsqcup \mathbb{R}$ את שני השיכונים הטבעיים. נגדיר יח"ש על $\mathbb{R} \bigsqcup \mathbb{R}$ באופן הבא: לכל $x \neq 0$ נגדיר $f_1(x) \sim f_2(x)$. המרחב הטופולוגי $(\mathbb{R} \bigsqcup \mathbb{R})/\sim$ זה ישר עם חור באמצע, כאשר מעל החור יש נקודה ומתחת לחור יש נקודה, שתי הנקודות מייצגות את 0. ב $(\mathbb{R} \bigsqcup \mathbb{R})/\sim$ לכל נקודה יש סביבה הומיאומורפית ל $\mathbb{R}$, אבל זה לא מרחב האוסדורף.

הגדרה 84. סכום טריז Wedge Sum

יהיו $(X,x_0),(Y,y_0)\in\mathrm{Top}_*$ מגדירים:

$$X\vee Y:=\left(X\bigsqcup Y\right)/\sim$$

היח"ש $\sim$ הוא היח"ש המינימלי שנוצר מ $y_0\sim x_0$. $X\vee Y$ זה בעצם הדבקה של X ו Y בנקודות x_0 ו y_0.

אם $(X_\alpha,x_\alpha)\in\mathrm{Top}_*$ לכל $\alpha\in A$ אז מגדירים:

$$\bigvee_{\alpha\in A}X_\alpha:=\left(\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha\right)/\sim$$

כאשר היח"ש $\sim$ הוא היח"ש המינימלי שנוצר מ $x_\alpha\sim x_{\alpha'}$ לכל $\alpha,\alpha'\in A$.

למה 85. תהי $\rho:X\to Y$ העתקת מנה, ויהי C מ"ט קומפקטי מקומית והאוסדורף. אזי $\pi:=\rho\times\mathrm{id}:X\times C\to Y\times C$ היא העתקת מנה.

הוכחה. $\pi=\rho\times\mathrm{id}$ רציפה כי היא מכפלה של רציפות, π על כי ρ על. נניח ש $\pi^{-1}(O)$ פתוחה ונוכיח כי O פתוחה.

תהי $(y_0,c_0)\in O$, נוכיח שיש לה סביבה פתוחה המוכלת ב O. תהי $x_0\in X$ כך ש $\rho(x_0)=y_0$, אז $\pi(x_0,c_0)=(y_0,c_0)$ ולכן $(x_0,c_0)\in\pi^{-1}(O)$. $\pi^{-1}(O)$ פתוחה אז יש $x_0\in U_1\subseteq X$ וגם $c_0\in W\subseteq C$ פתוחות כך ש:

$$(x_0,c_0)\in U_1\times W\subseteq\pi^{-1}(O)$$

C קומפקטי מקומית והאוסדורף אז קיימת קבוצה פתוחה V כך ש $c_0\in V\subseteq\overline{V}\subseteq W$, וגם $\overline{V}$ קומפקטית (אני לא בטוח איך זה גורר את זה). אזי:

$$(x_0,c_0)\in U_1\times V\subseteq U_1\times\overline{V}\subseteq U_1\times W\subseteq\pi^{-1}(O)$$

היינו רוצים ש $U_1=\rho^{-1}(\rho(U_1))$ כי אז $\rho(U_1)$ הייתה פתוחה מכיוון ש ρ העתקת מנה.

נניח שמצאנו U_i סביבה פתוחה של x_0 כך ש:

$$U_i\times\overline{V}\subseteq\pi^{-1}(O)$$

$\rho^{-1}(\rho(U_i))$ לא בהכרח פתוחה אבל כן מכילה את U_i. נגדיר $U_{i+1}\subseteq X$ פתוחה באופן הבא: לכל $x\in\rho^{-1}(\rho(U_i))$ מתקיים $\{x\}\times\overline{V}\subseteq\pi^{-1}(O)$. $\overline{V}$ קומפקטית אז לפי Tube Lemma נוכל לבחור סביבה $x\in W_x$ כך ש $W_x\times\overline{V}\subseteq\pi^{-1}(O)$. נגדיר:

$$U_i\subseteq\rho^{-1}(\rho(U_i))\subseteq U_{i+1}:=\bigcup_{x\in\rho^{-1}(\rho(U_i))}W_x$$

U_{i+1} היא סביבה פתוחה של x_0 המקיימת את התנאי:

$$U_{i+1}\times\overline{V}\subseteq\pi^{-1}(O)$$

עכשיו נגדיר $U=\cup_{i=1}^{\infty}U_i$ סביבה פתוחה של x_0. נשים לב כי:

$$U\subseteq\rho^{-1}\left(\rho\left(U\right)\right)=\rho^{-1}\left(\rho\left(\cup_{i=1}^{\infty}U_i\right)\right)=\cup_{i=1}^{\infty}\rho^{-1}\left(\rho\left(U_i\right)\right)\subseteq\cup_{i=1}^{\infty}U_{i+1}\subseteq U$$

לכן $U=\rho^{-1}\left(\rho\left(U\right)\right)$ כמו שרצינו. מכיוון ש U פתוחה ו ρ מנה נקבל כי $\rho\left(U\right)$ פתוחה. אזי:

$$\left(x_0,c_0\right)\in U\times V=U=\cup_{i=1}^{\infty}\left(U_i\times V\right)\subseteq\pi^{-1}\left(O\right)\Rightarrow\left(y_0,c_0\right)\subseteq\rho\left(U\right)\times V=\pi\left(U\times V\right)\subseteq O$$

מ.ש.ל. $\square$

משפט 86. מסקנה ממשפט ואן קמפן

נניח שלכל $\alpha\in A$ המ"ט $\left(X_\alpha,x_\alpha\right)$ קשיר מסילתית, ויש נסג עיוותי חזק מסביבה פתוחה $X_\alpha\supseteq U_\alpha\ni x_\alpha$ לנקודה x_α. אזי:

$$\Phi:*_{\alpha\in A}\pi_1\left(X_\alpha,x_\alpha\right)\xrightarrow{\sim}\pi_1\left(\bigvee_{\alpha\in A}\left(X_\alpha,x_\alpha\right)\right)$$

הינו איזומורפיזם של חבורות.

הוכחה. נגדיר לכל $\alpha\in A$ נגדיר קבוצה פתוחה $A_\alpha:=X_\alpha\vee\left(\bigvee_{\beta\neq\alpha}U_\beta\right)$. נוכיח שלכל α יש נסג עיוותי חזק מ A_α ל X_α. לכל $\beta\in A$ יש נסג $f_\beta:U_\beta\times I\to U_\beta$ מהקבוצה הפתוחה U_β אל הנקודה x_β. בנוסף יש נסג טריוויאלי $f_\alpha:=\mathrm{id}_\alpha\times1:X_\alpha\times I\to X_\alpha$ מ X_α אל עצמו. נגדיר:

$$f:=\left(f_\alpha\bigsqcup\left(\bigsqcup_{\beta\neq\alpha}f_\beta\right)\right):\left(X_\alpha\bigsqcup\left(\bigsqcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta\right)\right)\times I\to X_\alpha\bigsqcup\left(\bigsqcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta\right)$$

נזכור ש:

$$A_\alpha:=X_\alpha\vee\left(\bigvee_{\beta\neq\alpha}U_\beta\right):=\left(X_\alpha\bigsqcup\left(\bigsqcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta\right)\right)/\sim$$

יש העתקת מנה מנה:

$$g:X_\alpha\bigsqcup\left(\bigsqcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta\right)\to X_\alpha\vee\left(\bigvee_{\beta\neq\alpha}U_\beta\right)$$

עכשיו יש חלק לא מובן: מרכיבים את f עם המנה ומקבלים נסג עיוותי חזק מ X_α אל A_α מהלמה הקודמת. אז לפי משפט 61 נקבל $\pi_1\left(A_\alpha,x_\alpha\right)\cong\pi_1\left(X_\alpha,x_\alpha\right)$ לכל α, באופן דומה $\pi_1\left(A_\alpha\cap A_\beta=0\right)$. כמובן ש $A_\alpha\cap A_\beta$ ו $A_\alpha\cap A_\beta\cap A_\gamma$ קשירים מסילתית. לפי משפט ואן קמפן 76 יוצא:

$$*_{\alpha\in A}\pi_1\left(X_\alpha,x_\alpha\right)\cong*_{\alpha\in A}\pi_1\left(A_\alpha,x_\alpha\right)\cong\pi_1\left(\bigvee_{\alpha\in A}\left(X_\alpha,x_\alpha\right)\right)$$

$\square$

דוגמה 87. $\pi_1\left(S^1\vee S^1\right)=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

טענה 88. החבורה היסודית של המישור הפרוייקטיבי היא $\pi_1\left(\mathbb{PR}^2\right)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

הוכחה. א) דבר ראשון נביא הגדרה שקולה למישור הפרוייקטיבי. נגדיר יח"ש $\sim$ על $D^2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$ לפי $x\sim -x$ לכל x על השפה $\partial D^2=S^1$. אזי $\mathbb{PR}^2\cong D^2/\sim$, למה? איל צייר כדור שחוצה אותו מישור, הוא הוריד ישרים מהקוטב הצפוני של הספירה שחותכים את הספירה בעוד נקודה אחת, וגם חותכים את המישור. הישרים האלה נותנים את ההומיאומורפיזם או משהו.

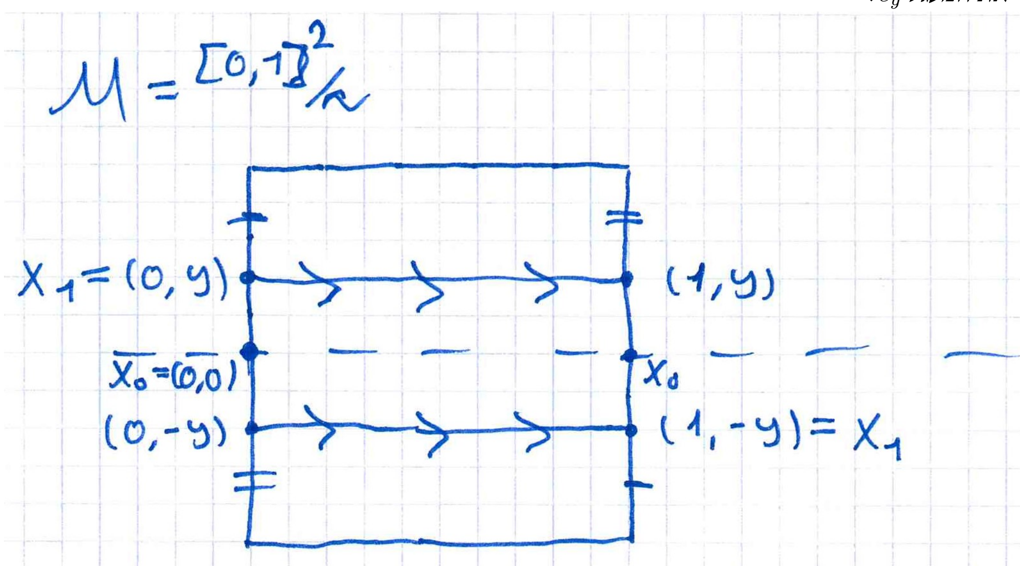
ב) רצועת מוביוס מוגדרת על ידי $M:=[0,1]^2/\sim$ כאשר $(0,y)\sim(1,-y)$ לכל y. נגדיר $p:[0,1]^2\to M$ לפי $p(x,y)=[(x,y)]_\sim$.

במרכז של רצועת מוביוס יש מעגל $c(x)=p(x,0)$, $c\cong S^1$. ההעתקה $F(p(x,y),t)=p(x,(1-t)y)$ היא נסג עיוותי חזק מ M ל $c\cong S^1$, אז לפי משפט 61 $\pi_1(M)=\pi_1\left(S^1\right)=\mathbb{Z}$.

עכשיו נתבונן במעגלים על טבעת מוביוס שהם לא בדיוק במרכז. לכל $0<|y|\le 1$ נגדיר את המעגל:

$$c_y(x)=\begin{cases}p(2x,y) & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ p(2x-1,-y) & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

נצייר את המעגל c_y:

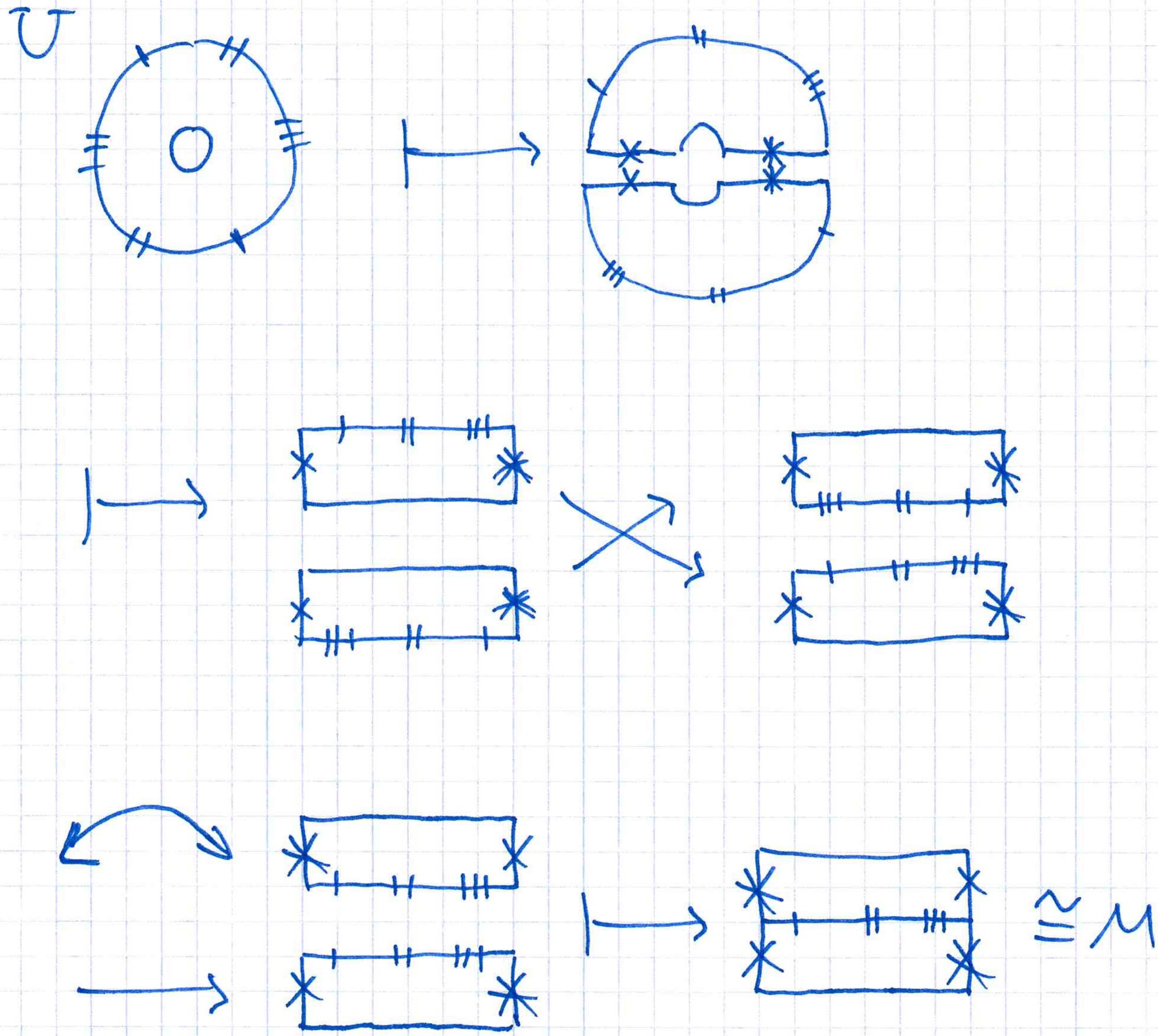


נגדיר $a_y(x)=p(x,y)$ אזי $c_y=a_y\cdot a_{-y}$. כעת $c_y\in\pi_1(M,x_1:=p(0,y))$ ו $c\in\pi_1(M,x_0:=p(0,0))$, טבעת מוביוס היא שירה מסילתית אז $\pi_1(M,x_0)\cong\pi_1(M,x_1)$. ניקח איזומורפיזם ספציפי בין שתי החבורות היסודיות. ניקח מסילה h מ x_0 אל x_1, ומסילה h' מ $-x_1$ אל x_0. לפי משפט 21 β_h הינו איזומורפיזם מ $\pi_1(M,x_1)$ אל $\pi_1(M,x_0)$, נחשב את התמונה של $[c_y]$ תחת האיזומורפיזם:

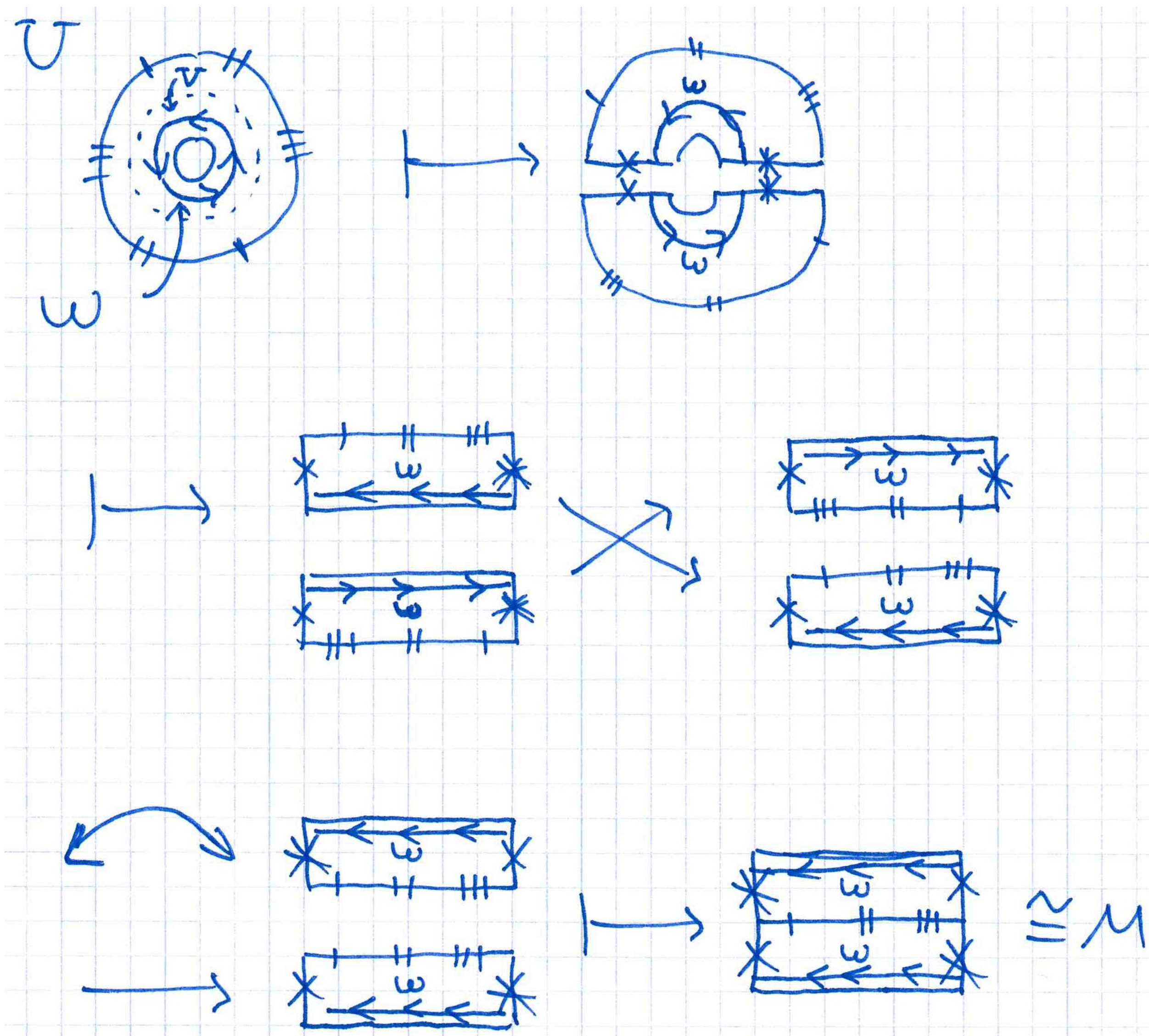
$$\beta_h([c_y])=[h]\cdot[c_y]\cdot\left[\overline{h}\right]=[h]\cdot[a_y\cdot a_{-y}]\cdot\left[\overline{h}\right]=[h]\cdot[a_y]\cdot[h']\cdot\left[\overline{h'}\right]\cdot[a_{-y}]\cdot\left[\overline{h}\right]=$$

$$[h\cdot a_y\cdot h']\cdot\left[\overline{h'}\cdot a_{-y}\cdot\overline{h}\right]=[c]\cdot[c]=[c]^2$$

ג) נחשוב על המישור הפרוייקטיבי בתור $D^2/\sim$ לפי סעיף א'. נכתוב $\mathbb{P}\mathbb{R}^2 = U \cup V$, כאשר U טבעת המתקבלת מ D^2 מהסרת עיגול סגור ברדיוס $\frac{1}{4}$ סביב הראשית, V עיגול פתוח ברדיוס $\frac{1}{2}$ סביב הראשית. נשים לב כי $V \cong \mathbb{R}^2$ אז $\pi_1(V) = 0$. בנוסף $U \cap V$ זה בערך S^1 (אפשר לפרמל עם נסג עיוותי) לכן $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$. עכשיו נוכיח ש $M \cong U$ ואז נקבל כי $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$. נחתוך ונדביק את U:



תהי $\omega \in \pi_1(U \cap V)$ אזי $i_{VU}(\omega) = e$ כי $\pi_1(v) = 0$. מצד שני $i_{UV}(\omega) = c^2$ כי $M \cong U$ ולפי סעיף ב', כדי להבין איך החישוב פה שקול לחישוב בסעיף ב' נוסיף את המסילה ω לציור שלנו:



התמונה של המסילה ω בטבעת מוביוס M היא בדיוק הלולאה c_y! רק בכיוון ההפוך אבל זה לא משנה. לפי משפט ואן קפמן יוצא:

$$\pi_1\left(\mathbb{PR}^2\right) \cong \left(\pi_1\left(U\right) * \pi_1\left(V\right)\right) / \left\langle\left\langle i_{UV}\left(\omega\right) \cdot i_{VU}\left(\omega\right)^{-1} \middle| \omega \in \pi_1\left(U \cap V\right)\right\rangle\right\rangle \cong$$

$$\pi_1\left(U\right) / \left\langle\left\langle i_{UV}\left(\omega\right) \middle| \omega \in \pi_1\left(U \cap V\right)\right\rangle\right\rangle \cong \pi_1\left(U\right) / \left\langle\left\langle c^2 \right\rangle\right\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$\square$

3.3 CW Complexes

הגדרה 89. א. יהי X^0 מ"ט דיסקרטי, לאיברי X^0 נקרא $0-$ cells.

ב. D^n זה כדור היחידה הסגור ב $\mathbb{R}^n$, $\partial D^n = S^{n-1}$ זה ספרית היחידה ב $\mathbb{R}^n$.

ג. לכל $\alpha \in A$ תיהיה $\phi_\alpha : S^{n-1} = \partial D^n_\alpha \to X^{n-1}$ פונקציה רציפה. השלד ה-n-י מוגדר על ידי:

$$X^n := \left(X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha \in A} D^n_\alpha \right) / \left\langle x \sim \phi_\alpha (x) | \forall \alpha \in A, \forall x \in \partial D^n_\alpha \right\rangle$$

ד. כעת אפשר להגדיר $X = X^n$ עבור איזשהו n. או לקחת $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X^n$.

ה. נגדיר טופולוגיה על X לפי $O \subseteq X$ פתוחה אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה $O \cap X^n$ פתוחה ב X^n (הטופולוגיה החלשה).

ו. X כנ"ל נקרא קומפלקס CW .

ז. הכדורים הפתוחים $e^n_\alpha := D^n_\alpha \setminus \partial D^n_\alpha$ נקראים $n-$ cells.

ח. ה C בשם CW Complexes אומר ש e^n_α הוא Closure Finite כלומר מכוסה על ידי מספר סופי של תאים.

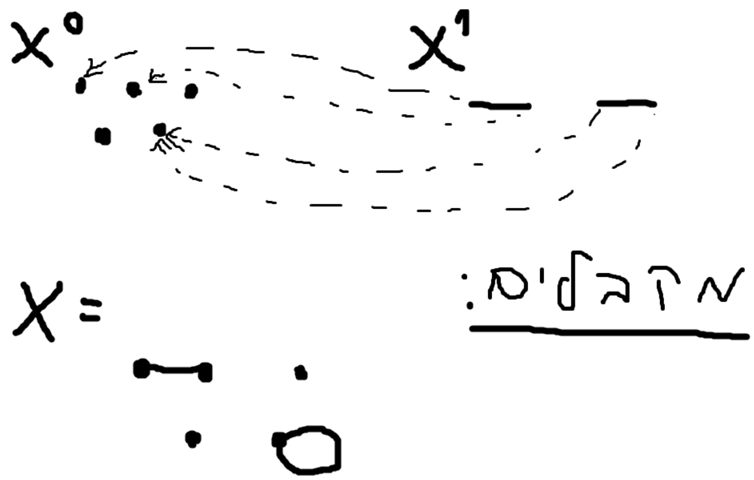
ט. ה W בשם CW Complexes מתייחס לטופולוגיה החלשה Weak .

הערה 90. א. למ"ט Y יש מבנה של קומפלקס אם הוא הומיאומורפי לאיזשהו קומפלקס X.

ב. הטופולוגיה החלשה שהגדרנו על X היא אכן הטופולוגיה הסופית על X ביחס לשיכונים $X^n \hookrightarrow X$.

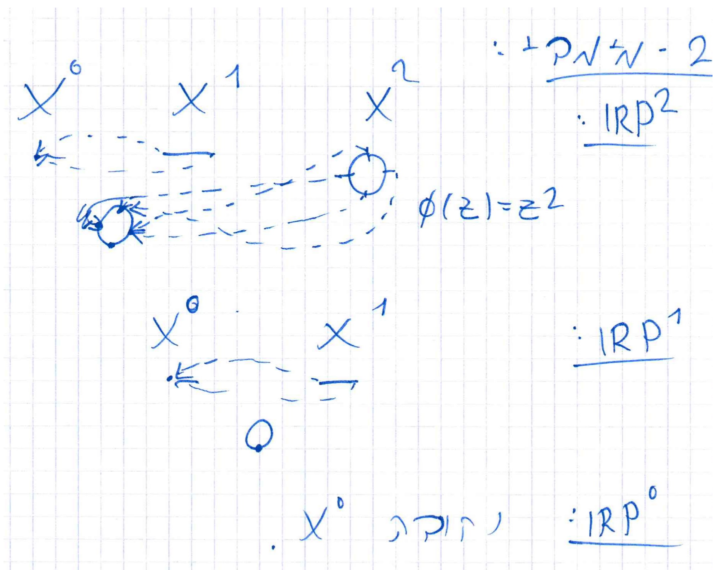
ג. ל n המינימלי כך ש $X = X^n$ קוראים המימד של X. המימד הוא אינווריאנט של הומיאומורפיזם, כלומר אם $X \cong X'$ שני קומפלקסים אז המימדים שלהם שווים.

דוגמה 91. א. נביא דוגמה לקומפלק חד מימדי. $D^1_\alpha = I = [0,1]$ ו $\partial D^1_\alpha = S^0 = \{0,1\}$, ציור:



קיבלנו גרף! $G = (V, E)$ כאשר $V = X^0$ ו $E = X^1$. נניח כי $\left|X^0\right|, \left|X^1\right| < \infty$. הטופולוגיה על G מושרית מהטופולוגיה של $\mathbb{R}^2$(בהנחה שהגרף מישורי!).

ב. דוגמה לקומפלקס דו מימדי:



טענה 92. יהי G גרף כמו מהדוגמה הקודמת, בנוסף נניח ש G קשיר וסופי. אזי $\pi_1(G) = F_m$ (חבורה חופשית עם m יוצרים) כאשר:

$$m = |E| - |V| + 1$$

מוכיחים בעזרת משפט ואן קמפן. למשל $\pi_1(\infty) = F_2$.

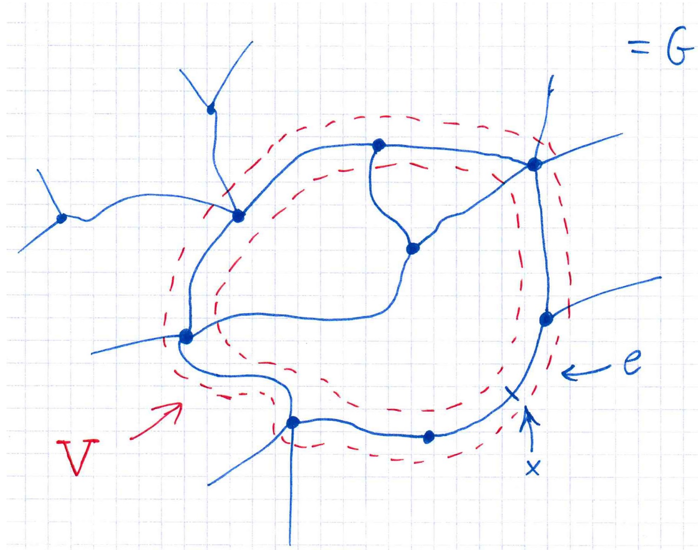
הוכחה. (הוא נותן להוכיח את הטענה הזאת בשיעורי בית, אבל הוא לא כותב שם שהגרף קשיר, אני לא חושב שזה נכון כאשר הגרף לא קשיר. בהוכחה אני מצייר גרף כאילו הוא מישורי, לדעתי ההוכחה עובדת בכל מקרה ולא צריך להניח מישוריות. בכל מקרה תהנו מההוכחה שלי (:)

נוכיח את הטענה באינדוקציה על $|E|$. בסיס: $|E| = 0$. גרף קשיר בלי קשתות חייב להיות נקודה בודדת, אז החבורה היסודית היא $F_0 = 0$, ובאמת $m = |E| - |V| + 1 = 0$.

צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור $|E| = n$ ונוכיח עבור $|E| = n + 1$. הגרף שלנו קשיר, נחלק את ההוכחה לפי "עד כדי כמה הוא קשיר". תחילה נניח שכל קשת שנסיר תהפוך את הגרף ללא קשיר, כלומר הגרף הוא עץ. כל עץ מקיים את המשוואה $m = |E| - |V| + 1 = 0$. נשים לב שלעץ יש נסג עיוותי חזק אל נקודה (לא קשה לדמיין) כלומר הוא כוויץ, אזי $\pi_1(\mathrm{Tree}) = 0 = F_0$. עכשיו נניח שקיימת קשת e שאם נסיר אותה אז הגרף ישאר קשיר, נסמן את הגרף החדש בלי הקשת e ב G'. G' מקיים את כל הנחות האינדוקציה, הוא קשיר סופי ו $|E(G')| = n + 1 - 1 = n$. נחשב:

$$m(G') = |E(G')| - |V(G')| + 1 = |E(G)| - 1 - |V(G)| + 1 = m(G) - 1$$

אזי $\pi_1(G') = F_{m(G)-1} = *_{i=1}^{m(G)-1}\mathbb{Z}$. נרצה להגדיר קבוצה פתוחה U על G, שהחבורה היסודית שלה תיהיה כמו של G', כלומר שיהיה נסג עיוותי חזק מ U אל G'. ניקח נקודה x שהיא על הפנים של הקשת e, נגדיר $U = G \setminus \{x\}$. קל לדמיין נסג עיוותי חזק שמכווץ את שני החצאים של $e \setminus \{x\}$ אל הקודקודים בקצוות של e, לכן $\pi_1(U) = \pi_1(G') = *_{i=1}^{m(G)-1}\mathbb{Z}$. עכשיו נרצה להגדיר קבוצה פתוחה V על G, שתכיל את הנקודה x. אנחנו רוצים שהחבורה היסודית של V תצא $\mathbb{Z}$, אז אם V היא סביבה קטנה של x שמוכלת בקשת e זה לא יעבוד. נרצה ש V תראה בערך כמו S^1. הגרף G' הוא קשיר לפי ההנחה, אז יש בו מסלול בין קצה אחד של e לקצה השני שלה, בגלל ש e לא נמצאת ב G' המסלול הזה לא כולל את e. נבחר את V כך שתכיל את המסלול הזה, כמו בציור הבא:



הקבוצה V זה השטח בין הקווים האדומים חיתוך עם הגרף. חשוב לשים לב ש V מכילה את הנקודה x, אזי $G = U \cup V$. קל לראות שיש נסג עיוותי חזק מ V אל משהו שהומיאומורפי ל S^1, פשוט מכווצים את כל השפיצים, לכן $\pi_1(V) = \mathbb{Z}$. נעיר שהקבוצות U ו V ו $U \cap V$ הן כולן קשירות מסילתית. קל לדמיין נסג עיוותי חזק מ $U \cap V$ אל נקודה, כי $U \cap V$ זה בערך קטע עם שפיצים שיוצאים ממנו, אזי $\pi_1(U \cap V) = 0$. מכאן לכל ω מסילה ב $\pi_1(U \cap V)$ מתקיים $[i_{UV}(\omega)] = [i_{VU}(\omega)] = 0$, לכן הגרעין במשפט ואן קמפן הוא 0. סה"כ:

$$\pi_1(G) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \left(*_{i=1}^{m(G)-1}\mathbb{Z}\right) * \mathbb{Z} \cong *_{i=1}^{m(G)}\mathbb{Z} \cong F_{m(G)}$$

מ.ש.ל. □

הערה 93. אפשר בבניה של קומפלקס להחליף את D^n ב $D^n \cong I^n$ ואז ההדבקה היא של ∂I^n.

הגדרה 94. יהי X קומפלקס, יש העתקה:

$$\phi_{\alpha,n} : D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \bigsqcup_\beta D^n_\beta \xrightarrow{\text{מנה}} X^n \hookrightarrow X$$

(אני חושב שהכוונה לפונקציה שונה מהפונקציה בהגדרה של קומפלקס אז הסימון קצת בעייתי) ההעתקה $\phi_{\alpha,n}$ היא רציפה כהרכבת רציפות.

$\phi_{\alpha,n}$ נקראת caracter-map של ה $n-\text{cell}$.

טענה 95. א. העתקת הקרקטר $\phi_{\alpha,n}$ מצומצמת ל e^n_α היא הומיאומורפיזם מ e^n_α אל $\phi_{\alpha,n}(e^n_\alpha)$. כלומר $\phi_{\alpha,n}|_{e^n_\alpha} : e^n_\alpha \xrightarrow{\sim} O$ כאשר O היא פשוט התמונה של e^n_α.

ב. נגדיר $\Phi : \bigsqcup_{\alpha,n} D^n_\alpha \to X$ לפי $\Phi := \bigsqcup \phi_{\alpha,n}$, אזי Φ היא העתקת מנה.

הוכחה. נוכיח רק את א. תחילה נראה כי $\phi_{\alpha,n}$ היא העתקת מנה על $\overline{O}$. מכיוון ש D^n_α קומפקטי ו X האוסדורף נקבל ש $\phi_{\alpha,n}(D_{\alpha,n})$ סגורה ב X. עכשיו $O := \phi_{\alpha,n}(e^n_\alpha) \subseteq \phi_{\alpha,n}(D_{\alpha,n})$, ולכן $\overline{O} \subseteq \phi_{\alpha,n}(D_{\alpha,n})$. מצד שני לפי קריטריון לרציפות עם cl נקבל:

$$\phi_{\alpha,n}(D_{\alpha,n}) = \phi_{\alpha,n}\left(\overline{e^n_\alpha}\right) \subseteq \overline{\phi_{\alpha,n}(e_{\alpha,n})} = \overline{O}$$

אזי $\overline{O}=\phi_{\alpha,n}\left(D_{\alpha,n}\right)$. עד עכשיו הוכחנו כי $\phi_{\alpha,n}:D_{\alpha,n}\to\overline{O}$ היא העתקה רציפה ועל. $D_{\alpha,n}$ קומפקטי ו $\overline{O}$ האוסדורף אז לפי טענה מטופולוגיה $\phi_{\alpha,n}$ היא פונקציה סגורה, לכן $\phi_{\alpha,n}$ פתוחה. פונקציה פתוחה ועל היא בפרט מנה, אז $\phi_{\alpha,n}:D_{\alpha,n}\to\overline{O}$ היא מנה.

עד עכשיו אנחנו יודעים כי $\phi_{\alpha,n}\mid_{e_\alpha^n}:e_\alpha^n\to O$ היא רציפה, על, וגם חח"ע (מהבניה של קומפלקס!). תהי $U\subseteq e_\alpha^n$ פתוחה, לפי ההגדרה של טופולוגיית תת מרחב קיימת $V\subseteq D_\alpha^n$ פתוחה כך ש $U=V\cap e_\alpha^n$, אז U פתוחה ב D_α^n כחיתוך של שתי פתוחות. $\phi_{\alpha,n}$ היא פונקציה פתוחה אז $\phi_{\alpha,n}\left(U\right)$ פתוחה ב $\overline{O}$, אבל $\phi_{\alpha,n}\left(U\right)\subseteq O$ אז:

$$\phi_{\alpha,n}\mid_{e_\alpha^n}\left(U\right)=\phi_{\alpha,n}\left(U\right)=\phi_{\alpha,n}\left(U\right)\cap O\subseteq O$$

כלומר $\phi_{\alpha,n}\mid_{e_\alpha^n}\left(U\right)$ פתוחה ב O כחיתוך של שתי פתוחות. הוכחנו כי $\phi_{\alpha,n}\mid_{e_\alpha^n}:e_\alpha^n\xrightarrow{\sim}O$ הינו הומיאומורפיזם מ.ש.ל. $\square$

מסקנה 96. יהי Y מ"ט כלשהו ו X קומפלקס, אזי:

1. פונקציה $f:X\to Y$ היא רציפה אם ורק אם $f\circ\phi_{\alpha,n}$ רציפה לכל α,n.
2. פונקציה $H:X\times I\to Y$ היא רציפה אם ורק אם $H\circ\left(\phi_{\alpha,n}\times\mathrm{id}_I\right)$ רציפה לכל α,n. כלומר H הומוטופיה אם ורק אם $H\circ\left(\phi_{\alpha,n}\times\mathrm{id}_I\right)$ הומוטופיה לכל α,n.

הגדרה 97. יהי X קומפלקס סופי, כלומר יש מספר סופי של $n-\text{cells}$ כל n. מגדירים את קרקטר אוילר של X להיות:

$$\chi\left(X\right):=\left(\#0-\text{cells}\right)-\left(\#1-\text{cells}\right)+\left(\#2-\text{cells}\right)-\left(\#3-\text{cells}\right)\cdots$$

הערה 98. קרקטר אוילר הוא אינווריאנט של הומוטופיה, כלומר אם X,X' קומפלקסים הומוטופים אז:

$$\chi\left(X\right)=\chi\left(X'\right)$$

למה 99. יהי X מ"ט קשיר מסילתית, $x_0\in X$. יהי Y מ"ט המתקבל מ X על ידי הדבקה של אוסף של תאי-2 (נראלי שזה צריך להיות אוסף סופי), על ידי העתקות רציפות $\phi_\alpha:S^1\to X$, לכל $\alpha\in A$. לכל α נבחר $s_\alpha\in S^1$ "נקודת התחלה" ומסילה $\gamma_\alpha:I\to X$ מ x_0 ל $\phi_\alpha\left(s_\alpha\right)$. אז $l_\alpha:=\gamma_\alpha\circ\phi_\alpha\circ\overline{\gamma_\alpha}$ לולאה ב X עם נקודת יחוס x_0. נסמן ב $N\lhd\pi_1\left(X,x_0\right)$ את התח"נ הנוצרת על ידי $\left\{[l_\alpha]\right\}_{\alpha\in A}$.

1. השיכון $X\hookrightarrow Y$ משרה אפימורפיזם $\pi_1\left(X,x_0\right)\to\pi_1\left(Y,x_0\right)$ שגרעינו N, לכן:

$$\pi_1\left(X,x_0\right)/N\cong\pi_1\left(Y,x_0\right)$$

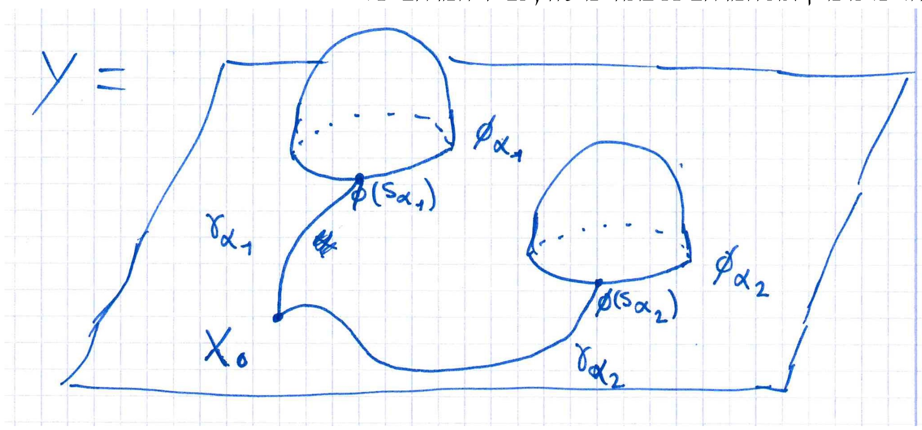
2. אם Y מתקבל מ X כנ"ל, על ידי הדבקת תאי-n עבור $n>2$ קבוע, אז N טריוויאלית ונקבל:

$$\pi_1\left(X,x_0\right)\cong\pi_1\left(Y,x_0\right)$$

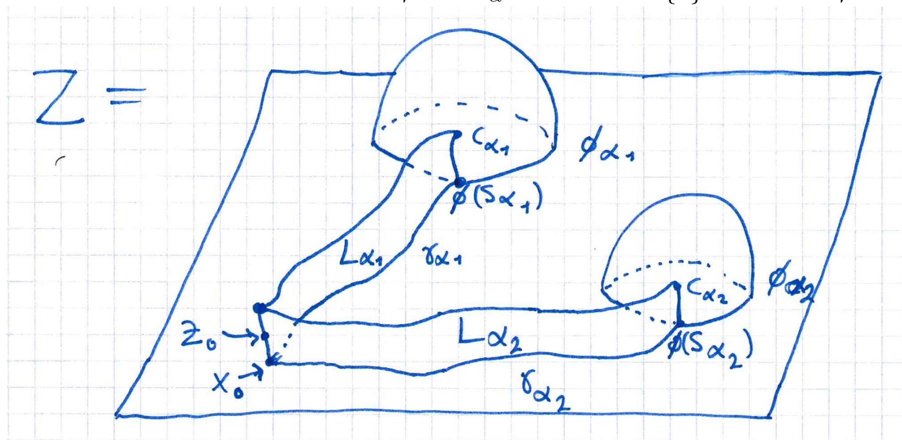
3. אם X קומפלקס קשיר מסילתית ממימד $m \geq 2$ השיכון $X^2 \hookrightarrow X$ משרה איזומורפיזם:

$$\pi_1\left(X^m,x_0\right)\cong \pi_1\left(X^2,x_0\right)$$

הוכחה. 1. נדמיין את המרחב X בתור מישור, נצייר המרחב Y:



נגדיר מ"ט חדש Z. ניקח רצועות מלבניות $L_\alpha \cong I^2$ לכל $\alpha \in A$, ונדביק את L_α אל Y באופן הבא: $I\times\{0\}$ מודבקת אל γ_α. $\{1\}\times I$ מודבקת על קשת בתוך D^2_α, הקשת מתחילה ב $\phi_\alpha\left(s_\alpha\right)$ (שזה $(1,0)$) וממשיכה אל הבפנים של התא D^2_α, נסמן את הנקודה בה הקשת נגמרת ב c_α. ובנוסף הדפנות $\{0\}\times I$ של כל הרצועות L_α מודבקות ביחד. נגדיר את Z להיות המרחב המתקבל מכל ההדבקות. נצייר את Z:

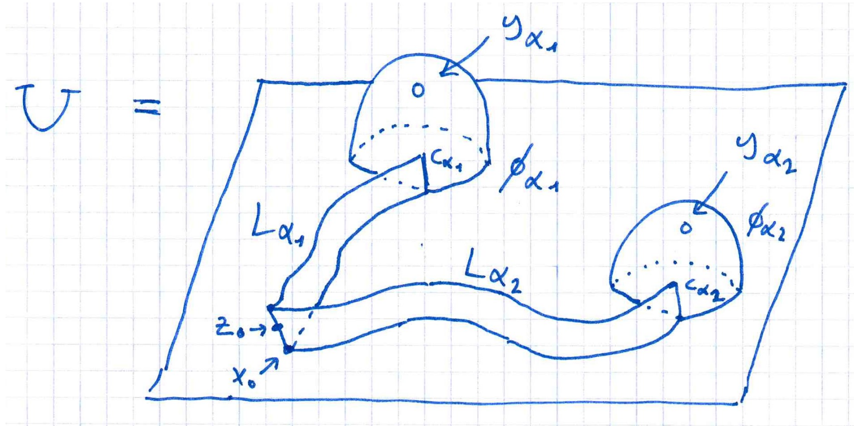


לכל L_α יש נסג עיוותי חזק ל γ_α, אזי $\pi_1\left(Y,x_0\right)\cong\pi_1\left(Z,x_0\right)$. Z קשיר מסילתית, ניקח $z_0\in\{0\}\times I\subseteq L_\alpha$ שונה מ x_0, כלומר $z_0\neq(0,0)$ ברצועה L_α, אז $\pi_1\left(Z,z_0\right)\cong\pi_1\left(Z,x_0\right)$. לכל $\alpha\in A$ נבחר $y_\alpha\in e^2_\alpha$. נגדיר שתי קבוצות פתוחות בתוך Z:

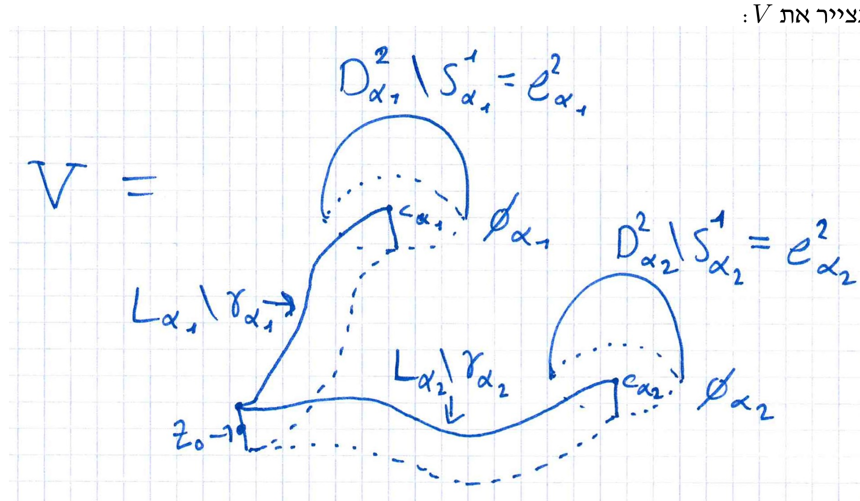
$$U = Z\setminus\left(\cup_{\alpha\in A}\left\{y_\alpha\right\}\right)$$

$$V = Z\setminus X$$

נצייר את U:



נצייר את V :



קל לראות ש U קשיר מסילתית. הקבוצה V קשירה מסילתית בגלל הרצועות L_α, מאותה הסיבה גם $V \cap U$ קשיר מסילתית. בגלל ש $X \notin y_\alpha$ נקבל $Z = U \cup V$, נעיר ש $z_0 \in U \cap V$. לפי משפט ואן קמפן 76 יש איזומורפיזם :

$$\pi_1 \left(Z, z_0\right) \cong \left(\pi_1 \left(U, z_0\right) * \pi_1 \left(V, z_0\right)\right) / K$$

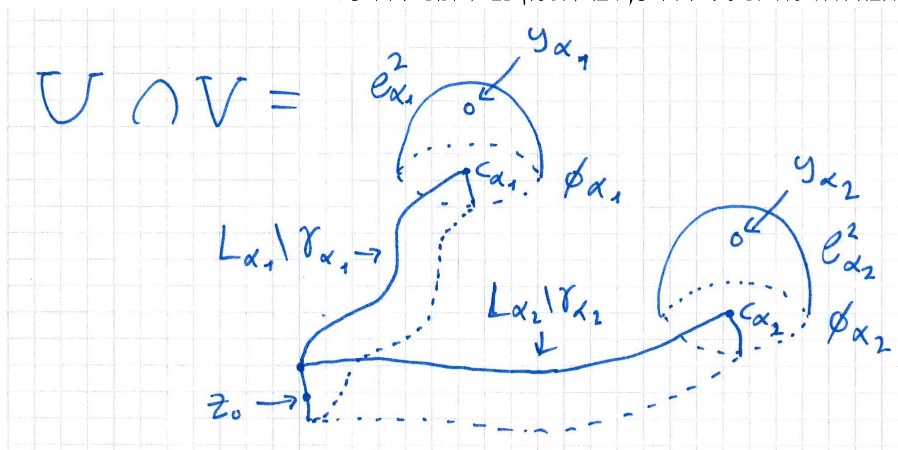
המרחב V הוא כוויץ אז $\pi_1 \left(V, z_0\right) = 0$. למה V כוויץ? כל e^2_α אפשר לכווץ לכל נקודה פנימית, למשל ל c_α. את הרצועות $L_\alpha \setminus \gamma_\alpha$ אפשר לכווץ לדופן $I \times \{0\}$ שמשותפת לכל הרצועות. את הדופן $I \times \{0\}$ אפשר לכווץ ל z_0, סה"כ אפשר לכווץ את V אל z_0. יש נסג עיוותי חזק מ $\left(U, x_0\right)$ אל $\left(X, x_0\right)$ אז :

$$\pi_1 \left(U, z_0\right) \cong \pi_1 \left(U, x_0\right) \cong \pi_1 \left(X, x_0\right)$$

למה יש נסג כזה? את הלולאות העוברות ב e^2_α אפשר לשטח לשפה S^1_α המודבקת ל X, ואת L_α אפשר לשטח ל γ_α. נשאר לנו לחשב את הגרעין K, לפי ואן קמפן :

$$K = \left\langle \left\langle i_{UV} \left(\omega\right) \cdot i_{VU} \left(\omega\right)^{-1} \middle| \omega \in \pi_1 \left(U \cap V, z_0\right) \right\rangle \right\rangle$$

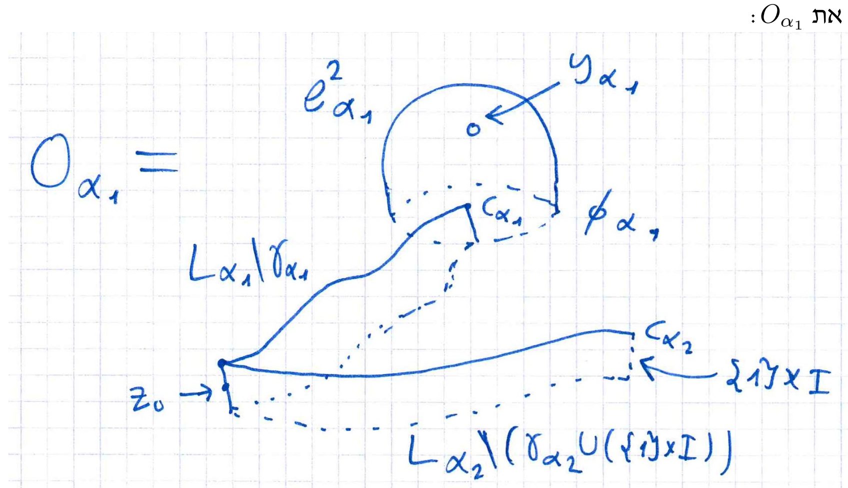
$\pi_1(V,z_0)=0$ אז $i_{VU}(\omega)=e$ לכל ω. נשאר להוכיח כי לכל $\omega\in\pi_1(U\cap V,z_0)$ התמונה $i_{UV}(\omega)$ היא מכפלה של $[l_\alpha]$. נרצה להבין את החבורה היסודית של $U\cap V$, דבר ראשון נצייר את $U\cap V$:



נשתמש עוד הפעם בואן קמפן. לכל $\alpha\in A$ נגדיר:

$$O_\alpha\coloneqq(U\cap V)\setminus\left(\cup_{\alpha\neq\beta\in A}e^2_\beta\right)=\left(e^2_\alpha\setminus\{y_\alpha\}\right)\cup\left(\cup_{\beta\in A}\left(L_\beta\setminus\left(\gamma_\beta\cup\left(\{1\}\times I\right)\right)\right)\right)$$

נצייר את O_{α_1}:



O_α זה להוריד מ $U\cap V$ את כל ההדבקות של תאי-2 חוץ מהדבקה אחת. לכל $\alpha\in A$ הקבוצה O_α היא פתוחה וקשירה מסילתית, בנוסף $U\cap V=\cup_{\alpha\in A}O_\alpha$. נשים לב כי:

$$O_\beta\cap O_\gamma=O_\beta\cap O_\gamma\cap O_\delta=\cup_{\alpha\in A}\left(L_\alpha\setminus\gamma_\alpha\right)$$

החיתוכים האלה קשירים מסילתית, כי כל הרצועות L_α מודבקות על הדפנות שלהן $\{0\}\times I$. בנוסף כל החיתוכים האלה כוויצים, אז לפי משפט ואן קמפן:

$$\pi_1\left(U\cap V,z_0\right)\cong *_{\alpha\in A}\pi_1\left(O_\alpha,z_0\right)$$

נזכור ש $O_\alpha = \left(e_\alpha^2 \setminus \{y_\alpha\}\right) \cup \left(\cup_{\beta\in A}\left(L_\beta \setminus \left(\gamma_\beta \cup \left(\{1\}\times I\right)\right)\right)\right)$, את הרצועות $L_\beta \setminus \left(\gamma_\beta \cup \left(\{1\}\times I\right)\right)$ אפשר לכווץ אז:

$$\pi_1\left(O_\alpha, z_0\right) \cong \pi_1\left(e_\alpha^2 \setminus \{y_\alpha\}\right) \cong \pi_1\left(S^1\right) \cong \mathbb{Z}$$

לכן:

$$\pi_1\left(U\cap V, z_0\right) = *_{\alpha\in A}\mathbb{Z}$$

כל $\omega \in \pi_1\left(U\cap V, z_0\right)$ ניתן לרשום כמכפלה $\omega = \omega_1\cdots\omega_k$, כאשר $\omega_i \in \pi_1\left(O_{\alpha_i}, z_0\right)$, בגלל ש $\pi_1\left(U\cap V, z_0\right) = *_{\alpha\in A}\pi_1\left(O_\alpha, z_0\right)$. ניזכור שאנחנו רוצים להבין את $i_{UV}\left(\omega\right)$, אז ננסה להבין את $i_{UV}\left(\omega_i\right)$. נחשוב על ω_i בתור לולאה ב $U\cap V$ במקום ב O_{α_i}. נשים לב ש ω_i הומוטופית ללולאה המתחילה ב z_0, הולכת ל x_0 על הדופן $I\times\{0\}$ של L_α (הדבקנות את כל הדפנות האלה ביחד), משם הולכת על γ_{α_i}, לאחר מכאן עושה כמה סיבובים על ϕ_{α_i} נגיד n_i סיבובים, חוזרת חזרה על $\overline{\gamma_{\alpha_i}}$ אל x_0, ואז עולה בחזרה אל z_0 על הדופן $I\times\{0\}$. כלומר ω_i הומוטופית ל $l_{\alpha_i}^n$ עד כדי הזזה של נקודת היחוס מ z_0 ל x_0, אזי:

$$i_{UV}\left(\omega\right) = i_{UV}\left(\omega_1\right)\cdots i_{UV}\left(\omega_k\right) = \left[l_{\alpha_1}\right]^{n_1}\cdots\left[l_{\alpha_k}\right]^{n_k}$$

גם הכיוון ההפוך נכון. כל חזקה $\left[l_{\alpha_i}\right]^{n_i}$ היא תמונה של איזשהו ω_i, לכן כל מילה ב $\left[l_\alpha\right]$ שווה לאיזשהו $i_{UV}\left(\omega\right)$ עבור $\omega\in\pi_1\left(U\cap V, z_0\right)$. סה"כ:

$$K = \left\langle\left\langle i_{UV}\left(\omega\right)\cdot i_{VU}\left(\omega\right)^{-1}\middle|\,\omega\in\pi_1\left(U\cap V, z_0\right)\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle\left\{\left[l_\alpha\right]\right\}_{\alpha\in A}\right\rangle\right\rangle$$

אזי:

$$\pi_1\left(Y, x_0\right) \cong \pi_1\left(Z, x_0\right) \cong \left(\pi_1\left(U, z_0\right) * \pi_1\left(V, z_0\right)\right)/\,K \cong \pi_1\left(X, x_0\right)/\left\langle\left\langle\left\{\left[l_\alpha\right]\right\}_{\alpha\in A}\right\rangle\right\rangle$$

סיימנו להוכיח את 1.

2. פשוט צריך לחזור על ההוכחה. רק הפעם ל O_α יש נסג עיוותי חזק ל S^{n-1} עבור $n>2$ אז $\pi_1\left(O_\alpha\right) = \pi_1\left(S^{n-1}\right) = 0$.

3. אינדוקציה.

מ.ש.ל. $\square$

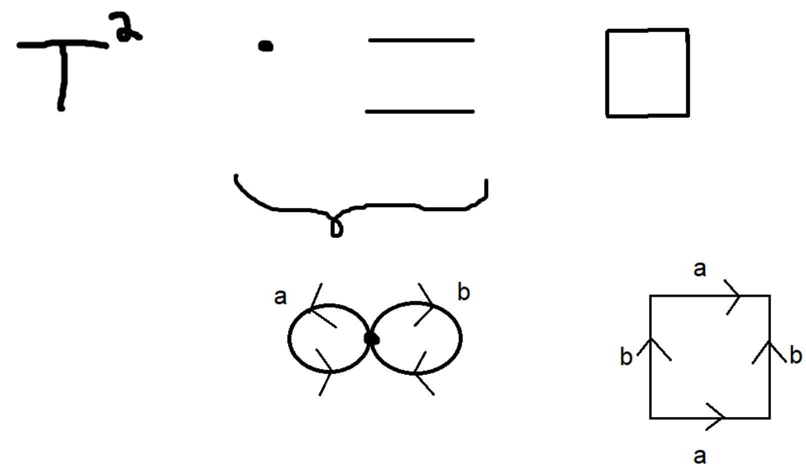
הערה 100. א. 3 נכון גם למקרה האינסופי.

ב. לכל $m<n$ מתקיים $\pi_m\left(S^n\right)=0$ לכן יש אנלוג ללמה עבור π_m. למעשה $\pi_n\left(S^n\right)=\mathbb{Z}$, אבל עבור $n<m$ קשה לחשב את $\pi_m\left(S^n\right)$.

דוגמה 101. א. נתבונן בטורוס T^2. נזכור ש $\pi_1\left(S^1\vee S^1\right)=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}=F^2$, לכן:

$$\pi_1\left(T^2\right)=\pi_1\left(S^1\vee S^1\right)/\left\{[a,b]\right\}=\left\langle a,b\right|\left. aba^{-1}b^{-1}=e\right\rangle=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

נצייר את ההדבקה:



ההדבקה של $D^2\cong I^2$ בטורוס מתבצעת לאורך $aba^{-1}b^{-1}$, לכן מחלקים בקומוטטור כשמחשבים את החבורה היסודית.

ב. רצועת מוביוס M:

$$\pi_1(M)=F_2/\left\langle acbc^{-1}\right\rangle=\left\langle a,cbc^{-1}\right|\left. acbc^{-1}=e\right\rangle\cong\mathbb{Z}$$

הגדרה 102. א. משטח הוא מ"ט האוסדורף X כך שלכל $x\in X$ יש סביבה הומיאומורפית ל $\mathbb{R}^2$.

ב. משטח X יקרא סגור אם הוא קומפקטי.

דוגמה 103. א. $S^2,T^2,\mathbb{PR}^2$ הם משטחים. S^2,T^2 הם משטחים סגורים, האם $\mathbb{PR}^2$ קומפקטי?

ב. גליל הוא לא משטח כי יש לו שפה, נראלי שהכוונה בגליל ל $S^1\times[0,1]$, כלומר בלי הבפנים.

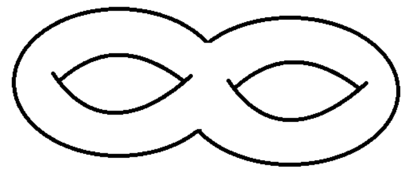
הגדרה 104. סכום קשיר

יהיו X_1,X_2 שני משטחים, ו $\phi_i:D^2\to X_i$ שתי העתקות כך ש $\phi_i:D^2\xrightarrow{\sim}\operatorname{Im}(\phi_i)$ הומיאומורפיזם. מגדירים יח"ש $\sim$ על $\left(X_2\setminus\phi_2\left(e^2\right)\right)\bigsqcup\left(X_1\setminus\phi_1\left(e^2\right)\right)$ לפי $x_2\sim x_1$ אם ורק אם $x_i\in\phi_i\left(D^2\right)$ וגם $\phi_1^{-1}(x_1)=\phi_2^{-1}(x_2)$. הסכום הקשיר של X_1 ו X_2 מוגדר להיות:

$$X_1\#X_2:=\left(\left(X_1\setminus\phi_1\left(e^2\right)\right)\bigsqcup\left(X_2\setminus\phi_2\left(e^2\right)\right)\right)/\sim$$

אנחנו בעצם מציירים על כל משטח עיגול סגור D^2, מחסרים מכל משטח את הבפנים של העיגול e^2, ואז מדביקים את שני המשטחים על השפות של העיגולים $D^2\setminus e^2=S^1$.

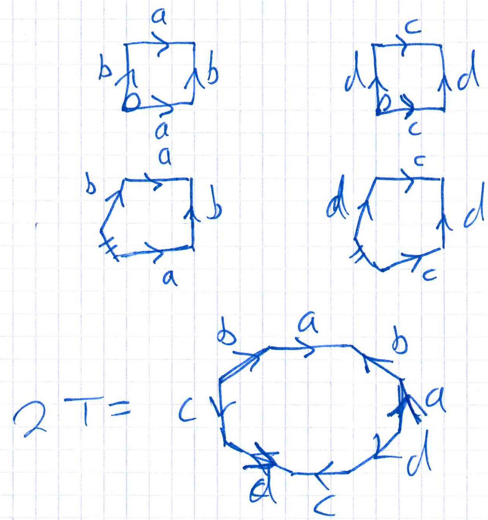
דוגמה 105. הסכום הקשיר של שני טורוסים $T\#T$:



משפט 106. יהי X משטח סגור וקשיר, אזי X הומיאומורפי לאחד מהבאים:

1. $nT := T^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2$.
2. $m\mathbb{PR}^2 := \mathbb{PR}^2 \# \mathbb{PR}^2 \# \cdots \# \mathbb{PR}^2$.
3. S^2.

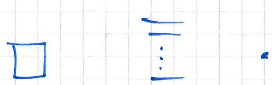
דוגמה 107. איך מדביקים שני טורוסים, ואז חישוב החבורה היסודית של nT:



$$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^{n} S^1\right) = F_n / \langle [a,b]\cdot[c,d] \rangle$$

$$\pi_1(nT) = F_n / \langle [a_1,b_1]\cdots[a_n,b_n] \rangle$$

גבה קומפלקס



$2n$ צלעים
(n חורים)

$$\bigvee_{i=1}^{2n} S^1 \sqcup D^2 / \langle [a_1,b_1]\cdots[a_n,b_n] \rangle$$

קומפלקסים הם חשובים!

הערה 108. א. כל מ"ט הומוטופי באופן חלש לקומפלקס. כלומר לכל מ"ט X יש קומפלקס Y ו $f : Y \to X$ כך ש $f_* : \pi_n(Y, y_0) \to \pi_n(X, f(y_0))$ הינו איזומורפיזם לכל $y_0 \in Y$ ולכל $n \geq 0$.

ב. $\pi_n(Y, y_0)$ עבור $n \geq 1$ מוגדר להיות אוסף מחלקות ההומוטופיה של $g : I^n \to Y$ רציפות כך ש $g(\partial I^n) = y_0$. ל $n > 1$ אלה חבורות אבליות, הגדרת הסכום של החבורה נתונה על ידי:

$$(g_1 + g_2)(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} g_1(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g_2(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

משפט 109. Whitehead

אם X, Y שני קומפלקסים קשירים ויש ביניהם שקילות הומוטופית חלשה, אז הם הומיאומורפים.

משפט 110. תהי G חבורה, אז קיים קומפלקס CW X_G כך ש $\pi_1(G_G) \cong G$.

הוכחה. נסמן $G = \langle g_\alpha \rangle$, נגדיר את X_G ע"י $X_G^1 = \bigvee_\alpha S^1$. לכל $r_\beta = g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_k}$ נוסיף D_β^2 כך ש $\phi_\beta : S^1 \to X_G^1$ מוגדרת לפי r_β. התוצאה נובעת מהלמה. □

דוגמה 111. ל $\mathbb{Z}_n$ ניקח $X^1 = S^1$, נדביק לפי $\mathbb{Z}_n = \langle g | \, g^n \rangle = \langle g \rangle / \langle g^n \rangle$ כלומר $z \mapsto z^n$, אזי $\pi_1(X_{\mathbb{Z}_n}) = \mathbb{Z}_n$.

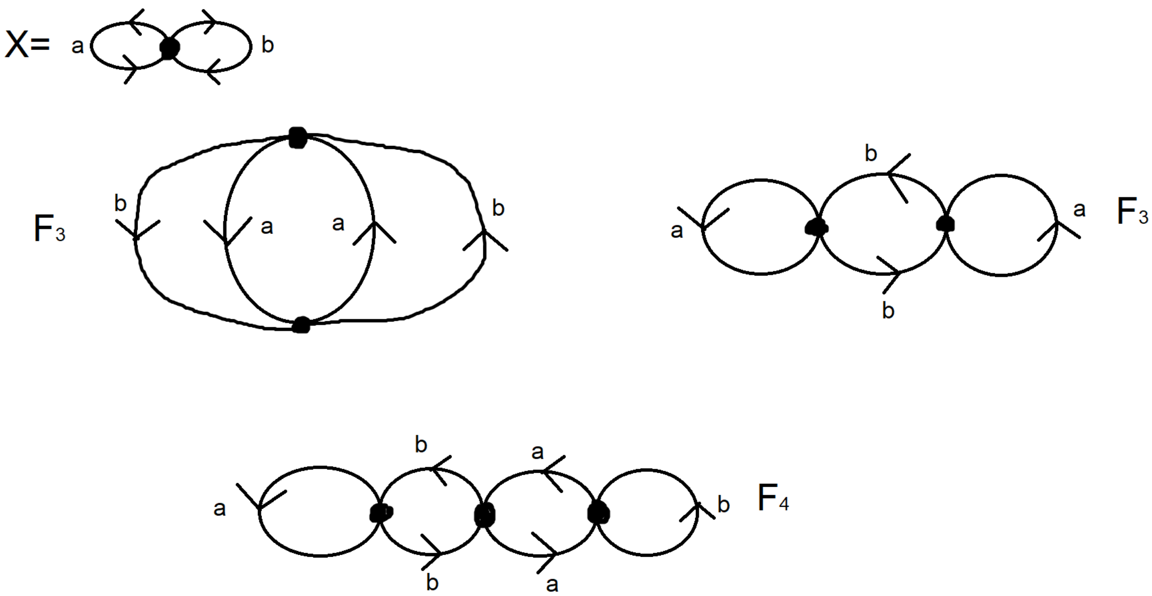
4 מרחבי כיסוי

4.1 תכונות של הרמות

הגדרה 112. נאמר ש $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי של X, אם $p:\tilde{X}\to X$ רציפה ולכל $x\in X$ יש סביבה פתוחה $U\subseteq X$ שהיא מכוסה היטב. כלומר $p^{-1}\left(U\right)$ שווה לאיחוד זר של V_{α}, כך ש $p:V_{\alpha}\to U$ הינו הומיאומורפיזם לכל α.

הערה 113. p לא בהכרח על.

דוגמה 114. ניקח $X=S^{1}\vee S^{1}$. נתבונן במרחבים הבאים:



האם המרחבים האלה הם מרחבי כיסוי? צריך להסביר איך הפונקציה p מוגדרת. שולחים כל קשת שמסומנת ב a אל a, ושומרים על הכיוון של החץ, אותו הדבר לגבי b. את כל הקודקודים שולחים לקודקוד היחיד ב X. נראלי שכל המרחבים הם מרחבי כיסוי.

הערה 115. תזכורת למסקנה 30. נניח $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי של X.

א. אם $F:Y\times I\to X$ הומוטופיה, מגדירים $f_{t}:Y\to X$ לפי $f_{t}\left(y\right)=F\left(y,t\right)$. אם $\tilde{f}_{0}:Y\to\tilde{X}$ הרחבה של f_{0}, כלומר $p\circ\tilde{f}_{0}=f_{0}$, אזי יש הרמה יחידה $\tilde{F}:Y\times I\to\tilde{X}$ של F, כלומר $p\circ\tilde{F}=F$, כך ש $\tilde{F}$ הומוטופיה של $\tilde{f}_{0}$ עם $\tilde{f}_{1}$.

ב. זה בפרט נכון אם $Y=I$ ו F הומוטופיה של מסלולים. כלומר אם $f_{t}\left(0\right)$ ו $f_{t}\left(1\right)$ ב"ת ב t, אזי $\tilde{f}_{t}\left(0\right)$ ו $\tilde{f}_{t}\left(1\right)$ גם ב"ת ב t, כלומר $\tilde{F}$ הומוטופיה של מסלולים בין $\tilde{f}_{0}$ ל $\tilde{f}_{1}$, כאשר $\tilde{f}_{1}$ הרמה של f_{1}.

ג. אם $\tilde{f}_{0}$ לולאה אז גם $\tilde{f}_{1}$ לולאה.

טענה 116. יהי $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי של X.

1. $p_{*}:\pi_{1}\left(\tilde{X},\tilde{x}_{0}\right)\to\pi_{1}\left(X,x_{0}\right)$ היא חח"ע.

2. התמונה של p_{*} היא בדיוק: קבוצת מחלקות ההומוטופיה של לולאות ב X עם יחוס ב x_{0}, כך שההרמות שלהן ל $\tilde{X}$ המתחילות ב $\tilde{x}_{0}$ הן לולאות, כלומר הן גם נגמרות ב $\tilde{x}_{0}$.

הוכחה. 1. נוכיח כי $\ker p_* = e$. יהי $\left[\tilde{f}_0\right] \in \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)$ כך ש $p_*\left(\left[\tilde{f}_0\right]\right) = e$, נסמן $\left[p \circ \tilde{f}_0\right] = p_*\left(\left[\tilde{f}_0\right]\right)$, $f_0 = p \circ \tilde{f}_0$ אז $f_0 \simeq 1_{x_0}$. תהי F הומוטופיה בין f_0 ל 1_{x_0}, לפי הערה 115 יש הרמה יחידה $\tilde{F}$ של F. $\tilde{F}$ היא הומוטופיה מ $\tilde{f}_0$ אל $1_{\tilde{x}_0}$, למה דווקא ל $1_{\tilde{x}_0}$? כי זו ההרמה היחידה של 1_{x_0} ללולאה ב $\tilde{X}$ עם יחוס ב $\tilde{x}_0$. לכן $\tilde{f}_0 \simeq 1_{\tilde{x}_0}$ כלומר $\left[\tilde{f}_0\right] = e$, אז p_* חח"ע כנדרש.

2. תחילה נוכיח שקיום של הרמה שהיא לולאה לא תלוי בבחירת הנציג של מחלקת ההומוטופיה. תהי מחלקת ההומוטופיה $[f] \in \pi_1\left(X, x_0\right)$, נניח שיש נציג $g \simeq f$ שיש לו הרמה $\tilde{g}$ שהיא לולאה ב $\tilde{X}$ ביחס ל $\tilde{x}_0$. נוכיח שגם ל f יש הרמה שהיא לולאה. ניקח הומוטופיה H מ g ל f, כלומר $h_0 = g$ ו $h_1 = f$. לפי הערה 115 יש ל H הרמה יחידה $\tilde{H}$ הנקבעת על ידי $\tilde{g}$, כלומר $\tilde{H}\left(s, 0\right) = \tilde{h}_0\left(s\right) = \tilde{g}\left(s\right)$. $\tilde{h}_1$ היא הרמה של $h_1 = f$, לפי הערה 115 העובדה ש $\tilde{g} = \tilde{h}_0$ היא לולאה גוררת שגם $\tilde{f} = \tilde{h}_1$ היא לולאה.

עכשיו נחשב את התמונה של p_*. אם ל f לולאה ב x_0, עם הרמה $\tilde{f}$ שהיא לולאה ביחס ל $\tilde{x}_0$, כלומר $f = p \circ \tilde{f}$. אזי $p_*\left(\left[\tilde{f}\right]\right) = \left[p \circ \tilde{f}\right] = [f]$ לכן $[f] \in \operatorname{Im}p_*$ כנדרש. לכיוון השני נניח כי $[f] \in \operatorname{Im}p_*$ ונוכיח שההרמה היחידה $\tilde{f}$ של f היא לולאה ביחס ל $\tilde{x}_0$. $[f] \in \operatorname{Im}p_*$ אז קיים $[\tilde{g}] \in \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)$ כך ש $[f] = p_*\left([\tilde{g}]\right) = [p \circ \tilde{g}]$. נסמן $g = p \circ \tilde{g}$ אז $\tilde{g}$ היא ההרמה היחידה של g. בגלל ש $f \simeq g$ וההרמה של g ($\tilde{g}$) היא לולאה ביחס ל $\tilde{x}_0$, והוכחנו שקיום של הרמה שהיא לולאה לא תלוי בנציגי מחלקת ההומוטופיה, נקבל שגם ל f יש הרמה היא לולאה ביחס ל x_0. מ.ש.ל. □

דוגמה 117. $X = S^1 = \tilde{X}$, נסתכל על העתקת הכיסוי $p : S^1 \to S^1$ שמוגדרת לפי $p\left(z\right) = z^k$. אזי $p_*\left(\left[e^{2\pi int}\right]\right) = \left[e^{2\pi iknt}\right]$, אם נסמן $\pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z}$ אז $p_*\left(n\right) = kn$. אכן $p_* : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ ו $\operatorname{Im}p_* = k\mathbb{Z}$.

טענה 118. יהי $\left(\tilde{X}, p\right)$ מרחב כיסוי של X, אם X קשיר אז p על.

הוכחה. נניח בשלילה כי p לא על, ונמצא פירוק של X לשתי קבוצות פתוחות. נוכיח ש $p\left(\tilde{X}\right)$ פתוחה, יהי $x \in p\left(\tilde{X}\right)$ אז $p^{-1}\left(x\right)$ לא ריקה. תהי $x \in U \subseteq X$ סביבה מכוסה היטב של x, נוכיח כי $U \subseteq p\left(\tilde{X}\right)$. לפי ההגדרה $p^{-1}\left(U\right) = \cup_\alpha V_\alpha$, $\emptyset \neq p^{-1}\left(x\right) \subseteq p^{-1}\left(U\right)$ אז האיחוד לא ריק. כלומר קיימת $\tilde{X} \supseteq V_\alpha \neq \emptyset$ פתוחה כך ש $p : V_\alpha \xrightarrow{\sim} U$. מכאן $U \subseteq p\left(V_\alpha\right) \subseteq p\left(\tilde{X}\right)$, הוכחנו כי $p\left(\tilde{X}\right)$ פתוחה. עכשיו נוכיח ש $X \setminus p\left(\tilde{X}\right)$ גם פתוחה, יהי $x \in X \setminus p\left(\tilde{X}\right)$. תהי $x \in U \subseteq X$ סביבה מכוסה היטב של x, נניח בשלילה כי $p^{-1}\left(U\right) \neq \emptyset$. אז קיימת $V_\alpha \subseteq \tilde{X}$ פתוחה כך ש $p : V_\alpha \xrightarrow{\sim} U$, בפרט קיים $v \in V_\alpha$ כך ש $p\left(v\right) = x$, בסתירה ל $x \in X \setminus p\left(\tilde{X}\right)$. אזי $p^{-1}\left(U\right) = \emptyset$ כלומר $U \subseteq X \setminus p\left(\tilde{X}\right)$, לכן $X \setminus p\left(\tilde{X}\right)$ פתוחה. $X = p\left(\tilde{X}\right) \cup \left(X \setminus p\left(\tilde{X}\right)\right)$ בסתירה לקשירות של X, מכאן $p\left(\tilde{X}\right) = X$ כלומר p על. □

טענה 119. יהי X קשיר ו $\left(\tilde{X}, p\right)$ מרחב כיסוי של X. אזי $\left|p^{-1}\left(x\right)\right|$ קבוע לכל $x \in X$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $f : X \to \left|\tilde{X}\right|^+$ לפי $f\left(x\right) = \left|p^{-1}\left(x\right)\right|$, נוכיח כי f קבועה מקומית ובגלל ש X קשיר נקבל כי f קבועה. יהי $x \in X$ ותהי $x \in U \subseteq X$ סביבה מכוסה היטב, אזי $p^{-1}\left(U\right) = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$ איחוד זר. יהי $u \in U$ נוכיח כי $|A| = \left|p^{-1}\left(u\right)\right|$. לכל $\alpha \in A$ מתקיים $p : V_\alpha \xrightarrow{\sim} U$, אזי לכל $\alpha \in A$ קיים $v_\alpha \in V_\alpha$ יחיד כך ש $p\left(v_\alpha\right) = u$, כלומר $|A| \leq \left|p^{-1}\left(u\right)\right|$. מצד שני $p^{-1}\left(u\right) \subseteq p^{-1}\left(U\right) = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$, אז כל $\tilde{u} \in p^{-1}\left(u\right)$ הוא מהצורה $\tilde{u} = v_\alpha$, לכן $\left|p^{-1}\left(u\right)\right| = |A|$. זה נכון לכל $u \in U$ אז f קבועה על U שהיא סביבה של x, כלומר f קבועה מקומית.

נוכיח שפונקציה קבועה מקומית על מרחב קשיר היא קבועה. נניח בשלילה שקיימים $\lambda < \kappa$ ב $\operatorname{Im}f$. נגדיר $O = \{x \in X |\, f\left(x\right) \leq \kappa\}$ ו $P = \{x \in X |\, f\left(x\right) > \kappa\}$, הקבוצות האלה לא ריקות לפי ההנחה, וברור שהן זרות. יהי $x \in O$, קיימת סביבה U של x שבה f קבועה, כלומר $U \subseteq O$ אז O פתוחה. באותו האופן P פתוחה, אבל $X = O \cup P$ בסתירה לקשירות. □

הגדרה 120. יהי X קשיר ו $\left(\tilde{X}, p\right)$ מרחב כיסוי של X. הדרגה של $\tilde{X}$ מוגדרת להיות $\deg\left(\tilde{X}\right) = \left|p^{-1}\left(x\right)\right|$.

דוגמה 121. בדוגמה האחרונה עם $X=\tilde{X}=S^{1}$ ו $p\left(z\right)=z^{n}$, הדרגה של $\tilde{X}$ היא n.

טענה 122. יהי X קשיר ו $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי. נניח כי $\tilde{X}$ קשיר מסילתית (אז גם X קשיר מסילתית כי p רציפה ועל) אזי:

$$\deg\left(\tilde{X}\right)=\left[\pi_{1}\left(X,x_{0}\right):p_{*}\left(\pi_{1}\left(\tilde{X},\tilde{x}_{0}\right)\right)\right]$$

הוכחה. נסמן $G=\pi_{1}\left(X,x_{0}\right)$ ו $H=p_{*}\left(\pi_{1}\left(\tilde{X},\tilde{x}_{0}\right)\right)$. אנחנו לא יודעים אם H נורמלית אז G/H זו סתם קבוצה. נגדיר $f:G/H\to p^{-1}\left(x_{0}\right)$ לפי:

$$f\left(\left[g\right]H\right)=\tilde{g}\left(1\right)$$

כאשר $\tilde{g}$ היא הרמה של הלולאה g. נוכיח שההגדרה לא תלויה בנציגים. אם $\left[h\right]\in H$ אז $\tilde{h}\cdot\tilde{g}$ הרמה של $h\cdot g$. נעיר ש $\tilde{h}\cdot\tilde{g}$ מוגדרת כי $\tilde{h}$ לולאה עם יחוס $\tilde{x}_{0}$, מכיוון ש $\left[h\right]\in H=\mathrm{Im}p_{*}$ וטענה 116. כמובן ש $\tilde{h}\cdot\tilde{g}\left(1\right)=\tilde{g}\left(1\right)$ אז ההגדרה טובה. נוכיח ש f חח"ע. יהיו $\left[g_{1}\right],\left[g_{2}\right]\in G$ כך ש $\tilde{g}_{1}\left(1\right)=\tilde{g}_{2}\left(1\right)$, נרצה להוכיח ש $\left[g_{1}\right]H=\left[g_{2}\right]H$. אז צריך להוכיח:

$$\left[g_{1}\cdot\overline{g}_{2}\right]=\left[g_{1}\right]\cdot\left[g_{2}\right]^{-1}\in H=\mathrm{Im}p_{*}$$

לפי טענה 116 $\left[g_{1}\cdot\overline{g}_{2}\right]\in\mathrm{Im}p_{*}$ אם ורק אם יש הרמה שהיא לולאה ביחס ל $\tilde{x}_{0}$. $\tilde{g}_{1}\cdot\tilde{\overline{g}}_{2}$ היא הרמה של $g_{1}\cdot\overline{g}_{2}$, למה היא לולאה ביחס ל $\tilde{x}_{0}$? איל לא הסביר.

נוכיח ש f על. תהי $y\in p^{-1}\left(x_{0}\right)$, $\tilde{X}$ קשיר מסילתית אז יש מסילה $\tilde{g}:I\to\tilde{X}$ בין $\tilde{x}_{0}$ ל y. נגדיר $g=p\circ\tilde{g}$ לולאה ב X ביחס ל x_{0}. נקבל ש $\tilde{g}$ הרמה של g ואז $f\left(\left[g\right]H\right)=\tilde{g}\left(1\right)=y$ כנדרש. $\square$

הערה 123. $\tilde{\overline{g}}\neq\overline{\tilde{g}}$.

הגדרה 124. מ"ט X נקרא קשיר מסילתית מקומית אם יש בסיס של סביבות קשירות מסילתית, כלומר לכל סביבה $x\in U\subseteq X$ יש סביבה פתוחה $x\in V\subseteq U$ שהיא קשירה מסילתית.

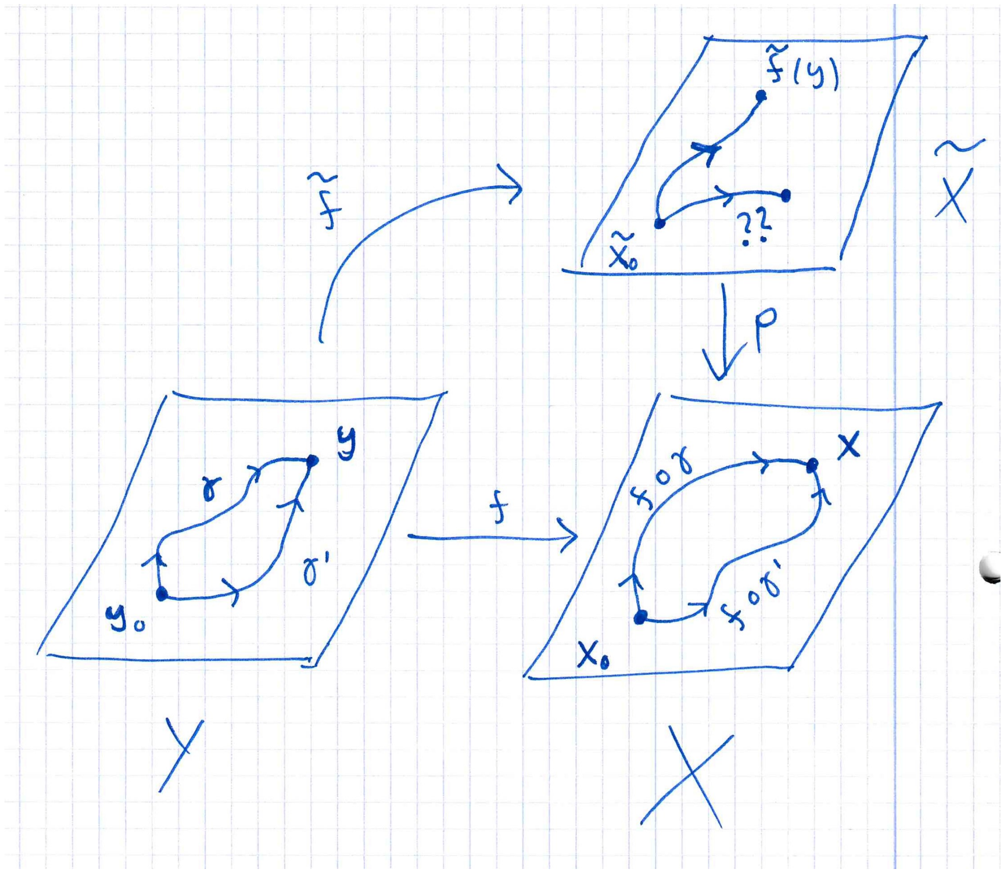
משפט 125. קריטריון ההרמה

יהי $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי של X, ויהיה Y מ"ט קשיר מסילתית וגם קשיר מסילתית מקומית. תהי $f:\left(Y,y_{0}\right)\to\left(X,x_{0}\right)$ רציפה, אזי קיימת הרמה $\tilde{f}:\left(Y,y_{0}\right)\to\left(\tilde{X},\tilde{x}_{0}\right)$ אם ורק אם $f_{*}\left(\pi_{1}\left(Y,y_{0}\right)\right)\subseteq p_{*}\left(\pi_{1}\left(\tilde{X},\tilde{x}_{0}\right)\right)$.

הוכחה. נניח שקיימת הרמה $\tilde{f}$ כנ"ל, ונוכיח כי $f_{*}\left(\pi_{1}\left(Y,y_{0}\right)\right)\subseteq p_{*}\left(\pi_{1}\left(\tilde{X},\tilde{x}_{0}\right)\right)$. $f=p\circ\tilde{f}$ אז $f_{*}=p_{*}\circ\tilde{f}_{*}$, לכן:

$$f_{*}\left(\pi_{1}\left(Y,y_{0}\right)\right)=p_{*}\circ\tilde{f}_{*}\left(\pi_{1}\left(Y,y_{0}\right)\right)\subseteq p_{*}\left(\pi_{1}\left(\tilde{X},\tilde{x}_{0}\right)\right)$$

עכשיו נניח כי $f_{*}\left(\pi_{1}\left(Y,y_{0}\right)\right)\subseteq p_{*}\left(\pi_{1}\left(\tilde{X},\tilde{x}_{0}\right)\right)$, ונוכיח שקיימת הרמה $\tilde{f}$. תהי $y\in Y$ רוצים להגדיר את $\tilde{f}$ כך ש $\tilde{f}\left(y\right)\in p^{-1}\left(f\left(y\right)\right)$. נבחר מסילה γ ב Y מ y_{0} אל y. אזי $f\circ\gamma$ מסילה ב X מ x_{0}, נסמן את נקודת הסיום $x=f\circ\gamma\left(1\right)$. $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי של X, אז יש ל $f\circ\gamma$ הרמה יחידה $\widetilde{\left(f\circ\gamma\right)}$ ב $\tilde{X}$ המתחילה ב $\tilde{x}_{0}$. נגדיר $\tilde{f}\left(y\right):=\widetilde{\left(f\circ\gamma\right)}\left(1\right)$ ונוכיח שההגדרה לא תלויה בבחירת המסילה γ.



תהי γ' מסילה מ y_0 אל y. ל $f\circ\gamma'$ יש הרמה יחידה $\widetilde{(f\circ\gamma')}$ ב $\tilde{X}$ המתחילה ב $\tilde{x}_0$, נסמן $\tilde{x}=\widetilde{(f\circ\gamma')}(1)$ צריך להוכיח כי $\tilde{f}(y)=\tilde{x}$. γ' מסילה מ y_0 אל y, אז $f\circ\gamma'$ מסילה מ x_0 אל x, לכן $\tilde{x}=\widetilde{(f\circ\gamma')}(1)\in p^{-1}(x)$. $f\circ\gamma$ מסילה מ x_0 אל x, אז $\overline{(f\circ\gamma)}$ היא מסילה מ x אל x_0. לפי מסקנה 30 ל $\overline{(f\circ\gamma)}$ יש הרמה יחידה למסלול $\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}$ המתחיל ב $\tilde{x}$. ביחד $\widetilde{(f\circ\gamma')}\cdot\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}$ מסלול ב $\tilde{X}$ שמתחיל ב $\tilde{x}_0$, נרצה להוכיח שהוא נגמר ב $\tilde{x}_0$. נשים לב שהמסלול הזה הוא הרמה של המסלול הבא:

$$h_0 := (f\circ\gamma')\cdot\overline{(f\circ\gamma)} = f\circ(\gamma'\cdot\overline{\gamma})$$

h_0 לולאה ב X ביחס ל x_0. לפי הנתון:

$$[h_0]\in f_*(\pi_1(Y,y_0))\subseteq p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)\right)$$

אזי לפי טענה 116 ל h_0 יש הרמה יחידה $\tilde{h}_0$ ב $\tilde{X}$ המתחילה ב $\tilde{x}_0$, ו $\tilde{h}_0$ היא לולאה ביחס ל $\tilde{x}_0$. מהיחידות $\tilde{h}_0=(f\tilde{\circ}\gamma')\cdot\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}$ כלומר $\widetilde{(f\circ\gamma')}\cdot\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}$ לולאה ביחס ל $\tilde{x}_0$ כמו שרצינו. מכאן:

$$\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}(1)=\widetilde{(f\circ\gamma')}\cdot\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}(1)=\tilde{x}_0$$

אזי $\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}$ מסלול ב $\tilde{X}$ מ $\tilde{x}$ אל $\tilde{x}_0$, לכן $\overline{\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}}$ מסלול ב $\tilde{X}$ מ $\tilde{x}_0$ אל $\tilde{x}$. נשים לב כי:

$$p\circ\overline{\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}}\left(s\right)=p\circ\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}\left(1-s\right)=\overline{(f\circ\gamma)}\left(1-s\right)=f\circ\gamma\left(s\right)$$

כלומר $\overline{\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}}$ הרמה של $f\circ\gamma$. אבל $\widetilde{(f\circ\gamma)}$ היא ההרמה היחידה של $f\circ\gamma$ המתחילה ב $\tilde{x}_0$, אז $\overline{\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}}=\widetilde{(f\circ\gamma)}$. לבסוף:

$$\tilde{f}\left(y\right)=\widetilde{(f\circ\gamma)}\left(1\right)=\overline{\widetilde{\overline{(f\circ\gamma)}}}\left(1\right)=\tilde{x}=\widetilde{(f\circ\gamma')}\left(1\right)$$

הוכחנו שהגדרת $\tilde{f}$ לא תלויה בבחירת המסילה γ. נותר לנו להוכיח ש $\tilde{f}$ רציפה. תהי $y\in Y$ נוכיח ש $\tilde{f}$ רציפה ב y. יש $f\left(y\right)\in U\subseteq X$ סביבה מכוסה היטב, $\tilde{f}\left(y\right)\in p^{-1}\left(f\left(y\right)\right)\subseteq p^{-1}\left(U\right)$. נבחר מ $p^{-1}\left(U\right)=\cup\tilde{U}_\alpha$ קבוצה $\tilde{U}$ כך ש $\tilde{f}\left(y\right)\in\tilde{U}$, ונקבל כי $p\mid_{\tilde{U}}:\tilde{U}\xrightarrow{\sim}U$ הומיאו'. נתון ש f רציפה אז $f^{-1}\left(U\right)$ היא סביבה של y. נתון ש Y קשיר מסילתית מקומית, אז קיימת סביבה $y\in V\subseteq f^{-1}\left(U\right)$ קשירה מסילתית.

נוכיח כי על V מתקיים $\tilde{f}\mid_V=\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}\circ f$. ניקח מסילה γ ב Y מ y_0 אל y. יהי $y'\in V$ ניקח מסילה β ב V מ y אל y'. נתבונן במסילה:

$$f\circ\left(\gamma\cdot\beta\right)=\left(f\circ\gamma\right)\cdot\left(f\circ\beta\right)$$

מכיוון שהמסילה β נמצאת ב V ו $f\left(V\right)\subseteq U$, נקבל כי $\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}\left(f\circ\beta\right)$ היא מסילה מוגדרת היטב. נסמן $\widetilde{(f\circ\beta)}=\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}\left(f\circ\beta\right)$, זו הרמה של $f\circ\beta$ המתחילה ב:

$$\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}\left(f\circ\beta\left(0\right)\right)=\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}\left(f\left(y\right)\right)=\tilde{f}\left(y\right)$$

תהי $\widetilde{(f\circ\gamma)}$ ההרמה היחידה של $f\circ\gamma$ המתחילה ב $\tilde{x}_0$. אז אפשר להכפיל את המסילות:

$$\widetilde{(f\circ\gamma)}\cdot\widetilde{(f\circ\beta)}$$

כי לפי ההגדרה של $\tilde{f}$ מתקיים $\tilde{f}\left(1\right)=\widetilde{(f\circ\gamma)}\left(1\right)$. המסילה $\widetilde{(f\circ\gamma)}\cdot\widetilde{(f\circ\beta)}$ היא הרמה של $f\circ\left(\gamma\cdot\beta\right)=\left(f\circ\gamma\right)\cdot\left(f\circ\beta\right)$, בנוסף $\widetilde{(f\circ\gamma)}\cdot\widetilde{(f\circ\beta)}$ מתחילה ב $\tilde{x}_0$. $\gamma\cdot\beta$ זו מסילה מ y_0 אל y', תהי $f\circ\widetilde{(\gamma\cdot\beta)}$ ההרמה היחידה של $f\circ\left(\gamma\cdot\beta\right)$ המתחילה ב $\tilde{x}_0$. מהיחידות נקבל $f\circ\widetilde{(\gamma\cdot\beta)}=\widetilde{(f\circ\gamma)}\cdot\widetilde{(f\circ\beta)}$. אז לפי ההגדרה של $\tilde{f}$ מתקיים:

$$\tilde{f}\left(y'\right)=f\circ\widetilde{(\gamma\cdot\beta)}\left(1\right)=\widetilde{(f\circ\gamma)}\cdot\widetilde{(f\circ\beta)}\left(1\right)=\widetilde{(f\circ\beta)}\left(1\right)=\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}\left(f\circ\beta\left(1\right)\right)=\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}\left(f\left(y'\right)\right)$$

הוכחנו כי על V מתקיים $\tilde{f}\mid_V=\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}\circ f$. f רציפה ו $\left(p\mid_{\tilde{U}}\right)^{-1}$ גם רציפה, לכן $\tilde{f}\mid_V$ רציפה על V. נזכור ש V הינה סביבה של y אז $\tilde{f}$ רציפה ב y, זה נכון לכל $y\in Y$ אז $\tilde{f}$ רציפה על כל Y.

מ.ש.ל. $\square$

טענה 126. יהי $\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)$ מרחבי כיסוי של X, ו Y מ"ט קשיר. תהי $f:Y\to X$ רציפה, אם $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2:Y\to\tilde{X}$ הרמות רציפות של f המסכימות לפחות על נקודה אחת, אז הן שוות.

הוכחה. נגדיר את O להיות קבוצת הנקודות עליהן $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$, ו P להיות המשלים, נוכיח ששתיהן פתוחות. תיהי $y\in Y$ ו $f(y)\in U\subseteq X$ סביבה מכוסה היטב. נשים לב כי $\tilde{f}_i(y)\in p^{-1}(f(y))\subseteq p^{-1}(U)$, יהיו V_1,V_2 פתוחות מתוך $p^{-1}(U)=\cup V_\alpha$, כך ש $\tilde{f}_i(y)\in V_i$. נתון ש $\tilde{f}_i$ רציפות, אז קיימת $y\in N\subseteq Y$ סביבה כך ש $\tilde{f}_i(N)\subseteq V_i$.

אם $y\in P$ אז $\tilde{f}_1(y)\neq\tilde{f}_2(y)$, לכן $V_1\neq V_2$. אבל $p^{-1}(U)=\cup V_\alpha$ איחוד זר אז $V_1\cap V_2=\emptyset$, ומכיוון ש $\tilde{f}_i(N)\subseteq V_i$ נקבל כי $\tilde{f}_1\neq\tilde{f}_2$ על כל N. כלומר $y\in N\subseteq P$ אז P פתוחה.

אם $y\in O$ אז $\tilde{f}_1(y)=\tilde{f}_2(y)$, לכן $\emptyset\neq\left\{\tilde{f}_1(y)\right\}\subseteq V_1\cap V_2$. אבל $p^{-1}(U)=\cup V_\alpha$ איחוד זר אז $V_1=V_2$. נזכור ש $p:V_\alpha\xrightarrow{\sim}U$ לכל α, אז בפרט $p:V_1\xrightarrow{\sim}U$. לכל $n\in N$ מתקיים $\tilde{f}_i(n)\in V_1$, לכן $f(n)=p|_{V_1}\circ\tilde{f}_i(n)$ ואז $\tilde{f}_i(n)=(p|_{V_1})^{-1}\circ f(n)$. כלומר $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$ על N, אז $y\in N\subseteq O$ ו O פתוחה.

קיבלנו כי $Y=O\cup P$, אבל נתון ש Y קשיר. בנוסף נתון ש O לא ריקה אז בהכרח $P=\emptyset$, כלומר $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$ על כל Y. $\square$

4.2 איפיון של מרחבי כיסוי

בפרק זה X מ"ט קשיר מסילתית מקומית, במקרה כזה מרחב כיסוי $\tilde{X}$ תמיד קשיר מסילתית מקומית. בנוסף נניח כי X קשיר (ממילא נרצה להניח ש $\tilde{X}$ קשיר ואז אם p על נקבל ש X קשיר), באופן שקול אפשר להניח ש X קשיר מסילתית (עבור מ"ט קשיר מסילתית מקומית, להיות קשיר שקול ללהיות קשיר מסילתית).

נוכיח שיש התאמה בין מרחבי כיסוי קשירים של X לבין תת חבורות של החבורה היסודית של X, ההתאמה נתונה על ידי P*

בפרט נרצה להראות שיש מרחבי כיסוי כך ש $e = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}\right)\right)$ בהנחה של $\tilde{X}$ קשיר. כלומר $\pi_1\left(\tilde{X}\right)$ צריכה להיות טריוויאלית, כלומר $\tilde{X}$ פשוט קשר.

הגדרה 127. נאמר ש X הוא פשוט קשר תת מקומית (באנגלית SLSC= SemiLocally Simply Connected), אם לכל $x \in X$ יש סביבה $x \in U \subseteq X$ פתוחה כך שההומומורפיזם $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ המושרה מההכלה הוא טריוויאלי. כלומר כל לולאה ב U עם יחוס ב x, הומוטופית ב X ללולאה הטריוויאלית.

דוגמה 128. אם X הוא פשוט קשר מקומית, אז הוא גם SLSC .

הערה 129. אם ל X יש מרחב כיסוי פשוט קשר, אז הוא בהכרח SLSC . לכן נוסיף את ההנחה הזו ל X (מה?).

הוכחה. יש כמה בעיות בהוכחה שלי, אבל הוא לא הוכיח בהרצאה אז אין מה לעשות.

נרצה להשתמש במשפט 125. נסמן ב $\left(\tilde{X},p\right)$ את מרחב הכיסוי של X שהוא פשוט קשר, כלומר $e = \pi_1\left(\tilde{X}\right)$. יהי $x \in X$ קיימת סביבה $x \in U \subseteq X$ שהיא מכוסה היטב, קיימת $V_1 \subseteq \tilde{X}$ כך ש $p : V_1 \xrightarrow{\sim} U$. נגדיר $f : U \to X$ להיות פשוט הכלה, ברור ש f רציפה. נגדיר הרמה $\tilde{f} : U \to \tilde{X}$ לפי $\tilde{f} := \left(p\mid_{V_1}\right)^{-1} \circ f$, ברור ש $\tilde{f}$ היא הרמה רציפה של f. לפי משפט 125 (לא יודע אם כל התנאים מתקיימים):

$$f_*\left(\pi_1\left(Y,y_0\right)\right) \subseteq p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)\right) = p_*\left(e\right) = e$$

ההומומורפיזם המושרה f_* מההכלה f הוא טריוויאלי, אז X הוא פשוט קשר תת מקומית כנדרש. □

למה 130. יהי X מ"ט קשיר מסילתית מקומית וגם SLSC . תהי $\mathcal{U}$ משפחת כל הקבוצות הפתוחות O, הקשירות מסילתית, עבורן ההעתקה $i : \pi_1(O) \to \pi_1(X)$ טריוויאלית. אזי $\mathcal{U}$ בסיס לטופולוגיה של X.

הוכחה. דבר ראשון נוכיח שאם עבור נקודה אחת $x_0 \in O$ מתקיים ש $i_{x_0} : \pi_1(O,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ טריוויאלית, אז לכל $x_1 \in O$ ההעתקה i_{x_1} היא טריוויאלית. נזכיר ש $e : O \to X$ הכלה ו i_{x_0} מוגדרת לפי $i_{x_0}([f]) = [e\circ f]$, כלומר $i_{x_0} = e_*$. ניקח מסילה h בתוך O מ x_0 ל x_1 אזי $\beta_h : \pi_1(O,x_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(O,x_0)$ מוגדר לפי $\beta_h([f]) = \left[h\cdot f\cdot \overline{h}\right]$. נטען ש $i_{x_1} = \beta_{\overline{e\circ h}} \circ i_{x_0} \circ \beta_h$, תהי מחלקה $[f] \in \pi_1(O,x_1)$ נבדוק:

$$i_{x_0}\circ\beta_h([f]) = i_{x_0}\left(\left[h\cdot f\cdot\overline{h}\right]\right) = \left[e\circ\left(h\cdot f\cdot\overline{h}\right)\right] = \left[(e\circ h)\cdot(e\circ f)\cdot\left(\overline{e\circ h}\right)\right] = \beta_{e\circ h}([e\circ f])$$

לכן:

$$\beta_{\overline{e\circ h}}\circ i_{x_0}\circ\beta_h([f]) = \beta_{\overline{e\circ h}}\circ\beta_{e\circ h}([e\circ f]) = [e\circ f] = i_{x_1}([f])$$

בגלל ש i_{x_0} הוא ההומומורפיזם הטריוויאלי נקבל שגם i_{x_1} טריוויאלי. עכשיו נוכיח ש $\mathcal{U}$ בסיס לטופולוגיה של X, תהי נקודה $x \in X$ ותהי קבוצה פתוחה $x \in U$, צריך למצוא קבוצה פתוחה $O \in \mathcal{U}$ כך ש $x \in O \subseteq U$. נתון ש X הוא SLSC אזי יש קבוצה פתוחה $x \in V \subseteq X$ כך ש $\pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$ טריוויאלי. גם הקבוצה $x \in U \cap V$ היא פתוחה. נתון ש X קשיר מסילתית מקומית אזי יש קבוצה פתוחה קשירה מסילתית $x \in O \subseteq U \cap V$. נשים לב שההעתקה $\pi_1(O,x) \to \pi_1(X,x)$ היא טריוויאלית, כי היא שווה להרכבה $\pi_1(O,x) \to \pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$. הוכחנו ש $x \in O \subseteq U$ פתוחה, קשירה מסילתית, וגם $\pi_1(O,x) \to \pi_1(X,x)$ טריוויאלית, אזי $O \in \mathcal{U}$. הוכחנו ש $\mathcal{U}$ אכן בסיס. $\square$

משפט 131. יהי X מ"ט קשיר מסילתית, קשיר מסילתית מקומית, וגם SLSC . אזי יש ל X מרחב כיסוי פשוט קשר.

הוכחה. נגדיר את מרחב הכיסוי להיות אוסף מחלקות ההומוטופיה של מסילות המתחילות ב x_0:

$$\tilde{X} = \{ [\gamma] |\, \gamma : I \to X, \gamma(0) = x_0 \}$$

נגדיר $p : \tilde{X} \to X$ לפי $p([\gamma]) := \gamma(1)$, ההגדרה לא תלויה בבחירת הנציג כי מסילות הומוטופיות נגמרות באותה הנקודה. נתון שהמרחב X הוא קשיר מסילתית אז p על (לא צריך את זה כדי להוכיח שזה מרחב כיסוי. אבל זו בדיקת שפיות לפי טענה 118, והעובדה שמרחב קשיר מסילתית וגם קשיר מסילתית מקומית הוא קשיר).

נרצה להגדיר טופולוגיה על $\tilde{X}$, אנחנו נגדיר אותה דרך בסיס, כלומר נגדיר בסיס והוא ישרה לנו טופולוגיה. בהינתן קבוצה $U \in \mathcal{U}$ ומסילה γ ב X, המתחילה ב x_0 ונגמרת בתוך U, נגדיר:

$$U_{[\gamma]} = \{ [\gamma \cdot \eta] \,|\, \eta \text{ is a path in } U \text{ with } \eta(0) = \gamma(1) \} \subseteq \tilde{X}$$

קל וחומר שההגדרה לא תלויה בבחירת הנציג למחלקת ההומוטופיה. נסמן ב B את קבוצת כל ה $U_{[\gamma]}$ האלה, נוכיח ש B מהווה בסיס לאיזושהי טופולוגיה על $\tilde{X}$. דבר ראשון לכל $[\gamma] \in \tilde{X}$ קיימת קבוצה $U \in \mathcal{U}$ כך ש $\gamma(1) \in U$, מכיוון ש $\mathcal{U}$ בסיס ל X ולכן מכסה אותו. עכשיו $[\gamma] = [\gamma \cdot 1_{\gamma(1)}] \in U_{[\gamma]}$ אז B באמת מכסה את $\tilde{X}$. נשאר להוכיח שלכל $U_{[\gamma_1]}, V_{[\gamma_2]} \in B$ ונקודה בחיתוך $[\gamma_3] \in U_{[\gamma_1]} \cap V_{[\gamma_2]}$ קיימת $W_{[\gamma_4]} \in B$ כך ש $[\gamma_3] \in W_{[\gamma_4]} \subseteq U_{[\gamma_1]} \cap V_{[\gamma_2]}$. לפני ההוכחה נוכיח טענת עזר (מעכשיו כל מסילה המסומנת באות γ מתחילה ב x_0):

- יהיו $U_{[\gamma]}, U_{[\gamma']} \in B$, אם $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ אזי $U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$. הוכחה: נתון $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ אז יש מסילה $\eta \in U$ כך ש $\eta(0) = \gamma(1)$, ומתקיים $[\gamma'] = [\gamma] \cdot [\eta]$. תהי מסילה $[\gamma'] \cdot [\eta'] \in U_{[\gamma']}$ אזי $[\gamma'] \cdot [\eta'] = [\gamma] \cdot [\eta \cdot \eta'] = U_{[\gamma]}$, נשים לב כי $\eta \cdot \eta'$ מסילה ב U וגם $\eta \cdot \eta'(0) = \eta(0) = \gamma(1)$. מצד שני תהי מסילה $[\gamma] \cdot [\eta'] \in U_{[\gamma]}$ אזי:

$$[\gamma] \cdot [\eta'] = [\gamma] \cdot [\eta \cdot \overline{\eta}] \cdot [\eta'] = [\gamma'] \cdot [\overline{\eta} \cdot \eta'] \in U_{[\gamma']}$$

נשים לב כי $\overline{\eta} \cdot \eta'$ מסילה ב U וגם $\gamma'(1) = \gamma \cdot \eta(1) = \eta(1) = \overline{\eta}(0) = \overline{\eta} \cdot \eta'(0)$. הוכחנו ש $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$ כנדרש.

נסיים את ההוכחה ש B בסיס, תהיינה $U_{[\gamma_1]}, V_{[\gamma_2]} \in B$ ו $[\gamma_3] \in U_{[\gamma_1]} \cap V_{[\gamma_2]}$. $[\gamma_3] \in U_{[\gamma_1]}$ אז לפי טענת העזר $U_{[\gamma_3]} = U_{[\gamma_1]}$, $[\gamma_3] \in V_{[\gamma_2]}$ אז לפי טענת העזר $V_{[\gamma_3]} = V_{[\gamma_2]}$. $\mathcal{U}$ בסיס של X ו $\gamma_3(1) \in U \cap V$ כאשר $U, V \in \mathcal{U}$. אזי קיימת קבוצה $W \in \mathcal{U}$ כך ש $\gamma_3(1) \in W \subseteq U \cap V$, לכן $W_{[\gamma_3]}$ מוגדר. ברור ש $W_{[\gamma_3]} \subseteq U_{[\gamma_3]} = U_{[\gamma_1]}$ וגם $W_{[\gamma_3]} \subseteq V_{[\gamma_3]} = V_{[\gamma_2]}$, ביחד $W_{[\gamma_3]} \subseteq U_{[\gamma_1]} \cap V_{[\gamma_2]}$. בנוסף $[\gamma_3] = [\gamma_3 \cdot 1_{\gamma_3(1)}] \in W_{[\gamma_3]}$ וזה מסיים את ההוכחה ש B בסיס.

הצעד הבא הוא להוכיח ש $\left(\tilde{X},p\right)$ הוא באמת מרחב כיסוי של X. B בסיס של $\tilde{X}$ אז מספיק להוכיח ש $p|_{U_{[\gamma]}}: U_{[\gamma]} \to X$ רציפה לכל $U_{[\gamma]} \in B$. תיהיה $U_{[\gamma]} \in B$, נתחיל מלהוכיח כמה תכונות של $p|_{U_{[\gamma]}}$. נשים לב שלכל $[\gamma\cdot\eta] \in U_{[\gamma]}$ מתקיים $p([\gamma\cdot\eta]) = \gamma\cdot\eta(1) = \eta(1) \in U$, כלומר $p\left(U_{[\gamma]}\right) \subseteq U$. אפילו $p\left(U_{[\gamma]}\right) = U$ בגלל ש $U \in \mathcal{U}$ ולכן קשיר מסילתית. הוכחנו ש $p|_{U_{[\gamma]}}: U_{[\gamma]} \to U$ היא על, נוכיח שהיא חח"ע, יהיו $[\gamma\cdot\eta'], [\gamma\cdot\eta] \in U_{[\gamma]}$ כך ש:

$$\eta(1) = p|_{U_{[\gamma]}}([\gamma\cdot\eta]) = p|_{U_{[\gamma]}}([\gamma\cdot\eta']) = \eta'(1)$$

אז המכפלה $\eta\cdot\overline{\eta'}$ מוגדרת. נשים לב ש $\eta\cdot\overline{\eta'}$ לולאה ב U ביחס לנקודה $\gamma(1)$. $U\in\mathcal{U}$ אז לפי הגדרת $\mathcal{U}$ ההעתקה $i:\pi_1(U)\to\pi_1(X)$ היא טריוויאלית. $\eta\cdot\overline{\eta'}$ לולאה ב U אז מחלקת ההומוטופיה שלה ב X היא טריוויאלית $[\eta\cdot\overline{\eta'}] = 1$. מכאן $[\eta] = \left[\overline{\eta'}\right]^{-1} = [\eta']$ ולכן $[\gamma\cdot\eta] = [\gamma\cdot\eta']$, זה מוכיח ש $p|_{U_{[\gamma]}}$ חח"ע.

עכשיו נוכיח ש $p|_{U_{[\gamma]}}: U_{[\gamma]}\to U$ רציפה, אפילו נוכיח ש $p|_{U_{[\gamma]}}: U_{[\gamma]}\to U$ היא הומיאומורפיזם. כדי להוכיח שזה הומיאו' נראה כי $p|_{U_{[\gamma]}}$ משרה את ההתאמה ה 1-1 הבאה:

$$\{V\in\mathcal{U} \mid V\subseteq U\} \underset{p|_{U_{[\gamma]}}\left(V_{[\gamma']}\right) \mapsfrom V_{[\gamma']}}{\overset{V\mapsto \left(p|_{U_{[\gamma]}}\right)^{-1}(V)}{\rightleftarrows}} \left\{V_{[\gamma']}\subseteq U_{[\gamma]}\right\}$$

בגלל שהמשפחה $\{V\in\mathcal{U}\mid V\subseteq U\}$ היא בסיס לטופולוגיה של U, והמשפחה $\left\{V_{[\gamma']}\subseteq U_{[\gamma]}\right\}$ היא בסיס לטופולוגיה של $U_{[\gamma]}$, זה יוכיח ש $p|_{U_{[\gamma]}}: U_{[\gamma]}\to U$ היא הומיאומורפיזם.

נתחיל מלהוכיח שכל אחד מהחצים הוא באמת לתוך הקבוצה שאליה הוא מכוון. מקודם הוכחנו כי $p\left(U_{[\gamma]}\right) = U$, באותו האופן לכל $V_{[\gamma']}\subseteq U_{[\gamma]}$ מתקיים $p|_{U_{[\gamma]}}\left(V_{[\gamma']}\right) = V$. מהגדרת B מתקיים $V\in\mathcal{U}$, בנוסף נקבל ש $V\subseteq \mathrm{Im}\left(p|_{U_{[\gamma]}}\right) = U$. אז החץ $p|_{U_{[\gamma]}}\left(V_{[\gamma']}\right) \mapsfrom V_{[\gamma']}$ הוא בסדר. נבדוק את החץ $V\mapsto \left(p|_{U_{[\gamma]}}\right)^{-1}(V)$, תהי $V\in\mathcal{U}$ כך $V\subseteq U$. U קשיר מסילתית אז יש מסילה η ב U מ $\gamma(1)$ אל נקודה ב V, נסמן $[\gamma'] := [\gamma\cdot\eta]\in U_{[\gamma]}$. נשים לב ש $V_{[\gamma']}\subseteq U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$, זה נובע מטענת העזר ומהעובדה ש $[\gamma']\in U_{[\gamma]}$. נטען כי $\left(p|_{U_{[\gamma]}}\right)^{-1}(V) = V_{[\gamma']}$. לפי החץ הקודם שבדקנו $p|_{U_{[\gamma]}}\left(V_{[\gamma']}\right) = V$, הוכחנו כבר ש $p|_{U_{[\gamma]}}$ הפיכה בתור פונקציה (כלומר חח"ע ועל) לכן $\left(p|_{U_{[\gamma]}}\right)^{-1}(V) = V_{[\gamma']}$. ההתאמה היא 1-1 כי החצים הופכים אחד את השני, החצים הופכים אחד את השני כי $\left(p|_{U_{[\gamma]}}\right)^{-1}$ היא ההופכית של $p|_{U_{[\gamma]}}$. הוכחנו ש $p|_{U_{[\gamma]}}$ הומיאו' ובפרט רציפה, כמו שטענו מקודם B בסיס אז $p:\tilde{X}\to X$ רציפה.

כדי לסיים את ההוכחה שזה מרחב כיסוי ניקח $x\in X$ ונחפש סביבה מכוסה היטב. $\mathcal{U}$ בסיס של X, אזי יש $U\in\mathcal{U}$ כך ש $x\in U$, נרצה להוכיח ש U מכוסה היטב. X קשיר מסילתית אז לכל נקודה $u\in U$ יש מסילה γ_u ב X מ x_0 אל u, נוכיח ש $p^{-1}(U) = \cup_A U_{[\gamma]}$ כאשר $A = \left\{[\gamma]\in\tilde{X} \,\middle|\, \gamma(1)\in U\right\}$. מצד אחד לכל $u\in U$ מתקיים $[\gamma_u]\in U_{[\gamma_u]}$ לכן $u = p([\gamma_u]) \in p\left(\cup_A U_{[\gamma]}\right)$, כלומר $U\subseteq p\left(\cup_A U_{[\gamma]}\right)$. מצד שני $p\left(U_{[\gamma]}\right)\subseteq U$ לכל $[\gamma]\in I$, אז $U = p\left(\cup_A U_{[\gamma]}\right)$, מכאן $p^{-1}(U) = \cup_A U_{[\gamma]}$. הבעיה שלנו היא שהאיחוד הזה הוא לא זר, אבל אפשר להפוך אותו לאיחוד זר על ידי זריקת קבוצות כפולות. נשים לב שאם החיתוך $U_{[\gamma]}\cap U_{[\gamma']}$ הוא לא זר, כלומר קיימת $[\gamma'']\in U_{[\gamma]}\cap U_{[\gamma']}$, אז לפי טענת העזר ממקודם $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma']}$. זה מוכיח שאחרי שנזרוד את כל הקבוצות הכפולות נקבל איחוד זר. הוכחנו כבר ש $p|_{U_{[\gamma]}}$ הינו הומיאומורפיזם, אז סיימנו להוכיח ש U מכוסה היטב. הוכחנו ש $\left(\tilde{X},p\right)$ הוא מרחב כיסוי של X.

הגענו לחלק האחרון של ההוכחה, נוכיח ש $\tilde{X}$ הוא פשוט קשר. נתחיל מלהוכיח שהוא קשיר מסילתית, תהי נקודה $[\gamma]\in\tilde{X}$ נבחר איזשהו

נציג γ. לכל $t \in I$ נגדיר מסילה $\gamma_t : I \to X$ לפי:

$$\gamma_t(s) = \begin{cases} \gamma(s) & s \le t \\ \gamma(t) & s \ge t \end{cases}$$

נגדיר מסילה $\alpha : I \to \tilde{X}$ לפי $\alpha(t) = [\gamma_t]$ (נעיר שההגדרה של α תלויה בבחירת הנציג γ). נשים לב ש $\alpha(0) = [\gamma_0] = [x_0]$ ו $\alpha(1) = [\gamma_1] = [\gamma]$. כדי להוכיח ש α מסילה צריך להוכיח שהיא רציפה. נקבע $t \in I$ ונוכיח ש α רציפה ב t. B בסיס של $\tilde{X}$ אז מספיק שלכל $\alpha(t) \in U_{[\gamma']} \in B$ קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $t-\epsilon < h < t+\epsilon$ מתקיים $\alpha(h) \in U_{[\gamma']}$. תהי $[\gamma_t] = \alpha(t) \in U_{[\gamma']} \in B$, אז לפי טענת העזר $U_{[\gamma_t]} = U_{[\gamma']}$. $U_{[\gamma_t]} \in B$ אזי $U \in \mathcal{U}$ וגם γ_t נגמרת ב U, כלומר $\gamma(t) = \gamma_t(1) \in U$. $U \in \mathcal{U}$ אז U פתוחה ב X, γ מסילה ב X כלומר היא רציפה, ובפרט רציפה ב t. $\gamma(t) \in U$ אז קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $t-\epsilon < h < t+\epsilon$ מתקיים $\gamma(h) \in U$, נרצה להוכיח ש $\alpha(h) = [\gamma_h] \in U_{[\gamma_t]}$. נעיר שמספיק להוכיח זאת עבור $h > t$, אם אנחנו במקרה $h < t$ ומניחים שהמקרה ההפוך נכון, אז $[\gamma_t] \in U_{[\gamma_h]}$ (מכיוון ש $t-\epsilon < h < t+\epsilon$ גורר $h-\epsilon < t < h+\epsilon$ ואז משתמשים במקרה ההפוך) גורר לפי טענת העזר כי $[\gamma_h] \in U_{[\gamma_t]}$ שזה מה שאנחנו רוצים. לכן אפשר להניח ש $h > t$. נגדיר מסילה $\eta : I \to X$ לפי:

$$\eta(s) = \gamma(t + s(h-t))$$

נשים לב שלכל $s \in I$ מתקיים $t-\epsilon < t + s(h-t) < t+\epsilon$, אזי $\eta(s) \in U$ לכל $s \in I$. בנוסף η רציפה כהרכבה של רציפות, אזי η מסילה ב U מ $\gamma(t)$ אל $\gamma(h)$. נעיר ש $\eta(0) = \gamma(t) = \gamma_t(1)$, נקבל ש $[\gamma_t \cdot \eta] \in U_{[\gamma_t]}$. נשים לב ש $\gamma_t \cdot \eta$ היא בסה"כ רה-פרמטריזציה של γ_h, אז לפי למה 10 יוצא כי $\alpha(h) = [\gamma_h] = [\gamma_t \cdot \eta] \in U_{[\gamma_t]}$. זה מסיים את ההוכחה ש α באמת רציפה ולכן מסילה. הראנו שיש מסילה ב $\tilde{X}$ מ $[x_0]$ לכל נקודה $[\gamma] \in \tilde{X}$, אזי $\tilde{X}$ קשיר מסילתית.

נשים לב שה α הנ"ל היא הרמה של γ אל $\tilde{X}$:

$$p \circ \alpha(t) = p([\gamma_t]) = \gamma_t(1) = \gamma(t)$$

הוכחנו ש α רציפה, אז לפי משפט ההרמה α היא ההרמה הרציפה היחידה של γ המתחילה ב $[x_0]$.

עכשיו נוכיח ש $\pi_1\left(\tilde{X}, [x_0]\right) = 0$, לפי טענה 116 ההעתקה $p_* : \pi_1\left(\tilde{X}, [x_0]\right) \to \pi_1(X, x_0)$ היא חח"ע, אז מספיק להוכיח ש $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, [x_0]\right)\right) = 0$. לפי טענה 116 התמונה $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, [x_0]\right)\right)$ היא בדיוק: קבוצת מחלקות ההומוטופיה של לולאות ב X עם יחוס ב x_0, כך שההרמות שלהן ל $\tilde{X}$ המתחילות ב $[x_0]$ הן לולאות. תהי $[\gamma] \in p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, [x_0]\right)\right)$, כבר ראינו ש $\alpha(t) = [\gamma_t]$ היא ההרמה של γ אל $\tilde{X}$ המתחילה ב $[x_0]$. אז לפי הטענה α היא לולאה, כלומר $[x_0] = \alpha(0) = \alpha(1) = [\gamma]$. הראנו שכל $[\gamma] \in p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, [x_0]\right)\right)$ היא איבר היחידה של החבורה $[x_0]$, כלומר $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, [x_0]\right)\right) = 0$ מ.ש.ל. $\square$

הגדרה 132. יהי X מ"ט קשיר מסילתית וקשיר מסילתית מקומית. מרחב כיסוי $\tilde{X}$ של X, נקרא מרחב כיסוי אוניברסלי אם $\tilde{X}$ פשוט קשר.

טענה 133. יהיו X ו $\left(\tilde{X}, p\right)$ כמו בהגדרה למעלה. אזי לכל כיסוי $\left(\tilde{Y}, q\right)$ קשיר מסילתית של X, קיימת פונקציה רציפה $h : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ יחידה

כך שהדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\exists!h"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[dl, "q"] \\ X & \end{tikzcd}$$

חילופית.

הזוג $\left(\tilde{X},h\right)$ נקרא כיסוי של $\tilde{Y}$ בתור מרחב כיסוי של X.

הוכחה. ניזכר בקריטריון ההרמה 125. ניקח בקריטריון את $\tilde{X}$ להיות $\tilde{Y}$, את Y להיות $\tilde{X}$, ואת f להיות p. לפי הקריטריון קיימת הרמה $\tilde{f}:\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)\to\left(\tilde{Y},\tilde{y}_0\right)$ אם ורק אם $f_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)\right)\subseteq q_*\left(\pi_1\left(\tilde{Y},\tilde{y}_0\right)\right)$. אצלנו $f=p$ אז $f_*=p_*$. נתון לנו ש $\left(\tilde{X},p\right)$ הוא מרחב כיסוי אוניברסלי, כלומר פשוט קשר, אזי:

$$p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)\right)=p_*\left(0\right)=0\subseteq q_*\left(\pi_1\left(\tilde{Y},\tilde{y}_0\right)\right)$$

לכן קיימת הרמה $\tilde{f}:\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)\to\left(\tilde{Y},\tilde{y}_0\right)$, אנחנו נבחר $h=\tilde{f}$. (מה עם יחידות?) $\square$

תרגיל 134. נתונים כמו בטענה הקודמת.

א. הוכיחו כי h כנ"ל היא העתקת כיסוי.

ב. הוכיחו כי $\tilde{Y},\tilde{X},X$ קשירים מסילתית וגם קשירים מסילתית מקומית.

הגדרה 135. נניח ש $\left(\tilde{X}_1,p_1\right)$ ו $\left(\tilde{X}_2,p_2\right)$ הם מרחבי כיסוי של X. נאמר שהמרחבים איזומורפים בתור מרחבי כיסוי של X, אם יש הומיאומורפיזם $f:\tilde{X}_1\xrightarrow{\sim}\tilde{X}_2$ כך שהדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

היא חילופית. f נקראת איזומורפיזם של מרחבי כיסוי. נשים לב כי $p_1=p_2f$ לכן $p_1^{-1}=f^{-1}p_2^{-1}$, מכאן $fp_1^{-1}=p_2^{-1}$. כמובן שזה יחס שקילות.

משפט 136. יהי X קשיר מסילתית וקשיר מסילתית מקומית. יהיו $\left(\tilde{X}_i,p_i,\tilde{x}_i\right)$ מרחבי כיסוי קשירים מסילתית ותהי $x_0\in X$. אזי $\left(\tilde{X}_1,p_1,\tilde{x}_1\right)$ ו $\left(\tilde{X}_2,p_2,\tilde{x}_2\right)$ הינם איזומורפים על ידי f כנ"ל המקיימת $f\left(\tilde{x}_1\right)=\tilde{x}_2$ אם ורק אם:

$$\left(p_1\right)_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1\right)\right)=\left(p_2\right)_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2\right)\right)$$

הוכחה. אם f קיים אז $p_1 = p_2 \circ f$ ולכן $p_{1*} = p_{2*} \circ f_*$, אזי:

$$p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right)\right) = p_{2*} \circ f_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right)\right) = p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2\right)\right)$$

לכיוון ההפוך נניח ש $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right)\right) = p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2\right)\right)$, בפרט $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right)\right) \subseteq p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2\right)\right)$. לפי קריטריון ההרמה 125 עם $\tilde{X} = \tilde{X}_2$, $Y = \tilde{X}_1$ ו $f = p_1$, קיימת הרמה:

$$\tilde{p}_1 : \left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right) \to \left(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2\right)$$

כך ש $p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$. (בשביל קריטריון ההרמה צריך ש $Y = \tilde{X}_1$ יהיה קשיר מסילתית וגם קשיר מסילתית מקומית. נתון כבר ש $\tilde{X}_1$ קשיר מסילתית, והוא קשיר מסילתית מקומית כי X קשיר מסילתית מקומית). באופן סימטרי יש:

$$\tilde{p}_2 : \left(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2\right) \to \left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right)$$

כך ש $p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2$. ביחד $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 : \left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right) \to \left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right)$, נתבונן בדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\
\tilde{X}_1 \arrow[ur, "\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1"] \arrow[r, "p_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

זו דיאגרמה חילופית כי $p_1 \circ \tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$. בנוסף $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1$ שומרת על $\tilde{x}_1$:

$$\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1\left(\tilde{x}_1\right) = \tilde{p}_2\left(\tilde{x}_2\right) = \tilde{x}_1$$

מצד שני גם $\mathrm{id}_{\tilde{X}_1}$ היא הרמה כזו, אז מיחידות ההרמה $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = \mathrm{id}_{\tilde{X}_1}$. באופן סימטרי $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = \mathrm{id}_{\tilde{X}_2}$, לכן $\tilde{p}_1$ הוא איזומורפיזם של כיסויים מ.ש.ל. $\square$

משפט 137. יהי X קשיר מסילתית, קשיר מסילתית מקומית וגם SLSC. אזי יש התאמה הפיכה בין מחלקות השקילות של הכיסויים הקשירים מסילתית ב Top_* לתת חבורות של $\pi_1\left(X, x_0\right)$. ההתאמה היא:

$$\left[\left(\tilde{X}, p, \tilde{x}_0\right)\right] \mapsto p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)\right)$$

הוכחה. החח"ע היא פשוט המשפט הקודם, נוכיח שההתאמה היא על. תהי תת חבורה $H \leq \pi_1\left(X, x_0\right)$, נבנה מרחב כיסוי $\left(\tilde{X}_H, p_H, \tilde{x}_{0H}\right)$ (כאשר $\tilde{x}_{0H} \in p_H^{-1}\left(x_0\right)$) של X כך ש $H = p_{H*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_H, \tilde{x}_{0H}\right)\right)$. לפי משפט 131 קיים ל $\left(X, x_0\right)$ מרחב כיסוי אוניברסלי, ניקח את

אותו מרחב הכיסוי שבנינו במשפט 131 ונסמנו $\left(\tilde{X}, p, \tilde{x}_0\right)$. נגדיר יח"ש $\sim_H$ על $\tilde{X}$ לפי:

$$[\gamma] \sim_H [\gamma'] \iff \gamma(1) = \gamma'(1) \wedge \left[\gamma \cdot \overline{\gamma'}\right] \in H$$

ההגדרה של $\sim_H$ לא תלויה בבחירת הנציגים. נוכיח ש $\sim_H$ הוא באמת יח"ש:

1. רפלקסיביות: ברור ש $\gamma(1) = \gamma(1)$, בנוסף $[\gamma \cdot \overline{\gamma}] = [\gamma] \cdot [\gamma]^{-1} = e \in H$, לכן $[\gamma] \sim_H [\gamma]$.
2. סימטריות: נניח $[\gamma'] \sim_H [\gamma]$ אז $\gamma(1) = \gamma'(1)$ וגם $\left[\gamma \cdot \overline{\gamma'}\right] \in H$, H סגורה להופכי אז $[\gamma' \cdot \overline{\gamma}] = \left[\overline{\gamma \cdot \overline{\gamma'}}\right] = \left[\gamma \cdot \overline{\gamma'}\right]^{-1} \in H$, ביחד $[\gamma'] \sim_H [\gamma]$.
3. טרנזיטיביות: נניח ש $[\gamma] \sim_H [\gamma'] \sim_H [\gamma'']$. דבר ראשון $\gamma(1) = \gamma'(1) = \gamma''(1)$, בגלל ש H סגורה לכפל אז $\left[\gamma \cdot \overline{\gamma''}\right] = \left[\gamma \cdot \overline{\gamma'}\right] \cdot \left[\gamma' \cdot \overline{\gamma''}\right] \in H$, לכן $[\gamma] \sim_H [\gamma'']$.

נבחר את המנה $\tilde{X}_H = \tilde{X} / \sim_H$ עם טופולוגיה של מרחב מנה, נבחר $\tilde{x}_{0H} = [\tilde{x}_0]_{\sim_H}$ וגם $p_H\left([\tilde{x}]_{\sim_H}\right) = p(\tilde{x})$. נזכור שנקודה $\tilde{x} \in \tilde{X}$ זה בעצם $\tilde{x} = [\gamma]$ ו $p([\gamma]) = \gamma(1)$, אז הגדרנו $p_H\left([[\gamma]]_{\sim_H}\right) = \gamma(1)$. נסביר למה הגדרת p_H לא תלויה בבחירת הנציג, אם $[\gamma'] \sim_H [\gamma]$ אז $\gamma(1) = \gamma'(1)$ ולכן $p_H\left([[\gamma]]_{\sim_H}\right) = p_H\left([[\gamma']]_{\sim_H}\right)$. נרצה להוכיח ש p_H היא העתקת כיסוי, נוכיח שהיא רציפה ומכסה היטב כל נקודה באותו הזמן. תהי נקודה $x \in X$, הקבוצה $\mathcal{U}$ היא בסיס של X, תהי $U \in \mathcal{U}$ כך ש $x \in U$. במשפט 131 הוכחנו ש $p^{-1}(U) = \cup_{[\gamma]:\gamma(1)\in U} U_{[\gamma]}$, והוכחנו שאפשר להפוך את זה לאיחוד זר אם זורקים מספיק קבוצות אז $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma]:\gamma(1)\in U} U_{[\gamma]}$. לכן $p_H^{-1}(U) = \cup_{[\gamma]:\gamma(1)\in U}\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H}$, נרצה להוכיח שזה איחוד של קבוצות פתוחות, וגם שאפשר לזרוק חלק כדי להפוך אותו לזר. נוכיח שתי טענות עזר:

- עבור שתי מסילות γ, γ' המתחילות ב x_0 כך ש $\gamma(1) = \gamma'(1)$, מתקיים $[\gamma] \sim_H [\gamma']$ אם ורק אם לכל מסילה η המתחילה ב $\gamma(1)$ מתקיים $[\gamma' \cdot \eta] \sim_H [\gamma \cdot \eta]$. בכיוון אחד פשוט לוקחים $\eta = \gamma(1)$ קבועה. בכיוון ההפוך, תהי η כנ"ל אז:

$$\left[\gamma \cdot \eta \cdot \overline{\gamma' \cdot \eta}\right] = \left[\gamma \cdot \eta \cdot \overline{\eta} \cdot \overline{\gamma'}\right] = \left[\gamma \cdot \overline{\gamma'}\right] \in H$$

  לכן $[\gamma \cdot \eta] \sim_H [\gamma' \cdot \eta]$.

- אם לשתי קבוצות בסיסיות $U_{[\gamma]}, U_{[\gamma']} \in B$ יש שתי נקודות שהן שקולות לפי $\sim_H$, אזי $\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H} = \left(U_{[\gamma']}\right)_{\sim_H}$ כלומר שתי הקבוצות מזדהות ב $\tilde{X}_H$. נוכיח את הטענה: נניח שקיימות $[\gamma \cdot \eta] \in U_{[\gamma]}$ וגם $[\gamma' \cdot \eta'] \in U_{[\gamma']}$ שהן שקולות $[\gamma \cdot \eta] \sim_H [\gamma' \cdot \eta']$. דבר ראשון $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma \cdot \eta]}$ ו $U_{[\gamma']} = U_{[\gamma' \cdot \eta']}$ לפי טענת העזר במשפט 131, אז אנחנו יכולים לסמן מחדש $\gamma = \gamma \cdot \eta$ ו $\gamma' = \gamma' \cdot \eta'$. עכשיו נתון לנו כי $[\gamma] \sim_H [\gamma']$, לפי הטענה הקודמת לכל מסילה η'' ב U המתחילה ב $\gamma(1)$ מתקיים $[\gamma \cdot \eta''] \sim_H [\gamma' \cdot \eta'']$. מכאן נסיק ש $\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H} = \left(U_{[\gamma']}\right)_{\sim_H}$.

הטענה השנייה מסבירה איך אפשר להפוך את האיחוד $p_H^{-1}(U) = \cup_{[\gamma]:\gamma(1)\in U}\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H}$ לזר. איל לא הסביר למה קבוצה מהצורה $\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H}$ היא פתוחה ב $\tilde{X}_H$, ההסבר הבא הוא שלי. לפי ההגדרה של טופולוגיית מנה קבוצה היא פתוחה אם ורק אם המקור של ב $\tilde{X}$

פתוח, כלומר צריך להוכיח שהקבוצה הבאה היא פתוחה:

$$\left\{[\gamma']\in\tilde X\,\middle|\,[[\gamma']]_{\sim_H}\in\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H}\right\}=\left\{[\gamma']\in\tilde X\,\middle|\,\exists\,[\gamma\cdot\eta]\in U_{[\gamma]}:[[\gamma\cdot\eta]]_{\sim_H}=[[\gamma']]_{\sim_H}\right\}=$$
$$\left\{[\gamma']\in\tilde X\,\middle|\,\exists\,[\gamma\cdot\eta]\in U_{[\gamma]}:[\gamma\cdot\eta]\sim_H[\gamma']\right\}=:V$$

ניקח איזושהי $[\gamma']\in V$, ונטען כי $U_{[\gamma']}$ היא סביבה של $[\gamma']$ שמוכלת ב V, תהי $[\gamma'\cdot\eta']\in U_{[\gamma']}$. מהגדרת V קיימת $[\gamma\cdot\eta]\in U_{[\gamma]}$ כך ש $[\gamma\cdot\eta]\sim_H[\gamma']$, אז לפי טענת העזר הראשונה $[\gamma'\cdot\eta']\sim_H[\gamma\cdot\eta\cdot\eta']\in U_{[\gamma]}$, כלומר $[\gamma'\cdot\eta']\in V$. הוכחנו $U_{[\gamma']}\subseteq V$ לכל $[\gamma']\in V$ אזי V פתוחה. זה מוכיח ש $\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H}$ היא פתוחה ב $\tilde X_H$. אז סיימנו להוכיח ש p_H^{-1} רציפה כי $\mathcal{U}$ בסיס של X, והראנו שלכל $U\in\mathcal{U}$ מתקיים כי $p_H^{-1}(U)$ פתוחה ב $\tilde X_H$.

כדי לסיים את ההוכחה ש p_H העתקת כיסוי נראה כי $p_H:\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H}\xrightarrow{\sim}U$. נגדיר הטלה $q:U_{[\gamma]}\to\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H}$ לפי $q([\gamma\cdot\eta])=[[\gamma\cdot\eta]]_{\sim_H}$. נתבונן בדיאגרמה החילופית:

$$\begin{tikzcd}
 & \left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H} \arrow[d, "p_H"] \\
U_{[\gamma]} \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "p"'] & U
\end{tikzcd}$$

ספציפית על הקבוצות האלה p חח"ע, ו q על, אזי p_H גם חח"ע. בנוסף p על לכן p_H על, הוכחנו ש p_H הפיכה כפונקציה. עכשיו $p_H^{-1}=q\circ p^{-1}$ ולכן רציפה כהרכבה של רציפות, לסיכום $p_H:\left(U_{[\gamma]}\right)_{\sim_H}\xrightarrow{\sim}U$ הומיאומורפיזם. סיימנו להוכיח ש p_H העתקת כיסוי.

כדי לסיים את ההוכחה של המשפט נשאר לנו רק $H=p_{H*}\left(\pi_1\left(\tilde X_H,\tilde x_{0H}\right)\right)$. נחשב את התמונה בעזרת טענה 116. תהי γ לולאה ב X ביחס ל x_0, במשפט 131 כבר מצאנו ש α היא ההרמה היחידה של γ אל $\tilde X$, המתחילה ב $[x_0]$ ומסיימת ב $[\gamma]$. נסמן את ההטלה $q:\tilde X\to\tilde X_H$. אזי $q\circ\alpha$ היא ההרמה היחידה של γ אל $\tilde X_H$ המתחילה ב $\tilde x_{0H}$. היא הרמה כי כבר ראינו ש $p=p_H\circ q$ ואז $p_H\circ q\circ\alpha=p\circ\alpha=\gamma$, בנוסף היא רציפה כהרכבה של רציפות, והיא יחידה מיחידות ההרמה הרציפה המתחילה ב $\tilde x_{0H}$. לפי טענה 116 מתקיים $[\gamma]\in p_{H*}\left(\pi_1\left(\tilde X_H,\tilde x_{0H}\right)\right)$, אם ורק אם $q\circ\alpha$ לולאה, אם ורק אם $[[\gamma]]_{\sim_H}=q([\gamma])=q([x_0])=[[x_0]]_{\sim_H}$, אם ורק אם $[\gamma]\sim_H[x_0]$, אם ורק אם $[\gamma]=[\gamma\cdot\overline{x}_0]\in H$. כלומר $H=p_{H*}\left(\pi_1\left(\tilde X_H,\tilde x_{0H}\right)\right)$ מ.ש.ל. □

משפט 138. יהי X קשיר מסילתית, קשיר מסילתית מקומית וגם SLSC. אזי יש התאמה הפיכה בין מחלקות השקילות של הכיסויים הקשירים מסילתית ב Top למחלקות צמידות של תת חבורות של $\pi_1(X,x_0)$. ההתאמה היא:

$$\left[\left(\tilde X,p\right)\right]\mapsto\left[p_*\left(\pi_1\left(\tilde X\right)\right)\right]$$

הוכחה. נתחיל מלהראות שאם בוחרים נקודות יחוס שונות ב $\tilde X$, אז מקבלים ת"ח צמודות. יהי $\left(\tilde X,p\right)$ מרחב כיסוי של X, ויהיו $\tilde x_1,\tilde x_2\in X$ כך ש $p(\tilde x_1)=p(\tilde x_2)=x_0$. נסמן:

$$H_i=p_*\pi_1\left(\tilde X,\tilde x_i\right)\le G=\pi_1(X,x_0)$$

נזכיר שלפי טענה 116, הת"ח H_i היא כל המח' של לולאות ב X עם יחוס ב x_0, שההרמה שלהן ל $\tilde{X}$ היא לולאה ב $\tilde{x}_i$. תהי $\tilde{\gamma}$ מסילה ב $\tilde{X}$ בין $\tilde{x}_1$ ל $\tilde{x}_2$. לכל $[f] \in H_1$, ההרמה $\tilde{f}$ היא לולאה ב $\tilde{x}_1$. אזי $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{f} \cdot \overline{\tilde{\gamma}}$ לולאה ב $\tilde{X}$ עם יחוס ב $\tilde{x}_2$. נסמן $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, נשים לב ש $\overline{\tilde{\gamma}} \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{\gamma}$ זו בעצם ההרמה של $\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma$. בגלל ש $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) = x_0$ המסילה γ היא בעצם לולאה ב X ביחס ל x_0. נסמן $g = [\gamma] \in G$, אזי $g^{-1}[f]g = [\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma] \in H_2$ כי ההרמה של $\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma$ אל $\tilde{X}$ היא לולאה ביחס ל $\tilde{x}_2$. הוכחנו ש $g^{-1}H_1 g \subseteq H_2$, באופן דומה $gH_2g^{-1} \subseteq H_1$ וביחד $g^{-1}H_1g = H_2$.

עכשיו נראה שההתאמה לא תלויה בבחירת הנציג למחלקת השקילות של כיסויים קשירים מסילתית ב Top. יהיו שני כיסויים קשירים מסילתית $\left(\tilde{X}, p, \tilde{x}\right)$ ו $\left(\tilde{Y}, q, \tilde{y}\right)$ שהם איזומורפים ב Top, כלומר קיים הומיאומורפיזם $f : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ כך ש $q \circ f = p$, אבל לא בהכרח מתקיים $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. לפי משפט 136 נקבל $p_*\pi_1\left(\tilde{Y}, f(\tilde{x})\right) = p_*\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}\right)$. לפי מה שכבר הוכחנו על שינוי נקודות יחוס באותו מרחב כיסוי, הת"ח $p_*\pi_1\left(\tilde{Y}, f(\tilde{x})\right)$ צמודה לת"ח $p_*\pi_1\left(\tilde{Y}, \tilde{y}\right)$. ביחד $p_*\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}\right)$ צמודה ל $p_*\pi_1\left(\tilde{Y}, \tilde{y}\right)$ כנדרש.

עכשיו נניח שיש לנו שתי ת"ח H_1 ו H_2 שנמצאות באותה מחלקת צמידות, ונוכיח שהמקורות שלהן בהתאמה שבמשפט 137 הם איזומורפים ב Top. אנחנו יודעים מהמשפט הקודם שיש מרחב כיסוי כך ש $H_1 = p_*\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_1\right)$. נתון לנו שיש $g \in G$ כך ש $H_2 = g^{-1}H_1g$, $G = \pi_1(X, x_0)$ אז קיימת לולאה γ ב X ביחס ל x_0 כך ש $g = [\gamma]$. קיימת הרמה יחידה $\tilde{\gamma}$ של γ למסילה ב $\tilde{X}$ המתחילה ב $\tilde{x}_1$, נסמן $\tilde{x}_2 = \tilde{\gamma}(1)$ כמובן ש $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) = x_0$. נרצה להוכיח ש $H_2 = p_*\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_2\right)$, נשתמש בטענה 116. יהי $h \in H_2 = g^{-1}H_1g$, יש $[f] \in H_1$ כך ש $h = g^{-1}[f]g = [\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma]$. ההרמה היחידה של $\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma$ שמתחילה ב $\tilde{x}_2$ היא $\overline{\tilde{\gamma}} \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{\gamma}$, וזו לולאה ב $\tilde{x}_2$, אזי $h = [\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma] \in p_*\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_2\right)$. מצד שני אם $h \in p_*\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_2\right)$ אז $h = p_*([\eta])$ כאשר η לולאה ב $\tilde{X}$ ביחס ל $\tilde{x}_2$. אזי $\tilde{\gamma} \cdot \eta \cdot \overline{\tilde{\gamma}}$ לולאה ב $\tilde{X}$ ביחס ל $\tilde{x}_1$, כלומר $\left[\tilde{\gamma} \cdot \eta \cdot \overline{\tilde{\gamma}}\right] \in \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_1\right)$. לכן:

$$h = p_*([\eta]) = p_*\left(\left[\overline{\tilde{\gamma}}\right] \cdot \left[\tilde{\gamma} \cdot \eta \cdot \overline{\tilde{\gamma}}\right] \cdot [\tilde{\gamma}]\right) = [\overline{\gamma}] \cdot p_*\left(\left[\tilde{\gamma} \cdot \eta \cdot \overline{\tilde{\gamma}}\right]\right) \cdot [\gamma] = g^{-1}p_*\left(\left[\tilde{\gamma} \cdot \eta \cdot \overline{\tilde{\gamma}}\right]\right)g \in g^{-1}H_1g = H_2$$

סיימנו להוכיח שההתאמה הזו מוגדרת היטב, היא 1-1 לפי ההתאמה מהמשפט הקודם. $\square$

4.3 העתקות כיסוי

הגדרה 139. יהי $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי של X.

1. הומיאומורפיזם $f:\tilde{X}\to\tilde{X}$ כך ש $p\circ f=p$ נקרא העתקת כיסוי, באנגלית deck transformation .
2. נסמן ב $G\left(\tilde{X}\right)$ את חבורת העתקות הכיסוי תחת פעולת ההרכבה.

הערה 140. יהי $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי של X, ו f העתקת כיסוי. לכל $\tilde{x}\in\tilde{X}$ מתקיים $p(\tilde{x})=p\circ f(\tilde{x})$, אזי לכל $x\in X$ מתקיים $p^{-1}(x)=f\left(p^{-1}(x)\right)$. לכן אם $x\in U\subseteq X$ סביבה מכוסה היטב, כלומר $p^{-1}(U)=\bigsqcup_{\alpha\in A}V_\alpha$ אזי:

$$\bigsqcup_{\alpha\in A}V_\alpha=p^{-1}(U)=f\left(p^{-1}(U)\right)=f\left(\bigsqcup_{\alpha\in A}V_\alpha\right)=\bigsqcup_{\alpha\in A}f(V_\alpha)$$

טענה 141. בנתונים ובסימונים הנ"ל, נניח ש U קשירה. אזי f מגדירה פרמוטציה על A לפי $f(V_\alpha)=V_\beta$.

הוכחה. יהי $\alpha\in A$, נגדיר $f_\alpha:U\to A$ באופן הבא. לכל $x\in U$ מתקיים ש $(p|_{V_\alpha})^{-1}(x)\in V_\alpha$ הוא המקור היחיד של x ב V_α. לפי ההרעה למעלה:

$$f\left((p|_{V_\alpha})^{-1}(x)\right)\in\bigsqcup_{\beta\in A}f(V_\beta)=\bigsqcup_{\beta\in A}V_\beta$$

כלומר קיים β יחיד כך ש $f\left((p|_{V_\alpha})^{-1}(x)\right)\in V_\beta$. נגדיר $f_\alpha(x)=\beta$. נגדיר על A את הטופולוגיה הדיסקרטית, ונוכיח ש f_α רציפה. יהי $\beta\in A$ אזי:

$$f_\alpha^{-1}(\beta)=\left\{x\in U\middle|f\left((p|_{V_\alpha})^{-1}(x)\right)\in V_\beta\right\}=\left\{x\in U\middle|(p|_{V_\alpha})^{-1}(x)\in f^{-1}(V_\beta)\right\}=p\left(V_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)\right)$$

הקבוצה V_α היא פתוחה, f הומיאו' אז $f^{-1}(V_\beta)$ גם פתוחה, ו $p|_{V_\alpha}$ הומיאו' אזי $p\left(V_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)\right)$ פתוחה. זה מוכיח ש f_α רציפה, אבל A דיסקרטית אז f_α קבועה מקומית. U קשירה ו f_α קבועה מקומית אז f_α קבועה. כלומר לכל $\alpha\in A$ קיים $\beta\in A$ יחיד כך ש $f(V_\alpha)\subseteq V_\beta$, זה גורר ש $V_\alpha\subseteq f^{-1}(V_\beta)$. נזכור שגם f^{-1} היא העתקת כיסוי, אז עבור אותו $\beta\in A$ קיימת $\gamma\in A$ יחידה כך ש $f^{-1}(V_\beta)\subseteq V_\gamma$. ביחד יוצא כי:

$$\emptyset\neq V_\alpha=V_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)\subseteq V_\alpha\cap V_\gamma$$

אם $\gamma\neq\alpha$ אזי $V_\alpha\cap V_\gamma=\emptyset$ כי אלה קבוצות באיחוד זר, אבל זה בלתי אפשרי אז $\gamma=\alpha$. לכן $f^{-1}(V_\beta)\subseteq V_\alpha$, סה"כ $f^{-1}(V_\beta)=V_\alpha$ כלומר $f(V_\alpha)=V_\beta$ כנדרש. הראנו ש f מגדיריה פונקציה חח"ע מ A ל A, למה היא פרמוטציה? כי אנחנו יודעים ש f^{-1} מגדירה פונקתיה אחרת על A שהיא ההופכית שלה. $\square$

טענה 142. יהי $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי של X, נניח ש $\tilde{X}$ קשיר. אם $f_1,f_2\in G\left(\tilde{X}\right)$ וקיים $\tilde{x}\in\tilde{X}$ כך ש $f_1(\tilde{x})=f_2(\tilde{x})$ אזי $f_1=f_2$.

הוכחה. זה פשוט טענה 126 עם $Y=\tilde{X}$ ו $f=p$. נעיר ש $p\circ f_i=p$ אז f_i באמת הרמה רציפה של p. $\square$

דוגמה 143. א. $X=S^1$ ו $\tilde{X}=\mathbb{R}$, אזי $G\left(\tilde{X}\right)=\mathbb{Z}$.

ב. $X=S^1\times S^1$ ו $\tilde{X}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, אזי $G\left(\tilde{X}\right)=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

הגדרה 144. מרחב כיסוי $\left(\tilde{X},p\right)$ של X נקרא נורמלי, אם לכל $x\in X$ ו $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\in p^{-1}(X)$ יש $f\in G\left(\tilde{X}\right)$ כך ש $f\left(\tilde{x}_1\right)=\tilde{x}_2$.

משפט 145. יהי X קשיר מסילתית וקשיר מסילתית מקומית. יהי $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי קשיר מסילתית של X. תהי ת"ח:

$$p_*\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)=H\leq G=\pi_1\left(X,x_0\right)$$

אזי:

1. $\left(\tilde{X},p\right)$ נורמלי אם ורק אם H תת חבורה נורמלית.

2. $G\left(\tilde{X}\right)\cong N_G(H)/H$ כאשר $N_G(H)=\left\{g\in G\,|\,gHg^{-1}=H\right\}$.

הוכחה. נתחיל מלהוכיח את 1 . H תח"נ אם ורק אם כל תתץ החבורות הצמודות ל H שוות ל H, מתוך ההוכחה של משפט 138 זה שקול לכך שלכל $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$ מתקיים $p_*\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_1\right)=p_*\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)$. ולפי משפט 136 זה שקול לכך שלכל $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$ קיימת העתקת כיסוי $f\in G\left(\tilde{X}\right)$ המקיימת $f\left(\tilde{x}_0\right)=\tilde{x}_1$, אם ורק אם $\left(\tilde{X},p\right)$ נורמלי.

עכשיו נוכיח את 2 . נגדיר $\alpha:N_G(H)\to G\left(\tilde{X}\right)$ באופן הבא. תיהיה $g\in N_G(H)$ $[\gamma]=$, נסמן ב $\tilde{\gamma}$ את ההרמה היחידה של γ המתחילה ב $\tilde{x}_0$, נסמן $\tilde{x}_1=\tilde{\gamma}(1)$. נטען שקיימת העתקת כיסוי יחידה $f_{[\gamma]}\in G\left(\tilde{X}\right)$ כך ש $f_{[\gamma]}\left(\tilde{x}_0\right)=\tilde{x}_1$. נוכיח קיום: נתון לנו ש $g^{-1}Hg=H$ אז כמו בהוכחה של משפט ההתאמה השני זה אומר לנו כי $p_*\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_1\right)=p_*\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)$. לפי משפט 136 קיימת העתקת כיסוי $f_{[\gamma]}\in G\left(\tilde{X}\right)$ כך ש $f_{[\gamma]}\left(\tilde{x}_0\right)=\tilde{x}_1$ כנדרש. היחידות של $f_{[\gamma]}$ נובעת מטענה 142. ההגדרה של $f_{[\gamma]}$ ב"ת בבחירת הנציג של מח' ההומוטופיה כי עבור $\gamma\simeq\gamma'$ נקבל ש $\tilde{\gamma}\simeq\tilde{\gamma}'$ (כאשר $\tilde{\gamma}'$ היא ההרמה של γ' המתחילה ב $\tilde{x}_0$), ולכן $\tilde{\gamma}'(1)=\tilde{\gamma}(1)$. נגדיר $\alpha([\gamma])=f_{[\gamma]}$.

נוכיח ש α על. תהי העתקת כיסוי $f\in G\left(\tilde{X}\right)$, נסמן $\tilde{x}_1=f\left(\tilde{x}_0\right)$. לפי משפט 136 מתקיים:

$$p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_1\right)\right)=p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)\right)=H$$

כמו שכבר ראינו זה אומר שיש $g=[\gamma]\in\pi_1\left(X,x_0\right)=G$, עם הרמה $\tilde{\gamma}$ המתחילה ב $\tilde{x}_0$ ונגמרת ב $\tilde{x}_1$. כך ש $[\tilde{\gamma}]\cdot\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_1\right)\cdot[\tilde{\gamma}]^{-1}=\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)$, לכן $gHg^{-1}=g\cdot p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_1\right)\right)\cdot g^{-1}=H$ כלומר $g\in N_G(H)$. אזי $\alpha([\gamma])=f$ כנדרש.

נוכיח ש α הינו הומו' של חבורות. יהיו $g=[\gamma]$ ו $g'=[\gamma']$ ב $N_G(H)$. נסמן $f_{[\gamma]}=\alpha([\gamma])$ ו $f_{[\gamma']}=\alpha([\gamma'])$, בנוסף נסמן $\tilde{x}_1=\tilde{\gamma}(1)=f_{[\gamma]}\left(\tilde{x}_0\right)$ ו $\tilde{x}_1'=\tilde{\gamma}'(1)=f_{[\gamma']}\left(\tilde{x}_0\right)$. אנחנו צריכים להוכיח ש $\alpha(gg')=\alpha(g)\circ\alpha(g')$. נתבונן במסילה $\tilde{\gamma}\cdot f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma}'\right)$: המסילה $f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma}'\right)$ מתחילה ב $f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma}'(0)\right)=f_{[\gamma]}\left(\tilde{x}_0\right)=\tilde{x}_1$, נזכור שלפי ההגדרה $f_{[\gamma]}\left(\tilde{x}_0\right)=\tilde{\gamma}(1)$, לכן המכפלה $\tilde{\gamma}\cdot f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma}'\right)$ מוגדרת היטב. לפי ההגדרה של העתקת כיסוי $p\circ f_{[\gamma]}=p$ אזי:

$$p\left(\tilde{\gamma}\cdot f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma}'\right)\right)=p\left(\tilde{\gamma}\right)\cdot p\left(f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma}'\right)\right)=\gamma\cdot p\left(\tilde{\gamma}'\right)=\gamma\cdot\gamma'$$

לכן $\tilde{\gamma}\cdot f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma'}\right)$ היא ההרמה היחידה של $\gamma\cdot\gamma'$ המתחילה ב $\tilde{x}_0$. מכאן:

$$\alpha\left(gg'\right)\left(\tilde{x}_0\right)=f_{[\gamma\cdot\gamma']}\left(\tilde{x}_0\right)=\widetilde{\gamma\cdot\gamma'}\left(1\right)=\tilde{\gamma}\cdot f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma'}\right)\left(1\right)=f_{[\gamma]}\left(\tilde{\gamma'}\left(1\right)\right)=f_{[\gamma]}\left(\tilde{x}'_1\right)$$

מצד שני:

$$\alpha\left(g\right)\circ\alpha\left(g'\right)\left(\tilde{x}_0\right)=\alpha\left(\left[\gamma\right]\right)\circ\alpha\left(\left[\gamma'\right]\right)\left(\tilde{x}_0\right)=f_{[\gamma]}\circ f_{[\gamma']}\left(\tilde{x}_0\right)=f_{[\gamma]}\left(\tilde{x}_1\right)$$

ביחד $\alpha\left(gg'\right)\left(\tilde{x}_0\right)=\alpha\left(g\right)\circ\alpha\left(g'\right)\left(\tilde{x}_0\right)$. לפי טענה 142 אם שתי העתקות כיסוי מסכימות על נקודה הן שוות, כלומר $\alpha\left(gg'\right)=\alpha\left(g\right)\circ\alpha\left(g'\right)$ כנדרש.

לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $N_G\left(H\right)/\ker\alpha\cong G\left(\tilde{X}\right)$, נחשב את הגרעין:

$$\ker\alpha=\left\{\left[\gamma\right]\left|f_{[\gamma]}=\mathrm{id}_{\tilde{X}}\right.\right\}=\left\{\left[\gamma\right]\left|f_{[\gamma]}\left(\tilde{x}_0\right)=\tilde{x}_0\right.\right\}=\left\{\left[\gamma\right]\left|\tilde{\gamma}\left(1\right)=\tilde{x}_0=\tilde{\gamma}\left(0\right)\right.\right\}=p_*\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)=H$$

השיוויון הראשון הוא ההגדרה של הגרעין. השיוויון השני הוא לפי טענה 142. השיוויון השלישי הוא לפי הגדרת $f_{[\gamma]}$. השיוויון הרביעי הוא טענה 116. מ.ש.ל. □

מסקנה 146. בנתונים של המשפט למעלה:

א. אם $\left(\tilde{X},p\right)$ נורמלי אז $G\left(\tilde{X}\right)\cong G/H$.

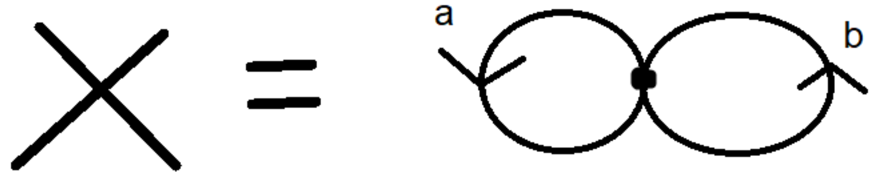
ב. אם $\left(\tilde{X},p\right)$ כיסוי אוניברסלי אז $G\left(\tilde{X}\right)\cong\pi_1\left(X\right)$.

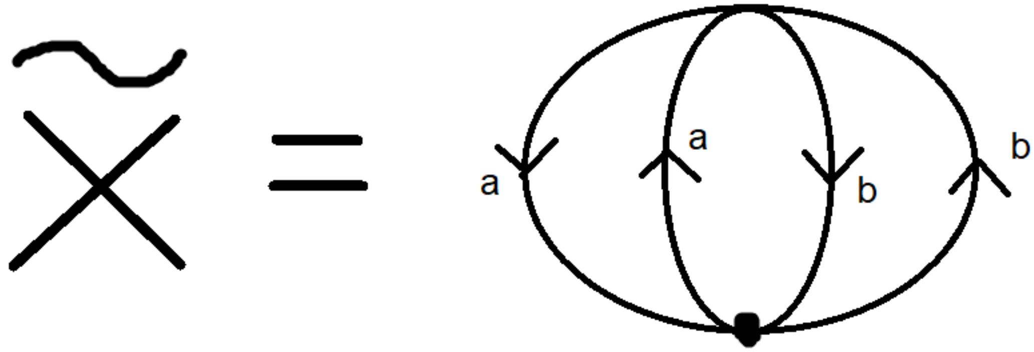
דוגמה 147. א. נחשב את כל כיסויים של $X=S^1$. יש את הכיסוי האוניברסלי $\mathbb{R}$ על ידי $p\left(r\right)=e^{2\pi ir}$, התת חבורה המתאימה היא $H=p_*\left(\pi_1\left(\mathbb{R}\right)\right)=0$. לכל m יש ת"ח $m\mathbb{Z}\leq\mathbb{Z}=\pi_1\left(S^1\right)$, ולכן יש כיסוי שמתאים לת"ח. הכיסוי הוא $\tilde{X}=S^1$ עם $p_m\left(z\right)=z^m$, כלומר $p_{m*}\left(S^1\right)=m\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ אבלית אז לפי המסקנה הקודמת $G\left(S^1,p_m\right)\cong\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\mathbb{Z}m$. לפי טענה 122 מתקיים $\mathrm{rank}\left(S^1,p_m\right)=\left[\mathbb{Z}:m\mathbb{Z}\right]=m$, וגם $\mathrm{rank}\left(\mathbb{R},p\right)=\left[\mathbb{Z}:e\right]=\aleph_0$. לפי טענה 133 קיימת q רציפה יחידה כך שהדיאגרמה הבאה חילופית:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & S^1 \arrow[dl, "p_m"] \\
& S^1 &
\end{tikzcd}$$

אנחנו יכולים לחשב אותה $q\left(r\right)=e^{2\pi i\frac{r}{m}}$.

ב. ניקח $X=S^{-1}\vee S^1$. $G=\left\langle a,b\right\rangle=F_2=\pi_1\left(X\right)$. נתבונן במרחב הכיסוי:





נסמן $H=p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{x}_0\right)\right)$. נשים לב כי $H=\left\langle a^2,b^2,ab\right\rangle$, נשאל האם H תת חבורה נורמלית של G. פשוט נרוץ על כל היוצרים:

$$a\cdot a^2\cdot a^{-1}=a^2\in H$$

$$a\cdot ab\cdot a^{-1}=a^2b^2\left(ab\right)^{-1}\in H$$

$$a\cdot b^2\cdot a^{-1}=abb^2\left(ab\right)^{-1}\in H$$

$$b\cdot a^2\cdot b^{-1}=b^2\left(ab\right)^{-1}a^2ab\left(b^2\right)^{-1}\in H$$

$$b\cdot b^2\cdot b^{-1}=b^2\in H$$

$$b\cdot ab\cdot b^{-1}=b^2\left(ab\right)^{-1}a^2\in H$$

הוכחנו ש H נורמלית, לפי המסקנה הקודמת $G\left(\tilde{X}\right)=G/H$. בחבורת המנה G/H יש רק שני איברים $a+H$ ו $b+H$, לכן יש רק שתי העתקות כיסוי. אחת היא הזהות, השנייה מחליפה בין הקודקוד התחתון ב $\tilde{X}$ לקודקוד העליון.

משפט 148. משפט וילסון שרייר

אם $H<F_n$ אז H חופשית. אם $[F_n:H]=k<\infty$ אז $H=F_{|E|-|V|+1}$.

הוכחה. נביא את תקציר ההוכחה. ניקח $X=\bigvee_{i=1}^{n}S^1$ אז $\pi_1\left(X\right)=F_n$. לפי משפט 137 יש מרחב כיסוי $\left(\tilde{X},p\right)$ קשיר מסילתית כך ש $H=p_*\pi_1\left(\tilde{X}\right)$. (הערה: קומפלקס CW הוא תמיד SLSC). למה: $\tilde{X}$ הוא גרף. לכן $H=F_m$ לאיזשהו m אולי אינסופי. אם k סופי, אז יש ל $\tilde{X}$ k קודקודים ו nk צלעות. למה: יהי X גרף קשיר ויהי $\left(\tilde{X},p\right)$ מרחב כיסוי קשיר, אז $\tilde{X}$ גרף. □