

---

Rapport de stage :

# Travail d'étude et de validation d'un code LES/DES et comparaison avec la théorie de la turbulence de von Kármán.

---

**Julien TENAUD**

Étudiants en 2<sup>ème</sup> année à L'ENSEIRB-MATMECA

Spécialité : Mathématiques appliquées et mécanique

sous la direction de

**Pr. F.Bertagnolio**

Senior scientist at DTU WIND AND ENERGY SYSTEMS

avec pour tuteur universitaire

**M. N.Barral**

Maître de conférence à l'ENSEIRB MATMECA



Année 2023/2024

# Sommaire

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Motivations et plan . . . . .	3
1.2	Time line . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Approche statistique et spectrale de la turbulence</b>	<b>4</b>
2.1	Fonction de corrélation et ses propriétés . . . . .	4
2.2	Spectre unidimensionnel et propriété de turbulence figée . . . . .	5
2.3	Spectre bidimensionnel . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Résultats théorique à partir du modèle de von Kármán de la turbulence</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Modèles WMLES et WRLES</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Analyse simple des variables de vitesse turbulente</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Validation de l'hypothèse de turbulence figée</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Analyse spectral des variables turbulentes</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>Détermination du coefficient de décorrélation</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>Comparaison des spectres avec la théorie de von Kármán</b>	<b>8</b>

## Table des figures

---

## Liste des figures

# 1 Introduction

---

## 1.1 Motivations et plan

Les éoliennes font maintenant partie de notre paysage. Elles sont de plus en plus présentes sur terre (on-shore) et maintenant en mer (offshore). En effet le besoin en énergie électrique est grandissant alors que nous sommes en pleine crise écologique. Mais l'implémentation et la recherche de performances des éoliennes n'est pas sans encombre. Exposition au vent, taille, raccordement au réseau... Les enjeux sont nombreux. Ce travail s'inscrit dans l'objectif de diminution du bruit généré par les pales d'éolienne. Le domaine d'étude est celui de l'aéro-acoustique. Dans de nombreux pays des normes gouvernementales sur le bruit émis [ref] sont mises en place dans le but de ne pas déranger les habitants aux alentours d'un parc éolien. Bien qu'aucune étude scientifique n'ait prouvé un quelconque effet nocif du bruit éolien sur la santé, de nombreuses plaintes ont été enregistrées de gens dérangés par ce bruit. Alors pour éviter que nos géants de métal ne deviennent une ennemie publique, la réduction de leur effet sonore est nécessaire.

Pour appréhender ce problème il faut d'abord comprendre comment les éoliennes génèrent du bruit. La grande majorité du son émis vient des pales de l'éolienne. En effet quand le flux d'air rencontre une pale il est perturbé et comme il y a interaction entre un fluide et une structure alors il y a apparition d'une couche limite. Dans notre cas cette dernière est turbulente. En effet le bout de pale se déplace en moyenne à  $80m/s$  si on considère une éolienne classique. Dans l'étude de l'écoulement on a donc des Reynolds très élevés, de l'ordre de plusieurs milliers. La grande perturbation du flux d'air va engendrer la formation, tout autour de la pale, d'onde de pression qu'on appelle plus communément le bruit. Là où le son est généré et le plus intense c'est au niveau du bord de fuite et plutôt en bout de pale. Il y a un lien de causalité directe entre turbulence et son émis. En revanche il est considéré que le son émis n'a pas d'impact sur la turbulence. C'est pourquoi la couche limite et le sillage turbulent des pales sont étudiés.

L'étude que j'ai menée s'inscrit dans le travail de développement d'un code de calcul couplant l'aérodynamique et l'acoustique. Mon travail ne s'intéressera qu'à la partie aérodynamique et plus précisément l'étude statistique d'une couche limite turbulente dans un canal parallélépipédique. Un code LES (Large Eddy Simulation) développé à DTU permet un relevé de vitesse et de pression dans une simulation à la manière d'une expérience. À noter que celui-ci est très utile vu le coût d'une expérience en soufflerie. Afin d'étudier et de valider les résultats obtenus après calcul j'effectuerai une analyse statistique notamment dans le domaine spectral de la turbulence et principalement des variables de vitesse.

Plusieurs axes de recherche sont envisagés :

- Étudier l'impact du raffinement du maillage sur la turbulence et évaluer a priori l'impact sur des calculs liés à l'acoustique.
- Validation des hypothèses de modèles semi-empiriques incluant la reconstitution du tenseur spectral avec les données à partir d'approche RANS.
- Étudier l'impact de certaines hypothèses faites dans les modèles semi-empiriques :
  - turbulence isotrope dans la couche limite

- distribution de l'énergie cinétique turbulente sur les 3 composantes et son évolution à travers la couche limite
  - validité de l'hypothèse de turbulence figée (fluctuations turbulents constantes au cours du temps)
  - évaluer des loi plus générales que la théorie de la turbulence isotropique.
- Si le temps le permet le projet pourrait déboucher sur des calculs couplant la théorie de la turbulence LES/DES avec des calculs (aéro-)acoustique (à bas Reynolds pour limiter les temps de calculs).

## 1.2 Time line

- 18/06 : Théorie et pris en main des premiers calculs
- 6/07 : Préparation d'un workflow pour analyser les résultats (en python)
- 19/07 : Résultats et analyse (courbes)
- 30/07 : Rapport

\*\*\*

## 2 Approche statistique et spectrale de la turbulence

---

Dans cette section nous introduiront mathématiquement certains outils d'étude statistique de la turbulence notamment dans le domaine spectrale . Nous nous pencherons sur les spectres en énergie et les fonctions de corrélation.

### 2.1 Fonction de corrélation et ses propriétés

Dans l'analyse d'un problème de turbulence on utilise la décomposition de Reynolds afin de décrire chaque grandeur avec un terme moyen et un terme de fluctuation, en prenant en exemple le champ de vitesse,

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i \quad (1)$$

avec  $\langle U_i \rangle$  la vitesse moyenne (moyenne de Reynolds) et  $u_i$  les fluctuations.

Pour simplifier les équations nous utiliserons la notation d'Einstein de sommation implicite.

La fonction de corrélation  $R_{ij}$  se définit pour deux points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  ou deux temps  $t$  et  $t'$  tel que,

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) &= \langle u_i(\mathbf{x}, t), u_j(\mathbf{x}', t) \rangle \\ R_{ij}(\mathbf{x}, t, t') &= \langle u_i(\mathbf{x}, t), u_j(\mathbf{x}, t') \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Dans le cas d'une turbulence homogène, c'est à dire qui conserve ses propriétés statistiques pour tout déplacement dans l'espace, alors  $R_{ij}$  dépend uniquement de  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t), u_j(\mathbf{x}', t) \rangle \quad (3)$$

Nous pouvons définir la fonction d'autocorrelation,

$$R_{ii}(0, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t), u_i(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (4)$$

**Proposition 1** (Indépendance statistique asymptotique). *Quand  $r \rightarrow \infty$ ,  $R_{ij}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ . Plus les points considérés sont éloignés plus ils sont décorrélés.*

**Proposition 2.** *Quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $R_{ii}(0, t) \rightarrow 0$ . Un tourbillon se décorrèle de lui même au court du temps.*

Définissons à présent une fonction qui nous intéressera tout au long de notre étude, le spectre qui est la transformée de Fourier tridimensionnelle de la fonction de corrélation,

$$\phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (5)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde. En prenant la transformée de Fourier inverse on peut obtenir :

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \phi_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (6)$$

Maintenant en imposant  $i = j$  et  $\mathbf{r} = 0$  dans (6) on obtient,

$$\langle u_i u_i \rangle = R_{ii}(0, t) = \int \phi_{ii}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} \quad (7)$$

Alors il est possible de calculer le spectre en énergie nommé TKE par unité d'intensité de nombre d'onde (turbulent kinetic energy).

$$E(\kappa) = 2\pi\kappa^2 \phi_{ii} [m^3.s^{-2}] \quad (8)$$

où  $\kappa = |\mathbf{k}|$ . On peut tracer le spectre d'énergie turbulente  $\log(E) = f(\log(k))$ . Ce spectre vérifie d'après (16) et (7),

$$\langle u_i u_i \rangle = 2 \int_0^\infty E(\kappa, t) d\kappa \quad (9)$$

## 2.2 Spectre unidimensionnel et propriété de turbulence figée

On considère l'espace représenté par le repère cartésien  $(O, x_1, x_2, x_3)$ . L'écoulement turbulent étudié est homogène dans la direction  $\mathbf{x}$  de l'espace. Alors on définit la corrélation spatiale à deux points  $R_{ij}(r_1, x_2, x_3, x'_2, x'_3, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) \rangle$  où  $r_1 = x_1 - x'_1$ . Le spectre spatial unidimensionnel est donc donné par,

$$\phi_{ij}^{[1]}(k_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r_1, x_2, x_3, x_2, x_3, t) e^{-ik_1 r_1} dr_1 \quad (10)$$

où on a considéré  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sur une même ligne de direction  $x_1$ . Alors, si on considère  $x'_1 = x_1$  ( $r_1 = 0$ ) et que  $i = j$  on peut montrer avec une transformée de Fourier inverse que:

$$\langle u_i u_i \rangle = 2 \int_0^\infty \phi_{ii}^{[1]}(k_1, x_2, x_3, t) dk_1 \quad (11)$$

À présent considérons la fonction de corrélation en temps  $R_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t') \rangle$  au même point mais à deux temps différent. Il est alors possible d'obtenir la fonction spectral en fréquence :

$$\psi_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{x}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (12)$$

où  $\omega$  représente les fréquences. On peut obtenir de même :

$$\langle u_i u_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{ij}(\omega, \mathbf{x}) d\omega \quad (13)$$

Expérimentalement, les mesures de vitesse d'écoulement à plusieurs points au même moment ne sont pas facile à effectuer. On aimerai bien pouvoir relever les caractéristique de la turbulence en un point à plusieurs temps et en déduire des informations sur l'évolution des structures spatial. C'est pourquoi on fait l'hypothèse suivante:

**Proposition 3** (Hypothèse de turbulence figée ou de Taylor). *On considère que les structures spatiales d'intérêt ne change pas de manière significative durant le temps de leur passage le long de la ligne de mesure.*

Ainsi, on suppose que l'échelle de temps liée à la dynamique des tourbillons est grande devant le temps de parcours du fluide dans la cavité de mesure. Dans le cas d'un écoulement de direction préférentiel  $x_1$  cela peut s'exprimer tel que :

$$u_i = u_i(x_1 - \langle U_i \rangle t, x_2, x_3) \quad (14)$$

Un des aspect de cette étude sera de vérifié si cette hypothèse est vérifiée dans le cas des calculs LES effectués.

Dans les écoulements stationnaire où cette hypothèse est vérifié on peut alors montrer que :

$$\phi_{ij}^{[1]}(k_1, x_2, x_3) = | \langle U_1 \rangle | \psi_{ij}(\langle U_1 \rangle k_1, x_2, x_3) \quad (15)$$

Cette expression relie le spectre en fréquence et le spectre unidimensionnel en nombre d'onde. Cela met en évidence la relation  $\omega = \langle U_1 \rangle k_1$  entre la fréquence et le nombre d'onde unidimensionnel pour des composantes de Fourier convectés à une vitesse moyenne  $\langle U_1 \rangle$ .

## 2.3 Spectre bidimensionnel

\*\*\*

# 3 Résultats théorique à partir du modèle de von Kármán de la turbulence

---

Dans cette section nous allons définir certaines des expressions des spectres en utilisant les résultat de von Kármán en 1948 [[ref von Karman 1948](#)] sans pour autant en dresser une liste exostive. Par la suite l'objectif sera de comparer le modèle de von Kármán théoriques avec les données issues des

calculs LES à Reynolds variables.

Le modèle utiliser par von Kármán vient de l'expression du spectre d'énergie (16) sous l'hypothèse que la turbulence est isotropique [ref Keith Wilson],

$$E(\kappa) = \frac{4\Gamma(\nu + 5/2)}{3\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \frac{\sigma^2 \kappa^4 l^5}{(1 + \kappa^2 l^2)^{\nu+5/2}} \quad (16)$$

où  $\sigma^2$  est la variance,  $\kappa$  est l'intensité du vecteur d'onde,  $l$  "the length scale",  $\Gamma()$  est la fonction gamma et  $\nu$  est un paramètre qui définit la loi de puissance dans la zone inertiel ( $\kappa l \gg 1$ ). Pour notre étude il sera fixé à  $1/3$  afin de retrouver la loi de puissance de Kolmogorov de  $-5/3$  [ref Kolmogorov].

De cette expression il est possible d'obtenir les spectres 'streamwise' avec une intégration par rapport à  $k_2$  et  $k_3$  des spectres d'énergie  $E_{11}(\kappa)$ ,  $E_{22}(\kappa)$  et  $E_{33}(\kappa)$ :

$$\phi_{11}^1(k_c, z) = \frac{36\Gamma(17/6)\sigma_1 l}{55\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)} \frac{1}{(1 + (k_c l)^2)^{5/6}} \quad (17)$$

$$\phi_{22}^1(k_c, z) = \frac{6\Gamma(17/6)\sigma_2 l}{55\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)} \frac{(3 + 8(k_c l)^2)}{(1 + (k_1 l)^2)^{11/6}} \quad (18)$$

$$\phi_{33}^1(k_c, z) = \frac{6\Gamma(17/6)\sigma_3 l}{55\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)} \frac{(3 + 8(k_c l)^2)}{(1 + (k_1 l)^2)^{11/6}} \quad (19)$$

avec  $\sigma_i = \langle u_i u_i \rangle$ ,  $l = C \frac{k_T^{3/2}}{\varepsilon}$ ,  $k_c = \frac{\omega}{U_c}$ .

Ce sont ces trois spectres que nous chercherons à comparer avec ceux obtenu à partir des données issus des modèles LES dans la section 9. Nous expliquerons donc dans la dîtes section comment nous obtenons les valeurs de  $l$  et  $k_c$ .

\*\*\*

## 4 Modèles WMLES et WRLES

---

Pour commencer à décrire l'étude qui ont été menée et les résultats qui ont été obtenues durant ce stage nous devons tout d'abord parler des modèles LES (large eddy simulation) de simulation numérique qui nous on permis l'aquisition de données sur la turbulence. Toutes les données analysés par la suite viennent de la simulation d'un écoulement turbulent en régime établie dans un canal droit parallélépipédique ("channel flow") [fig ref]. Les bord nord et sud par rapport au sens de l'écoulement sont des mures (condition 'Wall') et le reste des bords sont périodiques. Par la suite nous dénommerons l'axe de l'écoulement "streamwise" ( $\vec{x}$ ), l'axe normal au mure "wall-normal" ( $\vec{z}$ ) et l'axe normal au deux précédent "spanwise" ( $\vec{y}$ ).

\*\*\*



## 5 Analyse simple des variables de vitesse turbulente

---

Commençons par analyser simplement les données de sortie obtenu afin de voir si les résultats correspondent au attente d'une simulation d'écoulement turbulent dans un "channel flow". Pour ce premier cas les paramètres d'entrer sont les suivants :

Faire un tableau qui regroupe les paramètres des trois modèles et un autre tableau pour les point de mesures

- dimension du canal :  $xlen = 2\pi$ ,  $ylen = \pi$ ,  $zlen = 2$
- masse volumique fluide :  $\rho = 1.0$
- vitesse à "l'infinie" :  $u_\infty = 1.0$
- Nombre de Reynolds :  $Re = 13800.0$ ,  $Re_\tau = 388.97$
- Pas de temps :  $\delta t = 0.01$
- Taille cellule :  $\delta x \times \delta y \times \delta z =$
- Viscosité dynamique et cinématique :  $\mu = \nu = 0.000145$
- vitesse de frottement :  $u_\tau = 0.0564$

Comme la quantité de cellule est très grande nous ne pouvons pas relever les quantités d'intérêt pour l'ensemble du maillage. Les points de mesure sont donc les suivants :

Afin de valider les résultats des calculs LES nous avons à disposition des données issues de calculs DNS (Direct Navier-Stokes) effectué auparavant [\[ref Moser\]](#). Aussi pour le cas  $Re = 395$  un calcul avec un modèle RANS à été effectué.

## 6 Validation de l'hypothèse de turbulence figée

## 7 Analyse spectral des variables turbulentes

## 8 Détermination du coefficient de décorrélation

## 9 Comparaison des spectres avec la théorie de von Kármán