

---

Rapport de stage :

# Travail d'étude et de validation d'un code LES et comparaison avec la théorie de la turbulence de von Kármán.

---

**Julien TENAUD**

Étudiants en 2<sup>ème</sup> année à L'ENSEIRB-MATMECA

Spécialité : Mathématiques appliquées et mécanique

sous la direction de

**Pr. F.Bertagnolio**

Senior scientist at DTU WIND AND ENERGY SYSTEMS

avec pour tuteur universitaire

**M. N.Barral**

Maître de conférence à l'ENSEIRB MATMECA



Année 2023/2024

# Sommaire

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Motivations de l'étude . . . . .	4
1.2	Plan . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Approche statistique et spectrale de la turbulence</b>	<b>5</b>
2.1	Fonction de corrélation et ses propriétés . . . . .	5
2.2	Spectre unidimensionnel et propriété de turbulence figée . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Résultats théorique à partir du modèle de von Kármán de la turbulence</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Modèles WMLES et WRLES</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Analyse simple des variables de vitesse turbulente afin de valider les jeux de données</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Validation de l'hypothèse de turbulence figée</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Détermination du coefficient de décorrélation</b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Comparaison des spectres avec la théorie de von Kármán</b>	<b>16</b>
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>17</b>
<b>10</b>	<b>Figure annexe</b>	<b>19</b>

# Figures

---

## Liste des figures

1	Schéma de la simulation "channel flow" . . . . .	9
2	Profils de vitesse moyenne addimensionnée et d'énergie cinétique turbulente. Les données ont été comparées aux profils des données DNS et RANS quand cela était possible. . .	10
3	Profils de fluctuation. Les données ont été comparées au profils des données DNS. . .	11
4	Iso-valeur de la fonction d'autocorrelation 2D selon la direction $x$ et le temps $t$ à différentes hauteurs $z^+$ . Obtention de la valeur de $U_c$ par approche linéaire de la direction des ellipses. . . . .	12
5	Comparaison des spectres de puissance en temps ( $F$ ) et dans la direction $x$ ( $P$ ) tracer en fonction de $k_x$ le nombre d'onde "streamwise". En pointillé (- - -) la pente $k_x^{-5/3}$ vérifiant la décroissance de Kolmogorov [2] . . . . .	13
6	Corrélation streamwise des grandeur de vitesse dans les trois directions . . . . .	14
7	Tracé de la fonction $\beta$ en fonction de $k_c$ pour la vitesse $u_1$ à quatre hauteurs dans le canal et pour quatre différents $r$ . Les pointillés représente la pente approchée de la courbe	15
8	Évolution du coefficient de corrélation $\gamma$ en fonction de $\omega$ pour différentes distances $r$ .	15
9	Comparaison des spectre de densité d'énergie issus de la théorie de von Kármán avec ceux issu des données LES et DNS. . . . .	16
10	Rapport des échelles de longueurs intégrales entre les données LES et la théorie von Kármán . . . . .	17
11	Comparaison entre la vitesse d'écoulement "streamwise" obtenue par moyennage et obtenu par calcul de la pente générer par les ellipses de la corrélation 2D (Figure 4) . .	19
12	Corrélation spanwise des grandeur de vitesse dans les trois directions . . . . .	20
13	Tracé de la fonction $\beta$ en fonction de $r$ pour la vitesse $u_1$ à quatre hauteurs dans le canal et pour quatre différents $\omega$ . . . . .	20
14	Comparaison des spectre de densité d'énergie issus de la théorie de von Kármán avec ceux issu des données LES et DNS. . . . .	21

# Tableaux

---

## Liste des tableaux

1	Paramètres des simulations numériques LES effectuées . . . . .	10
2	Hauteurs adimensionnelles auxquelles ont été relevées les quantités de vitesse . . . . .	10

# 1 Introduction

---

## 1.1 Motivations de l'étude

Les éoliennes font maintenant partie de notre paysage. Elles sont de plus en plus présentes sur terre (on-shore) et maintenant en mer (offshore). En effet le besoin en énergie électrique est grandissant alors que nous sommes en pleine crise écologique. Mais l'implémentation et la recherche de performances des éoliennes n'est pas sans encombre. Exposition au vent, taille, raccordement au réseau... Les enjeux sont nombreux. Ce travail s'inscrit dans l'objectif de diminution du bruit généré par les pales d'éolienne. Le domaine d'étude est celui de l'aéro-acoustique. Dans de nombreux pays des normes gouvernementales sur le bruit émis [1] sont mises en place dans le but de ne pas déranger les habitants aux alentours d'un parc éolien. Bien qu'aucune étude scientifique n'ait prouvé un quelconque effet nocif du bruit éolien sur la santé, de nombreuses plaintes ont été enregistrées de gens dérangés par ce bruit. Alors pour éviter que nos géants de métal ne deviennent un ennemi public, la réduction de leur effet sonore est nécessaire.

Pour appréhender ce problème il faut d'abord comprendre comment les éoliennes génèrent du bruit. La grande majorité du son émis vient des pales de l'éolienne. En effet quand le flux d'air rencontre une pale il est perturbé et comme il y a interaction entre un fluide et une structure alors il y a apparition d'une couche limite. Dans notre cas cette dernière est turbulente. En effet le bout de pale se déplace en moyenne à  $80\text{m/s}$  si on considère une éolienne classique. Dans l'étude de l'écoulement on a donc des Reynolds très élevés, de l'ordre de plusieurs milliers. La grande perturbation du flux d'air va engendrer la formation, tout autour de la pale, d'ondes de pression qu'on appelle plus communément le bruit. Là où le son est généré et le plus intense c'est au niveau du bord de fuite et plutôt en bout de pale. Il y a un lien de causalité directe entre turbulence et son émis. En revanche il est considéré que le son émis n'a pas d'impact sur la turbulence. C'est pourquoi la couche limite et le sillage turbulent des pales sont étudiés.

L'étude que j'ai menée s'inscrit dans le travail de développement d'un code de calcul couplant l'aérodynamique et l'acoustique. Mon travail ne s'intéressera qu'à la partie aérodynamique et plus précisément l'étude statistique d'une couche limite turbulente dans un canal parallélépipédique. Un code LES (Large Eddy Simulation) développé à DTU permet la simulation de la turbulence notamment dans un canal à air. À noter que celui-ci est très utile vu le coût d'une expérience en soufflerie. Afin d'étudier et de valider les résultats obtenus après calcul nous effectuerons une analyse statistique notamment dans le domaine spectral de la turbulence et principalement des variables de vitesse.

## 1.2 Plan

Nous commencerons par détailler les outils mathématiques qui ont été utilisés pour étudier la turbulence. Nous présenterons ensuite brièvement la simulation effectuée et les modèles utilisés. Ils ne seront pas présentés en détail car cela n'a pas fait l'objet du travail. L'idée était d'utiliser les résultats donnés afin de valider ces modèles et d'analyser la turbulence une fois validation. Nous présenterons par la suite les résultats obtenus selon plusieurs axes de recherche :

- Validation des hypothèses de modèles semi-empiriques incluant la reconstitution du tenseur spectral avec les données à partir d'approche RANS.

- Étudier l'impact de certaines hypothèses faites dans les modèles semi-empiriques :
  - turbulence isotrope dans la couche limite
  - distribution de l'énergie cinétique turbulente sur les 3 composantes et son évolution à travers la couche limite (étude de spectre d'énergie)
  - validité de l'hypothèse de turbulence figée (fluctuations turbulentes constantes au cours du temps)
  - évaluer des lois plus générales que la théorie de la turbulence isotropique de von Kármán.

\*\*\*

## 2 Approche statistique et spectrale de la turbulence

---

Dans cette section nous introduiront mathématiquement certains outils d'étude statistique de la turbulence notamment dans le domaine spectral [4]. Nous nous pencherons sur les spectres en énergie et les fonctions de corrélation.

### 2.1 Fonction de corrélation et ses propriétés

Dans l'analyse d'un problème de turbulence on utilise la décomposition de Reynolds afin de décrire chaque grandeur avec un terme moyen et un terme de fluctuation, en prenant en exemple le champ de vitesse,

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i \quad (1)$$

avec  $\langle U_i \rangle$  la vitesse moyenne (moyenne de Reynolds) et  $u_i$  les fluctuations.

Pour simplifier les équations nous utiliserons la notation d'Einstein de sommation implicite.

La fonction de corrélation  $R_{ij}$  se définit pour deux points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  ou deux temps  $t$  et  $t'$  tel que,

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) &= \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) \rangle \\ R_{ij}(\mathbf{x}, t, t') &= \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t') \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Dans le cas d'une turbulence homogène, c'est à dire qui conserve ses propriétés statistiques pour tout déplacement dans l'espace, alors  $R_{ij}$  dépend uniquement de  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) \rangle \quad (3)$$

Nous pouvons définir la fonction d'autocorrélation,

$$R_{ii}(0, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (4)$$

**Proposition 1** (Indépendance statistique asymptotique). *Quand  $r \rightarrow \infty$ ,  $R_{ij}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ . Plus les points considérés sont éloignés plus ils sont décorrélés.*

**Proposition 2.** *Quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $R_{ii}(0, t) \rightarrow 0$ . Un tourbillon se décorrèle de lui même au court du temps.*

Définissons à présent une fonction qui nous intéressera tout au long de notre étude, le spectre qui est la transformée de Fourier tridimensionnelle de la fonction de corrélation,

$$\phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (5)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde. En prenant la transformée de Fourier inverse on peut obtenir :

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \phi_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (6)$$

Maintenant en imposant  $i = j$  et  $\mathbf{r} = 0$  dans (6) on obtient,

$$\langle u_i u_i \rangle = R_{ii}(0, t) = \int \phi_{ii}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} \quad (7)$$

Alors il est possible de calculer le spectre en énergie nommé TKE par unité d'intensité de nombre d'onde (turbulent kinetic energy).

$$E(\kappa) = 2\pi\kappa^2 \phi_{ii} \quad [m^3.s^{-2}] \quad (8)$$

où  $\kappa = |\mathbf{k}|$ . On peut tracer le spectre d'énergie turbulente  $\log(E) = f(\log(k))$ . Ce spectre vérifie d'après (16) et (7),

$$\langle u_i u_i \rangle = 2 \int_0^\infty E(\kappa, t) d\kappa \quad (9)$$

## 2.2 Spectre unidimensionnel et propriété de turbulence figée

On considère l'espace représenté par le repère cartésien  $(O, x_1, x_2, x_3)$ . L'écoulement turbulent étudié est homogène dans la direction  $\mathbf{x}$  de l'espace. Alors on définit la corrélation spatiale à deux points  $R_{ij}(r_1, x_2, x_3, x'_2, x'_3, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) \rangle$  où  $r_1 = x_1 - x'_1$ . Le spectre spatial unidimensionnel est donc donné par,

$$\phi_{ij}^{[1]}(k_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R_{ij}(r_1, x_2, x_3, x_2, x_3, t) e^{-ik_1 r_1} dr_1 \quad (10)$$

où on a considéré  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sur une même ligne de direction  $x_1$ . Alors, si on considère  $x'_1 = x_1$  ( $r_1 = 0$ ) et que  $i = j$  on peut montrer avec une transformée de Fourier inverse que:

$$\langle u_i u_i \rangle = 2 \int_0^\infty \phi_{ii}^{[1]}(k_1, x_2, x_3, t) dk_1 \quad (11)$$

À présent considérons la fonction de corrélation en temps  $R_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t') \rangle$  au même point mais à deux temps différents. Il est alors possible d'obtenir la fonction spectrale en fréquence :

$$\psi_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R_{ij}(\mathbf{x}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (12)$$

où  $\omega$  représente les fréquences. On peut obtenir de même :

$$\langle u_i u_i \rangle = \int_{-\infty}^\infty \psi_{ii}(\omega, \mathbf{x}) d\omega \quad (13)$$

Expérimentalement, les mesures de vitesse d'écoulement à plusieurs points au même moment ne sont pas faciles à effectuer. On aimerait bien pouvoir relever les caractéristiques de la turbulence en un point à plusieurs temps et en déduire des informations sur l'évolution des structures spatiales. C'est pourquoi on fait l'hypothèse suivante:

**Proposition 3** (Hypothèse de turbulence figée ou de Taylor). *On considère que les structures spatiales d'intérêt ne change pas de manière significative durant le temps de leur passage le long de la ligne de mesure.*

Ainsi, on suppose que l'échelle de temps liée à la dynamique des tourbillons est grande devant le temps de parcours du fluide dans la cavité de mesure. Dans le cas d'un écoulement de direction préférentiel  $x_1$  cela peut s'exprimer tel que :

$$u_i = u_i(x_1 - \langle U_1 \rangle t, x_2, x_3) \quad (14)$$

Un des aspect de cette étude sera de vérifier si cette hypothèse est vérifiée dans le cas des calculs LES effectués.

Dans les écoulements stationnaire où cette hypothèse est vérifié on peut alors montrer que :

$$\phi_{ij}^{[1]}(k_1, x_2, x_3) = | \langle U_1 \rangle | \psi_{ij}(\langle U_1 \rangle k_1, x_2, x_3) \quad (15)$$

Cette expression relie le spectre en fréquence et le spectre unidimensionnel en nombre d'onde. Cela met en évidence la relation  $\omega = \langle U_1 \rangle k_1$  entre la fréquence et le nombre d'onde unidimensionnel pour des composantes de Fourier convectés à une vitesse moyenne  $\langle U_1 \rangle$ .

\*\*\*

### 3 Résultats théorique à partir du modèle de von Kármán de la turbulence

---

Dans cette section nous allons définir certaines des expressions des spectres en utilisant les résultat de von Kármán en 1948 [5] sans pour autant en dresser une liste exostive. Par la suite l'objectif sera de comparer le modèle de von Kármán théoriques avec les données issues des calculs LES à Reynolds variables.

Le modèle utiliser par von Kármán vient de l'expression du spectre d'énergie (16) sous l'hypothèse que la turbulence est isotropique [7],

$$E(\kappa) = \frac{4\Gamma(\nu + 5/2)}{3\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \frac{\sigma^2 \kappa^4 l^5}{(1 + \kappa^2 l^2)^{\nu+5/2}} \quad (16)$$

où  $\sigma^2$  est la variance,  $\kappa$  est l'intensité du vecteur d'onde,  $l$  "the length scale",  $\Gamma()$  est la fonction gamma et  $\nu$  est un paramètre qui définit la loi de puissance dans la zone inertiel ( $\kappa l \gg 1$ ). Pour notre étude il sera fixé à  $1/3$  afin de retrouver la loi de puissance de Kolmogorov de  $-5/3$  [2].

De cette expression il est possible d'obtenir les spectres 'streamwise' avec une intégration par rapport à  $k_2$  et  $k_3$  des spectres d'énergie  $E_{11}(\kappa)$ ,  $E_{22}(\kappa)$  et  $E_{33}(\kappa)$ :

$$\phi_{11}^1(k_c, z) = \frac{36\Gamma(17/6)\sigma_1 l}{55\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)} \frac{1}{(1 + (k_c l)^2)^{5/6}} \quad (17)$$



$$\phi_{22}^1(k_c, z) = \frac{6\Gamma(17/6)\sigma_2 l}{55\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)} \frac{(3 + 8(k_c l)^2)}{(1 + (k_1 l)^2)^{11/6}} \quad (18)$$

$$\phi_{33}^1(k_c, z) = \frac{6\Gamma(17/6)\sigma_3 l}{55\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)} \frac{(3 + 8(k_c l)^2)}{(1 + (k_1 l)^2)^{11/6}} \quad (19)$$

avec  $\sigma_i = \langle u_i u_i \rangle$ ,  $l = C \frac{k_T^{3/2}}{\varepsilon}$ ,  $k_c = \frac{\omega}{U_c}$ .

Ce sont ces trois spectres que nous chercherons à comparer avec ceux obtenu à partir des données issus des modèles LES dans la section 9. Nous expliquerons donc dans la dîtes section comment nous obtenons les valeurs de  $l$  et  $k_c$ .

\*\*\*

## 4 Modèles WMLES et WRLES

---

Pour commencer à décrire l'étude qui ont été menée et les résultats qui ont été obtenues durant ce stage nous devons tout d'abord parler des modèles LES (large eddy simulation) de simulation numérique qui nous on permis l'aquisition de données sur la turbulence. Nous ne détaillerons pas mathématiquement et numériquement ces modèle de simulation d'écoulement turbulent car ce n'est pas l'objet de ce rapport.

Les données analysés par la suite viennent de la simulation d'un écoulement turbulent en régime établie dans un canal droit parallélépipédique ("channel flow") (Figure 1). Les bord nord et sud par rapport au sens de l'écoulement sont des mures (condition 'Wall') et le reste des bords sont périodiques. Par la suite nous dénommerons l'axe de l'écoulement "streamwise" ( $\vec{x}$ ), l'axe normal au mure "wall-normal" ( $\vec{z}$ ) et l'axe normal au deux précédent "spanwise" ( $\vec{y}$ ).

Sur la Figure 1 une seul ligne de mesure dans les direction  $x$  et  $y$  est représenter par soucis de clarté. Dans nos simulation nous en avons utiliser entre 5 et 10 selon le modèle. Le détaille des maillages et des paramètres utilisés dans les simulations est présent dans la section suivante.

La Large Eddy Simulation (LES) est une méthode de simulation numérique utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes en modélisant les écoulements turbulents. Contrairement aux méthodes plus simplifiées comme les Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS), qui modélisent toute la turbulence, la LES se concentre sur une approche plus fine. Elle consiste à résoudre explicitement les grandes structures tourbillonnaires de l'écoulement (grandes échelles) tout en modélisant les plus petites structures (petites échelles) qui ne peuvent être capturées directement.

La méthode LES repose sur un filtrage spatial des équations de Navier-Stokes. Ce filtrage sépare les grandes échelles (résolues) des petites échelles (modélisées via un modèle de sous-maillages). L'idée principale est que les grandes échelles de turbulence sont spécifiques à l'écoulement et doivent être directement simulées, tandis que les petites échelles, supposées plus universelles, peuvent être modélisées avec un modèle de turbulence de sous-maillages. Au niveau des parois la résolution des petites échelles devient nécessaire et donc les méthode LES sont assez coûteuses même si le coup varie beaucoup en

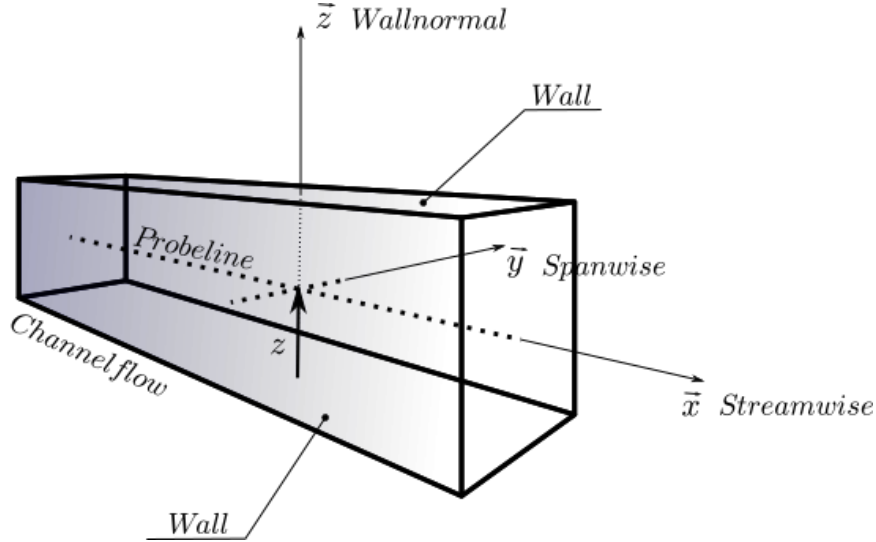


Figure 1: Schéma de la simulation "channel flow"

fonction du sous modèle choisi.

Dans notre étude nous avons utilisé deux sous modèles de type LES : le Wall-Resolved LES (WRLES) et le Wall-Modeled LES (WMLES).

Le modèle WRLES résout explicitement toutes les structures turbulentes, y compris celles présentes dans la couche limite proche des parois. Cela signifie qu'une résolution extrêmement fine est nécessaire à proximité de la paroi pour capturer les petites échelles de la turbulence. En pratique, cette approche est coûteuse, car la taille des mailles doit être très petite dans cette région, d'autant plus que le nombre de Reynolds est élevé.

Le modèle WMLES est une approche hybride dans laquelle on utilise un modèle de paroi (wall model) pour modéliser l'écoulement turbulent à proximité des parois, tandis que les grandes échelles turbulentes loin des parois sont résolues de manière explicite par la LES. En d'autres termes, la WMLES évite la nécessité de résoudre explicitement les petites structures turbulentes dans la couche limite, ce qui permet d'utiliser une grille plus grossière près des parois, réduisant ainsi les coûts de calcul.

\*\*\*

## 5 Analyse simple des variables de vitesse turbulente afin de valider les jeux de données

---

Dans cette section nous réalisons une analyse visuelle et comparative des données de sortie obtenu afin de voir si les résultats correspondent au attente d'une simulation d'écoulement turbulent dans un "channel flow". Les paramètres utilisées pour les trois simulations dans le tableau 1:

Afin de valider les résultats des calculs LES nous avons à disposition des données issues de calculs DNS (Direct Navier-Stokes) [3]. Aussi concernant le cas  $Re = 395$ , un calcul utilisant un modèle RANS ( $k - \omega$ ) à été effectué. Pour que les résultats soit comparable les données on été relevées aux même

Grandeurs	WRLES $Re_\tau = 395$	WMLES $Re_\tau = 1000$	WRLES $Re_\tau = 1000$
Dimension du canal ( $x \times y \times z$ )	$2\pi \times \pi \times 2$	$4\pi \times 1.5\pi \times 2$	$4\pi \times 1.5\pi \times 2$
Masse volumique fluide	$\rho = 1.0$	$\rho = 1.0$	$\rho = 1.0$
Vitesse à "l'infinie"	$u_\infty = 1.0$	$u_\infty = 1.0$	$u_\infty = 1.0$
Grille ( $N_x \times N_y \times N_z$ )	$256 \times 128 \times 1936$	$192 \times 96 \times 96$	$640 \times 257 \times 320$
Nombre d'iteration	$N_{iter} = 50000$	$N_{iter} = 75000$	$N_{iter} = 150000$
Pas de temps	$\delta t = 0.01$	$\delta t = 0.01$	$\delta t = 0.004$
Nombre de Reynolds	$Re = 13800.0$	$Re = 40000.0$	$Re = 40000.0$
Reynolds de frottement	$Re_{\tau\tau} = 388.97$	$Re_{\tau\tau} = 968.55$	$Re_{\tau\tau} = 980.86$
Viscosité dynamique	$\mu = 0.000145$	$\mu = 5e - 05$	$\mu = 5e - 05$
Viscosité cinématique	$\nu = 0.000145$	$\nu = 5e - 05$	$\nu = 5e - 05$
Vitesse de frottement	$u_\tau = 0.0564$	$u_\tau = 0.0484275$	$u_\tau = 0.0484275$

Table 1: Paramètres des simulations numériques LES effectuées

auteurs adimensionnelles que les calculs DNS (tab. 2).

Modèles	localisation normal ( $z^+$ )
WRLES $Re_\tau = 395$	5, 20, 40, 98, 151, 199, 251, 302, 392,
WMLES $Re_\tau = 1000$	151, 199, 251, 302, 380.04, 392, 503.63, 638.27, 762.79, 990.67
WRLES $Re_\tau = 1000$	20, 40, 98, 151, 199, 251, 302, 380.04, 392, 503.63, 638.27, 762.79, 990.67

Table 2: Hauteurs adimensionnelles auxquelles ont été relevées les quantités de vitesse

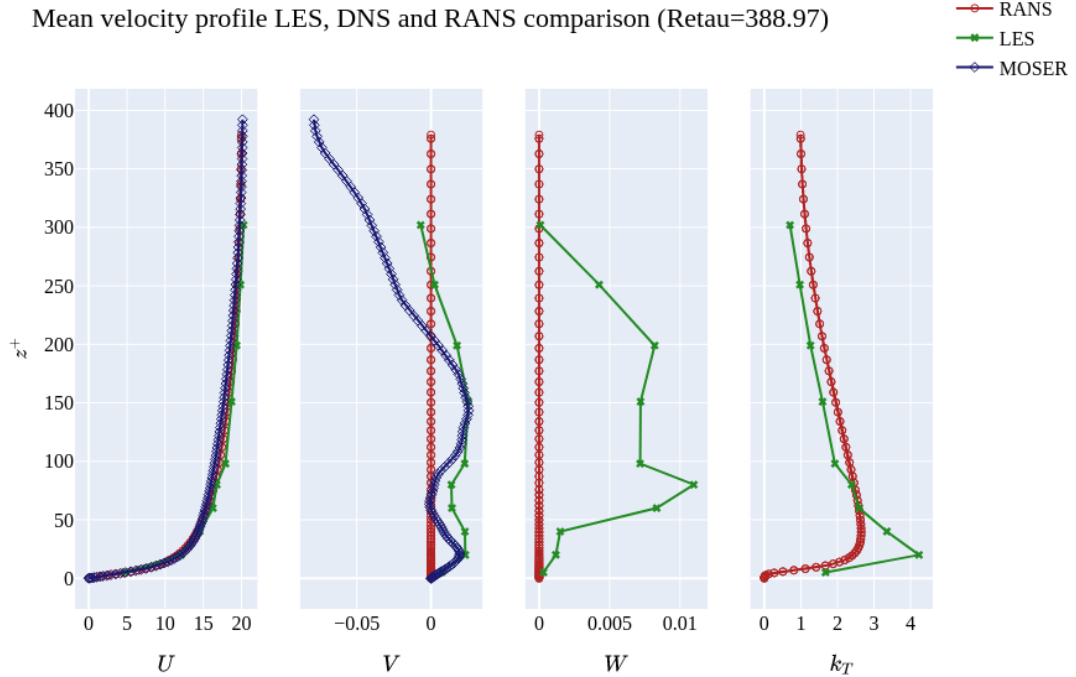


Figure 2: Profils de vitesse moyenne addimensionnée et d'énergie cinétique turbulente. Les données ont été comparées aux profils des données DNS et RANS quand cela était possible.

Les grandeurs relevées auxquelles nous nous sommes intéressé dans ce travail sont les vitesses "stream-wise" ( $u_x, u_1$  ou  $u$ ), "spanwise" ( $u_y, u_2$  ou  $v$ ) et wall-normal ( $u_z, u_3$  ou  $w$ ). Nous noterons par la suite les vitesses moyennes turbulentes avec des majuscules ( $U, V, W$ ) et les fluctuations turbulentes de vitesse avec des minuscules ( $u, v, w$ ).

Regardons les profils de vitesse moyenne et des composantes du tenseur de Reynolds ainsi que le profil d'énergie cinétique turbulente,  $k_T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$  tracé en **Figures 2 et 3**. Toutes ces vitesses ont été addimensionnées par la vitesse de frottement  $u_\tau$ . Les vitesses moyennes sont obtenues en faisant une moyenne à la fois en temps et en espace. Pour obtenir les fluctuations turbulentes on soustrait cette moyenne aux données brutes.

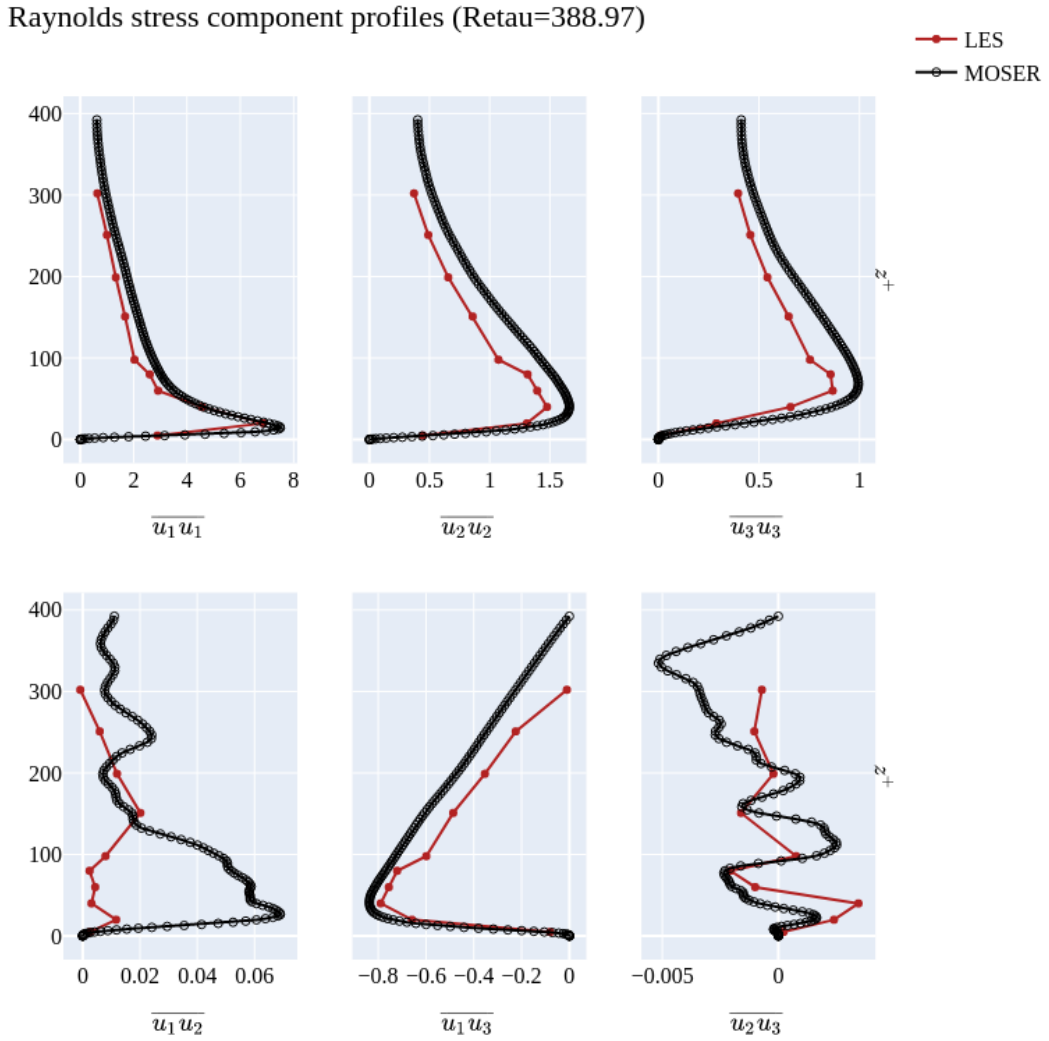


Figure 3: Profiles de fluctuation. Les données ont été comparées au profiles des données DNS.

Les profils de vitesse "steamwise" sont comparables aux données DNS et RANS. Par ailleurs les vitesses "spanwise" et "wall-normal" sont petites devant cette dernière et le comparatif est donc un peu moins idéal. On observe un certain décalage dans la comparaison des composantes du tenseur de Reynolds pour celles incluant  $u_2$  et  $u_3$ . Ces écarts sont attendu car la DNS est une méthode de résolution directe des équation de Navier-Stokes et donc les résultats sont plus précis que pour le cas

de la LES un filtrage est appliqué aux petites structures. Dans un grand nombre de cas concernant la simulation numérique appliqué à la mécanique des fluides, afin de vérifier la véracité des calculs d'un modèle on les compare à une simulation simple calculé avec un modèle DNS considéré alors comme une solution quasi-exact. Malgré ces différence dû au modèle utilisé les profils restent semblables et les données sont donc utilisable pour une analyse plus approfondie. La même étude à été mener pour les deux modèles à Reynolds 1000.

Maintenant que les jeux de données semble correcte nous allons pouvoir nous intéresser à l'hypothèse de turbulence figée (prop. 3). Dans la théorie de résolution cette hypothèse est fait on veut donc voir si les résultats du calcul la confirme.

\*\*\*

## 6 Validation de l'hypothèse de turbulence figée

Pour cette section nous nous appuierons sur l'équation 15 qui traduit mathématiquement l'hypothèse de turbulence figée. Notons que les figures données par la suite correspondrons au modèle WRLES- $Re_\tau 395$  Nous voulons vérifier que le spectre calculer par rapport à l'espace est à une constante près égale au spectre calculer par rapport au temps. Cette constante correspond à la vitesse de convection moyenne du fluide dans le sens de son écoulement dans le canal qu'on notera  $U_c$ . Il faut donc tout d'abord trouver cette constante. Pour cela nous allons calculer la fonction d'autocorrelation bidimensionnelle  $R(\delta t, \delta x)$  et tracer ses iso-valeur sur le plan  $(\delta x, \delta t)$  (**Figure 4**). La pente définie par la direction des ellipses correspond à  $\frac{1}{U_c}$ .

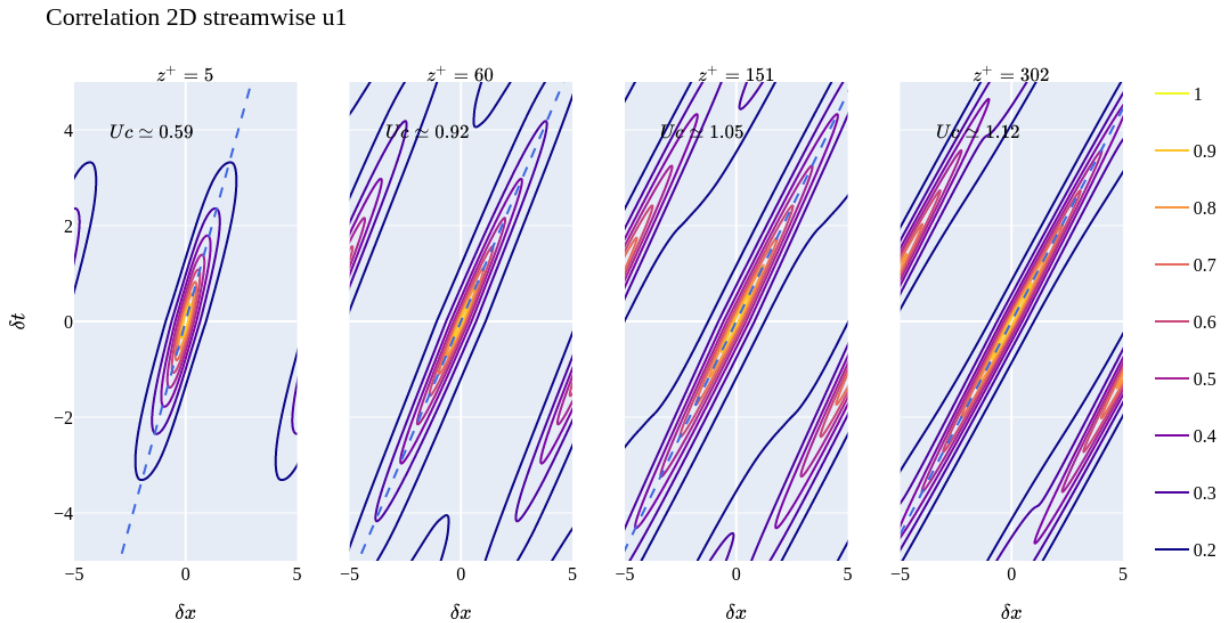


Figure 4: Iso-valeur de la fonction d'autocorrelation 2D selon la direction  $x$  et le temps  $t$  à différentes hauteurs  $z^+$ . Obtention de la valeur de  $U_c$  par approche linéaire de la direction des ellipses.

Les valeurs de  $U_c$  trouver doivent se rapprocher des valeurs moyennes de vitesse "streamwise"  $U_1$  (cf. **Annexe Figure 11**).

A présent on calcule le spectre selon  $k$  (espace) et le spectre selon  $\omega$  (temps) en utilisant la méthode de Welch [6] avec une fenêtre de "hann". En regardant la **Figure 5** on peu conclure que l'équation 15 est vérifié et que l'hypothèse de turbulence figée est donc bien admissible dans notre simulation.

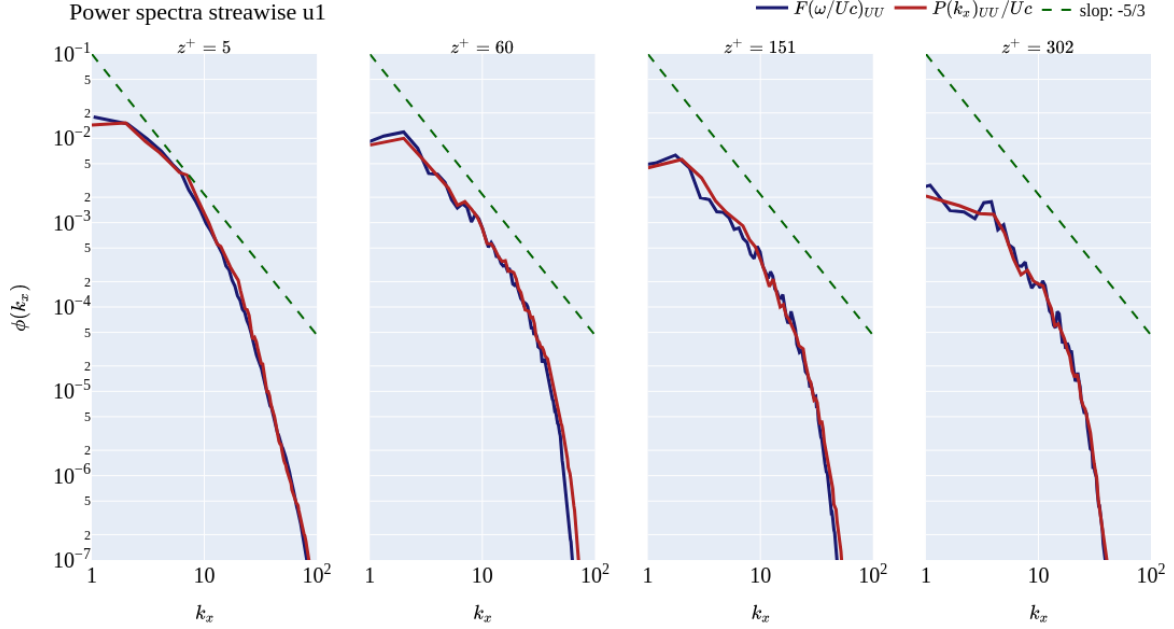


Figure 5: Comparaison des spectres de puissance en temps ( $F$ ) et dans la direction  $x$  ( $P$ ) tracer en fonction de  $k_x$  le nombre d'onde "streamwise". En pointillé (- -) la pente  $k_x^{-5/3}$  vérifiant la décroissance de Kolmogorov [2]

\*\*\*

## 7 Détermination du coefficient de décorrélation

Une grandeur statistique intéressante à regarder est la corrélation (Équation 3) afin de voir son évolution en fonction de  $r = \delta x$  par rapport à un point de référence.

Pour points de référence nous prendrons les premiers point à  $x = \delta x$  à quatre hauteurs différentes. En **Figure 6** vous trouverez les courbes d'auto-corrélation ( $R_{UU}$ ,  $R_{VV}$ ,  $R_{WW}$ ) de vitesses dans les trois directions selon les points de relevés "streamwise". En annexe est présenté la même figure mais pour les relevés "spanwise", **Figure 12**

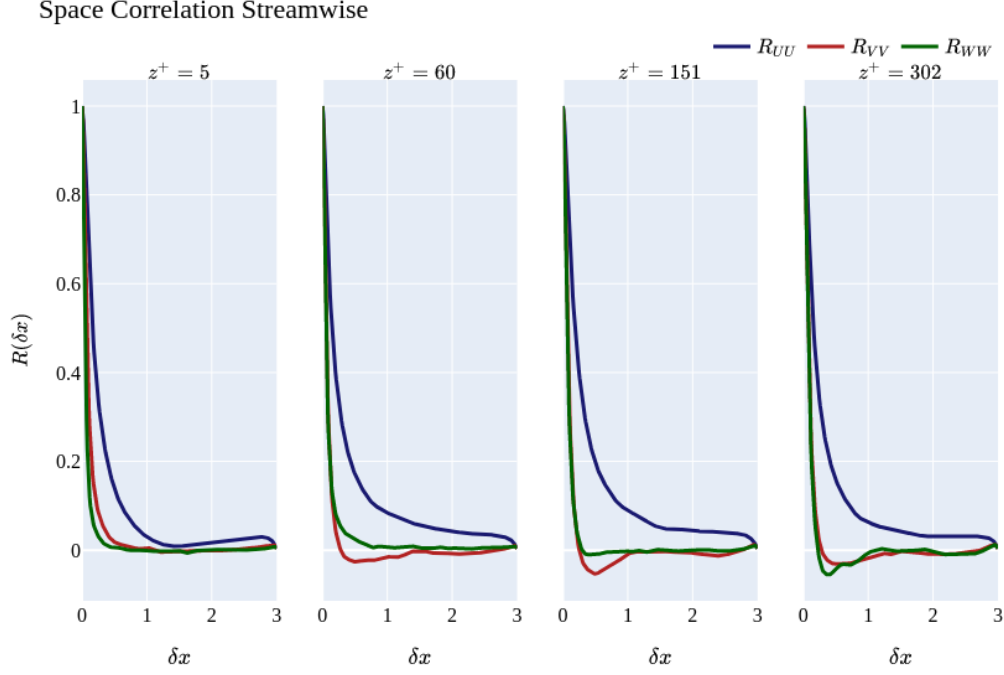


Figure 6: Corrélation streamwise des grandeur de vitesse dans les trois directions

À présent nous cherchons à déterminer le coefficient de décorrélation qu'on nommera  $\gamma$ . Si on suppose que l'écoulement est isotrope, homogène dans la direction de détermination du coefficient et que l'hypothèse de turbulence figée est vérifiée alors on peut déterminer l'équation suivante:

$$\phi(r, \omega) = \frac{e^{-|\gamma k_c r| + j k_c r}}{U_c} \phi(\omega) \quad (20)$$

avec  $r = \delta x$ ,  $k_c = \omega/U_c$  le nombre d'onde "streamwise",  $\gamma$  le coefficient de décorrélation et  $j$  le nombre imaginaire tel que  $j^2 = -1$ . Le spectre  $\phi(\omega)$  à été calculé avec la méthode de Welch et le spectre  $\phi(\delta x, \omega)$  à été calculé en appliquant une transformé de Fourier à la fonction de corrélation bidimensionnelle  $R_{ii}(r, \tau)$  en fonction du temps.

Ainsi il est possible de tracer  $\beta = |\gamma k_c r|$  en fonction de  $k_c$  (ou  $\omega$ ) (**Figure 7**) ou  $r$  (**Figure 13 Annexe**) et de déterminer  $\gamma$ . Dans la littérature on trouve des coefficients de décorrélation de l'ordre de 0.3. Une fois  $\beta$  tracé on a alors le coefficient de pente calculer en **Figure 7**,  $c = \gamma r/U_c$ . On peut donc déterminer le coefficient de décorrélation dont on a donné les valeurs en **Figures 8** pour les trois composantes de vitesse.

Il semblerait que nous n'obtenions pas le coefficient attendu, notamment pour des points très rapprochés ( $r$  petits). En effet ceci se trouve autour de  $\gamma = 6$  ce qui est aberrant. Cela signifie sûrement que le modèle pris pour déterminer l'équation 20 ne s'applique pas dans notre cas. Par exemple dans la réalité des mesure nous savons que l'isotropie n'est pas vérifié.

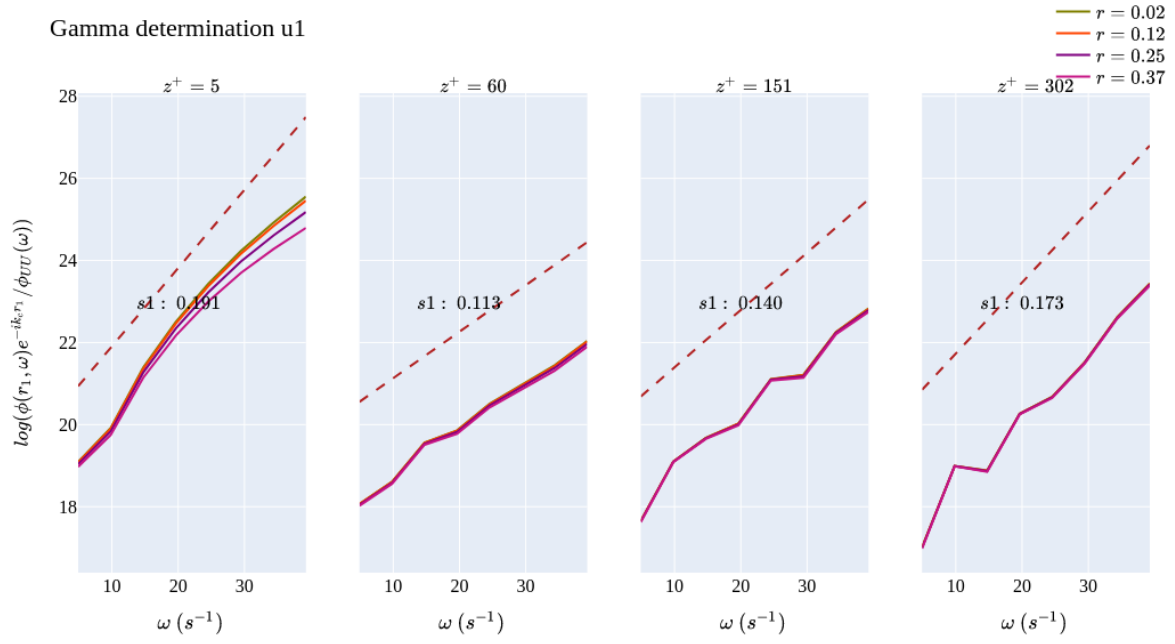


Figure 7: Tracé de la fonction  $\beta$  en fonction de  $k_c$  pour la vitesse  $u_1$  à quatre hauteurs dans le canal et pour quatre différents  $r$ . Les pointillés représente la pente approchée de la courbe

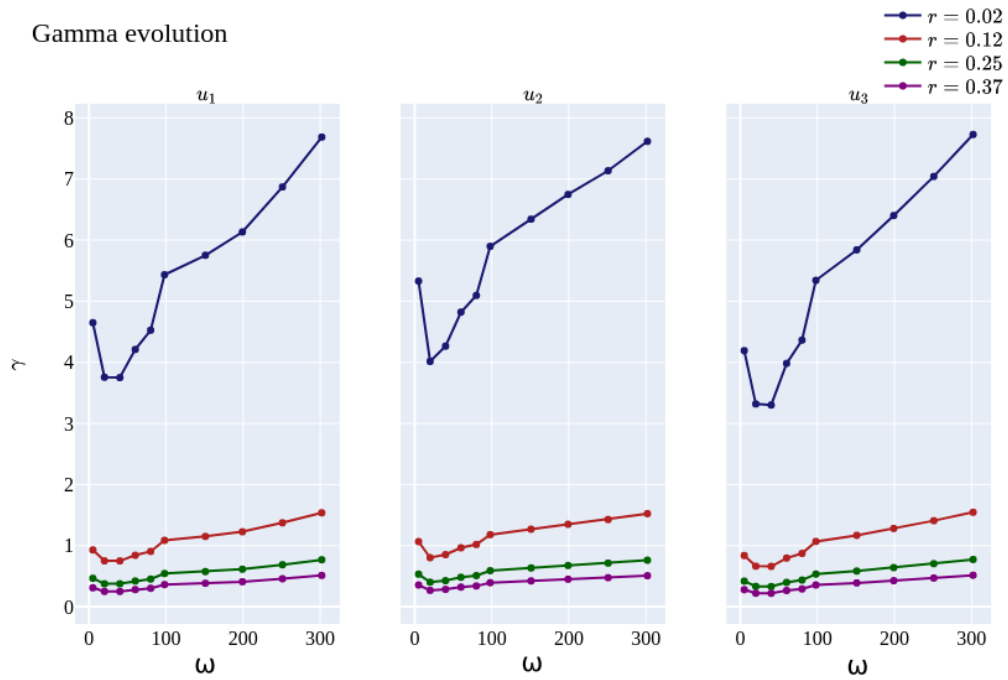


Figure 8: Évolution du coefficient de corrélation  $\gamma$  en fonction de  $\omega$  pour différentes distances  $r$

\*\*\*



## 8 Comparaison des spectres avec la théorie de von Kármán

Nous voulons maintenant comparer les résultats spectrales obtenu avec les modèles LES et les spectres obtenus avec la théorie de von Kármán explicités en section 3. Nous comparons aussi ces résultats au données DNS [3].

La théorie de von Kármán s'appui sur l'hypothèse d'isotropie qui n'est pas valide dans le cas des modèles LES. Nous voulons donc quantifié les écarts en énergie que la théorie de von Kármán à avec les modèles LES et DNS. Pour cela nous utilisons les équations 17, 18 et 19 pour calculer les spectres de densité d'énergie selon la théorie de von Kármán. Les spectres issus des données LES sont quant à eux calculés grâce à la méthode de Welch en espace (**Figure 9**). La pente de coefficient  $-\frac{5}{3}$  à été tracé en pointillé sur la **Figure 9** afin de vérifier la théorie de Kolmogorov. Pour une meilleur visibilité notamment pour les  $z^+ = 60, 151, 302$  vous pouvez vous référer à la **Figure 14** en annexe.

Les résultats LES et DNS sont quasiment similaire. Cela confirme que notre calcul LES est bon. Pour autant un écart assez conséquents ce remarque avec la théorie de von Kármán. Comme dans la théorie de von Kármán le spectre s'étend sur un nombre d'onde infinie nous remarquons que les spectres théorique sont bien plus étendus. Nous voulons donc s'avoir si la quantité d'énergie, c'est à dire mathématiquement "integral length scale", sont équivalentes. En **Figure 10** on constate que le rapport de ces grandeurs sont entre 2 et 3. La théorie de von Kármán n'est donc pas une parfaite approximation des phénomènes de turbulence en canal pour autant dans certain cas ce modèle théorique peut rester une bonne approximation.

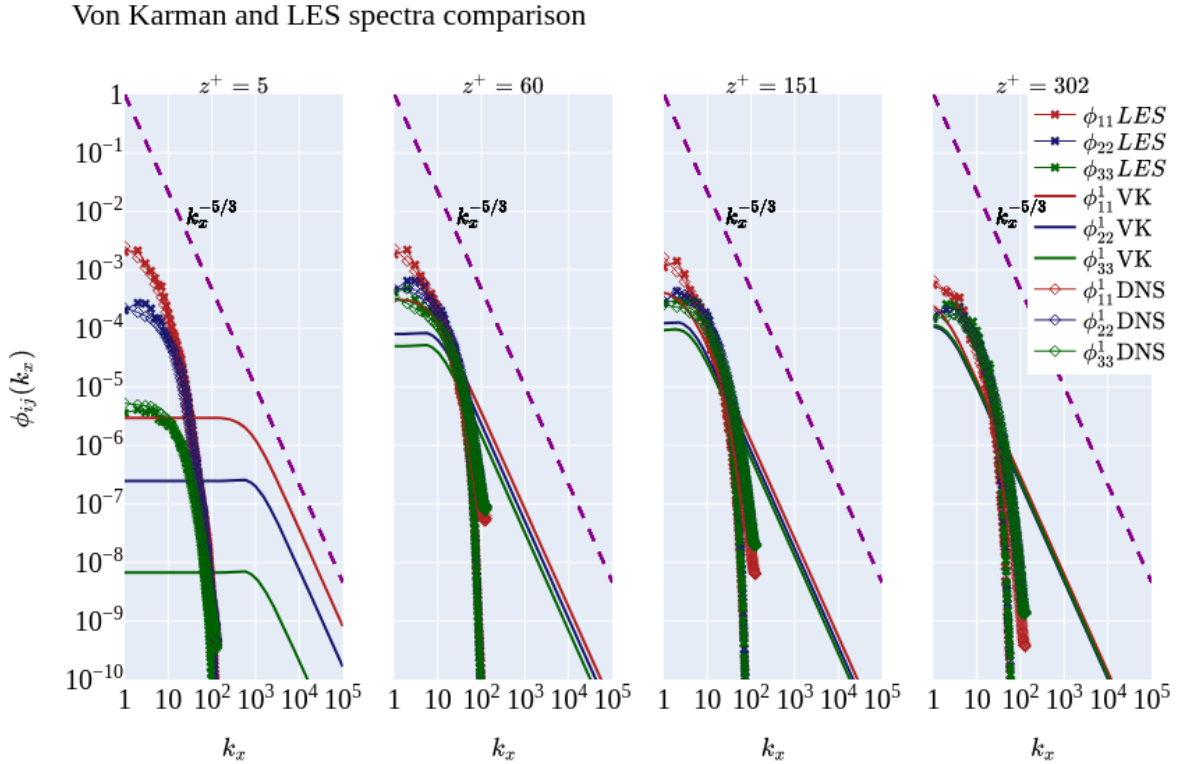


Figure 9: Comparaison des spectre de densité d'énergie issus de la théorie de von Kármán avec ceux issu des données LES et DNS.

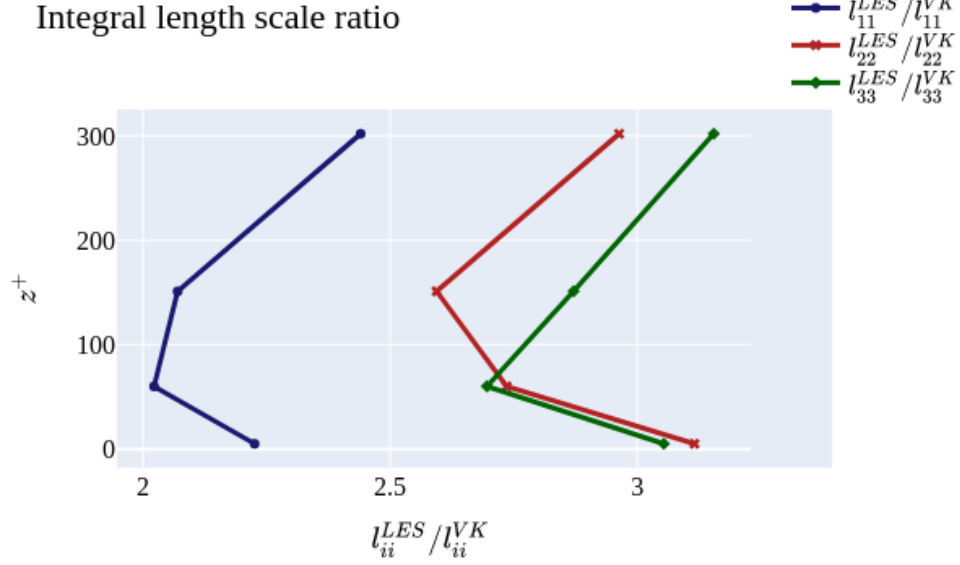


Figure 10: Rapport des échelles de longueurs intégrales entre les données LES et la théorie von Kármán

\*\*\*

## 9 Conclusion

Notre travail a permis dans un premier temps de valider les résultats du code LES. Par la suite nous avons vérifié une hypothèse forte, celle de turbulence figée. Avec ces deux résultats cela permet d'être confiant quant à l'utilisation des modèles WRLES et WMLES dans le cas d'une simulation en soufflerie comme celle détaillée dans le rapport. On a pu par la suite chercher à retrouver le coefficient de décorrélation. Cela n'a pas abouti à de résultats convainquants mais pour autant il reste intéressant vis à vis de la validité de l'équation 20 dans notre cas. Pour finir nous avons pu observer les écarts entre la théorie de von Kármán et les résultats numériques LES et DES dans notre configuration. À notre connaissance, cela n'avait pas été fait auparavant et on a pu constater que dans notre cas la théorie de von Kármán ne permet pas de recouvrir toutes l'énergie que nous obtenons avec les résultats de simulation.

Dans ce rapport seulement les résultats du modèle WRLES - Retau395 ont été montrés car ils ont représenté la majorité du travail effectué. Pour autant les calculs et des résultats ont aussi été obtenus sur les modèles à  $Re_\tau = 1000$ . De plus une comparaison entre les deux modèles WRLES et WMLES pourrait faire l'objet de suite à ce travail. En effet au niveau temps de calcul le modèle WMLES est bien plus rapide. Il faudrait donc voir si les résultats donnés par celui-ci sont assez satisfaisants par rapport au modèle WRLES afin de déterminer lequel est le plus intéressant de choisir dans le cas de notre simulation.

L'objectif à terme est de pouvoir utiliser le code établi durant ces trois mois pour effectuer des calculs similaires sur une simulation de pale d'éolienne en soufflerie. En revanche dans ce nouveau cas l'écoulement n'est plus homogène dans aucune direction ce qui rend les calculs plus compliqués.

Le code à été écrit de sort à ce qu'il soit modulaire et donc facilement malléable. Il serait donc assez simple, au niveau de la programmation, d'adapter le code au cas d'une pâle. En revanche il faudrait faire attention aux calculs qui n'ont plus de sens dans ce cas précis.

## 10 Figure annexe

---

Dans cette annexe j'ai seulement voulu présenter quelques figures de plus pour préciser certains points évoqué dans le rapport.

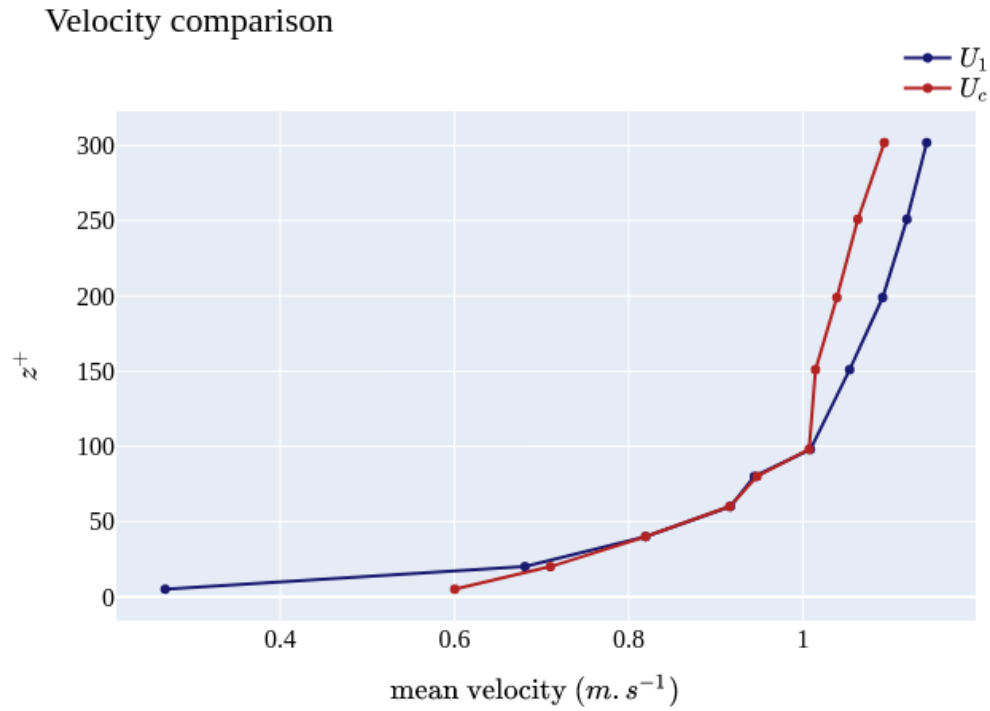


Figure 11: Comparaison entre la vitesse d'écoulement "streamwise" obtenue par moyennage et obtenu par calcul de la pente générer par les ellipses de la corrélation 2D (Figure 4)

### Space Correlation Spanwise

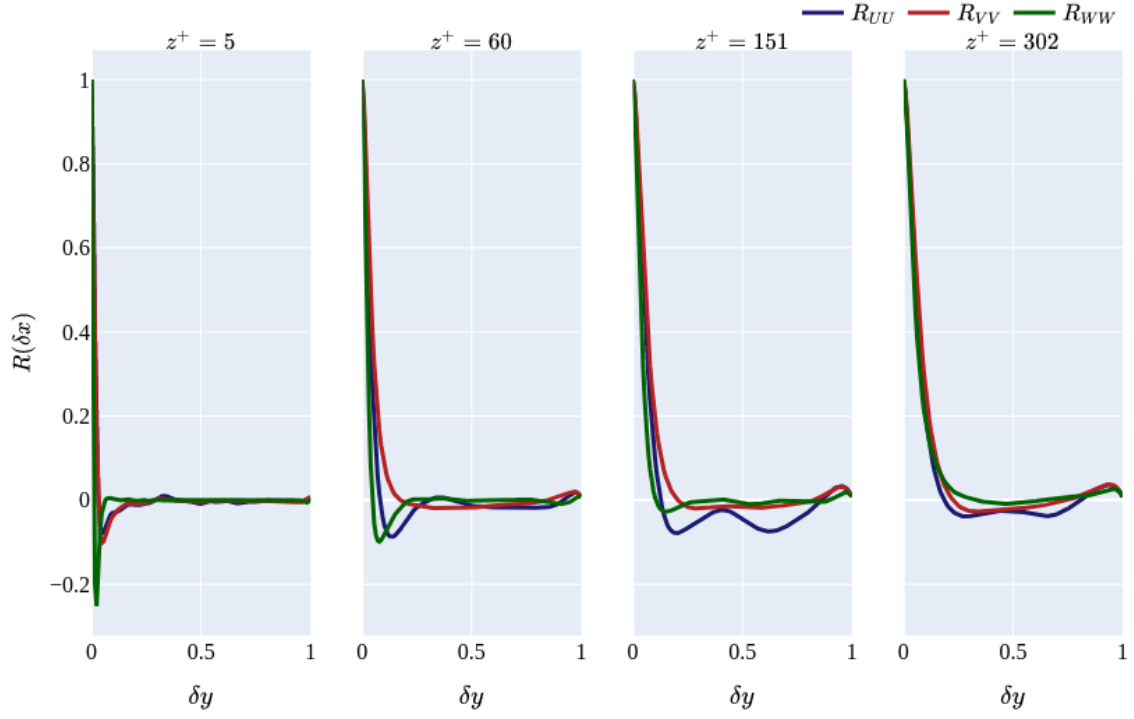


Figure 12: Corrélation spanwise des grandeur de vitesse dans les trois directions

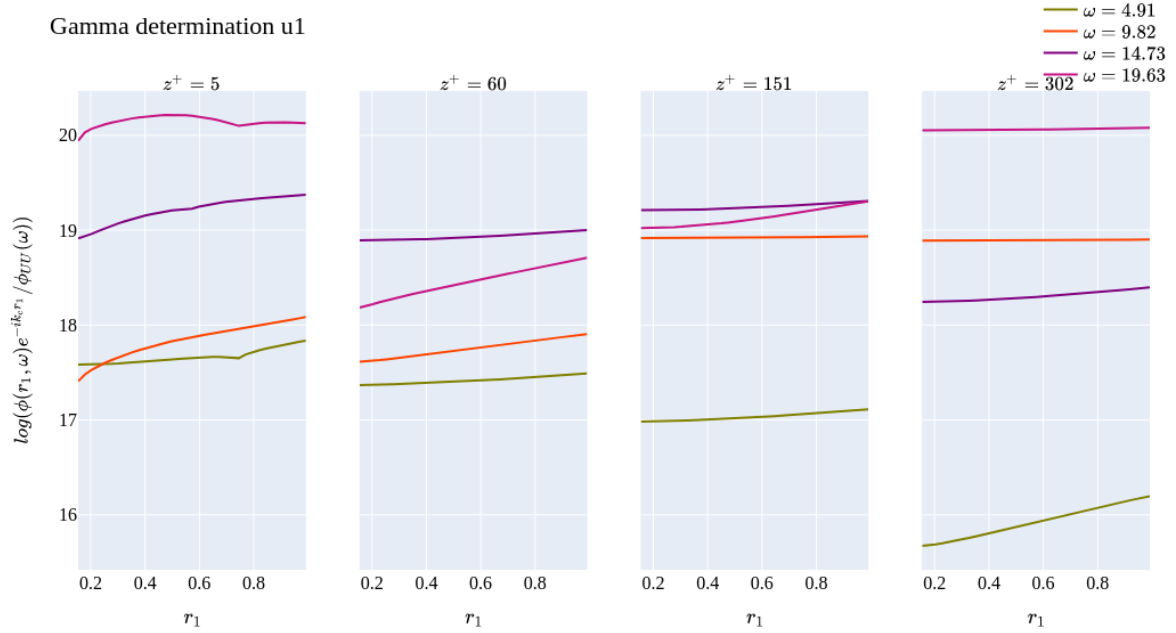


Figure 13: Tracé de la fonction  $\beta$  en fonction de  $r$  pour la vitesse  $u_1$  à quatre hauteurs dans le canal et pour quatre différents  $\omega$

# Von Karman and LES spectra comparison

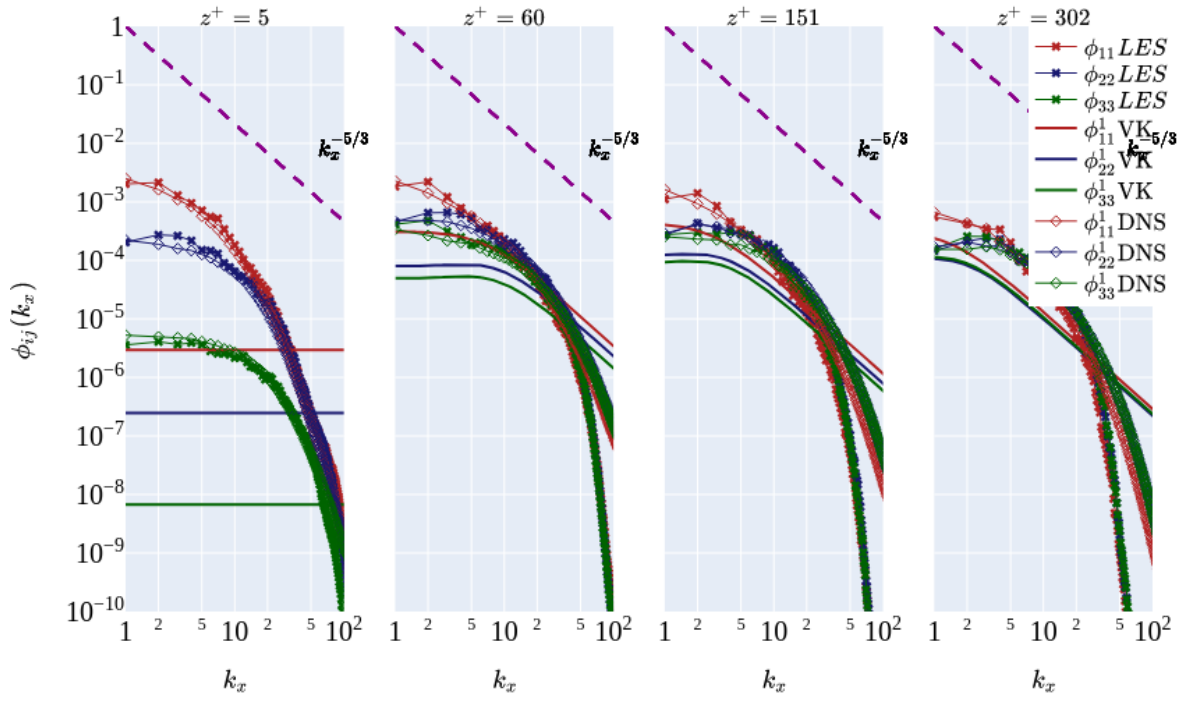


Figure 14: Comparaison des spectre de densité d'énergie issus de la théorie de von Kármán avec ceux issu des données LES et DNS.

## 11 Annexe CREL

---

## References

- [1] Protocole de mesure de l'impact acoustique d'un parc éolien terrestre. 2023.
- [2] Andrei Nikolaevich Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 434(1890):9–13, 1991.
- [3] Myoungkyu Lee and Robert D Moser. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to. *Journal of fluid mechanics*, 774:395–415, 2015.
- [4] Jean Mathieu and Julian Scott. *An introduction to turbulent flow*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] T. Von Karman. Progress in the statistical theory of turbulence. proceedings of the national academy of sciences. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 34(11):530–539, 1948.
- [6] P. Welch. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2):70–73, 1967.
- [7] D Keith Wilson. Turbulence models and the synthesis of random fields for acoustic wave propagation calculations. *Army Research Laboratory: Adelphi, MD, USA*, 1998.