Diamniadio

Chapitre 2

Programmation Linéaire

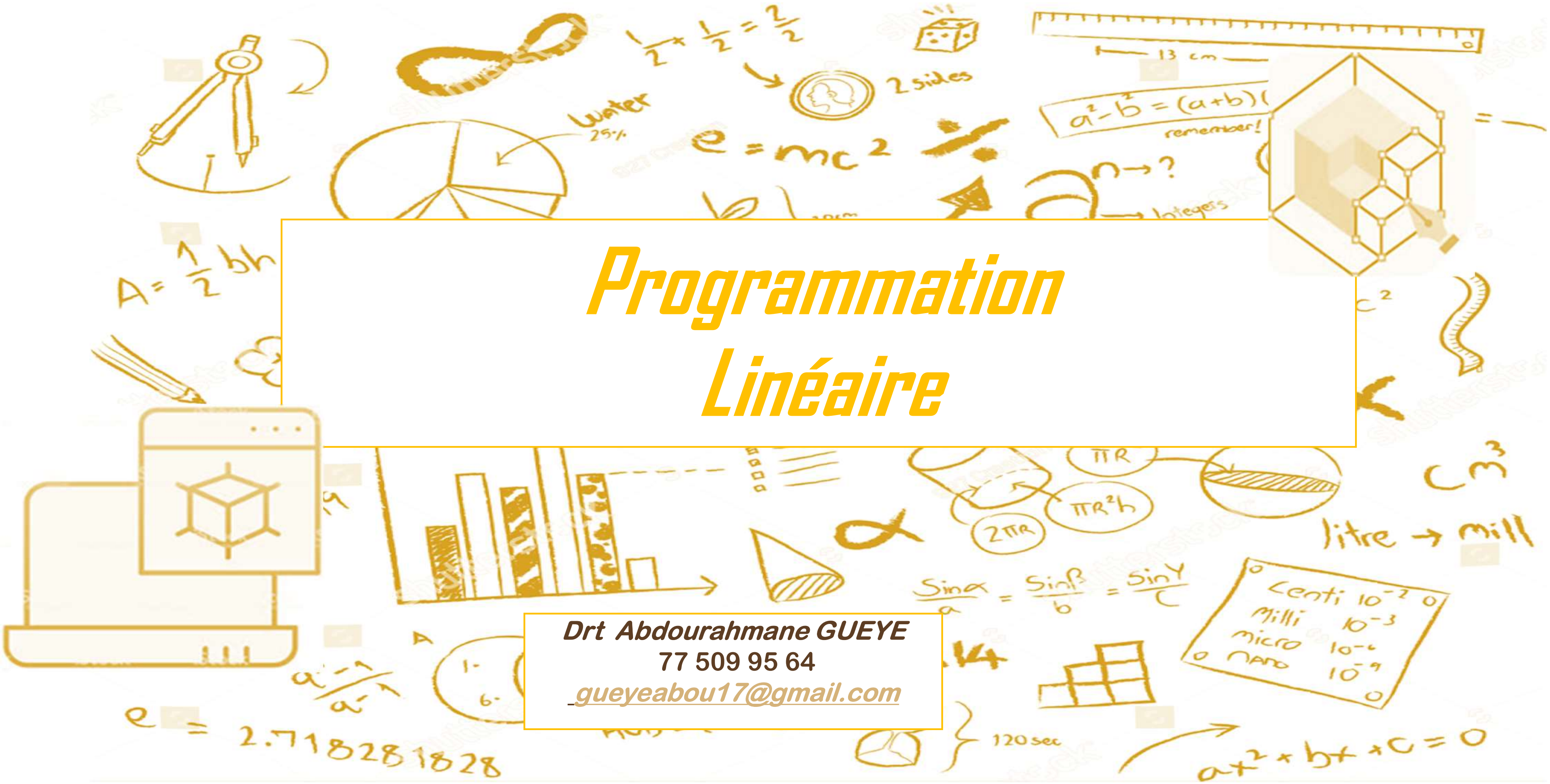
Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
agueye@isepdiamniadio.edu.sn

isep Diamniadio

Plan

1. Introduction
   - *1 – Définitions*
2. Modélisation de PL
   - *1 – Exemple de Modélisation*
   - *2 – Formulation de PL*
   - *3 – Interprétation économique*
3. Résolution Graphique
   - *1 – Exemple de résolution*
   - *2 – Analyse de sensibilité*
   - *3 – Existence de Solution*
4. Méthode du Simplexe
   - *1 – Critères de Dantzig et Test d'optimalité*
   - *2 – Exemple de résolution*
5. Travaux Dirigées

Chapitre 2



Programmation Linéaire

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Introduction

Objectifs

- *Formulation en modèles d'optimisation des problèmes,*
- *Présenter les techniques de résolution de problèmes.*
- *Analyse et Interprétation des résultats*

1 – Définitions

Optimisation Linéaire

C'est la détermination optimale d'un programme d'action pour un phénomène dont les conséquences sont proportionnelles aux causes.

On parle de problème d'optimisation lorsqu'il faut maximiser (le bénéfice) ou minimiser (les pertes) une fonction sous contraintes (satisfaire la demande et de respecter la capacité de production).

En mathématiques, les problèmes de Programmation Linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires.

La programmation linéaire désigne également la manière de résoudre les problèmes de PL.

Introduction

1 – Définitions

La formulation d'un problème d'optimisation comporte trois étapes.

- ✓ La première étape consiste à choisir les variables du problème.

D1 On appelle variable toute quantité utile à la résolution du problème dont le modèle doit déterminer la valeur.

Cette définition permet de différencier les variables des paramètres, qui sont des données qui peuvent varier, par exemple d'une période à l'autre ou d'un scénario à l'autre.

- ✓ La deuxième étape consiste à formuler mathématiquement l'objectif.

D2 On appelle fonction objectif d'un problème d'optimisation le critère de choix entre les diverses solutions possibles.

- ✓ La troisième étape est la formulation des contraintes du problème.

D3 On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables.

Ces relations peuvent être de simples bornes sur les variables.

Exemple Des quantités produites ne peuvent être négatives.

Elles peuvent être plus complexes comme les contraintes de capacité des ressources.

Modélisation de PL

2 – Exemple de Modélisation

L’entreprise « Back2Net » fabrique deux types de drone topométrique : le IBM4 et le IBM5.

Chacun d’eux comporte un processeur, le même, mais les deux modèles diffèrent en particulier par le nombre de barrettes mémoires.

Plus précisément, le IBM4 comporte 2 barrettes alors que le IBM5 en comporte 6.

Le marché pour ces composants est tel qu’on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes.

Une autre limitation risque d’intervenir sur la production.

L’assemblage est caractérisé, en particulier, par une opération délicate, qui pour l’IBM4 est de 3 minutes alors que pour l’IBM5 elle n’est que d’une minute; on ne dispose a priori pour l’assemblage de ces deux types de machines que de 24 000 minutes pour le trimestre à venir.

Enfin, compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 40.000 Fcfa sur l’IBM4 et de 80.000 Fcfa sur l’IBM5.

Modélisation de PL

2 – Exemple de Modélisation

Modélisation du problème :

Nous examinons dans l'ordre la représentation des variables de décisions, des contraintes et du critère à optimiser.

Les variables de décisions :

Les décisions concernent les quantités à fabriquer, ce qui se représente naturellement par deux nombres positifs x pour l'IMB4 et y pour l'IMB5.

Soit x la quantité pour IMB4 à fabriquer et

y la quantité pour IMB5 à fabriquer.

Les contraintes :

Il s'agit de représenter les différentes contraintes limitant la production de ces deux types de drone.

La première porte sur la limitation du nombre de processeurs disponibles : chaque machine utilise un processeur et on peut en disposer de 10000.

On doit donc imposer :

$$x + y \leq 10000.$$

Modélisation de PL

2 – Exemple de Modélisation

Les contraintes (suite):

De même, le nombre de barrettes est limité.

Compte tenu du nombre de barrettes dans chacun des 2 ordinateurs et du nombre de barrettes disponibles, cette contrainte se traduit par :

$$2x + 6y \leq 48000.$$

Enfin, la contrainte portant sur le temps d'assemblage s'écrit :

$$3x + y \leq 24000.$$

L'ensemble des décisions possibles est donc caractérisé par l'ensemble des valeurs de x et y vérifiant :

$$\begin{aligned} x + y &\leq 10000 \\ 2x + 6y &\leq 48000 \\ 3x + y &\leq 24000 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Le critère : on souhaite maximiser le profit de l'entreprise représenté par :

$$40.000\,x + 80.000\,y.$$

Modélisation de PL

2 – Exemple de Modélisation

Modélisation du problème :

Nous examinons dans l'ordre la représentation des variables de décisions, des contraintes et du critère à optimiser.

Les variables de décisions :

Les décisions concernent les quantités à fabriquer, ce qui se représente naturellement par deux nombres positifs x pour l'IMB4 et y pour l'IMB5.

Soit x la quantité pour IMB4 à fabriquer et

y la quantité pour IMB5 à fabriquer.

Les contraintes :

Il s'agit de représenter les différentes contraintes limitant la production de ces deux types de drone.

La première porte sur la limitation du nombre de processeurs disponibles : chaque machine utilise un processeur et on peut en disposer de 10000.

On doit donc imposer :

$$x + y \leq 10000.$$

Modélisation de PL

2 – Exemple de Modélisation (suite)

Les contraintes (suite):

De même, le nombre de barrettes est limité.

Compte tenu du nombre de barrettes dans chacun des 2 ordinateurs et du nombre de barrettes disponibles, cette contrainte se traduit par :

$$2x + 6y \leq 48000.$$

Enfin, la contrainte portant sur le temps d'assemblage s'écrit :

$$3x + y \leq 24000.$$

L'ensemble des décisions possibles est donc caractérisé par l'ensemble des valeurs de x et y vérifiant :

$$\begin{aligned} x + y &\leq 10000 \\ 2x + 6y &\leq 48000 \\ 3x + y &\leq 24000 \\ x \geq 0&, y \geq 0 \end{aligned}$$

Le critère :

On souhaite maximiser le profit de l'entreprise représenté par : $40.000\, x + 80.000\, y.$

Modélisation de PL

2 – Exemple de Modélisation (Fin)

Le problème initial est donc modélisé par le problème de programmation mathématique suivant :

$$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ 2x + 6y \leq 48000 \\ 3x + y \leq 24000 \end{cases}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$ → Fonction Objectif

s.c. $x + y \leq 10000$, $2x + 6y \leq 48000$, $3x + y \leq 24000$ → Contraintes

$x \geq 0,\ y \geq 0$ → En PL les variables de décisions sont positives ou nulles

Modélisation de PL

3 – Forme de PL

a - Forme algébrique d'un programme linéaire ;

$$\begin{aligned} \max f(x) &= 40.000\, x + 80.000\, y \\ \text{s.c.}\quad x + y &\leq 10000 \\ 2x + 6y &\leq 48000 \\ 3x + y &\leq 24000 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Forme (max , ≤)

$$\begin{aligned} \min Z &= 14\, x1 + 37x2 - 7x3 \\ \text{s.c.}\quad 5x1 + 7x2 - 2x3 &\geq 10 \\ -x1 + 3x2 - x3 &\geq 35 \\ 6x1 + 7x2 + 11x3 &\geq 19 \\ x1 \geq 0,\ x2 \geq 0,\ x3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forme (min , ≥)

b - Forme Matricielle d'un programme linéaire

Soit n le nombre de variables et p le nombre de contraintes. Posons : $C^T = (c1, c2, ..., cn)$ le vecteur des coefficients de la fonction objectif ; $B^T = (b1 , b2 , ..., bp)$ le vecteur des seconds membres, c'est à dire des bornes supérieures. Soit A la matrice de p lignes et n colonnes, notée A(p, n) :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

et $X^T = (x1, x2, ..., xn)$ le vecteur des variables de décision.

La forme matricielle d'un programme linéaire s'écrit alors en trois (3) lignes :

$$\begin{aligned} &\max C.X \\ &\text{s.c.}\quad AX \leq B \\ &\qquad X \geq 0. \end{aligned}$$

Modélisation de PL

3 – Forme de PL

c - Forme Standard

Un problème de programmation linéaire est dit sous forme standard si toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité et toutes les variables sont positives..

On transforme le problème pour qu'il n'y ait que des contraintes d'égalité pour cela on introduit une variable positive appelée « variable d'écart » qui mesure l'écart entre le deuxième et le premier membre de l'inégalité.

Exemple

$$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$$
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ 2x + 6y \leq 48000 \\ 3x + y \leq 24000 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Forme (max , ≤)

$$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$$
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} x + y + e1 = 10000 \\ 2x + 6y + e2 = 48000 \\ 3x + y + e3 = 24000 \end{cases}$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ e1 \geq 0,\ e2 \geq 0,\ e3 \geq 0$$

Proposition *Tout problème de PL peut se mettre au choix sous la forme canonique ou sous la forme standard.*

Modélisation de PL

3 – Forme de PL

c - Forme Standard

Exemple

$$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$$
$$\text{s.c.} \quad x + y \leq 10000$$
$$2x + 6y \leq 48000$$
$$3x + y \leq 24000$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

$$\min Z = 14\,x1 + 37x2 - 7x3$$
$$\text{s.c.} \quad 5x1 + 7x2 - 2x3 \geq 10$$
$$-x1 + 3x2 - x3 \geq 35$$
$$6x1 + 7x2 + 11x3 \geq 19$$
$$x1 \geq 0,\ x2 \geq 0,\ x3 \geq 0$$

$$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$$
$$\text{s.c.} \quad x + y + e1 = 10000$$
$$2x + 6y + e2 = 48000$$
$$3x + y + e3 = 24000$$
$$\underbrace{x \geq 0,\ y \geq 0}_{\text{Variable de décision ou hors Base}},\ \underbrace{e1 \geq 0,\ e2 \geq 0,\ e3 \geq 0}_{\text{Variable d'écart ou de Base}}$$

$$\min Z = 14\,x1 + 37x2 - 7x3$$
$$\text{s.c.} \quad 5x1 + 7x2 - 2x3 - e1 = 10$$
$$-x1 + 3x2 - x3 - e2 = 35$$
$$6x1 + 7x2 + 11x3 - e3 = 19$$
$$\underbrace{x1 \geq 0,\ x2 \geq 0,\ x3 \geq 0}_{\text{Variable de décision ou hors Base}},\ \underbrace{e1 \geq 0,\ e2 \geq 0,\ e3 \geq 0}_{\text{Variable d'écart ou de Base}},$$

Variable d'écart ou de Base

Variable de décision ou hors Base

Méthode de Résolution de PL

1 – Résolution Graphique de PL

De manière très générale, la résolution d'un problème de programmation linéaire nécessite la mise en œuvre d'un algorithme.

Lorsqu'il n'y a que deux variables de décision, un problème linéaire peut être résolu de manière purement graphique. C'est ce que nous verrons dans cette partie.

Cette résolution graphique permet de mettre en évidence certaines propriétés que possède n'importe quel problème de programmation linéaire.

Considérons le problème de l'exemple :

$$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ 2x + 6y \leq 48000 \\ 3x + y \leq 24000 \end{cases}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

Méthode de Résolution de PL

1 – Résolution Graphique de PL

Etape 1

La première étape de la résolution c'est la résolution du système d'inéquation.

$$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$$

$$\text{s.c.}\quad \begin{cases} x + y \leq 10000 & \longrightarrow \Delta_1 : x + y = 10000 \\ 2x + 6y \leq 48000 & \longrightarrow \Delta_2 : 2x + 6y = 48000 \\ 3x + y \leq 24000 & \longrightarrow \Delta_3 : 3x + y = 24000 \end{cases}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

	X	Y
P1	0	10 000
P2	10 000	0
P3	0	8 000
P4	24 000	0
P5	0	24 000
P6	8 000	0

Méthode de Résolution de PL

1 – Résolution Graphique de PL

Etape 1 (Suite)

A chaque couple de variables x et y, on associe un point du plan dont les coordonnées correspondent aux valeurs des variables.

Les variables étant positives, ces points sont situés dans le quart Nord-Est du plan.

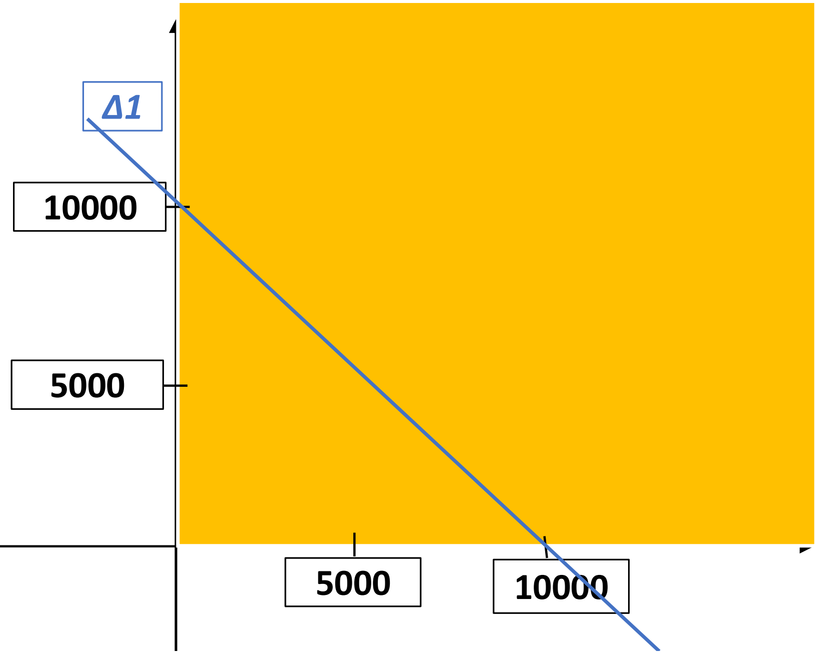
Chaque contrainte permet de délimiter une partie du plan.

Exemple : la droite Δ_1 d'équation $x + y = 10000$ définit 2 demi-plans.

Au-dessus de cette droite (Δ1),

les coordonnées des points du plan vérifient $x + y > 10000$.

On est donc conduit à exclure ces points.



Méthode de Résolution de PL

1 – Résolution Graphique de PL

Etape 1 (Fin)

On fait de même pour les 2 autres contraintes. On trace les droites d'équation :

Δ_2 : 2x + 6y = 48000 et Δ_3 : 3x + y = 24000 et on élimine les points situés au dessus de ces droites.

Les solutions réalisables du problème correspondent aux points du plan situés à l'intérieur du polyèdre OABCD et sur ses bords.

Etape 2

f(x) = 40.000 x + 80.000 y

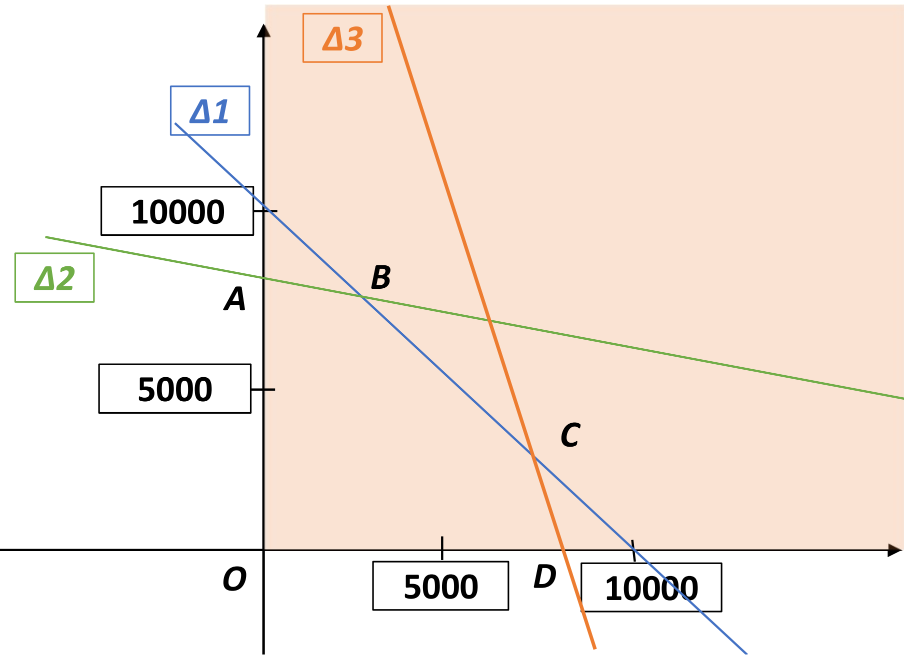
f(O) = 40.000 xO + 80.000 yO = 0

f(A) = 40.000 xA + 80.000 yA = 640 000 000

f(B) = 40.000 xB + 80.000 yB = 680 000 000 → Optimum

f(C) = 40.000 xC + 80.000 yC = 520 000 000

f(D) = 40.000 xD + 80.000 yD = 320 000 000



Méthode de Résolution de PL

2 – Simulation Numérique avec Lingo

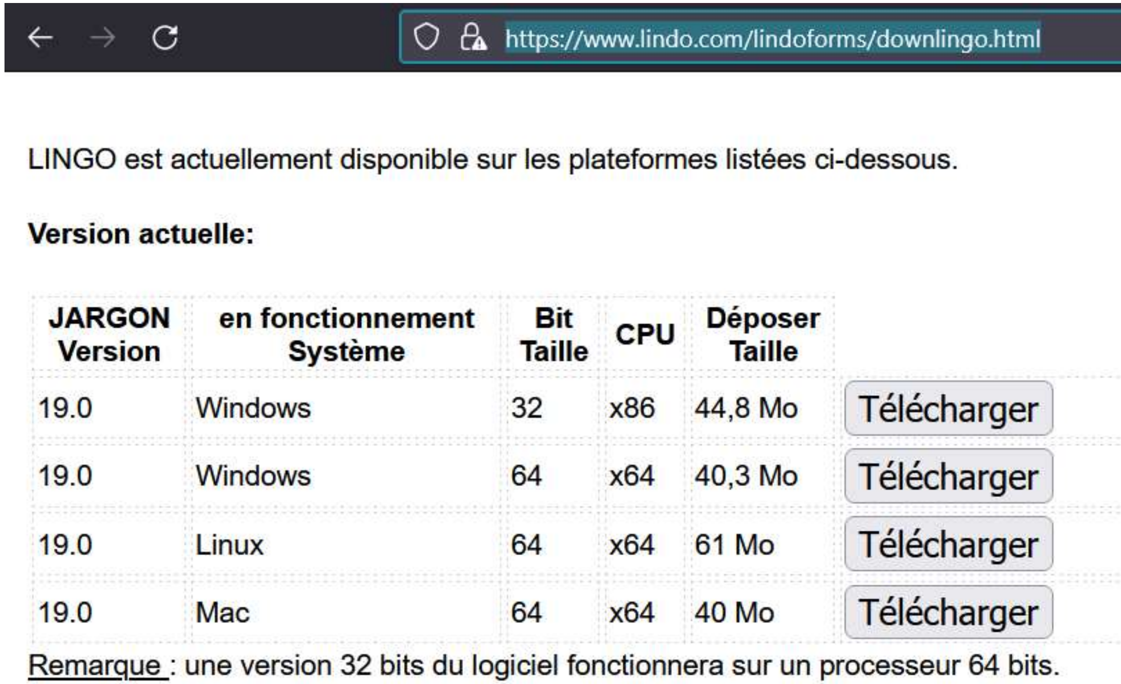
LINGO permet de créer des modèles linéaires, non linéaires et entiers.
Les modèles sont faciles à construire et à comprendre à l'aide d’une écriture simple.

Installation

Aller à la page officiel via le liens
https://www.lindo.com/lindoforms/downlingo.html

NB

Utiliser la version Démo elle est limitée mais permet de résoudre des problèmes de moins 16 variables.



https://www.lindo.com/lindoforms/downlingo.html

LINGO est actuellement disponible sur les plateformes listées ci-dessous.

Version actuelle:

JARGON Version	en fonctionnement Système	Bit Taille	CPU	Déposer Taille	
19.0	Windows	32	x86	44,8 Mo	Télécharger
19.0	Windows	64	x64	40,3 Mo	Télécharger
19.0	Linux	64	x64	61 Mo	Télécharger
19.0	Mac	64	x64	40 Mo	Télécharger

Remarque : une version 32 bits du logiciel fonctionnera sur un processeur 64 bits.

Méthode de Résolution de PL

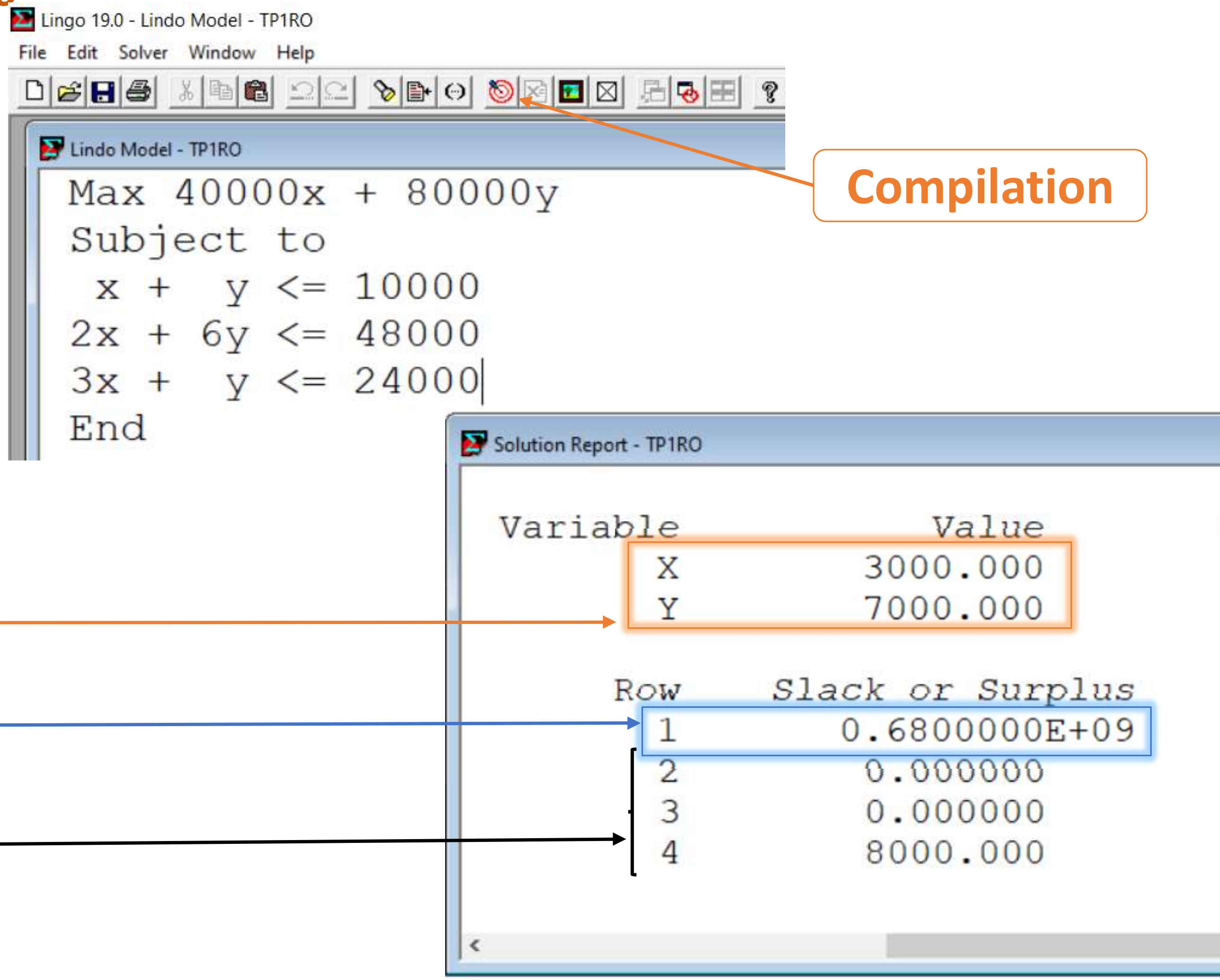
2 – Simulation Numérique avec Lingo

Ecriture de Model de PL

$$\max f(x) = 40.000\,x + 80.000\,y$$

$$\text{s.c.}\quad \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ 2x + 6y \leq 48000 \\ 3x + y \leq 24000 \end{cases}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$



Interprétation

Solution

Fonction Objectif

Restant des ressources

Diamniadio

Chapitre 3

Initiation à la Théorie des Graphes

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com

Diamniadio

Chapitre 3

Initiation à la Théorie des Graphes

Drt Abdourahmane GUEYE
77 509 95 64
gueyeabou17@gmail.com