Institut Superieur d'Enseignement Professionnel de Diamniadio (ISEP)

Promo 3

Algèbre de Boole

M. Mansour KHOUMA

Notions Fondamentales

Les fonctions logiques combinatoires directement issues des mathématiques (**algèbre de Boole**) sont les outils de base de l'électronique numérique, donc de l'automatisme et de l'informatique. Elles sont utilisées en électronique sous forme de portes logiques. L'algèbre de Boole (**algèbre booléenne**) est la partie des mathématiques plus précisément de la logique qui s'intéresse aux opérations et aux fonctions sur les variables logiques. Aujourd'hui, l'algèbre de Boole trouve de nombreuses applications en informatique et dans la conception des circuits électroniques. Elle fut utilisée la première fois pour les circuits de commutation téléphoniques par Claude Shannon.

Algébre de Boole

On appelle B l'ensemble constitué de deux éléments appelés **valeurs de vérité** $\{VRAI, FAUX\}$. Cet ensemble est aussi noté $B = \{0, 1\}$. En algèbre de Boole, les variables ne peuvent donc prendre que deux valeurs, 0 ou 1. Les variables de Boole ne sont pas des nombres réels mais plutôt l'état d'une variable logique appelée **niveau logique**.

Exemples de niveau logiques :

1	0
vrai	faux
oui	non
marche	arret
...	...

Algébre de Boole

Table de Vérité

L'algèbre de Boole est un outil mathématique qui permet d'exprimer les effets des divers circuits numériques sur les entrées logiques. Comme il n'y a que deux valeurs possibles, cela simplifie beaucoup les opérations; il n'y ainsi pas de fractions, pas de nombres décimaux ni de nombres négatifs etc.. De plus il n'y a que 3 opérations élémentaires :

- L'addition logique, dite opération **OU**, symbolisé par le "**+**",
- La multiplication logique, dite opération **ET**, symbolisé par le "**.**"
- L'inversion logique (ou complémentation), dite opération **NON**, symbolisé par la **barre au dessus de la variable**.

Algébre de Boole

La plupart des circuits logiques possèdent plusieurs entrées logiques mais seulement une seule sortie logique. Une table de vérité permet de prévoir la réaction d'un circuit logique (valeur délivrée en sortie) par rapport aux diverses combinaisons des niveaux logiques d'entrée.

Exemples de table logique :

A	B	C	D
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?

Addition Logique ou OU Logique

Soient deux variables logiques A et B. Les propriétés de la fonction OU sont visibles dans la table de vérité ci-dessous où sont représentés les résultats de l'opération **A+B** appelée aussi **A OU B**.

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On parle aussi d'opération **OR** (terme anglais).

Multiplication Logique ou ET Logique

Soient deux variables logiques A et B. Les propriétés de la fonction ET sont visibles dans la table de vérité ci-dessous où sont représentés les résultats de l'opération **A.B** appelée aussi **A ET B**.

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On parle aussi d'opération **AND** (terme anglais).

Inversion Logique ou NON Logique

Cette opération ne concerne qu'une variable d'entrée. Le résultat de l'opération NON (**NOT**, en anglais) sur la variable A est la variable

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Exemples de sorties logiques

La connaissance de l'expression booléenne d'un circuit permet de trouver le niveau logique correspondant à n'importe quelle combinaison de valeurs se présentant à ses entrées.

Exemple $x = \overline{A}.B(\overline{B+C})$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{A}.B$	B+C	$\overline{B+C}$	x
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Théorèmes à une variable

$$x.0 = 0$$
$$x.1 = x$$
$$x.x = x$$
$$x.\overline{x} = 0$$
$$x + 0 = x$$
$$x + 1 = 1$$
$$x + x = x$$
$$x + \overline{x} = 1$$

NB : x peut représenter de manière générale une expression renfermant plusieurs variables. Par exemple, si $u = (A.\overline{B}).\overline{(A.\overline{B})}$
$\longrightarrow u = x.\overline{x} = 0$
avec $x = A.\overline{B}$

Théorème à plusieurs variables

$$x + y = y + x$$
$$x.y = y.x$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x.(y.z) = (x.y).z = x.y.z$$
$$x.(y + z) = x.y + x.z$$
$$(w + x).(y + z) =$$
$$w.y + w.z + x.y + x.z$$
$$x + x.y = x$$
$$x + \overline{x}.y = x + y$$

Théorème de Morgan

À 2 variables

- $\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$
- $\overline{x.y} = \overline{x}+\overline{y}$

À plusieurs variables

- $\overline{x+y+z} = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$
- $\overline{x.y.z} = \overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$

Conclusion

Ce chapitre est l'objet de voir l'algébre de Boole par :

- ses variables et constantes
- ainsi que ses fonctions et théorèmes.