isep Diamniadio

Outils mathématiques

Matrices 1

M. Pape Ibrahima Niang

Diamniadio

Qu'est-ce qu'une matrice ?

Une **matrice** est un tableau de nombres qui comporte des lignes et des colonnes.
Par exemple, la matrice A est une matrice qui a **2 lignes** et **3 colonnes**.

$$\begin{array}{cccc} & \text{3 colonnes} & & \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \\ A = & \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} & \text{2 lignes} \end{array}$$

Dimension d'une matrice

La dimension d'une matrice indique le nombre de ses lignes et le nombre de ses colonnes dans cet ordre.

La matrice A a 2 ligne et 3 colonnes3 colonnes elle est de dimension 2×3
(on dit de dimension 2 3).

La matrice B a 3 lignes et 2 colonnes, donc c'est une matrice de dimension 3 x 2

$$B = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 23 & 12 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$$

Donc pour la dimension d'une matrice, ne pas oublier que c'est lignes x colonne

Les éléments d'une matrice

On repère chacun des **éléments** d'une matrice grâce à son numéro de ligne et à son numéro de colonne.

Par exemple, soit la matrice G :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 14 & -7 \\ 18 & 5 & 13 \\ -20 & 4 & 22 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a_{21}}$ est l'élément qui se trouve sur la 2ème ligne et la 1ère colonne

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 14 & -7 \\ 18 & 5 & 13 \\ -20 & 4 & 22 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a_{2,1}} = \mathbf{18}$$

$\mathbf{a_{ij}}$ désigne l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.

Matrice

- Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de K.
- Elle est dite de taille **n×p** si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de la. matrice A.
- Le coefficient situé à la **i-ème ligne** et à la **j-ème** colonne est noté **ai,j**.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{ou} \quad (a_{i,j}).$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

- Deux matrices sont **égales** lorsqu’elles ont la **même taille** et que les coefficients correspondants **sont égaux.**
- L’ensemble des matrices à **n lignes** et **p colonnes** à coefficients dans K est noté **Mn,p(K)**. Les éléments de **Mn,p(R)** sont appelés **matrices réelles.**

Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

- Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite *matrice carrée*. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

  Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ forment la *diagonale principale* de la matrice.
- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée *matrice ligne* ou *vecteur ligne*. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \end{pmatrix}.$$

- De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée *matrice colonne* ou *vecteur colonne*. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}.$$

- La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la *matrice nulle* et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

Addition de matrices

Soient A et B deux matrices ayant la même taille **n×p**. Leur somme **C =A+B** est la matrice de taille **n×p** définie par:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

En d'autres termes, on **somme coefficients par coefficients**.

Remarque : on note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la **matrice A**.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1 & 8+0 \\ 3+5 & 7+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Par contre si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ alors $A + B'$ n'est pas définie.

Soustraire deux matrices

De même, pour soustraire deux matrices, on soustrait les éléments situés aux mêmes emplacements dans chacune des matrices.

Par exemple, soit $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$.

Voici le calcul de la matrice $\mathbf{C} - \mathbf{D}$:

$$\mathbf{C} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-5 & 8-6 \\ 0-11 & 9-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire

A et B sont des matrices de même dimension, c et d sont des scalaires et O et la matrice nulle.

Propriété	Exemple
La multiplication par un scalaire est associative	Quels que soient les réels c, d et la matrice A, $(cd)A = c(dA)$
La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition	$c(A + B) = cA + cB$
	$(c + d)A = cA + dA$
1 est l'élément neutre	$1A = A$
Le produit de la matrice nulle par un scalaire est la matrice nulle	$0 \times A = O$
	$c \times O = O$
La multiplication par un scalaire est une loi interne dans chacun des ensembles de matrices de même dimension	Si A est une matrice de dimension $m \times n$, quel que soit c, la matrice cA est une matrice de dimension $m \times n$.

La multiplication d'une matrice par un scalaire est associative : (cd)A=c(dA)

Autrement dit, si on doit multiplier une matrices par deux scalaires on peut commencer par multiplier les deux scalaires, et ensuite multiplier la matrice par le résultat, et on peut aussi multiplier la matrice par le premier scalaire, et ensuite multiplier la matrice obtenue par le deuxième scalaire.

Voici la justification sur un exemple où $c = 2$, $d = 3$ et $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$.

$(c \times d) \times A$	$c \times (d \times A)$
$(2 \times 3) \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$	$2 \times \left(3 \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}\right)$
$\downarrow$	$\downarrow$
	$2 \times \begin{bmatrix} (3 \times 5) & (3 \times 4) \\ (3 \times 8) & (3 \times 1) \end{bmatrix}$
	$\downarrow$
$\begin{bmatrix} (2 \times 3) \times 5 & (2 \times 3) \times 4 \\ (2 \times 3) \times 8 & (2 \times 3) \times 1 \end{bmatrix}$ $=$	$\begin{bmatrix} 2 \times (3 \times 5) & 2 \times (3 \times 4) \\ 2 \times (3 \times 8) & 2 \times (3 \times 1) \end{bmatrix}$

$\uparrow$

car la multiplication est associative dans $\mathbb{R}$

La distributivité de la multiplication par un scalaire sur l'addition
c(A+B)=cA+cB

La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition.

Voici la justification sur un exemple où $c = 2$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$:

$c(A+B)$	$cA + cB$
$2\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\right)$	$2\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$2\begin{bmatrix} 5+3 & 2+4 \\ 3+2 & 1+6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2\times 5 & 2\times 2 \\ 2\times 3 & 2\times 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times 4 \\ 2\times 2 & 2\times 6 \end{bmatrix}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\begin{bmatrix} 2(5+3) & 2(2+4) \\ 2(3+2) & 2(1+6) \end{bmatrix}$ $=$	$\begin{bmatrix} 2\times 5+2\times 3 & 2\times 2+2\times 4 \\ 2\times 3+2\times 2 & 2\times 1+2\times 6 \end{bmatrix}$

$\uparrow$

car la multiplication est distributive sur l'addition dans $\mathbb{R}$

Exemple

$$\text{Si} \quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha=2 \quad \text{alors} \quad \alpha A=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&0\end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'*opposée* de A et est notée $-A$. La *différence* $A-B$ est définie par $A+(-B)$.

$$\text{Si} \quad A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-5&2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix}-1&4&2\\7&-5&3\end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A-B=\begin{pmatrix}3&-5&-2\\-3&0&-1\end{pmatrix}.$$

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Multiplication de matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Soient $A=(a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B=(b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C=AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient $c_{11} = 1\times 1 \;+\; 2\times(-1) \;+\; 3\times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}\color{red}{1} & 2\\ \color{red}{-1} & 1\\ \color{red}{1} & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3}\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\color{blue}{2} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 11\end{pmatrix}\end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix} \qquad v=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Alors $u\times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Ce nombre s'appelle le ***produit scalaire*** des vecteurs u et v.

Pièges à éviter

Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.
En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième piège. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Troisième piège. $AB = AC$ n'implique pas $B = C$. On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB=AC=\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la *matrice identité* :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \qquad \text{et} \qquad BA = I,$$

on dit que A est ***inversible***. On appelle B l'***inverse de A*** et on la note A^{-1}.

On verra plus tard qu'il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$.

- Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$

- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Exemples

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{smallmatrix}\right)$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3c & 3d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c = 1\\ b+2d = 0\\ 3c = 0\\ 3d = 1\end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B = \left(\begin{smallmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right)$. Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA = I$, dont la vérification est laissée au lecteur. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Matrices triangulaires, transposition, trace, matrices symétriques

Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est ***triangulaire inférieure*** si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est ***triangulaire supérieure*** si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diamniadio

Exemple

Deux matrices triangulaires inférieures (à gauche), une matrice triangulaire supérieure (à droite) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure ***et*** triangulaire supérieure est dite ***diagonale***. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Exemples de matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Diamniadio

La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On appelle ***matrice transposée*** de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Notation : La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1 \quad -2 \quad 5)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

Théorème

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$
5. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Notez bien l'inversion : $(AB)^T = B^T A^T$, comme pour $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments a_{11}, $a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les *éléments diagonaux*. Sa *diagonale principale* est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La *trace* de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

Exemple

- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors $\operatorname{tr} A = 2 + 5 = 7$.
- Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} B = 1 + 2 - 10 = -7$.

Matrices symétriques

Une matrice A de taille $n \times n$ est *symétrique* si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = A^T,$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple

Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices antisymétriques

Une matrice A de taille $n \times n$ est *antisymétrique* si

$$A^T = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

exemples

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.