实变函数 Notes

Huang Andong
andonghuang1991@gmail.com

February 11, 2017

Contents

Chapter 1

集合与运算

1.1 集合及其运算

Theorem 1.1 (**集合的基本运算性质**)**.** 设有集合 A，B 与 C，则有

(1) 交换律 (commutative)：$A\bigcup B = B\bigcup A$，$A\bigcap B = B\bigcap A$

(2) 结合律 (associative)：$A\bigcup(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcup C$，$A\bigcap(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcap C$

(3) 分配率 (distributive)：$A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$，$A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

(4) 对偶律 (De Morgan)：$(A\bigcup B)^c = A^c\bigcap B^c$ ，$(A\bigcap B)^c = A^c\bigcup B^c$

(5) $A\backslash B = A\bigcap B^c$

(6) 若 $A\supset B$，则 $A^c\subset B^c$

Remark 1.2 (**注明**). 集合运算性质的证明，一般涉及到充分性和必要性两个方面，通俗一点就是“我的就是你的，你的也是我的”。

集合论中，通常讨论的是一个集合族之间的运算，集合的基本运算也可以拓展到集合族中。设有集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$，其中 I 为指标集，规定并集与交集如下：

$$\bigcup_{\lambda\in I} = \{x|\exists\lambda\in I\ x\in A_\lambda\} \tag{1.1}$$

$$\bigcap_{\lambda\in I} = \{x|\forall\lambda\in I\ x\in A_\lambda\} \tag{1.2}$$

Remark 1.3 (**注明**). 并的本质是“存在 exist”，如公式1.1所示；交的本质是“任意 forall”，如公式1.2所示。这一点在理解集合的运算和性质非常重要。

集合族也满足分配率和对偶律

(1) 分配率 (distributive law)：

$$A\bigcap(\bigcup_{\lambda\in I}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in I}(A\bigcap B_\lambda) \tag{1.3}$$

$$A\bigcup(\bigcap_{\lambda\in I}B_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in I}(A\bigcup B_\lambda) \tag{1.4}$$

(2) 对偶律 (communicative law)（德摩根 De Morgan 法则）：

$$(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^c=\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^c \tag{1.5}$$

$$(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda^c \tag{1.6}$$

Definition 1.4 (**幂集**)**.** 任意给定集合 X，其全体子集构成的集合成为 X 的幂集，记作 2^X。如果 X 有 n 个元素，则幂集有 2^n 个元素。幂集的概念将会在后续 σ 代数中用到。幂集关于集合的并、交、补、差运算封闭，是一个 σ 代数。

Definition 1.5 (**集合族**)**.** I 为非空集合，对于每一个 $\lambda\in I$，指定了一个集合 A_λ，则称 $A_\lambda|\lambda\in I$ 为一个集合族

Definition 1.6 (**集合列**)**.** 若集合族中的指标集为自然数 $\mathbb{N}$，则此类集合族 $\{A_n|n\in\mathbb{N}\}$ 称为集合列，通常简称为 $\{A_n\}$

Definition 1.7 (**集合的升列**)**.** 集合列 $\{A_n\}$，若满足 $A_1\subset A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，则称集合列 $\{A_n\}$ 为升列。

Definition 1.8 (**集合的降列**)**.** 集合列 $\{A_n\}$，若满足 $A_1\supset A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，则称集合列 $\{A_n\}$ 为降列。

Proposition 1.9 ($f(x)>0$ **等价命题**)**.** *若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，$A=\{x\in\mathbb{R}|f(x)>0\}$，$A_n=\{x\in\mathbb{R}|f(x)>1/n\},n\in\mathbb{N}$. 则有 $A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$。证明过程就是“充分必要，我的是你的，你的也是我的”。这个命题在后面很多的证明中需要用到，特别是涉及到开集，闭集，F_σ 和 G_δ 相关命题的证明，需要用到上述等价关系。这个命题还可以拓展到一般情况：*

$$\{x\in\mathbb{R}|f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^\infty\{x\in\mathbb{R}|f(x)\geq a+\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}\} \tag{1.7}$$

等式1.7右边的不等号“$\geq$”改成“$>$”也成立

$$\{x\in\mathbb{R}|f(x)\geq a\}=\bigcap_{n=1}^\infty\{x\in\mathbb{R}|f(x)>a-\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}\} \tag{1.8}$$

等式1.8右边的不等号“$>$”改成“$\geq$”也成立

Proposition 1.10 ($f(x) \leq 0$ **等价命题**). *根据对偶律性质可以得到:*

$$\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq 0\} = A^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.9}$$

上述等价命题可以一般化为:

$$\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq a + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.10}$$

等式1.10右边的不等号"$\leq$"改成"$<$"也成立或者上述等价命题可以一般化为:

$$\{x \in \mathbb{R} | f(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} | f(x) < a - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.11}$$

等式1.11右边的不等号"$>$"改成"$\geq$"也成立

开集可以用递增集合列由内而外取极限逼近, 而升列的极限等于其集合列的并. 闭集可以用递减集合列由外而内取极限逼近, 而减列的极限等于其集合列的交, 过程如图 (1.1) 所示. 在后续的勒贝格测度理论中需要大量使用到这两个结论.

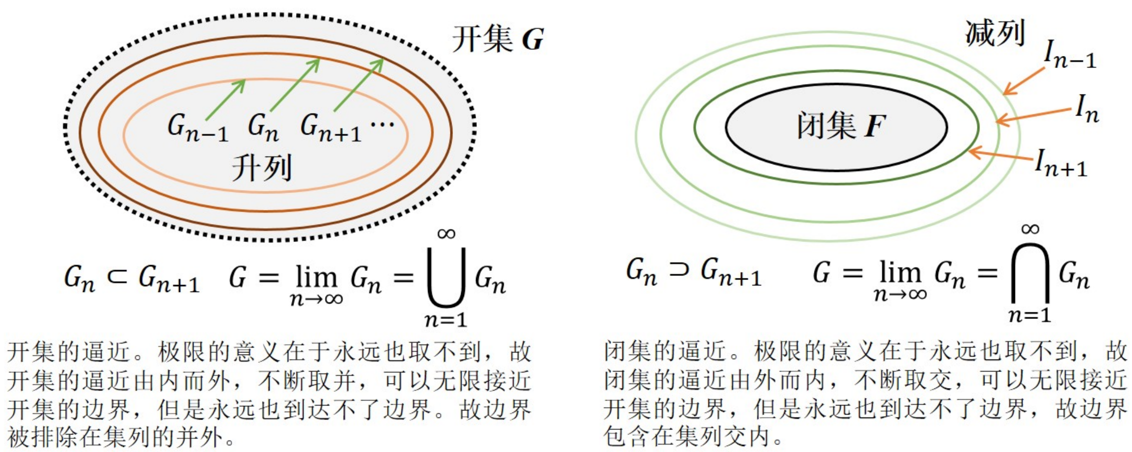

Figure 1.1: 开集和闭集的逼近

Remark 1.11 (**等价描述语言**). 在集合论中,"任意"等价于"集合交"$\forall \Leftrightarrow \bigcap$,"存在"等价于"集合并"$\exists \Leftrightarrow \bigcup$

有关数列、集合列的上下确界和上下极限的概念，写在以前的帖子里了，在此就不再赘述。https://www.zhihu.com/people/JasonHuang1991/posts

Definition 1.12 (**上极限和下极限**). 对于 $\mathbb{R}$ 中的点列 x_n，定义 $h_n = \sup_{k\geq n} x_k$ 并且 $m_n = \inf_{k\geq n} x_k$. 显然有 $m_n \leq x_n \leq h_n$，h_n 为非升列，而 m_n 为非降列. 定义上极限和下极限分别为:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} h_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} x_k = \inf_{n\geq 2}\sup_{k\geq n} x_k = \cdots = \inf_{n\geq N}\sup_{k\geq n} x_k = \cdots \tag{1.12}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} m_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} x_k = \sup_{n\geq 2}\inf_{k\geq n} x_k = \cdots = \sup_{n\geq N}\inf_{k\geq n} x_k = \cdots \tag{1.13}$$

上述的两个等式利用到了 h_n 为非升列以及 m_n 为非降列这两个事实。

Proposition 1.13 (**上极限和下极限的性质**)**.**

(1) 点列 $\{x_n\}$ 存在的充要条件是上下极限相等

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \tag{1.14}$$

(2)

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (-x_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \tag{1.15}$$

(3) 设 $x_n > 0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = 1/(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n) \tag{1.16}$$

(4) 点列 $\{x_{n_k}\}$ 是收敛子序列，因为 $m_{n_k} \leq x_{n_k} \leq h_{n_k}$，所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \tag{1.17}$$

Definition 1.14 (**函数序列** $f_n(x)$ **的上下极限**)**.** 设 $f_n(x)$ 是定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的一个函数序列，对于 $\forall x_0 \in D$，函数列 $f_n(x_0)$ 可以看成是一个实数列，可以根据实数列的上下极限来定义函数列的上极限 $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$，和下极限函数 $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$，规定

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} (f_n(x_0)) \tag{1.18}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x_0) = \underline{\lim_{n\to\infty}} (f_n(x_0)) \tag{1.19}$$

因此函数列的上下极限是逐点定义的。

Definition 1.15 (**函数** $f(x)$ **的上极限**)**.** 函数的上极限其实和集合列的上极限概念上非常相似，每一个 δ 对应了一个函数定义域 $B_a^\delta = 0 < |x-a| < \delta$，从集合列的角度来看，可以把 δ 看成是指标 n，而定义域 B_a^δ 对应集合列的指标 $n \geq k$，在这个定义域内的函数的上界可以类比为集合列 $\{A_n | n \geq k\}$ 元素的全体（集合并）。如果定义函数的上确界为在所有以 a 为中心的开球 $B_a^\delta | \delta > 0$ 内最小的上界，$h = \sup_{x\in B_a^\delta} f(x)$，那么可以类比为集合列的上确界 $h = \sup_{x\in E} x$。有了上确界的概念，那么上极限便可以定义为最小的上确界，由于上确界是定义域 B_a^δ 的非增函数（这是显而易见的，函数的元素随着 δ 减小而减小），因此当 $\delta \to 0$ 时，就得到了最小的上确界，也即上极限

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{0<|x-a|<\delta} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{0<|x-a|<\delta} f(x) \tag{1.20}$$

Definition 1.16 (**函数 $f(x)$ 的下极限**). 函数的下极限其实和集合列的下极限概念上非常相似，每一个 δ 对应了一个函数定义域 $B_a^\delta = 0 < |x-a| < \delta$，从集合列的角度来看，可以把 δ 看成是指标 n，而定义域 B_a^δ 对应集合列的指标 $n \geq k$，在这个定义域内的函数的下界可以类比为集合列 $\{A_n | n \geq k\}$ 中所有集合中共有的元素（集合交）。如果定义函数的下确界为在所有以 a 为中心的开球 $B_a^\delta | \delta > 0$ 内最大的下界，$h = \inf_{x \in B_a^\delta} f(x)$，那么可以类比为集合列的下确界 $h = \inf_{x \in E} x$。有了下确界的概念，那么下极限便可以定义为最大的下确界，由于下确界是定义域 B_a^δ 的非降函数（这是显而易见的，函数的元素随着 δ 减小而减小），因此当 $\delta \to 0$ 时，就得到了最大的下确界，也即下极限

$$\varliminf_{x \to a} f(x) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{0<|x-a|<\delta} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{0<|x-a|<\delta} f(x) \tag{1.21}$$

下面证明定义域 B_a^δ 越小，函数下确界是不增的。假设 $\delta_1 > \delta_2$，则有 $B_a^{\delta_1} \supset B_a^{\delta_2}$，假设 $a_1 = \inf_{B_a^{\delta_1}} f(x), a_2 = \inf_{B_a^{\delta_2}} f(x), a_3 = \inf_{B_a^{\delta_1} \setminus B_a^{\delta_2}} f(x)$，则必有 $a_1 = \min\{a_2, a_3\}$，因此 $a_1 \geq a_2$

Theorem 1.17 (**函数存在上极限的充要条件**). $\lim_{x \to a} f(x) = L$,（有限或者无限）的充要条件是（*1*）$\exists \{x_n\} \subset (a-\lambda, a+\lambda) \setminus a, x_n \to a$ 且 $f(x_n) \to L$；（*2*）对于任意 $(a-\lambda, a+\lambda) \setminus a$ 中趋于 a 的点列 $\{x_n^{'}\}$，若 $f(x_n^{'}) \to L^{'}$，则 $L^{'} \leq L$。可以和数列的上极限存在的充要条件对比。这两个条件本质上等价于“所有收敛子列的极限的最大值为上极限”。函数的下极限存在的充要条件可以类似定义“所有收敛子列的极限的最小值为下极限”

Definition 1.18 (**集合的特征函数**). 设 X 是一个固定的非空集，又设 A 是 X 的一个子集. 定义定义函数 $\chi_A(x)$ 为集 A 的特征函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 1 & x \notin A \end{cases}$$

集合 A 和它的特征函数是一一对应的，特征函数只是集合的另外一种表征方式。特征函数与集合之间有如下常见的重要等价关系

(1) $A = X$ 等价于 $\chi_A(x) \equiv 1; A = \emptyset$ 等价于 $\chi_A(x) \equiv 0$。这个等价关系反映出集与其特征函数是一一对应的。

(2) $A \subset B$ 等价于 $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$，显然，当 $x \in A$ 时，$\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$，当 $x \notin A$ 时，$\chi_A(x) = 0$，但是 $\chi_B(x) \geq 0$（元素可能在 B 中）。

(3) $A = B$ 等价于 $\chi_A(x) = \chi_B(x)$。

(4) 集合列的并集的特征函数等于所有集合特征函数值最大的。这个很显然，只要元素在任何一个集合中，特征值就为 1。

$$\chi_{\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} A_\alpha}(x) = \max_{\alpha \in \mathbb{N}} \chi_{A_\alpha}(x) \tag{1.22}$$

(5) 集合列交集的特征函数等于所有集合特征函数值最小的。只有元素在所有集合中，特征值才为 1。

$$\chi_{\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} A_\alpha}(x) = \min_{\alpha\in\mathbb{N}} \chi_{A_\alpha}(x) \tag{1.23}$$

(6) 设 $\{A_n\}$ 是一集合列，那么

$$\chi_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x) \tag{1.24}$$

$$\chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}(x) \tag{1.25}$$

(7) 设 $\{A_n\}$ 是一集合列，那么极限 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$ 存在，而且有

$$\chi_{\lim_{n\to\infty} A_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) \tag{1.26}$$

1.2 映射与势

Definition 1.19 (**映射的定义**)**.** 设 X，Y 是两个非空的集合。若对每个 $x\in X$，存在唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称这个对应为映射。记作 $f:X\to Y$ 或者 $f:X\to Y$，$x\mapsto f(x)$ 。$y=f(x)$ 称为 x 在映射 f 下的像，x 称为 y 的一个原像。

Definition 1.20 (**映射的图**)**.** 集合 $X\times Y$ 的子集 $G_r(f)=\{(x,f(x))|x\in X\}$，称为映射 f 的图。

Definition 1.21 (**满射**)**.** 若 $Y=f(X)$，映射 f 称为是满映射，显然有 X 元素可能比 Y 中的多，因此 X 的势大于或等于 Y 的势 $|X|\geq|Y|$。

Definition 1.22 (**单射**)**.** 若 $x_1\neq x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，称 f 为单射或者一一映射。单射 X 的势小于或等于 Y 的势 $|X|\leq|Y|$。

Definition 1.23 (**双射**)**.** 当 f 是 X 到 Y 的一一满映射时，就称在 X 和 Y 之间存在一一对应，称 f 是 X 到 Y 的双射。双射 X 的势等于 Y 的势 $|X|=|Y|$。

Definition 1.24 (**复合映射**)**.** 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 是两个映射，任给 $x\in X$，令 $h(x)=g(f(x))$，则得到一个映射 $h:X\to Z$ 称为 g 与 f 的复合映射，记作 $g\circ f$。

Proposition 1.25. 设 f 和 g 都有逆映射，且复合映射 $g\circ f$ 有意义，则 $g\circ f$ 也有逆映射，且

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1} \tag{1.27}$$

Definition 1.26 (**对等**)**.** 设 A,B 是两个集合，如果存在一个从 A 到 B 的一一满映射，称集合 A 与 B 对等（也可称为 A 与 B 一一对应），记作 $A\sim B$。

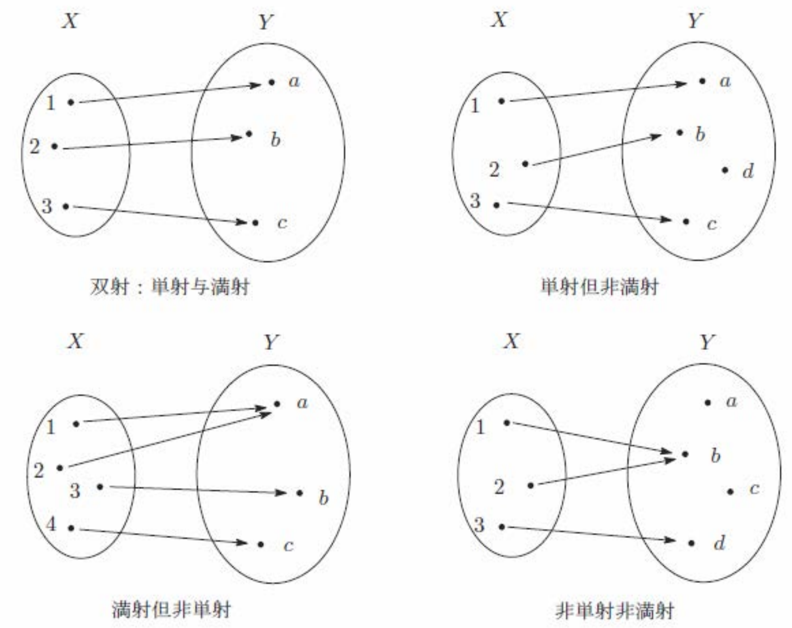

Figure 1.2: 满射 -单射 -双射

Proposition 1.27 (**对等的性质**)**.** 显然对等满足如下三个性质，并且任何满足自反性、对称性以及传递性的二元关系称为等价关系。

(1) 自反性：$A \sim A$

(2) 对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$

(3) 传递性：若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$

Theorem 1.28. 对于任意两个势 α 和 β，关系式 $\alpha < \beta, \alpha = \beta, \alpha > \beta$ 中有且仅有一式成立。(定理的证明需要一定的集合论公理)。

Corollary 1.29 (**推论**)**.** 若 $\alpha \leq \beta, \alpha \geq \beta$ 则有 $\alpha = \beta$。

Definition 1.30 (**可列集**)**.** 自然数集的势记作 $\aleph_0$（读成阿列夫零），即 $\{\mathbb{N}\} = \aleph_0$。一个集合 A 若与自然数集对等，则集合 A 称为可列集。可列集和自然数集之间存在一一对应，即 $f : \mathbb{N} \to A, n \to x_n$，于是 $A = \{x_n\}$，即 A 可以按照顺序排成一排。反过来一个集合可以按照顺序排成一排，便是可列集，势为 $\aleph_0$。

Remark 1.31. 可列集是势最小的无穷集合 (对于任意无穷集合 A，$|A| \geq \aleph_0$)。

Theorem 1.32. 任何无穷集合都包含一个可列子集。

Theorem 1.33. 可列集合的无穷子集仍是可列的

Theorem 1.34. 设 A 是可列集，B 是有限集或可列集，则 $A\bigcup B$ 是可列集，等价为

$$n+\aleph_0=\aleph_0,\quad \aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 \tag{1.28}$$

Theorem 1.35. 可数个有限集或可列集的并仍然是可列集，数学上表示为

$$\sum_{i=1}^{\infty}\aleph_0=\aleph_0 \tag{1.29}$$

Theorem 1.36. 有限个可列集的直积仍为可列集，数学上表示为

$$\prod_{i=1}^{n}\aleph_0=\aleph_0 \tag{1.30}$$

Definition 1.37 (**连续势**)**.** 实数集 $\mathbb{R}$ 的势记作 c，凡是和实数集对等的集合称为具有连续势。

Proposition 1.38. 有理数集是可列集合，事实上任何有理数都能表示成分数，而分数由可以构造成两个自然数的直积。

Proposition 1.39. 由有限个自然数构成的有序数组的全体构成的集合是可列集。记这个集合为 A

$$A=\{(n_1,n_2,\cdots,n_k)|n_i\in\mathbb{N},i=1,2,\cdots,k,k\in\mathbb{N}\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathbb{N}^k \tag{1.31}$$

$$\mathbb{N}^k=\{(n_1,n_2,\cdots,n_k)|n_i\in\mathbb{N},i=1,2,\cdots,k\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathbb{N}^k \tag{1.32}$$

对于 $\mathbb{N}^k$, 指标 k 是固定的，故 $\mathbb{N}^k$ 是有限个可列集的直积，因此有 $\mathbb{N}^k=\aleph_0$，而 A 是可数个可列集 $\mathbb{N}^k$ 的并集，故仍是可列集。

Proposition 1.40. 有理系数多项式之全体是可列集。每个有理式可以表示为 $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$，故这个命题等价为 $|\sum_{n=1}^{\infty}Q^n|=\aleph_0$

Proposition 1.41. $\mathbb{R}$ 中任意互不相交的开区间是有限集或可列集（在每个开区间内取一个有理点）。

Proposition 1.42. $\mathbb{R}$ 上任一单调函数的不连续点为有限集或可列集（在 y 轴上两个相邻不连续点之间构成了一个开区间）。

Definition 1.43 (**势的运算规律**)**.** 设有势 α,β，任取集合 A 和 B，满足 $|A|=\alpha,|B|=\beta$ 时，称直积 $A\times B$ 的势为 α 与 β 的乘积 $\alpha\cdot\beta$。记 n 个相同势 α 的乘积为 α^n。全体 A 到 B 的映射构成的集合为 B^A，称 $|B^A|$ 为 β 的 α 次幂，记作 β^α。如果 $A\bigcap B=\emptyset$，则称 $A\bigcup B$ 的势为 α 与 β 的和 $\alpha+\beta$。

Remark 1.44. 对于 $B^A=\beta$ 的 α，我的理解是每一个 A 中的元素都有 β 种映射的选择，而 A 中一共有 α 个元素，全体 A 到 B 的映射构成的集合的势为 $\underbrace{\beta\times\beta\cdots\times\beta}=\beta^\alpha$。但是这种理解存在一个问题，这个映射可能不是满射，即 B 中可能没有元素与 A 中元素对应。

Proposition 1.45. 设集合 A 的势为 α，则 $|2^A|=2^\alpha$.

Remark 1.46. 事实上，2^α 是集合 $\{0,1\}^A$ 的势。而 $\{0,1\}^A$ 是由定义在 A 上的一切特征函数所构成的集合的全体，即由 A 可以张成一个新的幂集。而相应于 A 中每一个子集 E，唯一的对应一个特征函数 χ_E；反之亦然，这说明 $2^A\sim\{0,1\}^A$.

Theorem 1.47. 设 A 是无限集，$|A|=\alpha$. 若 B 是可数集，则 $|A\bigcup B|=\alpha$.

Proof. 不妨设 $A\bigcap B=\emptyset$. 记 $B=\{y_1,y_2,\cdots\}$, 而 A 是无限集. 设 $A_1=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 为 A 中的可数无限子集. 记 $A_2=A\backslash A_1$, 则 $A=A_1\bigcup A_2$. 作映射 $f:A\bigcup B\to A$ 如下:

$$f(x)=\begin{cases} f(x_n)=x_{2n},\quad f(y_n)=x_{2n-1} & n=1,2,\cdots \\ x & x\in A_2 \end{cases}$$

□

Remark 1.48. 这个证明过程相当于构造了一个无限集与其一个真子无限集的一一映射，在真子无限集中挑出一个可列集与两个可数集进行一一对应, 这个构造具有一般性. 比如构造一个实数 $\mathbb{R}$ 到无理数 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 的一一映射，此时 $A=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 而 $B=\mathbb{Q}$, 从而 $A\bigcup B=\mathbb{R}$, 可以进行如下构造，在实数集 $\mathbb{R}$ 中挑出一个可列集 $\mathbb{Q}\bigcup\{\mathbb{Q}+\sqrt{2}\}$, 使得 $(\mathbb{Q}\bigcup\{\mathbb{Q}+\sqrt{2}\})\sim\{\mathbb{Q}+\sqrt{2}\}$. 建立如下构造映射 $f:\mathbb{R}\to\{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$:

$$f(x)=\begin{cases} f(x_n)=x_{2n},\quad f(y_n)=x_{2n-1} & x_n\in\{\mathbb{Q}+\sqrt{2}\},y_n\in\mathbb{Q},n=1,2,\cdots \\ x & x\in\mathbb{R}\backslash(\mathbb{Q}\bigcup\{\mathbb{Q}+\sqrt{2}\}) \end{cases}$$

Theorem 1.49. 集合 A 是无限集的充分必要条件是：A 与其自身的一个真子集对等. 这个定理可以由定理*1.47*推导出来.

Theorem 1.50. 有限集与其任何真子集不对等。

Theorem 1.51 (**F.Bernstein 伯恩斯坦定理**)**.** 设 A、B 是两个集，如果 A 对等于 B 的一个子集，B 又对等于 A 的一个子集，那么 A 与 B 对等。

Remark 1.52. 从势的角度来理解 F.Bernstein 定理就是：如果 $|A|\le|B|$，$|B|\ge|A|$，那么 $|A|=|B|$

Definition 1.53 (**g 进制小数**)**.** 设 g 是任意取定的一个大于 1 的自然数,$\{t_k\}$ 是一列小于 g 而大于或等于 0 的整数, 称级数

$$\tfrac{t_1}{g}+\tfrac{t_2}{g^2}+\cdots+\tfrac{t_n}{g^n}+\cdots$$

称为 g 进制小数, 简记成 $0.t_1t_2\cdots t_k\cdots$. 若在一个 g 进制小数中，在某一项以后的 t_k 都是

0, 那么称为 g 进制有限小数，否则称为 g 进制无限小数.$(0,1]$ 中任何实数可以唯一地表示为 $g(g>1)$ 进制小数, 而每一个 $g(g>1)$ 进制小数都属于 $(0,1]$，故由于伯恩斯坦定理，这两个无限集等价.

Lemma 1.54. *如果把 $(0,1]$ 中的实数表示成 $g(g>1)$ 进制小数, 记 g 进制无限小数的全体为 A, 那么这个表示成 $(0,1]$ 到 A 的一一对应 (无限集去掉一些可列集仍然是无限集).*

Theorem 1.55. *实数列全体 E^∞ 的势是 $\aleph$.*

Proof. 首先把问题中的实数等价到 $(0,1)$ 区间. 记 B 为 $E\infty$ 中适合 $0<x_n<1(n=1,2,\cdots)$ 的点 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 的全体. 设 $x\in B, x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$, 其中 $x_n\in(0,1)$. 首先令所有的 x_n 相等，即 $x=\{x_1,x_1,\cdots,x_1,\cdots\}$, 故 $(0,1)$ 与 B 中的一个子集对等, 即 $|B|\geq|(0,1)|=\aleph$. 再证 B 对等于 $(0,1)$ 的一个子集. 考虑 B 中任何一个 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$, 按照十进制无限小数表示有

$$x_1=0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,$$
$$x_2=0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,$$

$$x_n=0.x_{11}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots,$$

由上述一列数 $x=\{x_n\}\in E^\infty$, 作一小数 $\psi(x)$:

$$\psi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,2}\cdots x_{1,n}\cdots$$

显然 $\psi(x)\in(0,1)$ 而且当 $x\neq y$ 时,$\psi(x)\neq\psi(y)$, 故映射为单射. 故 B 对等于 $(0,1)$ 对等于 $(0,1)$ 的一个子集, 即 $|B|\leq|(0,1)|=\aleph$. □

Remark 1.56. 这种证明方法是典型的三角证法, 并且结合了 g 进制小数. 从另外一个角度理解，E^∞ 单个元素 $x=\{x_n\}\in E^\infty$, 作一小数 $\psi(x)$ 中的个数是可数的, 但是每个元素的取值是不可数的, 那么 $\psi(x)$ 的全体的势就是 $\aleph^{\aleph_0}=\aleph$.

Theorem 1.57. *$[a,b]$ 上的连续函数全体 $C[a,b]$ 的势是 $\aleph$.*

Remark 1.58. 证明的思路就是利用伯恩斯坦定理. 常函数对等于实数集, 而常函数是 $C[a,b]$ 的一个子集, 那么接下来的关键就是证明 $C[a,b]$ 对等于势为 $\aleph$ 的集合的子集. 把 $[a,b]$ 上有理数排成一排, 任何一个连续函数 $f(x)$, 由这些有理列的子数列确定 (利用到了连续函数存在极限这个性质, 任何一个实数都可以表示成一系列有理数的极限), 故有 $C[a,b]$ 到 E^∞ 的映射

$$\psi: f\mapsto(f(r_1),f(r_2),\cdots,f(r_n),\cdots)$$

即 $C[a,b]$ 对等于 E^∞ 的一个子集.

Theorem 1.59. *设 M 是由两个元素 $p,q(p\neq q)$ 作成的元素列全体, 那么 M 的势为 $\aleph$. 这个命题等价为二进制数的势为阿列夫. 数学上表述为 $2^{\aleph_0}=\aleph$.*

Theorem 1.60. *如果 Q 是可列集, 那么 Q 的子集全体所成之集 S 的势为 $\aleph$. 显然也可以把这个问题等价为二进制数. 对于任意一个集合，每一个元素在里面就是 1, 不在就是 0. 数学上还是 $2^{\aleph_0} = \aleph$.*

Definition 1.61. 整系数多项式的实根称为代数数，代数数的全体为可列集，不是代数数的实数称为超越数，超越数的势为 $\aleph$

Proposition 1.62 (**Cantor 假设**)**.** *不存在势 α，使得 $\aleph_0 < \alpha < \aleph$*

Theorem 1.63 (**无最大基数定理**)**.** *若 A 是非空集合，则集合 A 与其幂集 2^A 不对等，且 $|2^A| > |A|$*

1.3 n 维欧氏空间

Theorem 1.64 (**欧几里德距离的性质**)**.** *距离 $d(x,y) = \|x-y\|$，对于 $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$ 有*

(1) 正定性：$d(x,y) \geq 0$，而且 $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) 对称性：$d(x,y) = d(y,x)$;

(3) 三角不等式：$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Definition 1.65 (**球邻域**)**.** 设 $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, 称集合 $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x,y) < r\}$ 为 x 为中心，以 r 为半径的球，也称作 x 的球邻域，记作 $B_r(x)$.

Definition 1.66 (**有界点集**)**.** 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\exists R > 0, s.t. A \subset B_R(0)$，称 A 为有界集合.

Definition 1.67 (**内点**)**.** 设 $A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, 若 $\exists \varepsilon > 0, s.t. B_\varepsilon(x_0) \subset A$, 则称 x_0 为 A 的内点。记 A 的所有内点构成的集合为 A°.

Definition 1.68 (**边界点**)**.** 设 $A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, 若 $\forall \varepsilon > 0, s.t. B_\varepsilon(x_0) \bigcap A \neq \emptyset, B_\varepsilon(x_0) \bigcap A^c \neq \emptyset$, 则称 x_0 为 A 的边界点。记 A 的所有边界点构成的集合为 ∂A.

Definition 1.69 (**聚点/极限点**)**.** 设 $A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, 若 $\forall \varepsilon > 0, s.t. B_\varepsilon(x_0) \bigcap A \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$, 则称 x_0 为 A 的聚点或者极限点。记 A 的所有聚点构成的集合为 A 的导集, 记作 A'.

Definition 1.70 (**闭包**)**.** 集合 A 与其导集 A' 的并集 $A \bigcup A'$ 称为闭包，记作 $\overline{A}$.

Definition 1.71 (**孤点**)**.** 集合 A 中挖去所有聚点后剩下的点称为孤点，记作 $A \backslash A'$

Definition 1.72 (**稠密**)**.** $\overline{A} = E$, 就称集合 A 在集合 E 中稠密.

Remark 1.73. 内点必属于聚点 $A^\circ \subset A'$; 边界点组成的点集等于闭包挖去所有内点 $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$;$A$ 的外点等于 $\mathbb{R}^n$ 挖去所有聚点 $(A^c)^\circ = \mathbb{R}^n \backslash \overline{A}$，并且 $A \subset B$，则 $A' \subset B'$.

Proposition 1.74. $(A\bigcup B)' = A'\bigcup B'$, 并且孤立点的等价表述为 $x \in A\backslash A' \Leftrightarrow \exists r > 0, B_r(x)\bigcap A = \{x\}$.

Definition 1.75 ($\mathbb{R}^n$ **中的收敛点列**)**.** 设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$，使得 $\lim_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$，称点列 $\{x_k\}$ 是收敛点列，x 是 $\{x_k\}$ 的极限，记作 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ 或者 $x_k \to x$. 在 $\mathbb{R}^n$ 中收敛点列依各坐标收敛.

Theorem 1.76 ($\mathbb{R}^n$ **中的收敛点列和聚点等价关系**)**.** 设 $A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, 则 $x \in A'$ 的充要条件是，存在点列 $\{x_k\} \subset A\backslash\{x\}$, 收敛到 x.

Remark 1.77. 在证明必要性时，可以不断构造满足 $\|x_k - x\| < 1/k$ 的点列，这也表明 A 中的聚点的任意邻域内必有无穷多个点属于 A.

Definition 1.78 (**闭集**)**.** 若点集 A 包含了所有 A 的极限点或聚点，则称 A 为闭集. 规定空集为闭集. 易知 A 为闭集当且仅当 $A = \overline{A}$.

Theorem 1.79. 有限个闭集的并集是闭集; 无限多个闭集的交还是闭集.

Remark 1.80. 无穷多个闭集的并不一定是闭集，比如 $F_k = [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}], k = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup_{k=1}^{\infty} = (0, 1]$, 这就说明 $\overline{\bigcup F_k} \neq \bigcup \overline{F_k}$. 但是一般有如下关系

$$\bigcup_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha}, \quad \bigcap_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha} \supset \overline{\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha} \tag{1.33}$$

Definition 1.81 (**开集**)**.** 设 $G \in \mathbb{R}^n$, 若 G^c 是闭集，则称 G 为开集. 通常证明开集的方法是证明其余集是闭集.F 是闭集的充要条件是它有不交并分解：

对于任何的点集 A，在 $\mathbb{R}^n$ 上有如下分解，$\mathbb{R}^n = A^\circ \bigcup \partial A \bigcup (A^c)^\circ$. 其实对于任意点集 A 的边界和其余集的边界是相等的，即 $\partial A = \partial(A^c)$.

Proposition 1.82 (**闭集充要条件**)**.** F 是闭集的充要条件是它有不交的分解 $F = F^\circ \bigcup \partial F$, 即 F 包含了其所有聚点.

Proposition 1.83 (**开集充要条件**)**.** G 是开集的充要条件是 $G = F^\circ$, 即 G 和它的内点构成的集相等..

Theorem 1.84. 有限个开集的交集是开集; 无限多个开集的并还是开集.

Definition 1.85 (F_σ **集**)**.** 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 中是可数个闭集的并，那么称集合 A 为 F_σ 集.

Definition 1.86 (G_δ **集**)**.** 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 中是可数个开集的交，那么称集合 A 为 G_δ 集.

Remark 1.87. 由于闭集的余集是开集，而由集合的并与交的运算规则，可以很容易得到 F_σ 的余集是 G_δ 集;G_δ 集的余集是 F_σ 集.$[0, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[0, \frac{k}{k+1}]$, 和 $\mathbb{Q}$ 都是 F_σ 集. 点集 $[0, 1)$ 显然不是开集也不是闭集，在 $\mathbb{R}^n$ 中，有大量的集合既不是开集也不是闭集.

Definition 1.88 (σ **代数**). 令 $\mathcal{F}$ 是由集合 X 中一些子集所构成的集合组. 如果满足：

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$，则 $A^c \in \mathcal{F}$

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 具体来讲是集合列中有限个或者可数个子集的并集依然在集合中.

那么称 $\mathcal{F}$ 是 X 的一个 σ 代数.σ 代数总是存在的，2^X 是最大的一个 σ 代数，$\{\emptyset, X\}$ 是最小的一个 σ 代数. 这两个 σ 代数称为平凡 σ 代数. 由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 故有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c \in \mathcal{F}$. 需要注意的是，集合的指数 n 不一定从 1 开始，$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$，$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$，那么显然有集合列的上极限和下极限也必属于 σ 代数, 即 $\underline{\lim} A_n \in \mathcal{F}, \overline{\lim} A_n \in \mathcal{F}$.$\mathcal{F}$ 对于有限并运算封闭. 那么意味着对有限的交运算也封闭咯？

Definition 1.89 ($\mathcal{F}(\Sigma)$ **代数**). 设 Σ 是由集合 X 中的一些子集构成的集合族, 考虑包含 Σ 的 σ 代数 $\mathcal{F}$ （即若 $A \in \Sigma$，则 $A \in \mathcal{F}$）. 记包含 Σ 的最小的 σ 代数为 $\mathcal{F}(\Sigma)$，称 $\mathcal{F}(\Sigma)$ 是由 Σ 生成的 σ 代数.

Definition 1.90 (**Borel 集**). 由 $\mathbb{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 σ 代数称为 $\mathbb{R}^n$ 的 Borelσ 代数，记作 $\mathcal{B}^n$.$\mathcal{B}^n$ 中的元素称为 Borel 集.

Remark 1.91. 由于开集的余集也在 Borel 集中，故闭集也是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集. 可数个闭集的并（F_σ）也是 Borel 集，显然 G_δ 也是 Borel 集. 任何一个 Borel 集的余集是 Borel 集.Borel 集合族的可列并、可列交、上极限与下极限构成的集合是 Borel 集.

Theorem 1.92. *$\mathbb{R}$ 中任一非空开集 G 是可数个互不相交的开区间之并.*

Remark 1.93. $\mathbb{R}^n$ 中任意非空开集 G 可以表示为可数个互不相交的 n 维半开矩阵之并.（半开矩体是指积集 $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots [a_n, b_n)$, 称 $b_i - a_i$ 为矩体边长. 若各边长相等, 则称为方体）

Corollary 1.94. *若 $a \subsetneqq \mathbb{R}$ 是闭集，则 F 是从 $\mathbb{R}$ 中挖去互不相交的开区间后所得之集. 若 F 是有界闭集, 则 F 是从一闭区间挖去可数个互不相交的开区间后所得之集.*

Theorem 1.95 (**康托集的势**). *康托集的势为 $2^{\aleph_0} = \aleph$.*

Proof. 康托集可以等效为三进制小数，具体等效原理见如图1.3. 显然分割的次数 i 是可列个，而第 i 次分割会产生三进制小数的第 i 位，而三进制小数的每一位有两种选择 0 或 2，因此康托集的势等价为自然数集的全体子集组成的势, 等于 $2^{\aleph_0} = \aleph$. 故康托集不可数, 其势为连续势 c. □

Definition 1.96 ($\mathbb{R}^n$ **上连续函数定义**). 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数,$a \in \mathbb{R}^n$. 若对于任意 ε, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(a)$, 有 $f(x) - f(a) < \varepsilon$, 则称 f 在 a 连续,a 是函数 f 的连续点. 若 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上每点连续, 则称 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

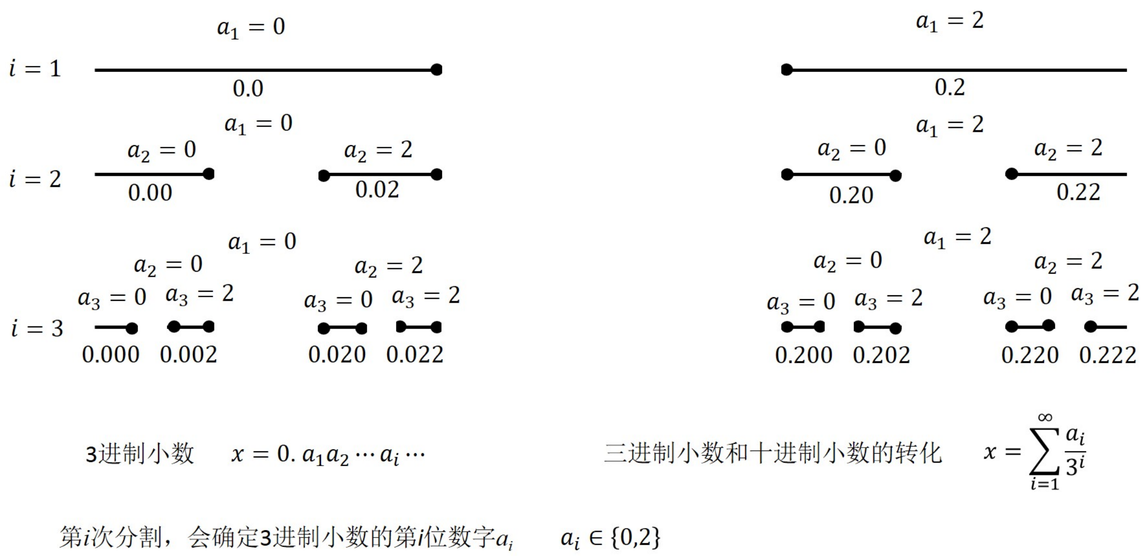

Figure 1.3: 康托集和 3 进制小数的一一对应

Remark 1.97. 函数 f 在点 a 处连续的充要条件为：对于 $\mathbb{R}^n$ 中任何收敛于点 a 的点列 x_k，有 $\lim f(x_k)=f(a)$.

Theorem 1.98 ($\mathbb{R}^n$ **上实值函数连续性等价判定**). 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数，则以下条件相互等价：

(1) f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续*;*

(2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$*,* $\{x|f(x)<\lambda\}$ 与 $\{x|f(x)>\lambda\}$ 是开集*;*

(3) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$*,* $\{x|f(x)\leq\lambda\}$ 与 $\{x|f(x)\geq\lambda\}$ 是闭集*;*

Proof. 显然有 (2)$\Leftrightarrow$(3)(开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集). 只需要证 (1)$\Leftrightarrow$(2). 证明示意图见图 (1.4)

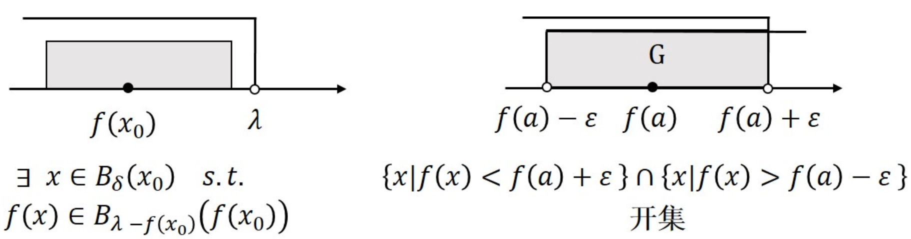

Figure 1.4: 连续函数等价判定证明示意图

必要性: 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续,$\lambda\in\mathbb{R}$. 任给 $x_0\in\mathbb{R}^n, f(x_0)<\lambda$, 由连续性定义可知,$\exists\delta>0, s.t. x\in B_\delta(x_0)$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\lambda-f(x_0)$, 即 $f(x)<\lambda$. 故 $\{x|f(x)<\lambda\}$ 的每一点都是内点 (内点定义), 从而它是开集. 同理 $\{x|f(x)\ \lambda\}$ 也是开集. 必要性得证.

充分性：设 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\{x|f(x) < \lambda\}$ 与 $\{x|f(x) > \lambda\}$ 是开集. 任取 $a \in \mathbb{R}^n$, 现证 $f(x)$ 在 a 点处连续. 令 $f(a) = \beta . \forall \varepsilon > 0$, 因 $\{x|f(x) < \beta + \varepsilon\} \bigcap \{x|f(x) > \beta - \varepsilon\} = G$ 是开集, 显然 $a \in G$, 故有 $\delta > 0, s.t. B_\delta(a) \subset G$. 这说明当 $y \in B_\delta(a)$ 时有 $\beta - \varepsilon < f(y) < \varepsilon$, 即 $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$. 根据定义,$f$ 在 a 点连续. □

Definition 1.99 (E **上连续函数**). 设 $E \subset \mathbb{R}^n, f : E \to \mathbb{R}, a \in E$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in E \bigcap B_\delta(a)$, 有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, 就称 f 在 a 点处连续,a 是 f 的连续点. 如果 f 在 E 上处处连续, 就称 f 在 E 上连续. 全体 E 上处处连续, 就称 f 在 E 上连续. 全体 E 上的连续函数记为 $C(E)$.

Theorem 1.100 (**柯西收敛原理**). *序列 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 收敛的充分必要条件是*

$$\lim_{k,l \to \infty} \|x_k - x_l\| = 0 \tag{1.34}$$

设 $A \subset \mathbb{R}^n$,$\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集族, 若 $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$, 则称 $\mathcal{F}$ 是集 A 的一个覆盖; 当 $\mathcal{F}$ 是开集族时, 称 $\mathcal{F}$ 为集 A 的开覆盖; 当 $\mathcal{F}$ 是有限族时, 称 $\mathcal{F}$ 是集 A 的有限覆盖. 若 $\mathcal{F}'$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 中的子集族,$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'$, 当 $\mathcal{F}'$ 是集 A 的覆盖时, 称 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 的子覆盖.

Theorem 1.101 (**有限覆盖定理**). *若 $\mathcal{F}$ 是有界闭集 F 的开覆盖，则可以从 F 中取出有限子覆盖。*

Theorem 1.102 (**闭区间套定理**). *设 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集, 满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots F_k \supset$, 则 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.*

Remark 1.103. 闭区间套定理的证明用到了反证法. 若集合列交集为空, 则集合列余集的并就是 $\mathbb{R}^n$ 了，因为 $\mathbb{R}^n \supset F_1$，故集合列余集的并包含了 F_1, 然后根据有限覆盖定理可以推出矛盾.

Theorem 1.104 (**Bolzano-Weierstrass**). *$\mathbb{R}$ 中任意有界点集 A 至少有一个聚点，即 $A' \neq$. 等价表示为:$\mathbb{R}^n$ 中任意有界无限点集必有收敛子列.*

Definition 1.105 (**紧集**). 设 $\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的任意一个开覆盖均包含有限子覆盖.

Theorem 1.106. *设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一个覆盖都包含子覆盖, 则 E 是有界闭集.*

Remark 1.107 (**注明**). 在拓扑的基本概念中，最令人费解的，莫过于“紧性”(Compactness)。它描述一个空间或者一个集合“紧不紧”。正式的定义是“如果一个集合的任意开覆盖都有有限子覆盖，那么它是紧的”。乍一看，实在有点莫名其妙。它究竟想描述一个什么东西呢？和“紧”这个形容词又怎么扯上关系呢？

一个直观一点的理解，几个集合是“紧”的，就是说，无限个点撒进去，不可能充分散开。无论邻域多么小，必然有一些邻域里面有无限个点。上面关于 compactness 的这个定义的玄机就在有限和无限的转换中。一个紧的集合，被无限多的小邻域覆盖着，但是，

总能找到其中的有限个就能盖全。那么，后果是什么呢？无限个点撒进去，总有一个邻域包着无数个点。邻域们再怎么小都是这样——这就保证了无限序列中存在极限点。

Compact 这个概念虽然有点不那么直观，可是在分析中有着无比重要的作用。因为它关系到极限的存在性——这是数学分析的基础。了解泛函分析的朋友都知道，序列是否收敛，很多时候就看它了。微积分中，一个重要的定理——有界数列必然包含收敛子列，就是根源于此。

Corollary 1.108. $\mathbb{R}^n$ 中的集 E 是紧集的充分必要条件是, 它是有界闭集.

Remark 1.109. 可以对比有限覆盖定理来理解这个推论. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一个覆盖都包含子覆盖, 则 E 是有界闭集. 而有界闭集的任一开覆盖能够取出有限子覆盖，符合紧集的概念. 而又设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一个覆盖都包含子覆盖, 则 E 是有界闭集. 充分必要性得证.

1.4 戏说选择性公理

转自知乎https://www.zhihu.com/collection/134001521

由于要让 5 岁小孩子听懂，所以解释时不可避免地会为了保证可读性而降低严谨性。想严谨地学习选择公理的知识可以阅读公理化集合论的教材，我也会在最后放上一些扩展阅读的链接。开始咯！

选择公理有很多种表述形式和等价命题，一言以蔽之：对于所有的集族，均存在选择函数。

所谓集族，就是由非空集合构成的集合；而选择函数，就是一个定义在集族上的函数——对于集族里的集合, 小朋友懂了吗？（感觉要被打……似乎只有 5 岁的陶哲轩才可以看懂……）好吧好吧，我这么说，选择公理的意思是：如果有一堆非空集合，那么我们可以从每个集合里各取出一个元素。是的，就是这样。（不开玩笑地说，上面这句话应该高中生就能看懂了吧？）

如上图，左边的 S_i 表示了一堆非空集合，然后选择公理说，我们可以从每个非空集合里选出一个元素，X_i 就是一个例子。

什么叫集合啊？额，5 岁小朋友还在上幼儿园，并不知道集合是啥……那我接下来的话就真的是对幼儿园小朋友说的了：阿尔法幼儿园里小班、中班、大班各有 3 个，所以总共有 9 个班。下个月市里要举办一场幼儿园之间的跑步比赛，阿尔法幼儿园决定从每个班里选出一个小朋友，组成一支 9 个人的代表队，代表学校参赛。这支队伍能选出来吗？

没错，而且选择方法有很多。最简单的方法就是：

方法一：让一个体育老师到每个班上随便选一个同学，组成一支队伍。当然了，为了取得更好的成绩，我们可以用：

方法二：每个班进行一次班内的跑步比赛，跑第一名的同学进入校代表队。如果没有那么在乎比赛成绩的话，其实方法一和方法二对大家都没什么区别，除了——可怜的体育

老师！

采用方法一，那么体育老师需要到每个班都跑一趟；他可能会庆幸整个阿尔法幼儿园只有 9 个班。隔壁的贝塔幼儿园有 30 个班，每个班跑一趟要累死了！

采用方法二，每个班则可以根据班内跑步比赛第一名入选校队这个规则来选出代表，不需要体育老师一个班一个班地跑啦。

对于有些奇怪的幼儿园来说，这两种方法就不是都可以采用了，比如说街对面的伽玛幼儿园。伽玛幼儿园有……额……无穷多个班：1 班、2 班、3 班、4 班……数也数不完。这个时候，方法一就不管用啦！如果让体育老师一个个跑，那么他永远也跑不完所有的班。但是方法二还是可以的，我们可以直接命令每个班根据班内跑步比赛第一名入选校队这个规则来选出代表。

嗯！这个班内跑步比赛第一名入选校队的规定其实就是我之前说的选择函数，它能帮我们从每一个班（非空集合）里选出一个代表（元素）。选择公理就是说，对于任何一个幼儿园（集族），我们都可以找到一个规定（选择函数），让每个班按照这个规定选出一个代表（元素）。哦……就是这样啊。那这不是很简单吗！

啊，对于跑步比赛来说是很简单。不过……你还记得上个月市里的先进宝宝的评选活动吗？当时可就出了事儿了：由于先进宝宝没有一个可量化的具体标准，孩子们争吵得不可开交，甚至有些家长都跑到幼儿园里闹。最后，阿尔法幼儿园决定，干脆让体育老师到每个班上随便选一个小朋友进校队好了。反正这个评选活动也挺莫名其妙的。而伽玛幼儿园这下就不好办了……无穷多个班，怎么办？于是他们最终还是决定用老方法：班内跑步比赛第一名入选校队。啊，似乎班内跑步比赛第一名入选校队是一个万能方法啊！如果想不到什么好的选举方案，这个方法总是可以用。没错，对于幼儿园来说是这样。可是如果每个班不是一群小朋友呢？而是一群芭比娃娃或者一群乐高小人怎么办？没办法进行跑步比赛，那如何制定一个从每个班里选出一个代表的规则呢？额……

在数学里我们就会遇到这样的问题。数学家所说的集合就相当于幼儿园的班，只不过集合里的元素不一定是小朋友，也可能就是芭比娃娃或乐高小人，也可以是数字，或是一堆三角形。而这时候我们就不能使用班内跑步比赛第一名入选校队的方法来从每个集合里选一个元素出来了……然而，数学家有时候需要在每个集合里挑一个元素出来。由于不知道怎么制定规则（选择函数），他们干脆制定了选择公理：不管怎么着，反正总能从每个非空集合里选出一个元素！

这不是废话么？为什么一定要找一个所谓的选择函数呢？非空集合就是至少有一个元素的集合，那直接从每一个非空集合里随便选一个元素出来不就好了！数学家真是无聊 ==

是啊，我们是可以从每个非空集合里直接选一个元素出来——当集合的数量是有限的时候。如果集合有无穷多，我们一个集合一个集合地选，永远也选不完啊。还记得伽玛幼儿园的情况吗？

我真是搞不懂你们数学家！每个非空集合里都有元素存在，那随便选一个不就行了吗？不用体育老师一个个选，直接规定每个班随便选一个代表不就好了！额，数学家是一群极

其严谨的人……你说随便选，他们是听不懂的……怎么随便选？掷骰子？每个班几个人就用几个面的骰子？好吧，那我告诉你，伽玛幼儿

园不仅有无穷多个班，而且每个班里都有无穷多的小朋友……其实还有很多例子，你现在还在上幼儿园，可能不一定能听懂。不过我先写出来，等你上了中学应该就能听懂啦～

例子一：正整数集合是，现在我们考虑一堆（可能无穷多个）正整数集合的非空子集。这个时候我们希望从每个非空子集中选一个元素出来，怎么办呢？很简单，我们选出每个子集内最小的那个数！也就是说，选择函数定义为中最小的数。

例子二：考虑实数轴上所有有限长度（大于零）的闭区间，这些区间就是一堆非空集合。那么怎么从每个区间里取一个元素出来呢？啊，我们可以把定义为的中点！

例子三：考虑实数的所有非空子集。这下怎么从每个非空子集中选一个元素呢……想想看？……

目前为止，没有人能找到一个恰当的作为选择函数。并且，模型论 (model theory) 中有一些颇具说服力的论证表明，这样的是不可能找到的。（当然了，如果要详细论证这一点，那先得定义什么叫找到……）

所以，选择公理令人纠结的地方在于，选择和存在到底是什么关系。一个东西存在，我们就可以选择它吗？接受了选择公理，就意味着我们假定了选择函数始终存在，即使我们没有办法给出任何具体的构造和例子。

（感兴趣的话可以看看 Vanderbilt 的数学教授 Eric Schechter 的文章：Constructivism Is Difficult ）跟现实世界不同，数学里所有的东西都是形式化的，即使是像 42 这样的数字也是：你可以拿来 42 个苹果，或者召集 42 个小伙伴，但现实生活中没有 42 这个东西。

所以，我们有很多数学世界，每一个世界都有不同的规则，我们把这些规则称为公理。只要这些公理不会导致矛盾，那么无论公理有多么奇怪都是可以的。哥德尔和寇恩证明了，无论接受选择公理与否，都不会导致矛盾，只是身处不同的数学世界而已。

不过，除了一些研究集合论的数学家和逻辑学家以外，大部分数学家都选择接受选择公理，因为在含有选择公理的数学世界里，事情会简单一些。罗素在他的《数理哲学导论》里吐槽过（不是原话，但意思一样）：To choose one sock from each of infinitely many pairs of socks requires the Axiom of Choice, but for shoes the Axiom is not needed.（如果有无穷多双袜子，那么从每一双里选出一只需要用到选择公理；而如果是鞋子则不需要。）这是因为袜子是不分左右的（不要较真，理解罗素的意思就行），所以我们没有办法规定选哪一只。而鞋子是分左右的，所以我们可以直接给出选择函数：选左脚的鞋子！为什么罗素要强调无穷多双袜子呢？因为如果是有限双袜子，我们就可以一只一只地选，就像之前幼儿园例子中的方法一一样。

UIC 的数学教授 Jerry Bona 调侃过：The Axiom of Choice is obviously true the Well Ordering Principle is obviously false and who can tell about Zorn's Lemma?（选择公理显然是对的嘛！良序原理显然是错的嘛！佐恩引理是对还是错来着？）这是个玩笑话，因为这三个命题都是等价的。不过选择公理看起来确实显然正确，良序原理看起来确实不那么

靠谱……不过直觉常常与数学真理相悖，所以有这样的感觉也是正常的。

好吧，讲了这么多啦，小朋友你还有什么问题吗……？好烦哦！数学家真是小题大做，为了这么个小小的选择公理都要纠结半天！额，选择公理可不小！在数学上，如果接受了一个公理，那么从这个公理推出的所有定理都必须被接受。选择公理看起来很显然，但从中可以推出极其反常识的东西，比如著名的巴拿赫 - 塔斯基悖论 (Banach-Tarski paradox)：一个球可以被分成五份，接着拼成两个与原来一样大的球。没错，并不是两个球的总体积跟原来一样大，而是每个球都跟原来一样大。

嗯，是的，如果承认了选择公理，那么这个命题确实可以从它一步一步严谨地推导出来。别气馁，连数学家也觉得这个反直觉呢，所以才把它称为悖论。不过，尽管称其为悖论，数学家还是得接受它，因为这确确实实可以从选择公理推导出来。YouTube 上有关于这个悖论的具体的科普：The Banach-Tarski Paradox https://www.youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA

等等，那这不是违反了物质守恒？球的密度不变，体积变成了之前的两倍，那质量不也凭空翻了倍？这个问题问得好……可是你怎么定义体积？分球的过程牵涉到一些体积不可定义的部分……额，总之，选择公理的水很深，数学的水很深。如果真的想把这些都弄清楚，需要学习公理化集合论。小朋友等你长大了以后可以来学呦 =w= 诶，等等，小朋友，你竟然已经知道了物质守恒！……好了不开玩笑了, 我就讲到这里吧！参考资料/扩展阅读：Wikipedia：Axiom of choice https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_choice

Chapter 2

Lebesgue 测度

2.1 长度是怎么练成的

似乎下面链接的博主是这篇文章的作者，真是让人醍醐灌顶啊。

http://imaginary.farmostwood.net/index

长度是怎样炼成的？点没有长度和面积，为什么由点组成的线和面会具有长度和面积？“长度”“面积”这些词汇究竟是在怎样的意义上被使用的？有的时候我们把点的长度叫做零，有的时候叫做无穷小，这两个称呼是不是都有道理？无穷个零相加是不是还得零？（其实和第一个问题是一个意思，无穷个点怎么加成线段的？）

当然，小乐的问题是着眼于哲学，而我的回答将会着眼于数学，——我不是学哲学的，但是大概也知道在哲学上这些词汇常常导致混乱的争论，比如芝诺悖论之类。幸运的是，早在一百年前，通过一大批杰出的数学家的努力，以上这些问题已经被精确地给出了解答，这就是在数学中被称为“测度论”的一套理论体系。这里“精确”的意思是说，这套理论体系完全基于形式逻辑，而且只采用了非常少的公理（下面会陈述之），从而，在这套理论中不存在任何模糊或者逻辑上模棱两可之处（了几个需要加以特别说明的地方）。换句话说，我们不仅可以认为数学家能够确定无疑的回答以上这些问题，而且可以认为人类在今天能够确定无疑的回答以上这些问题（在承认那些公理的前提下）。

不幸的是，这一断言几乎必然会遭到哲学家的反对。一方面是因为哲学家们倾向于每个人自己创造一组定义，——从我在未名哲学版见过的一系列关于芝诺悖论的讨论来看，这样的结果是所有的论述最终都流于自说自话。另一方面大概也因为学术壁垒的缘故，哲学家们大概从来也没有了解过数学家们已经在此问题上做出过的卓越工作，（确实，很多细节是过于数学化了一点⋯⋯）。有鉴于此，我答应小乐以尽可能通俗的方式（在不损害准确性的前提下）大致介绍一下测度论的内容。我想在这个版面上大概还会有不少别的朋友对此感兴趣吧。

下面正式开始。

2.1.1 关于无穷

当我们使用“无穷”这个词的时候，我们必须时刻谨记，这个词有两种截然不同的意义——不，我这里说的不是亚里士多德关于实无穷和潜无穷的那些绕口令，而是某些重要得多的本质问题，对他们的清晰阐释开始于伟大的德国数学家康托 Georg Cantor (1845-1918)：当我们说一个集合有无穷多个元素的时候，我们必须指明这里的无穷是哪一种，是“可数无穷”还是“不可数无穷”。虽然都是无穷集合，但是它们会体现出截然不同的性质。

为了说明这一问题，我们引进集合的“势（cardinality）”的概念。简单说来，势就是集合的元素的个数。一个集合有三个元素，我们就称其势为 3。两个集合如果元素个数相等，我们就称它们为等势的。——很显然，要判断两个集合是不是等势，只需要看这两个集合之间能不能建立起元素的一一对应即可，如果可以的话，我们就说这两个集合的元素是一样多的。

到这里为止都显得很简单。可是最有趣的部分马上就要出现了：康托指出，不但对于有限个元素的集合我们可以讨论它们的势，对于无穷个元素的集合，我们同样可以讨论它们之间是否等势。换句话说，我们可以讨论两个无穷集合的元素是不是一样多！

之所以如此，是因为集合之间的“一一对应”本质上只是个数学概念，是可以被精确研究的对象（请回忆高中数学课本关于映射的那一章）。从而，随便拿两个集合来，它们之间是否能建立一一对应只是数学上的问题而已。

以下是一些最基本也是最著名的例子和命题，请尽量耐心的阅读。所有这些陈述都是可以基于最简单的形式逻辑给出严格证明的，证明可以在参考文献 [1] 上查到：

• 每一个集合都和它自身等势。

注：废话。

• 全体正整数的集合和全体正偶数的集合等势。

注：这是第一个有趣然而迷惑人的结果。我们等于是在说：一个集合可以和它的一部分一样多！——但是这并不是一个悖论。我们通常觉得一个集合不能和它的一部分一样多只是针对有限集合而言的，本来就没人说过无限集合不能和它的一部分一样多，只是有时候大家会不自觉地有这个误解而已。

• 全体正整数的集合和全体有理数的集合等势。（什么是有理数来着？查书去！）

注：这是在数学上很重要的一个例子，说明一个实数中的稠密集可以和一个离散集等势，不过大家看到这里大概已经开始打瞌睡了……跳过这个例子！

• 全体正整数的集合和全体实数的集合不等势。

注：睁大眼睛，迄今为止最重要的一句话出现了！你永远不可能在全体正整数的集合和全体实数的集合之间建立起一一对应来。对这个陈述的证明是数学上最有趣也最迷人的证明之一，可惜的是篇幅所限我不能在这里证明给大家看。那么只讨论结论好了：并不是所有的无穷集合都是等势的，有一些无穷集合比另一些无穷集合的元素更多，换句话说，无穷之间也是有大小的。

• 任给一个无穷集合，我们都能够造出一个集合包含它，而且和它不等势。

注：换句话说，无穷和无穷相比，没有最大，只有更大。——但是请注意，虽然我们能够造出越来越大的无穷集合，但是我们并不真正对那些太大的无穷感兴趣，因为和这个世界没什么关系。

• 如果两个集合都和第三个集合等势，那么它们彼此也等势。

注：好像也是废话，但是它引出了下面的重要陈述。

• 有很多集合都和全体正整数的集合等势，从而它们彼此也等势，我们称所有这样的集合为“可数无穷的（countably infinite）”。有很多无穷集合比全体正整数的集合的势更大，我们称所有这样的集合为不可数无穷的（uncountably infinite)。但是，不存在无穷集合的势比全体正整数的集合的势更小。

注：我们待会儿再来讨论为什么起这么两个名字。前面的例子告诉我们，全体正偶数的集合是可数无穷的，全体有理数的集合是可数无穷的，但是全体实数的集合是不可数无穷的。

• 在不可数无穷集合中间，有些集合是和全体实数的集合等势的，这些集合被称为“连续统（continuum）”

注：好了，现在我们对全体无穷集合建立了一个简单的分类。最小的一类称为可数无穷集。剩下的都叫不可数无穷集。不可数无穷集里面又有特殊的一类叫作连续统，剩下当然还有一些非连续统的不可数无穷集，但是它们几乎和真实世界没有任何关系，所以忽略之。（有人不愿意忽略它们，非要去研究里面的一些麻烦的问题，于是产生了数学中间最让人头晕的一部分结论，比如什么哥德尔不完全性定理之类……这个定理偏偏还特别著名，很多人都问过我它究竟说的是啥。相信我，你不可能弄明白的。）

也就是说，我们真正关心的是两类特殊的无穷集合，一类称为可数无穷集，一类称为连续统。所有的可数无穷集彼此等势，所有的连续统彼此等势，但是任何可数无穷集和连续统之间不等势，后者总是更大一些……真绕嘴阿。

下面是一些可数无穷集和连续统的例子：

可数无穷集：

自然数集，整数集，有理数集。（基本上，如果你在平面上或者直线上随手点无穷个点，并且这些点彼此都不挨着，那么它们的总数就是可数无穷的。但是也存在一些不这么简单的可数无穷集。）

连续统：

实数集，直线上点的个数，平面上点的个数，一个正方形里点的个数，或者简而言之，一切几何对象里的点的个数都是连续统。（这里一个常常被人提到的推论就是直线上的点和平面上的点一样多，——都是连续统那么多。其实证明很简单，但是一言难尽，请查书去。）

好了，现在我们可以讨论这两个名字是怎么来的了。请注意，所有的可数无穷集都是可以和正整数建立起一一对应的，这是什么意思呢？这意味着，我们可以把一个可数无穷集中的每个元素都对应到一个正整数，这相当于给他们编了号码，从而我们可以去数它们（这就是可数这个词的来历）。也就是说，我们可以按照 1 号、2 号、3 号这么一直数下去，

虽然总数是无穷的，但是只要我们在理论上一直数完所有的自然数，我们就能真正数遍这个集合的所有元素（至少在想像里是这样）。

而连续统集合却不是这样。一个直线上的点是连续统，这就是说，无论怎么巧妙的给这些点编号，我们都是不可能给所有的点都编上号码然后一个一个的数下去把它们都数完的。它们是“不可数”的。

有人会说，这不是自欺欺人么？反正都是无穷个，反正事实上总也不可能数得完，那么在理论上区分“想像中数得完”和“想像中也数不完”有什么实际意义呢？

有的。正是这一点微妙的差别，使得有些事情我们能够对可数集去做却不能对连续统集合去做，也正是这一点差别，促成了从没有大小的点到有大小的直线和平面之间的巨大的飞跃。

2.1.2 测度的建立

让我们暂时放下关于无穷的那些讨论，回到主题：我们通常所说的长度面积体积这些词，究竟是什么意思？

为了更清楚的阐明这个主题，让我们把目光只集中在最简单的一维情形，也就是说，我们只考虑“长度”这个词。我们希望，取出直线上的一部分，就有一个“长度”存在。如果能做到这一点，那么类似的，面积和体积之类的高维词汇也可以类似的得以理解。

我们把目前要回答的问题列在下面：

• 什么是长度？

• 是不是直线上任何一部分都可以有长度？直线上的一个线段当然应该有长度，直线上的两段分离的线段也有总长度，单点有没有长度呢？随便从直线上挖出一些点来得到的也许是虚虚实实的一个“虚线段”有没有长度？是不是我们从直线上任意取出一个子集合(线段啦单点啦都可以看成是直线的特殊的子集合)，都可以定义它的长度？

——这件事无论在数学上还是应用上都是重要的，如果能够给直线的任何子集定义长度，那就太方便了。

• 如果上面这件事是可以的话，那么随便给一个直线上的点集，长度怎么计算？

等等等等。

事实上，在数学中这些问题都能够得到解答，但是首先让我们把上面问题里的“长度”这个词都换成更准确的一个术语：测度 (measure)。之所以要采用这么一个新造的词，首先是因为“长度”有时候有局限性。一个线段的长度好理解，一个复杂的点集，说长度就会显得很奇怪；不仅如此，在二维情形下我们还要研究面积，三维还要研究体积，四维还要研究不知道什么积……为了省去发明一个又一个新词的苦恼，我们把这些东西统一叫做二维测度，三维测度……一了百了。

好吧，那么，我们来定义 (一维) 测度。

——不，不要误会，我并不是要在此刻写出一大段难懂的话，告诉大家“测度就是什么什么什么什么。”或者更谦逊一点，说“我认为，测度就是什么什么什么什么。”——也

许这是一般人看来自然不过的工作方式，但不是数学家的。

这是因为，我们现在要定义的是某种特别基础的概念。也许在定义某些很复杂的高层概念的时候这种方式很自然，可是概念越基础，这种方式带来的问题就越大。关于测度这种层次的概念几乎必然伴随着用语言难于精确描述的种种晦涩的思考，一旦一个人试图把他对这个词的理解宣诸笔墨，那么无论他多么小心翼翼的整理他的陈述，在别人看起来他的定义都必然漏洞百出，有无数可以商榷的地方。——而因为这个概念在整个逻辑体系中的位置过于基础，任何商榷又都必然说起来云山雾罩，像哲学家们通常进行的关于基础概念的争论一样令人头昏脑胀。如果数学家们要开会用这种方法给出测度的定义，那一百个数学家一定会提出一百零一种定义来，最终的结果是什么有效的结论也得不到。

数学家们采用的是完全不同的方式：我们先不要贸然去说“什么是测度”，而是先问问自己，当我们想发明一个新的定义的时候，我们在这个定义的背后是想达到怎样一种目的？换句话说，我们想让这个定义实现哪些事情？

首先，测度——不管它具体怎么定义，其作用的对象按照我们的期望是直线上的任意一个子集，而最后得到的测度应该是一个具体的数字。也就是说，所谓定义测度，就是我们需要找到一种方法，使得随便拿来直线上的一个子集，我们都能够最终得到一个数字作为其“长度”。（在这里我们把无穷大也看成是测度，例如整根直线的测度就是无穷大。）

然后，这种方法总要满足一些必要的约束。——不能随便给一个线段标上一个数字，就说它是测度了。这些约束有哪些呢？

第一，空集（注意是说空集而不是说单点集）本身也是直线的子集，也应该有个测度。我们应当保证空集的测度是零。这是很显然的，否则这个测度就毫无实际意义了。

第二，既然每个子集都有一个测度，那么把两个彼此本身不相交的子集并在一起得到的新的子集也应该有个测度，并且这个测度应该等于两者之和。——这也是很直观的要求。两个线段如果不相交，那么他们的总长度应该等于两者长度之和。更高维的情况也一样，两个二维图形如果不相交，那么总面积应当等于各自面积之和，诸如此类。

更进一步，三个不相交子集的测度之和也应该等于这三个子集并起来的集合的测度，四个也对，五个也对，依此类推，无穷个不相交子集的测度之和也应该等于把它们并起来得到的集合的测度。——注意，是可数无穷个！

(为什么呢？直接说任意无穷个不好么？干嘛只限定是可数无穷个？)

数学家是很谨慎的。上面这个性质被称为可数无穷个集合的测度的“可加性”，承认可数无穷个集合有可加性是不得不为之，因为在实际应用中我们确实常常会遇到对可数无穷个子集求总测度的问题，可是任意无穷个子集的测度也能相加，这个陈述就太强大了，我们一时还说不好测度有没有这么强的性质，还是先只承认可加性对可数无穷个集合成立好了。

第三……

“且慢”，数学家说，“先别找太多的约束，看看这两条约束本身能够在多大程度上给出测度的定义好了。”

(什么嘛，这两条约束根本什么都没说。第一条是废话，第二条也是很显然的性质，要

是只满足这两条就可以叫做测度，那测度的定义也太宽松了，我随随便便就能构造出好多种不同的测度出来。)

也许是这样，可是到时候再添上新的约束也不迟。这也是数学家们常用的办法，先定义尽量宽松的概念，然后再一点一点的附加条件，得到更细致和特殊的子概念。就目前的情况来说，看起来这两条约束确实是宽松了点……

不幸的是，——也许出乎你的意料，——这两条约束不是太宽松，而是已经太严苛了。我们可以证明，给直线的每个子集都标上数字作为测度，保证空集的测度是零，并且测度满足可数无穷个集合的可加性，这件事情在逻辑上并无内在的矛盾，但是这样的测度必然具有一些数学上非常古怪的性质。也就是说，这样的测度根本不能用来作为对长度的定义！（关于这件事的证明其实很简单，但是需要一点数学基础才能读懂，详情可以参考文献 [1]。关于什么是“古怪的性质”，后面还会提及。）

在这种情形下，我们只好退而求其次，减少对测度这个概念的期望。——可是前面提到的两条性质都再基本不过了，如果连它们都不能满足，我们定义出来测度又有什么用呢？——于是数学家们另辟蹊径，不是放松这两条限制，而是放松它们的适用范围：我们不去强求测度能对直线的每个子集都有定义，也就是说，我们只挑出直线的一些子集来定义测度，看看能不能避免逻辑上的困境。

需要挑出那些子集呢？很显然，我们希望对于平时人们能接触到的各种常见的子集都能定义测度，所以单点集是需要的，线段也是需要的，而若干线段的交集或并集（这里若干还是指至多可数个）也是需要的，对它们的交集或并集再作交集或者并集也是需要的……

在数学中，我们把所有线段反复做交集或并集生成的这一大类集合称为可测集（当然它有更严格的定义，不过大概就是这个意思）。不要小看这种生成方式，事实上，你能想象得到的直线的子集其实都是可测集，——要找出一个非可测集的集合反倒是有点困难的事情。虽然可测集不包括直线的全体子集，但是如果我们能对所有可测集定义合理的测度，那这个测度也足以应付人们的需要了。

所幸的是这确实是可以做到的。在测度论中有很大的一部分篇幅是用来论述测度是怎么对可测集得以建立的，这部分内容一般被表述为一个称为 Caratheodory’s theorem 的理论。言简意赅地说：是的，只针对可测集定义的，满足前面那两条假设的“合理”测度总是能够建立得起来的。这里所谓的“合理”，就是说它能够用来作为我们心目中那个“长度”而存在。为了说明这一点，让我们想想我们离我们的目的地还差多远：直到现在为止，我们还是完全不知道一个测度究竟是什么样子。举例来说，按照我们的想法，一个单点集的测度应当是零（对应于点没有长度的直观），而实数轴上从 0 点到 1 点的线段的测度应当是 1，更一般地，从 a 点到 b 点的线段的测度应当是 b-a，——可是这一切我们统统还不知道呢！

这一切确实还未曾得到说明，而且更关键的是，仅仅有前面给出的那两条假设，我们也确实无法推理得出上面那些结论。这也是数学家们的通常做法：先有一个一般的概念，然后通过给它添上一些新的独立约束来构造出更细致的概念。我们现在已经有了一个一般

的测度的概念，把它总结一下，就是说：

对于直线的一大类子集（也就是可测集，谢天谢地，我们在应用中真正关心的集合都属于可测集），我们能够在不伤害逻辑的自洽性的前提下，给他们中的每个都标上一个数字，称为测度，并且这些数字满足下面两条性质：

• 空集对应的数字（空集的测度）是零。

• 若干个（但是至多可数无穷个）彼此不相交的子集，它们并在一起得到的子集的测度，刚好等于这些子集各自测度之和。

我们只知道这样的测度是存在的，但是很显然并不唯一，因为我们未曾对这些具体的数值作过任何限定。为了使测度能够符合我们心目中的那个“长度”的概念，我们需要进一步添上一条需要满足的性质：

• 如果把直线看作实数轴，那么从数轴上 a 点到 b 点的线段（这是直线的一个子集）对应的测度应当等于 b-a，例如，数轴上从 2 到 3 的这一段线段的测度应该等于 1。

乍一看这好像只是个不完全的限定，我们只规定了最简单的线段的测度，却没有规定剩下那许多奇奇怪怪的集合的测度，可是好在有数学推理来替我们包办剩下的一切：只要添上这条约束，那么所有的可测集的测度的具体大小就会以唯一不导致逻辑上的矛盾的方式被确定下来。也就是说，对于任何一个可测集，我们都有办法算出它所对应的那个唯一可能的测度来。（怎么算的？如果你不想看到数学式子的话就别问了……）

需要说明的是，同样也是根据这三条，我们就能够发现单点的测度必须是零（否则就会导致计算上的矛盾）。注意：这里的逻辑完全是数学的而不是哲学的，也就是说，我们是可以“推导”出单点的测度是零这样的结论的。

各位看到这里可能会很疑惑，我究竟在干什么？我并没有回答事先许诺要回答的任何一个问题（为什么点的长度是零而线段就不是，诸如此类），而是蛮横无理的把它们作为规定和规定的推论强制性的摆在这里，作为测度的定义的一部分。这算什么回答？

请允许我把对此的解释（以及对前面所有那些哲学性问题的解释）放在后面，先暂且回到测度的定义本身上来。

前面说了，只要能满足头两条性质，我们就称定义出来的那个东西为测度，加上第三条只是为了让这个测度符合我们对长度的具体数值的要求。也就是说，加上第三条性质后，我们定义出的应当只是测度中的具体某一种，一般把它称为勒贝格测度（Lebesgue measure）。再强调一遍，正如前面所说的那样，勒贝格测度并不能定义在直线的所有子集上而只能定义在其中的可测集上。但是我们在数学中和应用中能够遇到的集合差不多全是可测集。

（那就总还有几个不可测集了？是的，确实存在一些特别诡异的集合是不可测集。关于不可测集的构造和性质一直是数学上一个有趣的话题，——虽然并不重要，因为事实上在真实世界里我们遇不到它，它们只是作为抽象的数学构造出现的。我们后面还会再次谈及这个问题。）

既然勒贝格测度只是测度的一种，那就是说，数学上是承认不同于勒贝格测度的更一般的测度存在的。这些测度只满足三条性质的前两条，而未必满足第三条，也就是说，这

些“测度”并不保证从 0 点到 1 点的线段的测度是 1，甚至也未必保证单点集的测度是零。它们的性质可能和通常人们对长度的理解很不相同。

（为什么呢？既然明显和常识相悖，为什么还要保留这些人造的概念呢？）

这是因为，尽管数学家发明测度的概念的初衷确实只是想把“长度”的概念精确化和逻辑化，（事实上也确实做到了，就是勒贝格测度），但是人们很快发现，那些更一般的测度虽然未必还符合人们对“长度”这个词的理解，但是它们作为一种数学概念却能在大量的学科里得到应用，甚至成为很多理论的基础语言。一个最简单的例子是概率论，这门古老的学科在测度论建立之后就完全被测度的语言所改写，以至于今天一个不懂一般测度的人完全没办法研究概率论；另一个例子是著名的狄拉克测度（Dirac measure），这个曾经令数学家也有点头痛的非正常测度在物理学和信号处理等领域里扮演了非常关键的角色。

——不过，这是后话了。

2.1.3 长度的意义

回到我们的主题：“长度”的意义上来。

先总结一下我们已经知道了的事情：

所谓（一维）测度，就是要给直线上的每个子集标上一个数字，使得它们满足下面两条性质：

- 空集对应的数字（空集的测度）是零。
- 若干个（但是至多可数无穷个）彼此不相交的子集，它们并在一起得到的子集的测度，刚好等于这些子集各自测度之和。

这样的测度存在很多种，而且几乎全都行为古怪。为了更好的符合“长度”的概念，我们添上第三条要求：

- 如果把直线看作实数轴，那么从数轴上 a 点到 b 点的线段（这是直线的一个子集）对应的测度应当等于 b-a。

满足这三条性质的对直线上的每个子集定义的测度是不存在的。但是，如果放松要求，不对直线的每个子集定义而只对直线的可测子集定义测度，那么这样的测度存在并且唯一，数学上称为勒贝格测度。靠一系列定理的帮助，对直线的任何一个可测集（一般来说你能想象到的任何子集都是可测集），都有一套严密定义的公式能够把这个测度的具体大小算出来。

于是，数学家郑重宣布：

勒贝格测度就是人们通常所说的“长度”的严密定义，而且是唯一正确的定义。

“什么？”我们的哲学家朋友们一定要跳起来了。“你上面绕来绕去的说了一大堆让人听不懂的话也就罢了，你怎么能说这是关于长度唯一正确的定义呢？这顶多是你们数学家对这个词的理解而已，我最讨厌你们学理科的用这种自以为掌握绝对真理的口气说话了！”

“是么？”数学家回答道，“难道长度这个词还可能有别的理解不成？”

“当然可以。”哲学家愤愤不平地说。“亚里士多德说过……，莱布尼茨说过……，康

德说过……，江泽民同志说过……，总之，人类对长度这个词的理解是经历过漫长的争论的，而且必然还会一直争论下去。每个人都有权提出自己的观点啊。”

“我不管他们怎么说，”数学家说，“我只问你心里有没有对长度的定义？”

“当然有了。”哲学家骄傲地说，“我认为，长度就是……”

“慢着，”数学家迫不及待的打断他，“我不想听你的哲学论文，我只问你，在你对长度的定义里，空集有没有长度？有的话，是不是零？”

“是……的。”其实哲学家暂时没想到空集这么细节的事情，但是他觉得反正这个无关紧要吧，所以先首肯了。

“那么，按照你定义的长度，数轴上从 2.76 这个点到 6.98 这个点的线段的长度，是不是等于 6.98-2.76=4.22？”

“这个废话，不然还叫什么长度啊。”哲学家有点不耐烦了。

“还有，如果我把可数无穷个有长度的集合放在一起，总长度等不等于各自的长度之和？”

“这个……”哲学家对于“可数无穷”这个词有点拿不准，“反正两个线段的总长度是等于它们各自的长度之和的，至于无穷个……好吧就算是吧，那又怎样？”

“那就结了。”数学家慢条斯理地说。“我根本不关心你关于长度的哲学观念是怎么建立起来的，我只想说，如果你的观念没有内在的逻辑矛盾，那它就一定和我们数学家所说的勒贝格测度是一回事。这就是我为什么说勒贝格测度是唯一正确的长度的定义。——你当然可以有你自己的定义，只不过它一定正好就是勒贝格测度！”

“什么和什么呀！”哲学家有点懵了。“可是你什么也没有定义啊，你只是自己号称证明了一个所谓勒贝格测度的存在，可是我们关心的是为什么！我们哲学家要问的是为什么从 2.76 这个点到 6.98 这个点的线段的长度等于 4.22，你却把它写在了定义里，这并没有回答问题本身啊。”

“唉，”轮到数学家不耐烦了。“从 2.76 这个点到 6.98 这个点的线段的‘长度’当然也可以不等于 4.22，只要你不取勒贝格测度而换一种测度就成了，——问题是人们不喜欢那样啊。不是为什么它的长度等于 4.22，而是你首先要求了 4.22 这一属性，然后把它叫做长度。为什么只有在春天桃花才会开？因为是你把桃花会开的那个季节叫做春天的！”

哲学家：“……”

数学家：“……”

嗯，我不知道这段对话是把问题讲清楚了还是搅得更混乱了。当然这里面还有许许多多的细节需要阐明，下面让我们来更仔细的讨论一下吧。

“长度是什么？为什么从 2.76 这个点到 6.98 这个点的线段的长度等于 4.22？”正如前面那个数学家所说的，这个问法本身就是不合适的。我们给从 2.76 这个点到 6.98 这个点的线段赋予一种属性是 4.22，给从姚明的头到姚明的脚的线段赋予一种属性是 2.26 米，现在我们把这种属性叫做长度，如此而已。——这完全是人为的设定，没有任何先验的意义。数学家已经说了，你当然也可以给从 2.76 这个点到 6.98 这个点的线段赋予另一种属性是 3.86，给从姚明的头到姚明的脚的线段赋予另一种属性是 0.03 米，只要你足够细心，这种

做法是不会引起问题的，只不过你自己定义的那种属性不再被人们称作“长度”罢了。你可以把它称为“短度”或者别的什么，没有问题。

有趣的是，——测度论的伟大也就体现在这里，——只要我们承认了诸如从 2.76 这个点到 6.98 这个点的线段的长度等于 4.22 这样一些朴素的论断，那么仅仅靠着逻辑推演，我们就能够给直线的几乎所有子集——可测集——计算出对应的“长度”来，哪怕它们已经变得不是那么直观。譬如说，单点集的“长度”是 0（不是什么无穷小，就是 0），2 到 5 之间的全体无理数的集合的“长度”是 3，某个广义康托集（一种有着复杂分形结构的点集）的“长度”是 2.86……这一切本来似乎都可以问一问为什么的事情，其实都只是逻辑的自然推论罢了，你要是不承认它们，就必然导致逻辑上的不自洽。

——为什么这个东西的长度是 0？那个东西的长度是 2.3？为什么这个奇奇怪怪的集合也会有长度？为什么它的长度不等于别的，偏偏等于根号 2？

因为长度满足那三条性质，所以必然如此。

——为什么长度要满足那三条性质？

因为人们把满足那三条性质的属性就叫做长度。你当然也可以用别的几条性质定义出来一个什么度，只是不能再叫长度就是了。

这就是“长度”这个词的全部意义。

“可是，”我们的哲学家还是不甚满意，“我还是觉得你没有真正回答我想问的问题。”

“还有什么呢？”数学家说，“我上面这些理论不都已经自圆其说了么？”

“就是这个自圆其说让我特别恼火。”哲学家说。“我总觉得你绕过了我真正的问题。我问为什么长度要这么定义，你说因为人们把这样定义出来的属性就叫长度，这当然没错，可是我其实想问的是，为什么会有这样一种属性存在？为什么自然界中的事物可以具有长度——或者用你的话说——这种属性？你当然可以告诉我说，因为数学上证明了你的那什么勒贝格测度一定存在，可是我不想听你那个证明，我想听到的是一个更深入的解释，为什么长度是得以存在的？”

“因为……因为我们能证明它实际上存在……”数学家迷惑不解的说。

“我不是问你它存不存在，我是问它为什么存在！”哲学家怒气冲冲的说。“你不觉得这是件不太自然的事情么？反正是一堆点，你又说了点的长度是零，可是一旦把点排列起来得到的线段就有了测度，在这个过程中发生了什么呢？这个不为零的长度是怎么出现的呢？——别又对我说你能证明它不为零，我要问的是为什么，——比证明更本质一步的那个为什么！”

“啊，”数学家字斟句酌地说，“你想问的其实是为什么线段的测度不等于简单地把点的测度加在一起对吧。是啊，这确实是个有趣的问题……”

这确实是个有趣的问题。

如果我们仔细检查关于勒贝格测度的那三条公理，会发现关于第一条和第三条并没有什么可多说的，可是第二条——至多可数个彼此不相交的子集的并集的测度等于这些子集各自测度之和——却多少让人心生疑惑。这句话读起来总是有点别扭。

如果我们把它换成“有限个彼此不相交的子集的并集的测度，等于这些子集各自测度

之和”，听起来就会舒服多了，可是这里做了某种推广，从有限到无限，而且还不是任意无限个而是“至多可数无穷”个，这是为什么呢？

首先，这种推广是必须的：只对有限个的子集定义测度的可加性，这样得出来的测度会不满足人们的需要，——不仅仅是给长度一个精确定义的需要。测度论不只是为哲学家发明的，它要在数学的其他领域里以及别的自然科学领域里得到应用，而在这些场合里，我们时刻会碰到对无穷个集合的并集的测度的计算。我们必须在定义里就保证测度能够无穷相加。

而是另一方面，为什么又偏偏要限制可数无穷个集合才有可加性呢？

事实上，我们很容易就会发现，正是这一点促成了前面那个问题的出现：为什么线段具有长度？如果我们假设任意无穷个彼此不相交的子集的并集的测度等于这些子集各自测度之和，那么，既然线段是由无穷个点构成的而点又没有长度，那线段也应该没有长度才对。难道这一条是专门为了避免这个悖论才设置的么？

不是。我们很快就能看到，这种对于可数性的限制，有着更为本质的原因存在。

首先，让我们想想看把很多数相加是什么意思。我们一开始学到的加法是针对两个数而言的，给定任意两个数，我们能够算出它们的和。进而，我们把这一过程推广到了三个数求和：先对其中两者求和，然后再把这个和同第三者相加。依此类推，我们可以把四个数相加，把五个数相加……

请注意，这里的过程完全是递归的（inductively）：只有定义了 n 个数的和，我们才能够继而定义 n+1 个数的和。然后，这样一直进行下去，我们就能够对任意有限多个数求和。——只是“任意有限”，还不是“无限”。

从有限到无限这一步跨越其实走得颇为艰难。哲学家也好别的领域的科学家也好常常随心所欲的使用数学词汇而并不特别在意自己是否真的明了它们的严格意义，可是数学家却不能如此自由。真正把无穷个数加起来，也就是数学中所谓的“级数”（series），这套理论的严密化在数学史上经历了相当长的一段时间。最终，借助于极限理论的帮助，真正严格的关于级数求和的理论才得以建立。——也就是说，事实上，什么样的无穷级数可以相加，什么时候不能相加，相加的时候要注意什么问题，这一切都受到了理论的约束。在这些理论的基础上，我们才能够确定当我们随口说出“把这无穷个数加在一起”的时候，我们确实知道我们在说什么。

什么是级数呢？级数就是把有限个自然数相加的自然推广：既然定义了 n 个数的和我们就能够进而定义 n+1 个数的和，那么，把这个过程递归地进行下去，我们就能够对任意有限多个数求和。当有无穷个数需要我们求和的时候，我们就只对它们中的前 N 个求和，并且让这个 N 不断变大，如果这一过程有极限，这个极限就被我们称为这个无穷数的和。

请注意上面这段话背后的涵义：当我们说“对无穷个数求和”的时候，我们其实潜在地要求了这些数的总个数必须能够通过 n->n+1->n+2……这样的过程来逼近，然后通过极限的方式定义它们的和。这也就是说，这些数的总个数必须是可数个！

让我们回忆一下什么是“可数个”：“可数个”就是能够和自然数集建立起一一对应的那么多个，用更直观的语言来说，“可数个”就是“可以一个一个数下去”的那么多个。只

有一个集合里包含可数个元素的时候，我们才能够对于它应用数学归纳法，因为数学归纳法的本质就是“一个一个数下去”：当一件事对 n 成立时，我们进而要求它对 n+1 成立，这样的过程进行下去的极限，就是可数无穷。

那么，既然多个数的加法本质上是个递归过程，——只有先把 n 个数加起来，我们才能进而加上第 n+1 个数，——所以加法至多能对“可数无穷”个数来定义（也就是级数加法）。把“不可数无穷个”数加在一起，这件事情是毫无意义的！

这正是前面所有那些所谓哲学悖论的根源：当人们想当然的说着“把无穷个点的测度加在一起”的时候，他们以为他们是在说一件自然而然的事情，可是事实上，除非这无穷个点是可数个，否则这里的加法根本无法进行。不幸的是，任何线段都偏偏是由不可数个点构成的（它们是连续统）。

为什么线段是由点构成的，而线段的测度却不等于组成它的那些点的测度之和？因为“组成它的那些点的测度之和”这个短语根本没有意义，所以两者也不必相等。

这个回答也许有些出人意料，可是事情就是如此。很多问题之所以令人迷惑，不是因为它们真的是什么悖论，而只是因为问题本身没有被恰当的叙述。人们常常自以为是的使用很多词汇却罔顾自己是不是了解它们的真实含义，譬如说“求和”。人们随心所欲地说“把若干个数加在一起”却忘了其实不可能真的把它们“一下子”加在一起，加法是个递归过程，这就决定了如果要加的东西的个数太多（不可数那么多），它们就加不起来了。

（不得不补充一点——一个很扫兴的补充——在数学中，某些场合下我们真的必须要对不可数个数定义总和……数学家总是这样，为了各种极端情况而拓展自己的定义。在这些情况下，这种不可数个数的和也是能定义出来的。但是，这件事并不会对上面那些论述造成削弱：这里的特殊意义上的“和”是为了应付特别的目的而定义的，它和我们平时所说的求和已经不是一个意思了。）

也许哲学家还会追问：既然线段的测度不是组成它的那些点的测度之和，那么这个测度是从哪里来的呢？

它们不是哪里来的……它们是线段自己所固有的。这就是为什么我们在定义长度的时候非要加上第三条公理的原因：我们必须在定义里就写明线段的测度，否则就没有办法建立起直线的所有可测子集的测度的架构。事实上，既然点的长度是零，根据可数可加性我们很容易推出一切可数集的长度也都是零，所以在某种意义上说来，“长度”是本质上只属于连续统的一种性质。换句话说，只有进入了连续统的范畴，不为零的长度才可能出现。这就是为什么我们不能从单点集出发定义长度的原因。

那么，我们现在可以回答那个著名的“飞矢不动”的悖论了：一支飞驰的箭，在每一个确定的时刻都静止在一个确定的位置上，为什么经过一段时间后会移动一段距离？

答案是：因为任何一段时间（不管多么短暂）都是一个连续统，包含了不可数个时刻，所以箭在每一时刻的静止根本不需要对一整段时间之内的移动负责。——后者并不是前者的相加，而前者也根本不可能相加。

因为连续统不可数，所以我们能够在每时每刻里都静止的存在，同时又能在一段时间内自由运动。这也许是大自然的巧妙安排吧。

2.1.4 若干注记

长度的意义说了这么多，到此差不多就可以告一段落了。但是关于在前面的讨论中出现的许多数学概念和思想，却还不妨多说几句。事实上，测度论虽然只是数学中一个具体的分支，但是它的发展和演进却和数学史上最有趣的篇章之一——所谓的“第三次数学危机”——联系在一起。关于这桩公案，坊间的科普书目已经汗牛充栋，我也并不想在这里再重复一遍那些随手就可以找得到的八卦，而只是想针对某些特别的概念和理论略加说明，至少，这对愿意继续阅读别的数学或者数学科普著作的朋友来说，会有点作用吧。

1. 无穷小。

这个概念无疑常常困扰没有受过现代数学训练的阅读者们，这是很自然的事情，因为它可以从直觉上意识得到，却又难于精确地把握：无穷小是什么？是不是可以精确定义的数学概念？它是一个数？还是一段长度？能不能对无穷小做计算？诸如此类等等。由于这个概念几乎天然的和各种哲学式的思辨联系在一起，使得甚至哲学家们也对它颇为关注，——当然，还有数之不尽的民科们。

关于无穷小的讨论者，最著名的大概莫过于莱布尼茨，他花了大把的精力试图精确阐述无穷小的概念并且以此作为整个微积分学的基石。在莱布尼茨看来，无穷小是一个比任何数都小但是不等于零的量，对它可以做四则运算，尤为关键的是可以做除法：两个相关的无穷小量的比值就是一个函数的导数。以此为基本语言他开始建立微积分学的基本理论，——他基本上成功了。直至今天，数学家采用的关于微分的记号仍然来自莱布尼茨，而数学学科内部关于微积分学的专门称呼——“分析学”——也来自于莱布尼茨自己对他的理论的叫法：无穷小分析。尽管牛顿和莱布尼茨在微积分的发明权上争得不可开交，可是几个世纪过去，至少在这两件事情上莱布尼茨大获全胜。

可是，也许你想不到的一件吊诡的事情是：尽管莱布尼茨在微积分学的建立过程里做出如此重要的贡献，他的思想的基石——无穷小量——却是一个在今天的数学语言里被完全抛弃了的概念。人们发现这个词汇除了带来混乱之外并没有什么特别的用处，于是作为一种语言，它被丢弃了。事实上，即使在莱布尼茨的同时期人看来，无穷小也是一个有点让人不舒服的词：比任何大于零的数都小，却不是零。我们当然可以把它仅仅作为一种人为的逻辑概念来使用，可是这样一个怪东西的存在，既使得数学的基本对象——实数的结构变得混乱，也在很多场合带来了麻烦的难于回答的问题（尽管它也确实带来了不少方便）。在分析学蓬勃发展的十八世纪，一代又一代数学大师为此争论不休，大家混乱而各行其是地使用这个词，却没人能说清楚它的精确含义。终于，从十九世纪初期开始，以柯西（Cauchy）和魏尔斯特拉斯（Weierstrass）为代表的一大批数学家开始为分析学的严密化做出了大量的工作，他们试图在完全不采用“无穷小量”这个概念的前提下重新建立整个分析学，——他们也成功了。

于是这个词就被抛弃了。时至今日，这个词尽管在很多数学书里仍然会出现，但是这时它仅仅作为一个纯粹修辞上的词汇而不是严格的数学概念，——人们通常用它来指代“极限为零的变量”（感谢十九世纪那一大批数学家，极限这个词已经是有了严密清晰的定义而

不再仅仅是某种哲学性的描述），也有的时候它被用来作为对微积分运算中的某些符号的称呼，但是无论何时，人们在使用它的时候都明确的知道自己想说什么，更关键的是，人们知道自己并不需要它，而只是偶尔像借助一个比喻一样借助它罢了。

那么，回到这个词最本源的意义：到底有没有这样一个量，比一切给定的正实数都小却又不是零？或者这个问题还有一系列等价的提法：在直线上存不存在两个“相邻”的点？存不存在“长度”的最小构成单位？等等等等。

在今天我们已经能够确定无疑的回答这些问题了：不，不存在。

事实上，这个问题的彻底解答甚至比柯西和魏尔斯特拉斯的时代还要晚：它本质上是关于实数的结构的理解的问题。即使柯西本人——尽管他奠定了现代极限理论的基础——也并不真正了解“实数是什么”这样一个简单的问题。关于严密的实数理论的最终建立，一般认为是皮亚诺（peano），康托（Cantor）和戴德金（Dedekind）这几位十九世纪下半叶的数学家的成就。所谓的“戴德金分划”仍然是今天的教科书里对“实数”这一概念所介绍的标准模型。在这套模型里，人们能够在逻辑上完全自洽的前提下回答有关实数结构的一切问题，而正如前面指出过的那样，它完全摈弃了“无穷小”的存在。

（是不是数学家说无穷小量不存在，这个词就没意义了呢？）

这又回到了前面我们屡次面对的那个关于数学断言的权威性的问题。如果承认无穷小是一个有关数的概念，那么，数学家的工作已经告诉我们，在实数理论中没有无穷小的位置。事实上，康托本人就曾经证明过承认无穷小是同承认实数中基本的阿基米德原理相矛盾的。（阿基米德原理是一个关于实数性质的基本原理，如果阿基米德原理是错的，整个数学大概都无法得以建立。）但是，如果把问题拉到数学的疆域以外，如果认为人们有权利不按照数学家的方式讨论数本身的性质，那么我们面对的就已经是全然另一层次的问题，——也就不可能在这里得到详尽的讨论了。

2. 无穷大。

有趣的是，和无穷小如此相似的一个词——无穷大——却在今天的数学语言中占有与之判若云泥的一个地位：人们谈论它，研究它，还给它以专门的记号（倒 8 字）。造成这一多少有点奇特的事实的关键在于，和通常人们的误解不同，无穷大其实并不是无穷小这个词在概念上的对偶（尽管乍一看似乎如此）。事实上，就某种意义而言，说它是零这个词的对偶也许更为恰当一些。

让我们回顾一下这个概念在数学中的递进过程：我们都知道存在这样的数列（例如自然数列），可以一直变得越来越大，直到比任何给定的数都更大，这种时候，我们把这样的数列称为“趋于无穷大”或者直接就简称它是无穷大。——请注意，在这里无穷大仅仅是作为人们对一个数列或者变量的极限的叫法而存在的，我们并没有承认它是一个数或者一个确定的对象，而只是一个形容词而已。每个具体的数都不可能真的比别的数都大，尽管一系列数可以没有止境地变得越来越大，这实质上就是亚里士多德所强调的“潜无穷”。

如果事情只是到此为止，那一切相安无事，无穷大这个词今天的地位也只不过和无穷小一样仅仅作为对一种极限的描述而存在罢了。可是这里有某种微妙的差别：正如前面提到过的那样，“无穷小”不是别的，只是一个变量极限为零而已，所以我们总可以认为无穷

小只是一种说法，在必要的时候可以用“趋于零”这样一个替代说法来换掉它。可是“无穷大”是什么极限呢？它并不是趋于任何特定数字的极限，而是“趋于无穷大的极限”，你看，这个词轻易回避不掉。

于是人们只好被迫不断的提及它，要是非要替换成别的说法，就要花好多倍唇舌才成。比如，前面说过直线本身也是直线的可测子集，那么整条直线的测度是多少？当然我们可以佶屈赘牙地说“直线可测，但是它的测度并不是一个确定的数，而只是比任何给定的实数都要大。”——这也太麻烦了一点。为什么不省点事直接说“直线的测度等于无穷大”呢？

这样人们就开始不断的把无穷大当一个名词来使用，假装它好像也是一个数一样，这就是所谓的“实无穷”。哲学家和数学家中比较喜欢哲学争辩的那一部分人对此有许多争论（直觉主义学派等等），但是让我们忽略掉它们，先看看在今天数学家是怎么使用这个词的吧。

首先，无穷大不是一个实数，在实数集中不存在任何数比其他所有数更大，这是确定无疑的事情。

其次，在许多场合下，我们确实可以把无穷大当作一个名词来使用，既方便又不造成困扰。例如前面提及的在测度论里我们说一个可测集的测度是一个“数”，这里的“数”既包括非负实数也包括无穷大。事实上，在有些数学书里索性把实数加上无穷大这样一个集合称为“增广实数集”。我们甚至可以对无穷大定义运算（在事先做好严格约定的前提下），这对于很多理论的叙述带来了极大的方便。如果说得更技术化一点，在很多数学分支（例如仿射几何）里我们还能像让每个实数对应于直线上的一个点这样一个几何对象一样，让无穷大这样一个特殊的对象也对应于一个特殊的几何对象（所谓的“无穷远点”），并且让所有这些几何对象平等地参与到几何学中来。只要仔细做好事先的公理准备，这样子做并不会引起任何逻辑问题。

——也许有人会觉得奇怪，怎么数学家可以如此随便，想给实数集添上什么就添上什么？事实上，数学家就是有这样的权利，因为说到底，数学不是研究真实自然界的学问，而只是研究人造概念的学问。任何人造概念，只要在逻辑上被严格的描述出来又不造成内在的逻辑不自洽，都可以被认为是“存在”的。复数的引进就是一个很好的例子。

——那前面怎么又说“无穷小不存在”？就算无穷小本身不能是一个实数，为什么不能把它添在实数集之外也弄一个“增广实数集”出来研究？

事实上，这样做是可以的，而且事实上也确实有好事者这样做过。问题在于它毫无意义。前面说了，任何人都有权利自己定义出一些什么东西来作为数学对象来研究，这是对的，只要他在逻辑上足够细心就行。可是这句话还有一个常常被人忽视的反面：数学尽管不是直接研究自然界的学问，可是它毕竟是在人们研究自然界的过程中形成而又有助于人们对自然界的理解的。如果一个数学概念纯粹只是自说自话的产物，那无论它多么自洽，也没有人会去关心它。复数这一人为的构造之所以被所有人承认是因为它巨大的威力。而无穷小——正如前面所指出的——是一个毫无必要引入的概念，添上它只会自找麻烦。无穷小和无穷大的命运之所以不同，关键正在于此。

回到无穷大这个词上来。这一系列文章的一开头还说过无穷大可以分成“可数”和

“不可数”的无穷大，那又是怎么回事？

这是一个更常见的误解，这其实是两个不同的词：作为一个极限的（潜）无穷和由此引申而来的作为一个数学对象的（实）无穷是一码事，作为一个集合的势的可数无穷或者不可数无穷是另一码事，不同于前者的“无穷大”，后者其实应该被称为“无穷多”才对，只是人们通常混为一谈。事实上，当我们说“一个集合有无穷多个元素”的时候，我们有必要指出这个集合是不是可数，而当我们说“一条直线的测度是无穷大”的时候，却完全谈不上什么可数不可数。——在数学书中通过观察上下文，分辨这两者并不是很难的事情，可是如果把“无穷”作为一个哲学命题来研究的时候，这种区分却是必须的。——不幸的是，就我阅读所及，很多时候人们都没做到这一点。

3. 不可测集与选择公理、数学的严密性

回顾一下“不可测集”这个词的意思：在勒贝格测度的意义下，总有一些集合是没办法定义测度的，这样的集合称为不可测集。同时已经被我们反复指出过的一点是：一个没受过专门数学训练的人所能想象到的任何古怪集合其实都是可测的，不可测集非常罕见。

不可测集的存在是数学中中一件令人遗憾的事实，要是能给直线的任何一个子集定义长度，这样的理论该有多么漂亮啊……数学中常常有这样的情形，一个人们通过直觉认定的美妙设想，偏偏被一两个好事者精心构造出的反例破坏了，但是数学毕竟受制于逻辑，不管一个反例多么煞风景，只要它确实成立，数学家也只好接受它。

可是不可测集这个例子有点不同：构造不可测集，用到了选择公理。

这件事情说来话长，简单的说，我们都知道整个数学是建立在一些很显然也很直观的公理之上的，这些公理大多数都是诸如等量之和为等量之类的废话，可是选择公理稍微复杂一点，它是说：

任何给定一组非空集合，我们总能从其中的每一个集合里取出一个元素组成一个集合。

也像废话一样，是吧，可是这句话多少有点罗嗦，不像等量之和为等量一样简单明了。于是人们对它多少有所争议，有人认为它不应当排在基本公理之内。可是毕竟这句话也挑不出什么错，而且人们很快发现，很多很有用的数学结果离开选择公理就变得很难证明或者根本不可能证明，于是将就着也就承认它了。

可是不可测集的存在却又掀起了人们的疑虑，反对选择公理的人说，看看吧，要是没有选择公理，也就没有不可测集了。

赞成的人反驳说，不可测就不可测呗，有什么大不了的……虽然整个理论确实变得不那么完美了。——他们不知道更大的问题还在后面。1924 年，波兰数学家巴拿赫（Banach）在选择公理和不可测集构造法的基础上，证明了石破天惊的“分球定理”：一个半径为 1 的实心球，可以剖分成有限的若干块，用这些块可以完整地重新拼出两个半径为 1 的实心球体！

这一下引起轩然大波，反对选择公理的数学家们声势大振，认为选择公理完全是 trouble maker，必欲除之而后快。赞成选择公理的数学家们则指出选择公理“功大于过”，毕竟有很多有价值的数学成果出自选择公理的基础。双方僵持的结果是大家各行其是，大多数数学家承认选择公理，同时忍受巴拿赫分球定理所带来的不适感，少数数学家坚持不

要选择公理，为此失去很多别的很有用的定理也在所不惜。

这一僵持局面维持了很多年，直到二十世纪的中叶才被戏剧性地解决。人们在不承认选择公理的假设下构造出了一大堆比巴拿赫的球体更严重的反例（例如一个空间同时有两个维数）。这些反例不只像巴拿赫的例子一样违反直觉，而且还严重的破坏了大多数已有的数学结果。于是人们发现，承认选择公理也许是必须的，而像巴拿赫的反例那样的反直觉的结果，也只能被迫承担下来了。

所以到今天几乎所有的数学研究都是在承认选择公理的基础上进行的。虽然作为一种后遗症，人们总是会时不时地谨慎的在使用选择公理的时候加上一句声明："本文依赖选择公理。"——这也许是这条公理的一个特殊待遇了。

以上便是这段公案的来龙去脉。很多人可能在读完这段故事之后疑虑重重。什么啊？数学家们难道是这么随便的确定公理体系的么？如此的实用主义，似乎全然置真理的地位于不顾的样子。很多人可能还会想起欧几里德第五公设的故事，觉得数学家们原来如此不负责任，带给人们的不是一套严整规范的理论体系，而是一个支离破碎的混乱图景。连公理的问题都搞不定，整个数学岂不是空中楼阁？

限于篇幅，这篇文章不可能对这个问题予以展开论述，可是至少我们可以澄清一个常见的似是而非的误解：数学是严密性的科学，数学的发展也只有在严密的公理化基础上才能得以实现。

这句话——至少在字面上——是对的。不可测集的例子本身就说明，为了严密性，数学家们甚至不惜放弃直观，——像巴拿赫球那样的例子尽管如此怪诞，可是它是严密逻辑的产物，数学家也只好承认它的存在。

可是在更宏观的层面上，这句话却是错的。前面提到的分析学就是很好的例子：微积分的思想的提出是在十七世纪，在随后的十八世纪里取得了丰硕的成果，可是它的严密化却直到十九世纪下半叶才真正得以实现。测度论是另一个例子："测度"是人们对于长度这个词的直观理解的严密化，可是这并不是说，在测度论被提出之前的漫长岁月里人们对于长度都一无所知，恰恰相反，人们已经知道了相当多的事情，只是等待测度论的语言让一切都变得精确和完整而已。

所以数学的发展实质上是一个拖泥带水的过程，一代又一代崭新、充满活力却又粗糙的思想被提出来，人们意识到它的重要性，予以发扬光大，产生一系列重要的成果同时又带来困惑，直到崭新的数学语言诞生，清理战场，让一切显得井井有条，像教科书上的文字一样道貌岸然，而同时却又有新的粗糙的思想诞生了……在这个过程里，严密性始终只是一个背景，尽管无处不在，可是并不占据舞台的统治地位。数学家们在意严密性，追逐严密性，甚至不惜为了严密性而牺牲看似有价值的学术成果，可是严密性并不是数学发展的引领旗帜，从来都不是。

这就是为什么同很多人的误解相反，大多数数学家其实并不关心那些关于数学基础的哲学性的争论，这也就是为什么我把眼前这些讨论放进附记的原因——一件事情是不是关系到数学的逻辑基础和这件事情在数学上是不是重要一点关系都没有。所有这些故事：可数与不可数、可测与不可测、选择公理等等，都是和二十世纪初所谓"第三次数学危机"

的大背景联系在一起的，那段时间里数学家之间产生了无数纷争，可是今天的数学学生们在严肃认真地学习集合论和测度论的同时，却只对那些八卦付之一笑，作为茶余饭后的谈资。——事实上，即使在二十世纪初，也有大量的数学家根本不关注这件事情或者压根就采取了日后看来是错误的立场（反对康托，反对不可数集的概念，等等）却同时又在自己的领域里作出了重要的甚至是历史性的贡献。

关于那个所谓的“第三次数学危机”，有一本著名的科普著作《数学：确定性的丧失》[2] 专门讨论了它。这本书内容相当详尽，不幸的是它所引起的误解和它阐明的事情一样多。关于这次“危机”的描述主要集中在第十二章，那一章的结尾倒是相当深刻，值得特别引用在此：

“一个寓言恰如其分地概括了本世纪有关数学基础的进展状况。在莱茵河畔，一座美丽的城堡已经矗立了许多个世纪。在城堡的地下室中生活着一群蜘蛛，突然一阵大风吹散了它们辛辛苦苦编织的一张繁复的蛛网，于是它们慌乱地加以修补，因为它们认为，正是蛛网支撑着整个城堡。”

2.2 Lebesgue 外测度与可测集

2.2.1 外测度

Definition 2.1 ($\mathbb{R}^n$ **中开矩体的体积**)**.** 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的开矩体,$I = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \cdots\}$, 可定义其体积为

$$|I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \tag{2.1}$$

Definition 2.2 (**外测度**)**.** 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的点集. 若 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 E 中的一列开矩体, 且是 E 的一个覆盖, 则它确定了一个非负实数

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \tag{2.2}$$

记

$$m^*(E) = \inf\{u | u = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|, \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E, I_k\text{是开矩体}\} \tag{2.3}$$

称 $m^*(E)$ 为集合 E 的 Lebesgue 外测度, 简称外测度.

Definition 2.3 ($\mathbb{R}^n$ **中点集的外测度**)**.** $\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度有如下性质:

(1) 非负性：$m^*(E) \geq 0, m^*(\emptyset) = 0$;

(2) 单调性：若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$

(3) 次可加性：$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$;

(4) 平移不变性：$m^*(E+\{x\}) = m^*(E), \forall x \in \mathbb{R}^n$, 其中 $(E+\{x\}) = \{y+x|y \in E\}$

Remark 2.4. 如何理解次可加性呢？举两个例子：有关实数的一个不等式 $|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$; 对于有限集 A, B 有 $|A \bigcup B| \leq |A|+|B|$. 如果这些并集没有交集, 那么次可加定理可以取等号，如果并集之间有交集, 那么取严格的不等号了. 对于 $\mathbb{R}$ 上的大小比较如 $a \leq b$, 可以证明对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 $a \leq b+\varepsilon$. 次可加性可以仿照这个证明思路. 不妨设 $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) < +\infty$. 对于 $\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$, 存在 E_k 的一个开矩列覆盖 $\{I_{k,j}\}_{j=1}^{\infty}, E_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{k,j}$ （其实对于每一个 k 而言）, 且 $\sum_{j=1}^{\infty} |I_{k,j}| \leq m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$(这个不等式是从数列的下确界的性质得来, 因为体积或者测度就是一个数. 数列的下确界是 m 充要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E, s.t. x' < m+\varepsilon$), 由此可见 $\sum_{j=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} I_{k,j}$(这个集合叠加不等式, 本质上就是上面提到的有关并集的交集是否为空的讨论), 且有 $\bigcup_{k,j=1}^{\infty} |I_{k,j}| \leq m^*(E_k)+\varepsilon$. 由 ε 的任意性, 即得到了次可加性.

Corollary 2.5. *$\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度为 0, 即 $\forall x \in \mathbb{R}^n, m^*(\{x\}) = 0$.(注意, 这里不能理解为孤点集, 举个例子, 有理数集是可列集, 可它的每一点都是 $\mathbb{R}$ 上的聚点.). 若 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可数点集, 有 $m^*(E) = 0$. 严格的证明用到次可加性, 每一点的外测度都为零, 故可数点列的全体的测度等于零了. 这个必须和不可数集区分, 比如实数集, 无理数集, 不可数关键一点就是不能列出来, 因此不可以使用次可加性.*

Corollary 2.6. *$\mathbb{R}^n$ 中低维开矩体的外测度为零. 打个比方, 三维空间中, 二维平面的体积为零. 哈哈, 我们可以用三体里面的维度打击来比拟. 当然二维平面对于二维的面积, 也就是二维情况下的测度不为零, 但是对于二维平面对于三维的提及或者更高维的测度而言, 其测度为零. 下面用更加规范的数学语言来描述: 考虑 $n-1$ 维的超平面矩体*

$$E = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{i-1}, t, \xi_{i+1})|a_j \leq \xi_j \leq b_j, j \neq i\} \tag{2.4}$$

则有 $m^*(E) = 0$. 证明过程, 可以把孤立点 t 表示成极限的形式 $\lim_{m\to\infty}(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$.

Theorem 2.7 (**外测度不具有可加性**)**.** *Lebesgue 构造了一个反例, 互不相交的一系列集合不满足可加性. 首先对于任意的 $x \in (0,1)$, 记*

$$L_x = \{\xi \in (0,1)|\xi - x \in \mathbb{Q}\}. \tag{2.5}$$

当 $x \in \mathbb{Q}$ 时, 由 $\xi - x \in \mathbb{Q}$ 这个条件易知,$\xi \in \mathbb{Q}$, 故 $L_x(x \in \mathbb{Q}) = \{\xi \in (0,1)|\xi \in \mathbb{Q}\}$, 即 ξ 为 $(0,1)$ 上的全体有理数. 当 $x \notin \mathbb{Q}$ 时, 由 $\xi - x \in \mathbb{Q}$ 这个条件, 显然有 $\xi = x+q, q \in \mathbb{Q}$, 且由 $\xi \in (0,1)$ 可以得到 $0 < x+q < 1$, 故有 $-x < q < 1-x$, 而 $x \in (0,1)$, 因此有 $q \in \mathbb{Q} \bigcap (-1,1)$. 这一段其实只是我个人加入的废话, 和主题没啥关系.
因为 $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, 所以 $x \in L_x$, 推出 $L_x \neq \emptyset$. 记 $I = (0,1)$. 对 $x, y \in I$, 易证:

$$L_x \bigcap L_y \neq \emptyset \Leftrightarrow L_x = L_y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \tag{2.6}$$

(1) 由于 $L_x \bigcap L_y \neq \emptyset$, 假设 $\xi \in L_x \bigcap L_y$, 且 $\forall \xi \in L_x \bigcap L_y$, 可以得到 $\xi - x, \xi - y \in \mathbb{Q}$, 故有 $(\xi - y) - (\xi - x) = x - y \in \mathbb{Q}$.

(2) 如果 $x-y\in\mathbb{Q}$, 则对于任意的 $\xi\in L_x$, 有 $\xi-x\in\mathbb{Q}$, 故 $(\xi-x)+(x-y)=\xi-y\in\mathbb{Q}$, 可得 $\xi\in L_y$, 也即 $L_x\subset L_y$. 同理由于 x,y 的轮换性, 可得 $L_x\supset L_y$. 故有 $L_x=L_y$.

由等式*2.6*可知,$(0,1)$ 可被分解成一些互不相交的 L_x 之并. 可以这么理解, 如果 x 是 $(0,1)$ 上的有理数, 那么所有 L_x 是相等的, 这样 ξ 就是 $(0,1)$ 上的有理数了. 如果 x 是一个无理数, 那么可以得到 ξ 也必须是无理数, 而无理数有无穷多个. 这种分解就好像是一串时分复用的码元一样. 或者说是不同的厂家的扑克混叠在一起. 或者说是沙子和芝麻混合, 这种分割是极其浓密的. 这一段话算是注解, 不是那么的严谨.

把 $(0,1)$ 可被分解成一些互不相交的 L_x 之并后, 从每个 L_x 中取出一个元素构成一个集合 S（貌似 S 只包含一个有理数）, 由于 $L_x\subset(0,1)$, 故 $S\subset(0,1)$. 记 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $(0,1)$ 中有理数全体. 令 $S_k=\{x+r_k|x\in S\}$. 显然 S_k 是从 S 平移有理距离 r_k 之后得到的集合. 显然 $S_k\subset(-1,2)$, 而且当 $k\neq l$ 时,$S_k\bigcap S_j=\emptyset$.

Proof. 反证法, 若不然, 假设 $\zeta\in S_k\bigcap S_j$ $k\neq j$, 则必然存在 $x,y\in S$, 使 $\xi_k+r_k=\zeta=\xi_j+r_j$, 于是 $\xi_k-\xi_j=r_j-r_k\in\mathbb{Q}$. 由 $k\neq j$, 有 $r_k\neq r_j$，因此 $\xi_k\neq\xi_j$. 由 S 的构造,ξ_k 与 ξ_j 分别是从 S 中互不相交的点集 L_x,L_y 取出的, 且满足 $\xi_k-x\in\mathbb{Q}$ 以及 $\xi_j-y\in\mathbb{Q}$. 故 $(\xi_k-x)-(\xi_j-y)=(\xi_k-\xi_j)-(x-y)\in\mathbb{Q}$. 由于在前面已经有了 $\xi_k-\xi_j\in\mathbb{Q}$，因此可以推出 $x-y\in\mathbb{Q}$，而根据2.6, 互不相交的集合 L_x 与 L_y 必然有 $x-y\notin\mathbb{Q}$, 故矛盾. 因此有 $S_k\bigcap S_j=\emptyset$. 在这里其实频繁用到了有理数四则运算的封闭性, 有理数表示为分数就很容易理解这个封闭运算规律了. □

Remark 2.8. 在郭懋（mao）正老师的实变函数教材中, 滥用 ξ 符号,S 中的元素和 L_x 的元素不加区分就导出矛盾, 逻辑上是不够严谨的.

既然 $S_k\bigcap S_j=\emptyset$, 那么我们构造一个集合列并集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$, 则有 $(0,1)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$

Proof. 事实上,$\forall x\in(0,1)$, 有 $x\in L_x$. 由于 S 为从互不相交的 L_x 中各取一点的构成的集合, 记 $S\bigcap L_x=\{y\}$, 由 L_x 的定义有 $y-x\in\mathbb{Q}$, 因 $x,y\in(0,1)$, 有 $x-y\in(-1,1)$. 因此存在某个 n, 使 $r_n=x-y,x=y+r_n\in S_n$, 由 x 在 $(0,1)$ 中的任意性, 可以得到 $(0,1)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$. □

综上所述有 $(0,1)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\subset(-1,2)$. 若外测度具有可加性, 则

$$1=m^*(0,1)\leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(S_n)\leq m^*(-1,2)=3. \tag{2.7}$$

S_k 是 S 的一个平移, 而根据测度平移不变性,$m^*(S_k)=m^*(S)$, 故有 $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n)=m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}S)$, 由于 $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n)$ 的有限性 *(*在区间 *(1,3)* 内*)*, 故有 $m^*(S)=0$. 即导出矛盾 $1\leq 0\leq 3$.

个人一点思考

(1) $(0,1)$ *分解成互不相交的* L_x *之并，这种分解唯一吗？*

(2) *集合* S *的势是阿列夫* $\aleph$. *因为* $(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, *所以* $|\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n| \geq \aleph$, *假若* S_n *可列，则可列个可列集的并集也是可列集，矛盾. 故* $|S_n| \geq \aleph$*(根据连续统假设，在阿* $\aleph_0, \aleph$ *之间没有其他的势). 而* S_n *是定义在* R *上的，故* $|S_n| \leq \aleph$, *根据伯恩斯坦定理,*$|S_n| = \aleph$. *显然* $|S| = \aleph$.

Theorem 2.9 (**闭矩体的外测度等于其体积**)**.** *$\mathbb{R}^n$ 中的闭矩体,$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \cdots\}$, 其外测度等于其体积 $m^*(E) = |E|$.*

Proof. 由于 E 是一个闭矩体, 可以定义其体积为 $|E|$.$\forall \varepsilon > 0$, 存在一个开矩体 I, 使得 $|I| \leq |E| + \varepsilon$, 并且这个开矩体 I 是闭矩体 E 的一个开覆盖 (开覆盖以及测度的定义是把体积和测度联系起来的关键, 脑中再次复习下开覆盖和测度的定义). 因为 I 是 E 的一个开覆盖, 而测度是所有开覆盖体积的下确界, 故有 E 的外测度要小于其中的一个开覆盖 I 的体积

$$m^*(E) \leq |I| \leq |E| + \varepsilon \tag{2.8}$$

因为 ε 的任意性, 可以得到

$$m^*(E) \leq |E| \tag{2.9}$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $m^*(E)$ 测度的定义（下确界的性质）, 存在一个开矩体覆盖 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m^*(E) + \varepsilon. \tag{2.10}$$

由于 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 E 的一个开覆盖, 故有 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. 由于矩体的体积也服从单调性, 故有

$$|E| \leq |\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i| \leq m^*(E) + \varepsilon \tag{2.11}$$

因为 ε 的任意性, 可以得到

$$m^*(E) \geq |E| \tag{2.12}$$

□

Remark 2.10. 在构造上述两个不等式过程中, 关键在于放大了一点体积, 根据测度的定义（开覆盖矩体的下确界）, 得到了闭矩体测度的一个上界2.8 （闭矩体的体积加上一个极小量）. 然后再次通过测度的定义以及下确界的一个性质（总能再比下确界大一点的界限里找到属于集合的元素）, 结合体积的单调性（矩体和其覆盖的体积关系）, 从而得到了不等式2.11. 最后再啰嗦两句, 下确界的性质有两个, 首先下确界最小（故有了上述第一个不等式）, 第二, 大于下确界一点点的任何集合或者数之内都有元素属于集合列或者是数列（故有了上述第二个不等式）. 强烈建议参考数列的下确界的性质.

Theorem 2.11 (**开矩体的外测度等于其体积**)**.** *开矩体的外测度等于它们的体积. 由于我们已经有了闭矩体的外测度等于它们的体积这个结论, 可以利用闭矩体来构造夹逼.*

Proof. 记开矩体 I. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭矩体 I_1, I_2, 使得 $I_1 \subset I \subset I_2$, 且满足

$$I_2 - \varepsilon \leq I \leq I_1 + \varepsilon \tag{2.13}$$

上述不等式其实是限制了 I_2 不会过大,I_1 不会过小. 根据闭矩体的外测度等于其体积这个结论, 结合不等式2.13, 以及测度的单调性, 易得

$$|I| - \varepsilon \leq |I_1| = m^*(I_1) \leq m^*(I) \leq m^*(I_2) = |I_2| \leq |I| + \varepsilon \tag{2.14}$$

故上式可以重写成

$$|m^*(I) - |I|| \leq \varepsilon \tag{2.15}$$

取 $\varepsilon \to 0$ 有

$$m^*(I) = |I| \tag{2.16}$$

□

2.2.2 可测集

测度这一种集合而言, 总有一些集合不满足可加性, 把这些集合排除, 剩下的就是可测集. 可测集满足外测度可列可加性, 从而真正成为长度、体积概念的推广.

Definition 2.12 (**可测集**)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对 $\forall T \subset \mathbb{R}^n$ 有

$$m^*(T) = m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c) \tag{2.17}$$

则称 E 是 Lebesgue（勒贝格）可测集, 简称可测集. 记可测集全体为 $\mathfrak{M}$, 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集类. 如果要强调可测集的维度, 则记作 $\mathfrak{M}_n$. 公式2.17称为 Caratheodory 条件. 另外若 $E \in \mathfrak{M}$,$m^*(E)$ 称为 E 的测度, 简记为 $m(E)$.

Remark 2.13. 为什么勒贝格可测集要如此定义？似乎 $\mathbb{R}^n$ 上可测集 E, 其边界 ∂E 可以任意分割 $\mathbb{R}^n$ 空间的集合 T, 使得这 T 被分割成两部分 $T \bigcap E$ 和 $T \bigcap E^c$. 而这两部分满足可加性. 如果要进一步理解可测集定义的动机, 还得继续深入学习, 先在这儿挖个坑.

Update: 新的理解, 对于勒贝格测度就是为了使得在这套测度体系下满足人类对于可加性的一种直觉, 比如 2 = 1+1, 或者 9=3+6 等等, 在这套测度体系下, 一次性丈量整个集合的测度会等价于把这个集合分割后再来对所有的子集合进行测度. 比如一堆肉的重量就等于把这块肉切成很多份的重量总和是一致的.

Corollary 2.14. *若 $m^*(E) = 0$, 则 E 为可测集 $E \in \mathfrak{M}$.*

Proof. 如果要证明 $E \in \mathfrak{M}$, 则需要证明 $\forall T \subset \mathbb{R}^n$ 有,$m^*(T) = m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c)$. 由 $T \bigcap E \subset E$, 根据外测度的非负性和单调性有

$$0 \leq m^*(T \bigcap E) \leq m^*(E) = 0 \tag{2.18}$$

同理, 由 $T \bigcap E^c \subset T$, 可以得到

$$m^*(T \bigcap E^c) \leq m^*(T) \tag{2.19}$$

由上述两个不等式可以得到

$$m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c) = 0 + m^*(T \bigcap E^c) \leq m^*(T) \tag{2.20}$$

而根据次可加性有

$$m^*(T) = m^*((T \bigcap E) \bigcup (T \bigcap E^c)) \leq m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c) \tag{2.21}$$

由不等式2.20和2.21夹逼可得

$$m^*(T) = m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c) \tag{2.22}$$

因此 E 为可测集.

□

Theorem 2.15 (**空集属于可测集**)**.** *$\emptyset \in \mathfrak{M}$, 且 $m(\emptyset) = 0$.*

Proof. 根据定义 $m^*(T \bigcap \emptyset) + m^*(T \bigcap (\emptyset)^c) = m^*(T \bigcap \mathbb{R}^n) = m^*(T)$, 故得证. 空集的测度根据定义就是零（牢牢记住开矩覆盖的下确界）. □

Theorem 2.16 (**可测集的余集是可测集**)**.** *若 $E \in \mathfrak{M}$, 则 $E^c \in \mathfrak{M}$.*

Proof. 若 $E \in \mathfrak{M}$, 则 $m^*(T) = m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c)$, 显然也有 $m^*(T) = m^*(T \bigcap E^c) + m^*(T \bigcap E)$. 故 $E^c \in \mathfrak{M}$. □

Theorem 2.17 (**可测集的并是可测集**)**.** *若 $E, F \in \mathfrak{M}$, 则 $E \bigcup F \in \mathfrak{M}$.*

Proof. $\mathbb{R}^n$ 上的集合 T 可以被分解为四个部分, 如下图所示

$$\begin{aligned} m^*(T) &\leq m^*(T \bigcap (E \bigcup F)) + m^*(T \bigcap (E \bigcup F)^c) \\ &= m^*(T \bigcap (E \bigcup F)) + m^*(T \bigcap E^c \bigcap F^c) \\ &\leq m^*((T \bigcap E) \bigcap F) + m^*((T \bigcap E) \bigcap F^c) \\ &+ m^*((T \bigcap E^c) \bigcap F) + m^*((T \bigcap E^c) \bigcap F^c) \end{aligned} \tag{2.23}$$

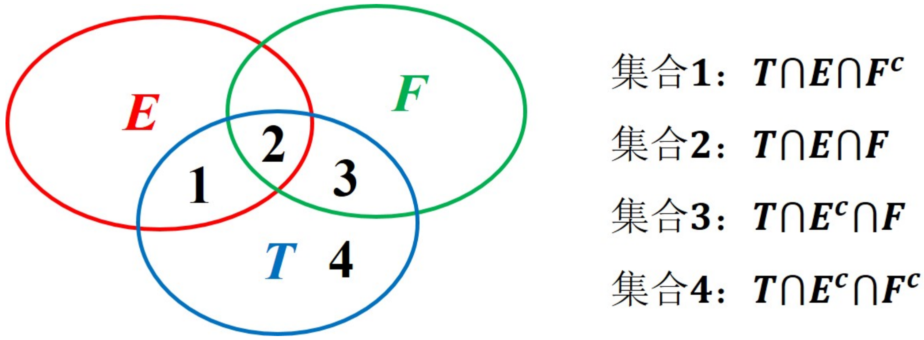

Figure 2.1: 集合分解

由于集合 F 的可测性, 可得

$$m^*((T\bigcap E)\bigcap F)+m^*((T\bigcap E)\bigcap F^c)=m^*(T\bigcap E) \tag{2.24}$$

$$m^*((T\bigcap E^c)\bigcap F)+m^*((T\bigcap E^c)\bigcap F^c)=m^*(T\bigcap E^c) \tag{2.25}$$

由于集合 E 的可测性, 上面两式之和为

$$m^*(T\bigcap E)+m^*(T\bigcap E^c)=m^*(T) \tag{2.26}$$

所以不等式2.23右端等于 $m^*(T)$, 可以重写为

$$m^*(T)\le m^*(T\bigcap(E\bigcup F))+m^*(T\bigcap(E\bigcup F)^c)\le m^*(T) \tag{2.27}$$

故有

$$m^*(T)=m^*(T\bigcap(E\bigcup F))+m^*(T\bigcap(E\bigcup F)^c) \tag{2.28}$$

得证. □

Theorem 2.18 (**可测集的交是可测集**). *若 $E,F\in\mathfrak{M}$, 则 $E\bigcap F\in\mathfrak{M}$.*

Proof. 恒等式 $E\bigcap F=(E^c\bigcup F^c)^c$, 又 $E,F\in\mathfrak{M}$，根据可测集的余集可测有,$E^c,F^c\in\mathfrak{M}$, 再由可测集的并集可测有 $E^c\bigcup F^c\in\mathfrak{M}$, 故 $(E^c\bigcup F^c)^c\in\mathfrak{M}$. 得证. □

Theorem 2.19 (**可测集的差是可测集**). *若 $E,F\in\mathfrak{M}$, 则 $E\backslash F\in\mathfrak{M}$. 这个结论由上面几个定理很容易推导出.*

Theorem 2.20 (**可测集的可列可加性**). *若 $E_j\in\mathfrak{M},j=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\in\mathfrak{M}$; 若还有 $E_i\bigcap E_j=\emptyset,i\neq j$, 则*

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_j)=\sum_{j=1}^{\infty}m^*(E_j) \tag{2.29}$$

Proof. 首先考虑 $i \neq j, E_i \bigcap E_j = \emptyset$ 的情况. 对于相交的集合列, 则可以分解为互不相交的新的集合列来处理. 我们的目标是证明 $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{M}$, 对于 $\forall T$ 有 $m^*(T) = m^*(T \bigcap S) + m^*(T \bigcap S^c)$. 要证无限相关的命题, 通常是对有限取极限. 令 $S_k = \bigcup_{j=1}^{k}$, 使用归纳法可以得到

$$m^*(T \bigcap S_k) = m^*(T \bigcap (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)) = \sum_{j=1}^{k} m^*(T \bigcap E_j) \tag{2.30}$$

第一步证明 $k = 2$ 时公式 (2.30) 成立. 由 $E_1 \in \mathfrak{M}$ 有

$$m^*(T \bigcap (E_1 \bigcup E_2)) = m^*(T \bigcap (E_1 \bigcup E_2) \bigcap E_1) + m^*(T \bigcap (E_1 \bigcup E_2) \bigcap E_1^c) \tag{2.31}$$

因为 $E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$, 有

$$(E_1 \bigcup E_2) \bigcap E_1 = E_1 \quad \text{且} \quad (E_1 \bigcup E_2) \bigcap E_1^c = E_2 \tag{2.32}$$

把关系式 (2.32) 代入等式 (2.31) 可以得到

$$m^*(T \bigcap (E_1 \bigcup E_2)) = m^*(T \bigcap E_1) + m^*(T \bigcap E_2) = \sum_{j=1}^{2} m^*(T \bigcap E_j) \tag{2.33}$$

由于 E_j 互不相交, 通过归纳法很容易证明 (2.20) 这个关系式.S_k 是有限个可测集的并集, 故 S_k 也可测,$S_k \in \mathfrak{M}$. 于是由 Caratheodory 条件并且结合关系式 (2.30) 有

$$m^*(T) = m^*(T \bigcap S_k) + m^*(T \bigcap S_k^c) = \sum_{j=1}^{k} m^*(T \bigcap E_j) + m^*(T \bigcap S_k^c) \tag{2.34}$$

由 $S_k \subset S$, 可得 $S_k^c \supset S^c$, 由外测度的单调性进一步有 $m^*(T \bigcap S_k^c) \geq m^*(T \bigcap S^c)$. 因此公式 (2.34) 可以缩放为

$$m^*(T) \geq \sum_{j=1}^{k} m^*(T \bigcap E_j) + m^*(T \bigcap S^c) \tag{2.35}$$

由于 $m^*(T)$ 和 $m^*(T \bigcap S^c)$ 与 k 无关, 令上式 (2.35) 中 $k \to \infty$, 可得

$$m^*(T) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(T \bigcap E_j) + m^*(T \bigcap S^c) = m^*(T \bigcap S) + m^*(T \bigcap S^c) \tag{2.36}$$

根据次可加性有

$$m^*(T) = m^*((T \bigcap S) \bigcup (T \bigcap S^c)) \leq m^*(T \bigcap S) + m^*(T \bigcap S^c) \tag{2.37}$$

由不等式 (2.36) 和 (2.37) 夹逼可得

$$m^*(T) = m^*(T \bigcap S) + m^*(T \bigcap S^c) \tag{2.38}$$

因此 S 可测,$\sum_{j=1}^{\infty} E_j = S \in \mathfrak{M}$. 我们回顾一下关系式2.36

$$m^*(T) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(T \bigcap E_j) + m^*(T \bigcap S^c) \tag{2.39}$$

结合关系式2.38和2.39, 容易得出

$$m^*(T \bigcap S) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(T \bigcap E_j) \tag{2.40}$$

根据次可加性可知

$$m^*(T \bigcap S) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(T \bigcap E_j) \tag{2.41}$$

故可得

$$m^*(T \bigcap S) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(T \bigcap E_j) \tag{2.42}$$

得证. 其次, 对于一般的可测集 $\{E_i\}$, 令

$$F_1 = E_1, \quad F_k = E_k \backslash (\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i), \quad k = 2, 3, \cdots \tag{2.43}$$

则 $\{F_i\}$ 是互不相交的可测集. 由于 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, 即得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{M}$. □

Proposition 2.21 (可列个可测集之交是可测集). *若* $E_i \in \mathfrak{M}(j = 1, 2, \cdots)$, *则* $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{M}$.

Proof. $E_j \in \mathfrak{M} \Rightarrow E_j^c \in \mathfrak{M}$, 而

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = ((\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j)^c)^c = (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c)^c \tag{2.44}$$

故有

$$E_j^c \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c \in \mathfrak{M} \Longrightarrow (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c)^c \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{M} \tag{2.45}$$

□

由定理可知看到, 可测集类包含了空集. 可测集类关于集合得并、交和余运算是封闭得, 并且关于集合得可列并, 可列交运算也是封闭得, 因此可测集 $\mathfrak{M}$ 是空间 $\mathbb{R}^n$ 中得一个 σ 代数. 对于为什么 Borel σ 代数 $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$, 需要仔细再研究研究.

Theorem 2.22. *若有递增可测集列* $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset \cdots$, *则* $\lim_{k\to\infty} E_k \in \mathfrak{M}$, *且*

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) \tag{2.46}$$

Proof. 对于 $\lim_{k\to\infty} E_k \in \mathfrak{M}$, 我觉得题目的假设已经包含了这个命题. 然而书上使用如下逻辑证明 $\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$. 书中使用可列个可侧集的并集还是可测集来证明. 但是当并集的指数 $k\to\infty$ 时 E_k 是可测集, 这本身也就是命题本身. 故存在循环论证.

下面证明第二个命题. 这里需要利用到第一章集合论中对于无穷集列的一个不相交分解. 令 $F_k = E_k \backslash E_{k-1}$,$E_0=\emptyset$. 根据题设 E_k 为升列, 故有

$$F_k \bigcap F_l = \emptyset, \quad \text{for} \quad k\neq l, \quad \text{and} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \tag{2.47}$$

可以看出 F_k 是互不相交的可测集. 由 $F_k = E_k\backslash E_{k-1}$ 可知 F_k 与 E_{k-1} 不相交, 因此由可测集可列可加性定理 (2.20) 有

$$m(E_{k-1}) + m(F_k) = m(E_{k-1}\bigcup F_k) = m(E_k) \tag{2.48}$$

故有

$$m(F_k) = m(E_k) - m(E_{k-1}) \tag{2.49}$$

进一步有

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k) - m(E_{k-1})) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) \tag{2.50}$$

得证. □

Theorem 2.23. *若有递减可测集列 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$, 且 $m(E_1) < \infty$, 则*

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) \tag{2.51}$$

Proof. E_k 为减列, 可知 $\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$. 令 $F_k^{c_1} = E_1\backslash E_k$, 根据题设 E_k 可测且为减列, 易得 $F_k^{c_1} \in \mathfrak{M}$, 且

$$F_1^{c_1} \subset F_1^{c_1} \subset \cdots \subset F_k^{c_1} \subset \cdots \tag{2.52}$$

由**定理 (2.22)**可知

$$m(\lim_{k\to\infty} F_k^{c_1}) = \lim_{k\to\infty} m(F_k^{c_1}) \tag{2.53}$$

而又由于 E_k 是减列

$$\lim_{k\to\infty} F_k^{c_1} = \lim_{k\to\infty}(E_1\backslash E_k) = E_1\backslash \lim_{k\to\infty} E_k = E_1\backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \tag{2.54}$$

显然如下事实成立

$$(E_1\backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k)\bigcap(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \emptyset \tag{2.55}$$

因此根据**可测集的可列可加性定理 (2.20)**知

$$m(E_1\backslash\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)=m(E_1)-m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k) \tag{2.56}$$

结合关系式 **(2.54)** 和 **(2.56)** 有

$$m(\lim_{k\to\infty}F_k^{c_1})=m(E_1\backslash\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)=m(E_1)-m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k) \tag{2.57}$$

同理由**可测集的可列可加性定理 (2.20)**知

$$\lim_{k\to\infty}m(F_k^{c_1})=\lim_{k\to\infty}m(E_1\backslash E_k)=\lim_{k\to\infty}(m(E_1)-m(E_k)) \tag{2.58}$$

故联立等式 **(2.53)**、**(2.57)** 和 **(2.58)**有

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k)=m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k) \tag{2.59}$$

得证. □

Remark 2.24. 需要注意, 当 $m(E_1)=\infty$ 时, 上述命题不成立, 举一个例子, $E_k=(k,\infty)$, 显然 E_k 为减列, 且 $\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\emptyset$. 故 $m(\lim_{k\to\infty}E_k)=0$. 而 $m(E_k)=\infty$ 且 $\lim_{k\to\infty}m(E_k)=\infty$. 那么思考一下,$m(E_1)=\infty$ 这个限制在上述证明中体现在哪里呢？换句话说没有了这个限制, 上述证明哪一步失效.

先占个坑, 待会调查更多的资料补充下 Borel 集和 Lebesgue 可测集的关系.

Theorem 2.25. *设 E 是可测集, 则存在 Borel 集 G,F 使得 $F\subset E\subset G$, 且 $m(F)=m(G)=m(E)$.*

Proof. 首先假设 E 有界 $m(E)<\infty$, 则对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 存在开矩体列 $\{I_j^{(n)}\},j=1,2,\cdots,$ 覆盖 E, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty}|I_j^{(n)}|-\frac{1}{n}\le m(E)\le\sum_{j=1}^{\infty}|I_j^{(n)}| \tag{2.60}$$

上述不等式 **(2.60)** 是一个帮助我们理解**下确界**的一个绝佳例子. 再次回顾下数列下确界 $m=\inf E$ 的充要条件：首先 m 是 E 的一个下界, 其次 $\forall\varepsilon>0,\exists x'\in E,s.t.x'<m+\varepsilon$. 下确界的两个判定条件实际上给了下确界一个极小的放大以及些微的缩小, 集合的测度的定义就是集合所有开覆盖矩体列的体积的下确界, 故使用下确界判定的充要条件, 可以对集合的测度进行缩放.

记 $G_n=\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j^{(n)}$, 故 G_n 为可列个开集的交, 仍属于开集.G_n 是 E 的一个开覆盖, 于是 $E\subset G_n$, 由测度的单调性得

$$m(G_n)-\frac{1}{n}\le\sum_{j=1}^{n}|I_j^{(n)}|-\frac{1}{n}\le m(E)\le\sum_{j=1}^{n}|I_j^{(n)}|\le m(G_n) \tag{2.61}$$

由此得

$$m(G_n \backslash E) = m(G_n) - m(E) \leq \frac{1}{n}. \tag{2.62}$$

令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 故 G 为 G_δ 型 Borel 集, 且 $E \subset G \subset G_n$, 故有

$$m(G) \leq m(G_n) \leq m(E) + \frac{1}{n}. \tag{2.63}$$

显然当 $n \to \infty$ 有 $m(G) \leq m(E)$, 又根据测度的单调性, 有 $m(G) \geq m(E)$, 故

$$m(G) = m(E) \tag{2.64}$$

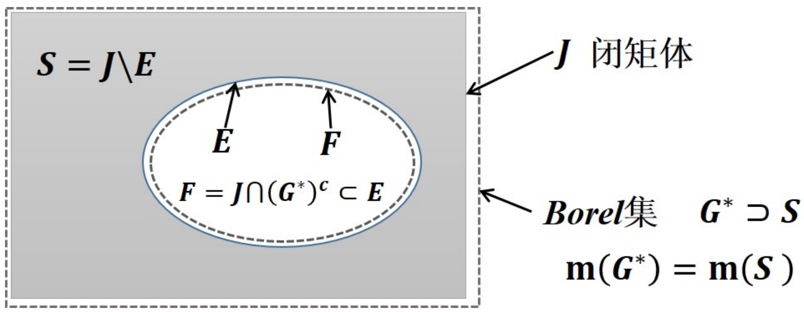

Figure 2.2: F_σ Borel 集示意图

如果 E 有界, 则存在一个闭矩体 $J \supset E$, 记 $S = J \backslash E$. 由于 S 是可测集, 根据上面的结论, 存在一个 Borel 集 $G^* \in \mathfrak{B}$, 使得 $S \subset G^*$, 且 $m(S) = m(G^*)$. 令 $F = J \backslash G^* = J \bigcap (G^*)^c$, 由 $S \subset G^*$, 有 $(G^*)^c \subset S^c$, 进一步可得

$$F = J \bigcap (G^*)^c \subset J \bigcap S^c = J \bigcap (J \bigcap E^c)^c = J \bigcap (J^c \bigcup E) = J \bigcap E = E \tag{2.65}$$

故 F 包含 E, 即 $F \subset E$, 且有 $m(F) \leq m(E)$. 下面来证明反包含关系.

由 $J, G^* \in \mathfrak{M}$, 根据次可加性可知

$$m(F) = m(J \backslash G^*) \geq m(J) - m(G^*) = m(J) - m(J \backslash E) = m(E) \tag{2.66}$$

故有 $m(F) = m(E)$.

Remark 2.26. 注意：一般情况下 $(J \backslash G^*) \bigcup G^* = J \bigcup G^* \supset G^*$, 故根据测度的单调性和可列可加性有 $m((J \backslash G^*) \bigcup G^*) = m((J \backslash G^*)) + m(G^*) = m(J \bigcup G^*) \geq m(J)$.

当 E 是无界时, 我们来回想下前面关于无限相关的命题是怎么证明的？我们往往构造一个有限的命题, 再利用极限定理推广到无限. 那么对于这儿的无限集合 E 我们可以构造一个递增的有限集列来交 E 就好了.

存在开矩体升列 I_i, 使得 $I_1 \subset I_2, \cdots, I_i, \cdots$, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \mathbb{R}^n$. 则

$$E = E \bigcap \mathbb{R}^n = E \bigcap (\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \bigcap I_i) \tag{2.67}$$

记 $E_i = E\bigcap I_i$, 显然 E_i 可测且测度有限, 则存在 Borel 集 F_i, G_i, 使得 $F_i \subset E_i \subset G_i$, 且 $m(F_i) = m(E_i) = m(G_i)$. 令 $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \quad G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, 显然有 $F \subset E \subset G$. 又

$$\begin{aligned} m(G\backslash E) &= m(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty}(G_i \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)) \\ &\le m(\bigcup_{i=1}^{\infty}(G_i \backslash E_i)) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i \backslash E_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(m(G_i) - m(E_i)) = 0 \end{aligned} \tag{2.68}$$

故有 $m(G\backslash E) = 0$, 从而 $m(G) = m(E)$. 同理可证 $m(E\backslash F) = 0$, 故 $m(F) = m(E)$. 易知, 这样构造的 F 是 F_σ 集,G 是 G_δ 集.

Remark 2.27. 好好理解 F 是 F_σ 集,G 是 G_δ 集. 理解后做一段 Notes.

□

2.3 Lebesgue 可测函数

2.3.1 勒贝格可测函数

Theorem 2.28 (Lebesgue 可测函数定义). *设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集,f 是 E 上的函数, 如果对于任意常数 t, 集合*

$$E(f > t) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | x \in E, f(x) > t\} \tag{2.69}$$

都是可测集, 则称函数 f 是 E 上的勒贝格可测函数. 简称 E 上的可测函数. 也可以称 f 在 E 上可测. 约定 $\mathfrak{M}(E)$ 为 E 上的勒贝格可测函数的全体.

Proposition 2.29 (常数函数可测). *设 $f(x) = c, \forall x \in E$, 有*

$$E(f > t) = \begin{cases} E & t < c \\ \emptyset & t \ge c \end{cases}$$

故 $f \in \mathfrak{M}(E)$.

Proposition 2.30 (可测集的特征函数可测). *设 $A \subset E, f = \chi_A$, 则*

$$E(f > t) = \begin{cases} E & t < 0 \\ A & 0 \le x < 1 \\ \emptyset & t \ge 1 \end{cases}$$

由此可见,$f \in \mathfrak{M}(E)$ 当且仅当 A 是可测集.

Proposition 2.31. *下面给出一些常用的等价关系. 使用我中有你和你中有我来证明, 即充分必要性.*

(1) $E(f \ge c) \bigcup E(f < c) = E, \quad E(f \ge c) \bigcap E(f < c) = \emptyset$;

(2) $E(f>c)\bigcap E(f\le d)=E(c<f\le d)$

(3) $E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\bigcup E(f<-\sqrt{c})$

(4) 另外一个非常重要的一个关系式子, 类似于开集的逼近.

$$E(f>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f\ge c+\frac{1}{n}) \tag{2.70}$$

Proof. 现证明等式 (2.70). 当 $x\in E(f>c)$ 时,$f(x)>c$, 所以必然可以找到一个自然数 n, 使得 $f(x)\ge c+\frac{1}{n}$, 因此 $x\in E(f\ge c+\frac{1}{n})$, 即必要性得到了证明.

另一方面, 如果 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f\ge c+\frac{1}{n})$, 必然存在一个 n, 使 $x\in E(f\ge c+\frac{1}{n})$, 此时自然有 $f(x)>c$, 所以 $x\in E(f>c)$. 必要性得到了证明. □

(5) ”闭集”的集合列的逼近. 设实函数列 $\{f_n\}$ 有极限函数 f, 那么

$$E(f\le c)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E(f_n\le c+\frac{1}{k}) \tag{2.71}$$

Proof. 如果 $x\in E(f\le c)$, 那么对于任意的自然数 k, 有 $f(x)\le c<c+\frac{1}{k}$. 因为 $f(x)$ 是 $f_n(x)$ 的极限, 所以必然有自然数 N, 当 $n\ge N$ 时有 $f_n(x)\ge c+\frac{1}{k}$. 这就是说, 当 $n\ge N$ 时,$x\in E(f_n\le c+\frac{1}{k})$.(Notes:$E(f_n\le c+\frac{1}{k})$ 是一个集合列, 上述表述就是下极限的定义, 集合列的无穷交, 下极限有无穷的元素包含其中), 即

$$x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E(f_n\le c+\frac{1}{k}) \tag{2.72}$$

因此必要性得证.

反过来, 如果从属关系 (2.72) 成立, 则对于一切 k, 有

$$x\in\varliminf_{n\to\infty}E(f_n\le c+\frac{1}{k}) \tag{2.73}$$

根据下极限的性质, 这时必有自然数 N_k, 使得当 $n>N_k$ 时,$x\in E(f_n\le c+\frac{1}{k})$, 即 $f_n(x)\le c+\frac{1}{k}$, 令 $n\to\infty$, 因而对于一切自然数 k 有,$f(x)\le c+\frac{1}{k}$. 令 $k\to\infty$ 有 $f(x)\le c$. 故 $x\in E(f\le c)$, 充分性得证. □

Theorem 2.32 (**可测函数的等价判定条件**)**.** 设 f 是可测集 E 上的实函数, 则以下诸条件相互等价:

(1) $f\in\mathfrak{M}(E)$;

(2) $\forall t\in\mathbb{R},E(f\ge t)$ 是可测集;

(3) $\forall t\in\mathbb{R},E(f<t)$ 是可测集;

(4) $\forall t \in \mathbb{R}, E(f \leq t)$ 是可测集;

Proof. 因为

$$E(f \geq t) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > t - \frac{1}{k}) \tag{2.74}$$

$$E(f < t) = (E(f \geq t))^c = E \backslash E(f \geq t) \tag{2.75}$$

$$E(f \leq t) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f < t + \frac{1}{k}) \tag{2.76}$$

故有 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

此外, 当 f 是 E 上的可测函数时, 由

$$E(f = +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > k) \tag{2.77}$$

$$E(f = -\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f < -k) \tag{2.78}$$

知,$E(f = +\infty)$ 和 $E(f = -\infty)$ 都是可测集. 同理有 $E(f < +\infty)$,$E(f > -\infty)$ 和 $E(f = t), \forall t \in \mathbb{R}$ 均为可测集. □

Remark 2.33. 可测函数的判定条件可以看成是任意开集 $(t, +\infty)$ 经过可测函数反作用后的原像也是可测的.

2.3.2 可测函数与简单函数列

Definition 2.34 (**简单函数**). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 时可测集, $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 E 上互不相交的可测子集, 且 $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = E, \alpha_i$ 是常数, 称 E 上函数

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x) \tag{2.79}$$

为简单函数. 特别地, 当每个 E_i 是矩体时, 称 $\psi(x)$ 为阶梯函数. 简单函数其实就是把可测集 E 分割成一系列互不相交的子集, 然后对每个可测子集的特征函数都赋予一个权重.

Theorem 2.35. 对任意可测集 *E,E* 上的简单函数都是可测的.

Proof. 设 $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$. 不失一般性, 设 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$(若 $\alpha_i = \alpha_j$, 则将 $E_i \bigcup E_j$ 看作某个 E_k), 因为

$$E(\psi > t) = \begin{cases} E, & t < \alpha_1 \\ \bigcup_{j=i+1}^{n} E_i, & \alpha_i \geq t < \alpha_{i+1} \\ \emptyset, & t \geq \alpha_n \end{cases}$$

所以 $\psi \in \mathfrak{M}(E)$. □

如果可测函数 $f(x) \geq 0$, 则称 $f(x)$ 为非负可测函数.

Theorem 2.36. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集. 则 $f(x)$ 是 E 上非负可测函数的充分必要条件是, 存在 E 上的非负简单函数列 $\{\psi_k(x)\}$, 使得

$$0 \leq \psi_1(x) \leq \psi_2(x) \leq \cdots \leq \psi_k(x) \leq \cdots \tag{2.80}$$

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x), \quad \forall x \in E \tag{2.81}$$

Proof. 先证明必要性, 构造出一系列的简单函数列来分割逼近可测函数 $f(x)$, 其实这就是勒贝格测度的本质, 对函数 $f(x)$ 值域进行无穷分割. 如上图所示假设 f 是 E 上的非负可测函

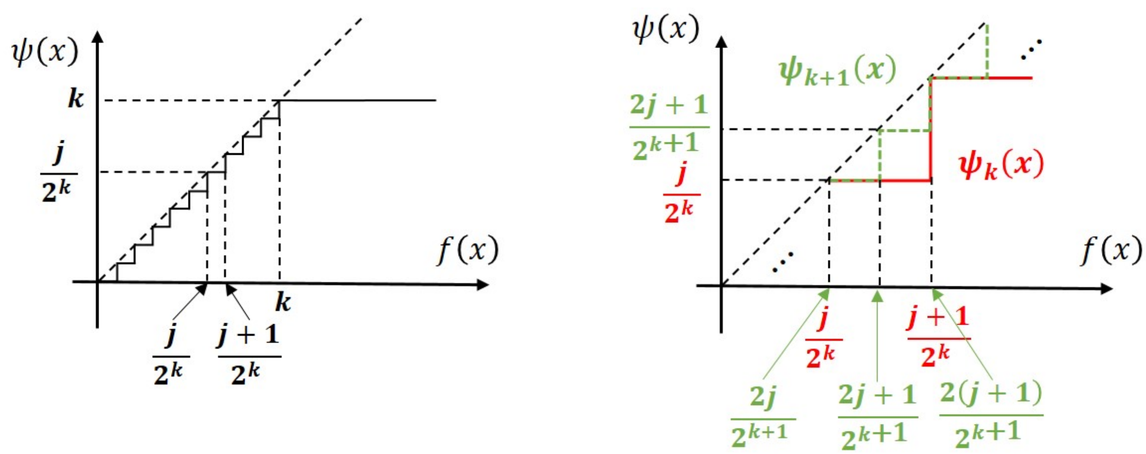

Figure 2.3: 勒贝格可测函数与简单函数列

数, 对任意正整数 k 及 $j = 0, 1, \cdots, k \cdot 2^k - 1$, 令

$$E_{k,j} = E(\frac{j}{2^k} \leq f < \frac{j+1}{2^k}) \tag{2.82}$$

当 $j = k \cdot 2^k$ 时有

$$E_{k,k\cdot 2^k} = E(f \geq k) \tag{2.83}$$

则 $\{E_{k,j}\}$ 是互不相交的可测集, 且 $E = \bigcup_{j=0}^{k\cdot 2^k} E_{k,j}$. 构造简单函数

$$\psi_k(x) = \sum_{j=0}^{k\cdot 2^k} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{k,j}}(x) \tag{2.84}$$

上面这种分割本质上就是把每个单位长度分成 2^k 份, 区间 $[0, k)$ 内每一个分割的子区间 $\frac{j}{2^k} \leq f < \frac{j+1}{2^k}$ 内的值通过带权重的特征函数 $\frac{j}{2^k}\chi_{E_{k,j}}(x)$ 映射到这个区间的起始点 $\frac{j}{2^k}$. 仔细想想, 这和黎曼积分的分割如出一辙, 把函数分割称一个个矩体叠加, 似乎这又和信号与系统的冲击响应联系起来了 (线性是不变系统可以被冲击响应刻画, 任何新的信号的系统响应都是冲级响应的线性叠加). 这样构造的简单函数列有如下关系

$$\psi_k(x) \leq \psi_{k+1}(x) \leq f(x) \tag{2.85}$$

现证明关系式 **(2.85)**. 由简单函数列的构造 **(2.84)**, 显然 $\psi_k(x) \geq 0$ 成立. 根据上图可知, 对 $\forall j \in [1, 2^k] \bigcap \mathbb{N}$ 有如下关系式成立

$$\psi_{k+1}(x) = \begin{cases} \frac{2j}{2^{k+1}} = \psi_k(x) & x \in [\frac{2j}{2^{k+1}}, \frac{2j+1}{2^{k+1}}) \\ \\ \frac{2j+1}{2^{k+1}} \geq \frac{2j}{2^{k+1}} = \psi_k(x) & x \in [\frac{2j+1}{2^{k+1}}, \frac{2(j+1)}{2^{k+1}}) \end{cases}$$

上述关系是对 $\forall j \in [1, 2^k] \bigcap \mathbb{N}$ 成立, 因此对任意的 x 都成立. 而 $\psi_k(x) \leq f(x)$ 则根据定义 (2.82) 和 (2.84) 可知 $\forall f(x) \in [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}), \quad j \in [1, 2^k] \bigcap \mathbb{N}$ 有

$$\psi_k(x) = \frac{j}{2^k} \leq f(x) \tag{2.86}$$

一句话概括就是 $\psi_(x)$ 是每个 f 分割区间的起始点, 显然要小于或等于整个小区间的任何一点的值. 下面证明关系式 (2.81)$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x), \quad \forall x \in E$. 根据图可知, 若 $x_0 \in E$, 使 $f(x_0) = +\infty$, 则必有 $f \geq k$, 由定义 (2.83) 可知 $x_0 \in E_{k,k\cdot 2^k}$. 所以 $\psi_k(x_0) = k$, 于是 $\lim_{k\to\infty} \psi_k(x_0) = +\infty$. 若 $f(x_0) < +\infty$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 k_0, 于是当 $k \geq k_0$ 时, 有 $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, 且有

$$|f(x_0) - \psi_k(x_0)| = f(x_0) - \psi_k(x_0) < \frac{1}{2^k} < \varepsilon \tag{2.87}$$

因此关系式 (2.81)$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x), \quad \forall x \in E$ 成立, 故必要性得证. 上述极限的证明用到了关系式 (2.85), 以及定义 (2.82). 故必要性得证.

现证明充分性. 设 $\{\psi_k(x)\}$ 是非负简单函数升列, 且 $\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x)$. 则对于任意实数 t,$E(\psi_k > t)$ 是可测集. 由于

$$E(f > t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(\psi_k > t) \tag{2.88}$$

故 $E(f > t)$ 是可测集. 因此 f 是 E 上可测函数. 多唠叨一句话, 等式 (2.88) 的证明可以结合极限的定义, 以你中有我, 我中有你这个思路来证明. 即任何的 $x_0 \in \{x_0 | E(f(x_0) > t)\}$ 都能找到一个 k_0, 使得 $x_0 \in \{x_0 | E(\psi_k(x_0) > t)\}$, 反之依然. 在这里我们可以回忆一下定理 (1.7). □

2.3.3 可测函数的基本性质

本小结讨论 Lebesgue 可测函数的一些基本性质.

Theorem 2.37 (可测函数的和差积商可测). *若 $f(x), g(x)$ 是 E 上的可测函数, 则 $cf(x)(c \in \mathbb{R}), f(x)g(x)$ 是可测函数;$f(x) + g(x)$ 和 $f(x)/g(x)$ 在其定义域的子集上是可测函数.*

Proof. 证明过程只需遵循可测函数的定义. 这里只给出部分定理证明的关键点. 对于 $f(x) + g(x)$, 需要先挖掉一些没有定义的点

$$A = [E(f = \infty) \bigcap E(g = -\infty)] \bigcup [E(f = -\infty) \bigcap E(g = \infty)] \tag{2.89}$$

根据关系式 (2.77) 知上述无定义的集合 A 可测.$f+g$ 在 $E\bigcap A^c$ 上是有定义的. 对于任意实数 t, 由分解

$$E(f+g>t)=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(E(f>r)\bigcap E(g>t-r)) \tag{2.90}$$

知 $f+g$ 在 E 上可测. 上述等式的证明可以使用我中有你, 你中有我的思路. 充分性是显然的，必要性也很显然, 对于 $\forall x_0, s.t. f(x_0)+g(x_0)=t_0>t$, 令 $\delta=t_0-t>0$, 由有理数的稠密性可知,$\exists r\in\mathbb{Q}, s.t.$

$$r<f(x_0)<r+\delta \tag{2.91}$$

故有

$$g(x_0)=t_0-f(x_0)>t_0-(r+\delta)=t_0-(r+t_0-t)=t-r \tag{2.92}$$

由上面两个关系式可知 $x_0\in E(f>r)\bigcap E(g>t-r)$. 故得证.

为了证明 $f(x)\cdot g(x)$ 可测, 首先证明 $\forall f\in\mathfrak{M}$, 有 $f^2(x)\in\mathfrak{M}(E)$. 对于 $\forall t\in\mathbb{R}$, 有

$$E(f^2>t)=\begin{cases} E, & t<0 \\ E(f>\sqrt{t})\bigcup E(f<-\sqrt{t}) & t\geq 0 \end{cases}$$

□

其次, 因为

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}((f(x)+g(x))^2-((f(x)-g(x))^2) \tag{2.93}$$

而 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)-g(x)$ 都是可测函数, 根据 f^2 也是可测函数有 $f(x)\cdot g(x)$ 也是可测函数. 最后由

$$\chi_A(x)=\begin{cases} E(g>0)\backslash E(g=\infty), & t=0 \\ E(g<1/t)\bigcap E(g>0), & t>0 \\ E(g<1/t)\bigcup E(g>0), & t<0 \end{cases}$$

Theorem 2.38. *设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的可测函数列, 则下列函数都是 E 上的可测函数.*

$$\sup_{k\geq 1}\{f_k(x)\};\quad \inf_{k\geq 1}\{f_k(x)\};\quad \varlimsup_{k\to\infty}\{f_k(x)\};\quad \varliminf_{k\to\infty}\{f_k(x)\}; \tag{2.94}$$

Proof. 因为 $\forall t\in\mathbb{R}$, 由

$$E\left(\sup_{k\geq 1}\{f_k(x)\}>t\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E(f_k>t) \tag{2.95}$$

最大值大于 t, 那就等价于必存在某一个 f_k 大于 t.

$$\inf_{k\geq 1}\{f_k(x)\}=-\sup_{k\geq 1}\{-f_k(x)\} \tag{2.96}$$

由 $f_k(x)=f_k^+-f_k^-$, 上述等式很容易理解和证明. 这个转换在后续的积分控制定理的证明中非常的重要.

$$\varlimsup_{k\to\infty} f_k(x)=\inf_{j\geq 1}\left(\sup_{k\geq j}\{f_k(x)\}\right) \tag{2.97}$$

对于操作符 inf 和 sup, 有如下规律 $\inf(-x)=-\sup(x), \quad \sup(-x)=-\inf(x)$.

$$\begin{aligned} -\varlimsup_{k\to\infty}(-f_k(x)) &= -\inf_{j\geq 1}\left(\sup_{k\geq j}\{-f_k(x)\}\right) \\ &= -\inf_{j\geq 1}\left(-\inf_{k\geq j}\{f_k(x)\}\right)=\sup_{j\geq 1}\left(\inf_{k\geq j}\{f_k(x)\}\right)=\varliminf_{k\to\infty} f_k(x) \end{aligned} \tag{2.98}$$

通过上面的转换关系可知, 只需证明第一个关系式, 就可以断定所有的都是可测函数. □

前面已经证明了任何非负可测函数都可以用单调递增简单函数列逐点逼近, 对于一般的可测函数, 可以证明也能用简单函数列来逐点逼近.E 上的可测函数 $f(x)$ 可以分成如下正部和负部

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}, \quad f^-(x)=-\min\{f(x),0\} \tag{2.99}$$

显然

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x), \quad |f(x)|=f^+(x)+f^-(x) \tag{2.100}$$

根据

$$E(f^+>t)=E(f>t)\bigcup E(0>t), \quad E(-f^-<t)=E(f<t)\bigcup E(0<t) \tag{2.101}$$

可知 $f^+(x),f^-(x)$ 都是非负可测函数, 故存在单调简单函数列 $\{\varphi_k(x)\},\{\psi_k(x)\}$, 使得 $\varphi_k(x)\to f^+(x),\psi_k(x)\to f^-(x)$, 所以 $\varphi_k(x)-\psi_k(x)\to f(x)$. 而简单函数列的差还是简单函数列, 这说明 $f(x)$ 是简单函数列 $\{\varphi_k-\psi_k\}$ 的极限. 由此很容易得到如下性质.

Theorem 2.39. *若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集, 则 E 上实值函数 $f(x)$ 是可测函数的充分必要条件是,$f^+(x),f^-(x)$ 都是 E 上的可测函数. 当 $f(x)$ 是可测时,$|f(x)|$ 在集合 E 上也是可测的. 其实对于 $|f(x)|$ 可测的证明和 $f^2(x)$ 非常类似, 然后 $f(x)$ 的正部和负部是 $f(x),|f(x)|$ 的线性组合, 故也是 E 上的可测函数.*

Corollary 2.40. *设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上的可测函数列, 且有*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x) \tag{2.102}$$

则 $f(x)$ 也是 E 上的可测函数.

Corollary 2.41 (E **上连续函数均为可测集**)**.** *设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集, 则 E 上连续函数均为可测函数, 即 $C(E)\subset\mathfrak{M}$.*

Proof. 由 $\mathbb{R}^n$ 上实值函数连续性等价判定 (1.98) 可知,$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\{x|f(x)<\lambda\}$ 与 $\{x|f(x)>\lambda\}$ 是开集. 而 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集都可以表示成可数个互不相交的左开右闭的区间的并 (见江泽坚版实变函数 P68 引理), 且 $\mathbb{R}^n$ 中任何区间 (开区间, 闭区间, 左开右闭区间, 左闭右开区间) 都是可测的. 因此 $\mathbb{R}^n$ 中的开集都可测, 故有 E 上的连续函数可测. □

Remark 2.42. $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 闭集,F_σ,G_δ,Borel 集都是可测的.

Proposition 2.43 (**可测集上的连续函数是可测函数**)**.** *设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集, 则 E 上的可测函数均为可测函数, 即 $C(E)\subset\mathfrak{M}$.*

Proof. $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall x\in E(f>t)$, 有 $f(x)>t$. 又 $f(x)$ 在 E 上连续, 则存在 x 的邻域 $U(x)$, $s.t.\ \forall Z\in U(x)\bigcap E$ 有 $f(Z)>t$, 因此可以推出

$$U(x)\bigcap E\subset E(f>t) \tag{2.103}$$

且令

$$G=\bigcup_{x\in E(f>t)}U(x) \tag{2.104}$$

则可以得到 G 为 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, 而又开集是可测集, 故 G 可测. 又

$$\begin{aligned}E(f>t)=E(f>t)\bigcap E\subset G\bigcap E&=\left(\bigcup_{x\in E(f>t)}U(x)\right)\bigcap E\\&=\bigcup_{x\in E(f>t)}\Big(U(x)\bigcap E\Big)\subset\bigcup_{x\in E(f>t)}E(f>t)=E(f>t)\end{aligned} \tag{2.105}$$

由于 G 是开集可测，E 可测, 故 $E(f>t)=G\bigcap E$ 可测, 故 f 为 E 上的可测函数. 即 $f\in\mathfrak{M}$. □

Remark 2.44. 其实证明本质上用到了连续函数的定义, 第一步是 $(t,+\infty)$ 是一个开集, 则在其中任何一点都是内点, 即可以找到一个邻域也在这个开集内. 再利用到连续函数定义, 也必定可以找到这个邻域的原像 x 的一个开邻域. 因此根据开集的定义, 所有定义域的点都是内点, 因为每一满足条件的点都能找到一个邻域也在这个集合中.

Theorem 2.45 (**复合函数的可测性**)**.** *设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 而 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中可测集 E 上的可测函数, 则复合函数*

$$h(x)=f(g(x)) \tag{2.106}$$

是 E 上的可测函数.

Proof. 对于一开集 $G\subset\mathbb{R}$, $h^{-1}(G)=g^{-1}(f^{-1}(G))$. 因为 $f^{-1}(G)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 所以由 g 的可测性知,$g^{-1}(f^{-1}(G))$ 也是可测集 (任何开集都可以表示为至多可列个开区间之并). 这说明复合函数 $h(x)$ 是 E 上的可测函数. □

Proposition 2.46 (**导函数是可测函数**). $\mathbb{R}^1$ 上的可微函数 $f(x)$ 的导函数 $f^{'}(x)$ 是可测函数

Proof. 由于

$$f^{'}(x) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} = \lim_{n\to\infty} = n\cdot\left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right) \tag{2.107}$$

从而 $f^{'}(x)$ 是一系列连续函数的极限, 而连续函数可测, 故 $f^{'}(x)$ 为可测函数. □

Proposition 2.47. 设 $f_n(x)$ 是可测函数, 则它的收敛点全体和发散点全体是可测集.

Proof. 发散点的全体为

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \neq \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\right) \tag{2.108}$$

收敛点的全体为

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\right) \tag{2.109}$$

由于收敛点的余集就是发散点, 只需要证明收敛点的全体为可测集就可以了. 注意到

$$\begin{aligned}
&E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) - \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = 0\right)\\
&= E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) - \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \geq 0\right)\bigcap E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) - \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \leq 0\right)
\end{aligned} \tag{2.110}$$

而可测函数的上极限和下极限、四则运算、交并运算封闭, 故有上述集合为可测集. □

Theorem 2.48. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集,$f(x), g(x)$ 是 E 上两个函数. 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上几乎处处相等, 即存在一个集合 $E_0\subset E$, 满足 $m(E_0)$, 使得函数 f 与 g 在集合 $E\backslash E_0$ 上处处相等, 则当其中一个在 E 上可测时, 另一个在 E 上也可测. 即在零测度集上改变一个函数的值, 不改变函数在整个可测区间的可测性质.

Proof. 假设 $f(x)$ 可测, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}, E(f>t)$ 为可测集. 而

$$\begin{aligned}
E(g>t) &= E(g>t)\bigcap\left(E(f=g)\bigcup E(f\neq g)\right)\\
&= \left(E(g>t)\bigcap E(f=g)\right)\bigcup\left(E(g>t)\bigcap E(f\neq g)\right)
\end{aligned} \tag{2.111}$$

由于 $m(E(f\neq g))=0$, 而

$$\left(E(g>t)\bigcap E(f\neq g)\right)\subset E(f\neq g) \tag{2.112}$$

故 $m\left(E(g>t)\bigcap E(f\neq g)\right)\leq m(E(f\neq g))=0$, 由测度非负性可知

$$m\left(E(g>t)\bigcap E(f\neq g)\right)=0 \tag{2.113}$$

对于任意的外测度为零的集合都勒贝格可测 (根据定义很容易证明). 而又 $E(g>t)\bigcap E(f=g) = E(f>t)\bigcap E(f=g)$, 根据假设 $E(f>t)$ 可测. 而 $E(f=g)=E\backslash E(f\neq g)$ 可测, 故 $E(f=g)$ 可测, 也可以推出 $E(g>t)$ 可测, 最后得到 $g\in\mathfrak{M}(E)$. □

上述定理说明, 函数的可测性与其在零测度集上的取值无关. 因此, 讨论函数的可测性容许其在任何零测度集上改变其值. 比如 Dirichlet 函数可以在有理数定义域上改变其值使得在整个区间是一个常值函数.

Definition 2.49. 设有一个与点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 中的点 x 有关的命题 $S(x)$. 若对于除了 E 中一个零测度集以外的每个 x, 命题 $S(x)$ 皆为真, 则称命题 $S(x)$ 在 E 上几乎处处成立, 并简记为 $S(x), a.e.[E]$. 当 $E = \mathbb{R}^n$ 时, 则简记为 $S(x), a.e.$.

2.4 Lebesgue 可测函数的收敛性

2.4.1 可测函数的几乎一致收敛与几乎处处收敛

Definition 2.50 (一致收敛). 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是定义在点集 E 上的实值函数. 若对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, s.t. \forall k \geq K, \forall x \in E$ 有

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.114}$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上一致收敛到 f, 记作 $f_k \Rightarrow f$ 或 $f_k \xrightarrow{u} f$(其中 u 表示一致 (uniform)).

Definition 2.51 (几乎一致收敛). 设 E 是可测集, 若 $\forall \delta > 0, \exists E_\delta \subset E, s.t.\ m(E \backslash E_\delta) < \delta$, 且在 E_δ 上 $f_k \Rightarrow f$, 则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎一致收敛到 f, 记作 $f_k \xrightarrow{a.u.} f$(其中 $a.u.$ 表示几乎一致 (almost uniform)).

显然, 若 $f_k \Rightarrow f$, 则 $\{f_k(x)\}$ 点点收敛于 $f(x)$. 若 $\{f_k(x)\}$ 是可测集上的可测函数, 则 $f(x)$ 也是可测函数.

Definition 2.52 (几乎处处收敛). 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是定义在点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数. 若 $\exists Z \subset E, s.t.\ m(Z) = 0$, 且对每个元素 $x \in E \backslash Z$, 有 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, 则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 f, 记作 $f_k \to f,\ a.e.[E]$ 或 $f_k \xrightarrow{a.e.} f$(其中 $a.e.$ 表示一致 (almost everywhere)).

Proposition 2.53 (几乎一致收敛必定几乎处处收敛). *如果 $f_k \xrightarrow{a.u.} f$, 则可以推出 $f_k \xrightarrow{a.e.} f$, 即几乎一致收敛必定几乎处处收敛.*

Proof. 由 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛到 f, 由定义, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists E_m \subset E, s.t.\ m(E \backslash E_m) < \frac{1}{m}$. 令 $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, 则

$$\begin{aligned} m(E \backslash F) &= m(E \bigcap (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m)^c) = m(E \bigcap (\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m^c)) = m((\bigcap_{m=1}^{\infty} E) \bigcap (\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m^c)) \\ &= m(\bigcap_{m=1}^{\infty} (E \bigcap E_m^c)) == m(\bigcap_{m=1}^{\infty} (E \backslash E_m)) \leq m(E \backslash E_m) < \frac{1}{m} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned} \tag{2.115}$$

故有 $m(E \backslash F) = 0$. 令 $Z = E \backslash F \subset E$, 则 $m(Z) = 0$. 且 $\forall x \in F = E \backslash Z$, 存在 m_0, 使得 $x \in E_{m_0}$, 且 $f_k(x) \to f(x)$, 即 $f_k(x)$ 在 $F = E \backslash Z$ 上处处收敛到 F. $\square$

Theorem 2.54 (**叶戈罗夫定理**). *设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是定义在点集 E 上处处有限的可测函数集, 且 $m(E) < \infty$. 若 $f_n \to f$, $a.e.[E]$, 则 $\{f_k(x)\}$ 几乎一致收敛到 $f(x)$.*

Proof. 证明的关键在于数学分析和集合论之间的等价表述。

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists J \in \mathbb{N}, \text{当 } j > J,\ s.t.\ |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \tag{2.116}$$

用集合来描述, 有

$$x \in \{x \in E | \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\} \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{J=1}^{\infty} \bigcap_{j=J+1}^{\infty} \{x \in E || f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\} \tag{2.117}$$

回想集合下极限的概念. 在极限情况下所有集合共有的元素. 故上述关系式可以改写为

$$\{x \in E | f_k \to f\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{j\to\infty} E(|f_j - f| < \frac{1}{k}). \tag{2.118}$$

故有

$$\{x \in E | f_k \nrightarrow f\} = E \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{j\to\infty} E(|f_j - f| < \frac{1}{k}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\lim}_{j\to\infty} E(|f_j - f| \geq \frac{1}{k}). \tag{2.119}$$

简记 $E(f_k \to f) = \{x \in E | f_k \to f\}$, 以及 $E(f_k \nrightarrow f) = E \backslash E(f_k \to f)$. 根据题设 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛到 $f(x)$, 因此在不收敛的地方测度必为零.

$$m(E(f_k \nrightarrow f)) = 0 \tag{2.120}$$

故 $\forall k$, 由推论 (2.23)(递减测度有限集合列的极限和测度作用顺序可交换), 以及 $m(E) < \infty$, 有 (极限和测度作用顺序可交换)

$$\lim_{J\to\infty} m\left(\bigcup_{j=J}^{\infty} E(|f_j - f| \geq \frac{1}{k})\right) = m\left(\overline{\lim}_{j\to\infty} E(|f_j - f| \geq \frac{1}{k})\right) = 0 \tag{2.121}$$

根据极限的定义, 给定 $\delta > 0$, 可一次取出 $J_1 < J_2 < \cdots$ 使得

$$m\left(\bigcup_{j=J_k}^{\infty} E(|f_j - f| \geq \frac{1}{k})\right) < \frac{\delta}{2^k} \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{2.122}$$

如下构造 E_δ

$$E_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=J_k}^{\infty} E(|f_j - f| < \frac{1}{k}) \tag{2.123}$$

则有 (集合的余集: 交变并, 并变交, 最里面的集合再取余, 故 $<$ 要变成 $\geq$)

$$E \backslash E_\delta = E \bigcap (E_\delta)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=J_k}^{\infty} E(|f_j - f| \geq \frac{1}{k}) \tag{2.124}$$

$$m(E\backslash E_\delta) \le \sum_{k=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{j=J_k}^{\infty} E(|f_j - f| \ge \frac{1}{k})\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} < \delta \tag{2.125}$$

由 E_δ 的定义 (集合列之交), 可以看出, 当 $x \in E_\delta$, $j \ge J_k$ 时

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{2.126}$$

可见在 E_δ 上, $f_k \Longrightarrow f$. 因此 $\{f_k\}$ 几乎一致收敛到 f. □

Remark 2.55 (**注**). 叶戈罗夫中的 $m(E) < \infty$ 不能去掉. 比如考虑可测函数列 $f_k(x) = \chi_{(0,k)}(x)$, $x \in (0, +\infty)$, $k = 1, 2, \cdots$, 函数列在 $(0, +\infty)$ 处处收敛于函数 $f(x) \equiv 1$. 注意, 这里的处处收敛指的是对于任意指定的 x, 也就是先指定 x, 然后 $n \to \infty$ 时, 函数列收敛到 $f(x) \equiv 1$. 但是在 $(0, 1)$ 中的任意有限测度集的余集上均不一致收敛于 $f(x) \equiv 1$. 我们可以用更加数学的语言来描述这一过程.

$\forall x \in (0, 1)$, $\exists n_0$, $s.t.$ $n > n_0$ 时,$x \in (0, n)$, 故 $f_n(x) = 1$. 因此 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0, 1)$ 上处处收敛到 $f(x) \equiv 1$.

但是 $f_n(x)$ 并不一致收敛到 $f(x) \equiv 1$. 因为 $\exists E_0 \subset (0, +\infty)$, 且 $m(E_0) > \infty$, 使得在 $(0, +\infty)\backslash E_0$ 上一致收敛到 f.

2.4.2 可测函数列的依测度收敛

Definition 2.56 (**依测度收敛**). 假设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是可测集 $E \in \mathfrak{M}$ 上几乎处处有限的可测函数 $(f, f_k \in \mathfrak{M}(E), a.e. m(E) < \infty)$. 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k \to \infty} m(E(|f_k - f| > \varepsilon)) = 0 \tag{2.127}$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛到函数 $f(x)$, 记作 $f_k \xrightarrow{m} f$.

为什么要提出依测度收敛这个概念? 对于可测函数来说, 有一些函数列在定义域内处处不收敛, 但是那些不收敛的频次相对非常小, 小到其测度几乎可以忽略. 对于这种情况, 可以说是依" 概率" 收敛. 看如下例子.

在区间 $[0, 1)$ 上构造处处不收敛, 但依测度收敛的函数列. 把区间 $E = [0, 1)$ 分成互不相交的 2^i 份

$$i \in \mathbb{N}, \quad [0, 1) = \bigcup_{j=0}^{2^i - 1} [\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i}) \tag{2.128}$$

对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 唯一确定了 i, j, 使得 $k = 2^i + j$, 其中 $0 \le j < 2^i$(用 k 整除 2^i, 余数为 j). 令

$$f_k(x) = \chi_{[\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i})}(x), \quad k = 1, 2, \cdots \quad x \in [0, 1) \tag{2.129}$$

对 $\forall k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1)$, $\exists! j_0 \in \{0, 1, 2, \cdots, 2^i - 1\}, s.t.$ $x_0 \in [\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}})$, 对应的有 $k_0 = 2^{i_0} + j_0$, 使得 $f_{k_0}(x_0) = 1$. 这个很好理解, 任何一个 i_0 都会完全分割 $[0, 1)$ 区间为 2^{i_0} 份,

而 x_0 必定属于其中某一个区间, 并且不属于其中的 $2^{i_0}-1$ 个区间. 而当 i_0 取尽自然数时, 数列 $\{f_k(x_0)\}$ 会有无限个为 1, 但也会有更多个值为 0. 实际上对于 $i_0\in\mathbb{N}$, 出现 0 的频次为 $\frac{1}{2^{i_0}}$, 出现 1 的频次为 $(1-\frac{1}{2^{i_0}})$. 因此这个例子函数列在 $[0,1)$ 上处处不收敛, 但却依测度收敛. 事实上, 只要 k 足够大, 对于任意 $0<\varepsilon\leq 1$

$$\{x\in[0,1)\mid |f_k(x)-0|\geq\varepsilon\}=\{x\in[0,1)|f_k(x)=1\}=[\frac{j}{2^i},\frac{j+1}{2^i}) \tag{2.130}$$

上述点集的测度非常小, 且等于

$$m\left(\{x\in[0,1)\mid |f_k(x)-0|\geq\varepsilon\}\right)=m\left([\frac{j}{2^i},\frac{j+1}{2^i})\right)=\frac{1}{2^i} \tag{2.131}$$

这样对于任意给定的 $\delta>0$, 总可以取到 i_0, 也就是 k_0, 使得 $k>k_0$ 时, 由

$$m\left(\{x\in[0,1)\mid |f_k(x)-0|\geq\varepsilon\}\right)>1-\delta \tag{2.132}$$

其中 $2^{-i_0}<\delta$. 这个不等式说明, 对于充分大的 k, 出现 0 的频率接近 1. 这样我们称函数列 $\{f_k(x)\}$ 在区间 $[0,1)$ 上依测度收敛到零函数.

Theorem 2.57. *若函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 几乎处处相等.*

Proof. 如下三角不等式成立

$$|f(x)-g(x)|\leq|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-g(x)|,\quad a.e.[E] \tag{2.133}$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 若 $|f(x)-g(x)|>\varepsilon$, 则由上述三角不等式可得

$$|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-g(x)|\geq|f(x)-g(x)|>\varepsilon \tag{2.134}$$

由绝对值的非负性必有

$$\max\{|f(x)-f_k(x)|,|f_k(x)-g(x)|\}>\frac{\varepsilon}{2},\quad a.e.[E] \tag{2.135}$$

故有如下关系式成立

$$E(|f-g|>\varepsilon)\subset E(|f-f_k|>\varepsilon/2)\bigcup E(|g-f_k|>\varepsilon/2) \tag{2.136}$$

根据题设, 函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 因此当 $k\to\infty$ 时, 上式右端点集的测度趋于 0, 从而有

$$m(E(|f-g|>\varepsilon))=0 \tag{2.137}$$

由于 ε 的任意性, 可知 $f(x)=g(x)$, $a.e.[E]$. □

这个定理指出, 在函数几乎处处相等的意义下, 依测度收敛的极限是唯一的. 从测度收敛的定义可以看出, 其要点在于点集 $\{x \in E \mid E(|f_k(x) - f(x)| > \varepsilon)\}$ 的测度随着指标 k 趋于无穷而趋于零, 而且不论此点集的位置状态如何. 注意到几乎处处收敛则是函数列的逐点收敛 (尽管要去掉一个零测度集), 因此它们是很不相同的收敛概念. 下面来进一步探究这两个测度的关系.

Theorem 2.58. *设函数列 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数列且 $m(E) < \infty$. 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛, 则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 依测度收敛于同一极限函数.*

Proof. 在可测集 E 上,$\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛, 又 $m(E) < \infty$, 由叶戈罗夫定理可知,$\{f_k(x)\}$ 几乎一致收敛. 记极限函数为 $f(x)$. 下面证明几乎一致收敛必有依测度收敛.

对于任意的 $\delta > 0$, $\exists E_\delta \subset E$, $s.t.$ $m(E \backslash E_\delta) < \delta$, 且在 E_δ 上 $f_k \xrightarrow{u} f$. 因此在 E_δ 上, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$, $s.t.$ $k > K$ 时

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.138}$$

故有 $E(|f_k - f| \geq \varepsilon) \subset E \backslash E_\delta$, 且 $m\left(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\right) \leq m(E \backslash E_\delta) < \delta$. 由于 δ 与 k 无关, 且上述不等式对于所有的 $k \in \mathbb{N}$ 成立, 故数列 $\{m\left(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\right)\}$ 的上极限也有

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} m\left(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\right) \leq \delta \tag{2.139}$$

令 $\delta \to 0$ 有

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} m\left(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\right) \leq \overline{\lim_{k \to \infty}} m\left(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\right) = 0 \tag{2.140}$$

因此

$$\lim_{k \to \infty} m\left(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\right) = 0 \tag{2.141}$$

□

Remark 2.59. 其实在几乎一致收敛中的 $Z = E \backslash E_\delta$ 就是依测度收敛中的零测度集 $\{E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\}$, 且 $m\left(E(|f_k - f| \geq \varepsilon)\right) \xrightarrow{k \to \infty} 0$. 所以把这个零测度集 $Z = E \backslash E_\delta$ 排除之后就是几乎一致收敛, 而包含这个零测度集的收敛则被定义为依测度收敛.

Theorem 2.60 (**Riese 定理**)**.** *设 $f(x), \{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列. 若 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$, 使得*

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x), \quad a.e.[E] \tag{2.142}$$

Proof. 由题设 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛到 $f(x)$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \to \infty} m(E(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = 0 \tag{2.143}$$

则对任意 $k\in\mathbb{N}$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} m(E(|f_n-f|\geq\frac{1}{2^k})=0 \tag{2.144}$$

由极限的性质可知,$\exists n_k\in\mathbb{N},\ s.t.\ n\geq n_k$ 时有

$$m(E(|f_n-f|\geq\frac{1}{2^k}))<\frac{1}{2^k} \tag{2.145}$$

令 $E_k=E(|f_{n_k}-f|\geq\frac{1}{2^k})$, 故 $m(E_k)<\frac{1}{2^k}$. 再令

$$S=\varlimsup_{k\to\infty} E_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}E_j \tag{2.146}$$

则有

$$m(S)\leq m(\bigcup_{j=k}^{\infty}E_j)\leq\sum_{j=k}^{\infty}m(E_j)\leq\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}} \tag{2.147}$$

让 $k\to\infty$, 则有 $m(S)\to 0$. 现在只需要证明 $\forall x\in E\backslash S,\ f_n(x)\to f(x)$.

$$E\backslash S=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty}(E\backslash E_j) \tag{2.148}$$

由上式, 显然对于 $x\in E\backslash S$, 必 $\exists k_0\in\mathbb{N},\ s.t.$

$$x\in\bigcap_{j=k_0}^{\infty}(E\backslash E_j)=\bigcap_{j=k_0}^{\infty}E(|f_{n_j}-f|<\frac{1}{2^j}) \tag{2.149}$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $J>k_0,\ s.t.\ \frac{1}{2^J}<\varepsilon$. 当 $j>J$ 时

$$|f_{n_j}(x)-f(x)|<\frac{1}{2^j}<\frac{1}{2^J}<\varepsilon \tag{2.150}$$

即 $f_{n_j}(x)\to f(x)$. 因此 $f_{n_j}(x)$ 在集合 $E\backslash S$ 上点点收敛. $\square$

Remark 2.61. 注意, 处处有限并不一定有界, 比如 $E=\{x\in\mathbb{N}\},\ f:E\mapsto E,n\mapsto n$, 函数 f 处处有限, 但确是无界.

Theorem 2.62 (**依测度基本列**)**.** 设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列, 对任意给定的 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{k,j\to\infty} m(E(|f_k-f_j|>\varepsilon))=0 \tag{2.151}$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的依测度基本列.

Theorem 2.63. 设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列, 则 $\{f_k(x)\}$ 是依测度收敛的充分必要条件是, 它还是依测度基本列.

2.4.3 可测函数与连续函数

可测函数与连续函数有着密切的关系. 这种关系揭示了可测函数的构造, 成为研究可测函数的有效手段.

Theorem 2.64 (**鲁金定理 Rusin**). 设 $f(x)$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数, 则对任意给定的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 F, 满足 $m(E\backslash F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数.

Proof. 因为 $m(E(|f| = \infty)) = 0$, 故不妨假设 $f(x)$ 是处处有限的 (由题设可以把这一测度为 0 的集合挖掉). 首先考虑 f 是简单函数, 令

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i \chi_{E_i}(x), \quad \forall x \in E = \bigcup_{i=1}^{l} E_i \tag{2.152}$$

函数 f 再 E_i 连续, 则存在一个闭区间 F_i, 且满足 $F_i \subset E_i$, $s.t.\ m(E_i \backslash F_i) < \delta/l$. 这个结论在前面定理 (2.25) 已经证明过了. 不过我们在这里还是简要提一下.

由于 E_i 是可测集, 故 E_i^c 也是可测集, 因此根据外测度的定义, 一定存在一个开矩体列 U 覆盖 E_i^c, 且这个开矩体的外粗度和 E_i^c 非常接近, 即

$$U \supset E_i^c, \quad m(U \backslash E_i^c) < \delta/l \tag{2.153}$$

而又

$$U \backslash E_i^c = U \bigcap E_i = E_i \bigcap (U^c)^c = E_i \backslash U^c \tag{2.154}$$

故 $m(E_i \backslash U^c) < \delta/l$, 且 $U^c \subset E_i$, U^c 为闭集. 所以这里的 U^c 就是我们要的闭集 F_i.

又 $f(x)$ 在每个 F_i 上是常值函数, 故是 F_i 上的连续函数. 而 $F_1, \cdots, F_l$ 互不相交, 因此 $f(x)$ 在闭集 $F = \bigcup_{i=1}^{l} F_i$ 上是连续函数 (两个互不相交的闭集可以由两个不相交的开集分开), 且满足 $m(E \backslash F) = \sum_{i=1}^{l} m(E_i \backslash F_i) < \delta$.

其次考虑 $f(x)$ 为一般可测函数, 作如下变换

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} \tag{2.155}$$

不妨设 $f(x)$ 是有界可测函数, 则 $g(x)$ 也是有界可测函数, 那么 $g(x)$ 可以做如下分解 $g = g^+ - g^-$, 则 g^+ 与 g^- 都是非负可测函数, 于是存在简单函数升列 $\varphi_k^+(x)$ 和 $\varphi_k^-(x)$, 使得

$$0 \le \varphi_1^+(x) \le \varphi_2^+(x) \le \cdots \le \varphi_k^+(x) \le \varphi_{k+1}^+(x) \le \cdots \le g^+(x) \tag{2.156}$$

$$0 \le \varphi_1^-(x) \le \varphi_2^-(x) \le \cdots \le \varphi_k^-(x) \le \varphi_{k+1}^-(x) \le \cdots \le g^-(x) \tag{2.157}$$

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k^{\pm}(x) = g^{\pm}(x) \tag{2.158}$$

由于 $g^{\pm}(x)$ 可测且有界, 故简单函数列 $\varphi_k^{\pm}(x)$ 一致收敛到 $g^{\pm}(x)$, 即

$$\varphi_k^+(x) = \sum_{j=1}^{k \cdot 2^k - 1} \frac{j}{2^k} E(\frac{j}{2^k} \le g^+ \le \frac{j+1}{2^k}) \tag{2.159}$$

对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $K \in \mathbb{N}$, $s.t.\ \frac{1}{2^K} < \varepsilon$, 则对 $\forall x \in E_{kj}$ 有 $|g^+(x) - \varphi_K^+(x)| < \frac{1}{2^K} < \varepsilon$(一致收敛).

对 $\varphi_k^+(x)$, 一定存在闭集 $F_k^+ \subset E$, 满足 $m(E\backslash F_k^+) < \varepsilon/2^{k+1}$, 且 $\varphi_k^+(x)$ 在 $F_k^+ \subset E$ 上连续. 令 $F^+ = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^+$, 则 F^+ 为闭集, 且

$$m(E\backslash F^+) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E\backslash F_k^+) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{k+1}} = \frac{\delta}{2} \tag{2.160}$$

对 $\forall k$, $\varphi_k^+(x)$ 在 F_k^+ 上连续, 故 $g^+(x)$ 在 F^+ 上连续. 同理, 存在一个闭集 $F^- \subset E$, $s.t.\ m(E\backslash F^-) \leq \frac{\delta}{2}$, 且 $g^-(x)$ 在 F^- 上连续. 令 $F = F^+ \bigcap F^-$, 则

$$m(E\backslash F) = m(E\backslash(F^+ \bigcap F^-)) = m((E\backslash F^+)\bigcup(E\backslash F^-)) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \tag{2.161}$$

故在闭集 F 上的连续函数列 $\varphi_k(x)$ 一致收敛到 $g(x)$, 从而 $g(x)$ 在 F 上连续, 而又

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|} \tag{2.162}$$

从而 $f(x)$ 在 F 上连续. $\square$

Theorem 2.65 (**Tietze 扩张定理**). 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空闭集, 函数 $f(x)$ 是 F 上的连续函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$, 使得 $g|_F = f$, 且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)| = \sup_{x\in F} |f(x)| \tag{2.163}$$

Corollary 2.66. 设 $f(x)$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 $f(x)$.

Proof. 根据 Rusin 定理, 对于 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在一个闭集 F_k, 满足 $m(E\backslash F_k) < 1/2^k$, 且 f 在 F_k 上连续. 由 Tietze 扩张定理, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f_k, 满足 $f_k|_{F_k} = f$. 下面证明 $f_k \xrightarrow{a.e.} f$.

因为 $E(f_k \neq f) \subset E\backslash F_k$, 记 $E_k = E(f_k \neq f)$, 且令

$$S = \varlimsup_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j \tag{2.164}$$

则有

$$0 \leq m(S) \leq m(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} m(E_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{2.165}$$

故 $m(S) = 0$. 而

$$E\backslash S = E\backslash \left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} (E\backslash E_j) = \varliminf_{k\to\infty} E(f = f_k) \tag{2.166}$$

故存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, $s.t.\ x \in \bigcap_{j=k_0}^{\infty}(E\backslash E_j)$, 即对 $\forall j \geq k_0$ 有 $x \in E\backslash E_j$, 也即对 $\forall j \geq k_0$ 有 $f_j(x) = f(x)$. 故 $f_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} f(x)$. $\square$

Corollary 2.67. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数. 则 $f(x)$ 可测的充分必要条件是, 存在 E 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得 $\{g_k\}$ 几乎处处收敛到 f.

Proof. 必要性性由上述推论直接得出, 下面证明充分性. 假设 f_k 在 E 上连续, 则有 $f_k \in \mathfrak{M}(E)$, 而又 $f_k \xrightarrow{a.e.} f$, 故有 $f \in \mathfrak{M}(E)$(可测集上几乎处处收敛的函数列的极限函数可测). □

Theorem 2.68 (Littlewood). 实变函数三条重要原理

(1) 任一可测集差不多就是开集 *(*至多可数个开区间的并*)*

(2) 任一可测函数差不多就是连续函数

(3) 任一逐点收敛的可测函数差不多就是一致收敛

Chapter 3

Lebesgue 积分

3.1 Lebesgue 可测函数的积分

这里简要介绍三种定义 Lebesgue 积分的三种方式, 其一是对值域划分求极限, 其二是对定义域划分求极限, 其三是利用简单函数求和取极限.

Definition 3.1 (**Lebesgue 积分定义一**). 对可测集 E 上的有界可测函数 $f(x), -M < f(x) < M$, 找出一串数列 $\{l_i\}_{i=0}^n$, 使 $i_0 = -M, l_i < l_{i+1}, l_n = M$, 任取 $\xi \in [l_i, l_{i+1}]$, 讨论和式

$$\sum_i \xi_i m\left(E(l_i < f(x) < l_{i+1})\right) \tag{3.1}$$

当

$$\delta = \max_{0 \le i \le n-1} (l_{i+1} - l_i) \to 0 \tag{3.2}$$

时极限是否存在

Definition 3.2 (**Lebesgue 积分定义二**). 对可测集 E 作任意划分:

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} E_j, \quad E_i \bigcap E_j = \emptyset \quad (i \neq j) \tag{3.3}$$

记

$$b_j = \inf_{x \in E_j} f(x), \quad B_j = \sup_{x \in E_j} f(x) \tag{3.4}$$

然后像黎曼积分理论那样, 作对应于该划分的小和数 $\sum_{j=1}^m b_j m(E_j)$ 和大和数 $\sum_{j=1}^m B_j m(E_j)$, 讨论其大和数的下确界和小和数的上确界是否相等.

Definition 3.3 (**Lebesgue 积分定义三**). 对于可测集 E 上的非负可测函数 $f(x)$, 存在一列单调递增简单可测函数列

$$\left\{\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{N^n} \alpha_i^{(n)} \chi_{E_i^{(n)}}\right\} \tag{3.5}$$

其中 $E_i^{(n)} \bigcap E_j^{(n)} = \emptyset$, for $i \neq j$, 使得 $\varphi_n \to f$. 而对每个简单函数 $\varphi_n(x)$, 可自然定义它的积分为:

$$\sum_{i=1}^{N^n} \alpha_i^{(n)} m\left(E_i^{(n)}\right) \tag{3.6}$$

若当 $n \to \infty$ 时, 此和式的极限存在, 则可定义该极限为非负可测函数 $f(x)$ 的积分, 最后再过渡到一般可测函数.

3.1.1 非负简单函数的积分

Definition 3.4 (**非负简单函数积分**)**.** 设 $h(x)$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负简单函数

$$h(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad \forall x \in E \tag{3.7}$$

定义函数 $h(x)$ 在可测集 E 上的积分为

$$\int_E h(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j m(E_j) \tag{3.8}$$

Proposition 3.5 (**非负简单函数的积分具有线性型**)**.** 设 E 是可测集.$g(x), h(x)$ 为非负简单函数, $a, b \geq 0$ 则

$$\int_E (a \cdot g(x) + b \cdot h(x))\, dx = a \int_E g(x)dx + b \int_E h(x)dx \tag{3.9}$$

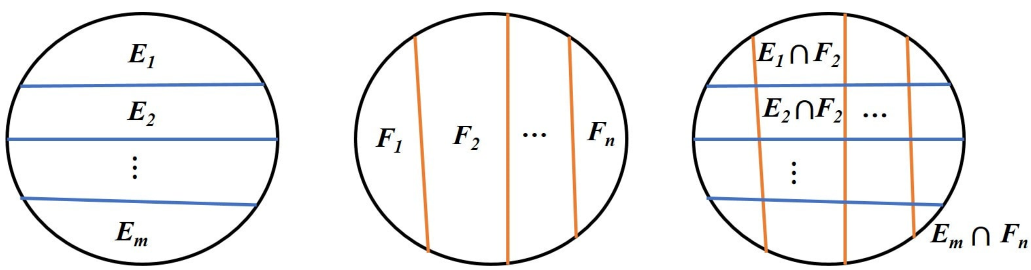

Figure 3.1: 简单函数定义域的分割

Proof. 令

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}(x) \quad h(x) = \sum_{j=1}^{n} a_i \chi_{F_j}(x) \tag{3.10}$$

由于 $\bigcup_{i=1}^m E_i = E$, $\bigcup_{j=1}^n F_j = E$, 因此有

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{n} \left(E_i \bigcap F_j\right), \quad F_j = \bigcup_{i=1}^{m} \left(F_j \bigcap E_i\right) \tag{3.11}$$

由于 E_i, F_j 都是 E 的不相交的分割, 因此有

$$\chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_i \bigcap F_j}, \quad \chi_{F_j} = \sum_{i=1}^{m} \chi_{F_j \bigcap E_i} \tag{3.12}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_i \bigcap F_j}(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \chi_{E_i \bigcap F_j}(x) \tag{3.13}$$

$$h(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{F_j}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} \chi_{F_j \bigcap E_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_j \chi_{F_j \bigcap E_i}(x) \tag{3.14}$$

显然

$$a \cdot g(x) + b \cdot h(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a \cdot a_i + b \cdot b_j) \chi_{E_i \bigcap F_j}(x) \tag{3.15}$$

从而有

$$\begin{aligned}
\int_E (a \cdot g + b \cdot h)\, dx &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a \cdot a_i + b \cdot b_j) m(E_i \bigcap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a \cdot a_i \cdot m(E_i \bigcap F_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b \cdot b_j \cdot m(E_i \bigcap F_j) \\
&= a \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} m(E_i \bigcap F_j) + b \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} m(E_i \bigcap F_j) \\
&= a \sum_{i=1}^{m} a_i m \left(\bigcup_{j=1}^{n} \left(E_i \bigcap F_j \right) \right) + b \sum_{j=1}^{n} b_j m \left(\bigcup_{i=1}^{m} \left(F_j \bigcap E_i \right) \right) \\
&= a \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot m(E_i) + b \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot m(F_j) \\
&= a \int_E g(x) dx + b \int_E h(x) dx
\end{aligned} \tag{3.16}$$

□

Theorem 3.6. *E 是可测集,$E_i \subset E$ 是递增可测集列, 且有 $\lim_{i\to\infty} E_i = E$, $h(x)$ 是 E 上的非负可测简单函数, 则*

$$\lim_{i\to\infty} \int_{E_i} h(x) dx = \int_E h(x) dx \tag{3.17}$$

Proof. 根据题设 $h(x)$ 可以表示为

$$h(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{F_j}(x), \quad x \in E \tag{3.18}$$

则

$$h(x)|_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{F_j \bigcap E_i}(x) \tag{3.19}$$

$$\int_{E_i} h(x)dx = \sum_{j=1}^{m} a_j m\left(F_j \bigcap E_i\right) \tag{3.20}$$

$$\lim_{i\to\infty} \int_{E_i} h(x)dx = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j m\left(F_j \bigcap E_i\right) \tag{3.21}$$

由于 $E_i \bigcap F_j \subset E_{i+1} \bigcap F_j$, 且

$$\lim_{i\to\infty} \left(F_j \bigcap E_i\right) = E \bigcap F_j = F_j \tag{3.22}$$

根据定理 (2.22) 单调递增可测集合测度和极限可以交换顺序, 故

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j m\left(F_j \bigcap E_i\right) &= \sum_{j=1}^{m} a_j \lim_{i\to\infty} m\left(F_j \bigcap E_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot m\left(\lim_{i\to\infty} (F_j \bigcap E_i)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot m(F_j) = \int_E h(x)dx
\end{aligned} \tag{3.23}$$

证毕. □

3.1.2 非负可测函数的积分及其性质

Definition 3.7 (**非负可测函数 L-积分**)**.** 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数, 定义 $f(x)$ 在 E 上的积分

$$\int_E f(x)dx = \sup\left\{ \int_E h(x)dx \;\middle|\; h(x)\text{是}E\text{上非负可测函数, 且}h(x) \le f(x) \right\} \tag{3.24}$$

这里的积分可以是 $+\infty$, 但是若 $\int_E f(x)dx < \infty$, 则称 $f(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可积, 或者说 $f(x)$ 是 E 上的可积函数.

Proposition 3.8 (**零测度集上可测函数积分为零**)**.** *若 $m(E) = 0$, 则 E 上的非负可测函数 $f(x)$ 均可积, 并且有*

$$\int_E f(x)dx = 0 \tag{3.25}$$

Proof. 对于 E 上任意的非负简单函数 $h(x)$ 且满足 $h(x) \le f(x)$, 令

$$h(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x), \quad E_j \subset E \tag{3.26}$$

则有

$$\int_E h(x)dx = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot m(E_j) \le \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot m(E) = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot 0 = 0 \tag{3.27}$$

故 $f(x)$ 在 E 上积分也为 0. □

Proposition 3.9 (**非负可测函数在可测集子集上的积分表达**). *设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数,A 是 E 中的可测子集, 则*

$$\int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A(x)dx \tag{3.28}$$

Proof. 对于任意 A 上非负简单可测函数, 只要补充定义 $h(x) = 0, \forall x \in E\backslash A$, 它就是 E 上的非负简单函数, 于是

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)dx &= \sup\left\{ \int_A h(x)dx \;\middle|\; h(x)\text{是}A\text{上非负可测函数, 且}h(x) \le f(x) \right\} \\
&= \sup\left\{ \int_A h(x)dx \;\middle|\; h(x)\text{是}E\text{上非负可测函数, 且}h(x) \le f(x)\chi_A(x) \right\} \\
&= \sup\left\{ \int_E h(x)dx \;\middle|\; h(x)\text{是}E\text{上非负可测函数, 且}h(x) \le f(x)\chi_A(x) \right\} \\
&= \int_E f(x)\chi_A(x)dx.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

证毕. □

Proposition 3.10 (**非负可测函数积分单调性**). *设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数. 若 $f(x) \ge g(x),\ x \in E$, 则*

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx \tag{3.30}$$

Proof. 令

$$A = \left\{ h(x) \mid h(x)\text{是}E\text{上非负可测简单函数, 且}0 \le h(x) \le f(x) \right\} \tag{3.31}$$

$$B = \left\{ h(x) \mid h(x)\text{是}E\text{上非负可测简单函数, 且}0 \le h(x) \le g(x) \right\} \tag{3.32}$$

由 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 且 $f(x) \ge g(x),\ x \in E$, 易得 $A \subset B$, 因此

$$\int_E f(x)dx = \sup_{h(x)\in A}\left\{ \int_E h(x)dx \right\} \le \sup_{h(x)\in B}\left\{ \int_E h(x)dx \right\} = \int_E g(x)dx \tag{3.33}$$

证毕. □

Proposition 3.11 (**有界非负可测函数在有限测度集上可积**). *若 $m(E) < \infty$, 而 $f(x)$ 是 E 上有界非负可测函数, 则 $f(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可积.*

Proof. 由 f 非负有界, 不妨设 $0 \le f(x) \le M$, 对任意满足 $h(x) \le f(x)$ 的 E 上非负简单函数 $h(x)$, 令

$$h(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x) \tag{3.34}$$

则有 $\forall j \le m,\ 0 \le a_j \le M$, 故

$$\int_E f(x)dx = \sum_{j=1}^{m} a_j m(E_j) \le M \sum_{j=1}^{m} m(E_j) = M \cdot m\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j \right) = M \cdot m(E) < \infty \tag{3.35}$$

因此 f 在 E 上 Lebesgue 可积. □

Theorem 3.12 (**Levi 定理**). 设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数, 满足

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_k(x) \le \cdots \tag{3.36}$$

且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in E \tag{3.37}$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int_E f(x)dx \tag{3.38}$$

Proof. 因为函数列 $f_k(x)$ 在 E 上非负可测且单调递增, 则有

$$\int_E f_k(x)dx \le \int_E f_{k+1}(x)dx \le \int_E f(x)dx \tag{3.39}$$

故有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \le \int_E f(x)dx \tag{3.40}$$

兹证明反向不等式:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \ge \int_E f(x)dx \tag{3.41}$$

现取 α, 满足 $0 \le \alpha \le 1$, 设 $h(x)$ 是 E 上非负简单可测函数, 且 $h(x) \le f(x)$, $x \in E$. 记 $E_k = E(f_k \ge \alpha h)$, $k = 1, 2, \cdots$, 则 $\{E_k\}$ 是递增集合列 (由于 f_k 递增,$x \in E_k \Rightarrow x \in E_{k+1}$), 且 $\lim_{k\to\infty} E_k = E$. 根据定理 (3.6) 有

$$\lim_{k\to\infty} \alpha \int_{E_k} h(x)dx = \alpha \int_E h(x)dx \tag{3.42}$$

于是有不等式

$$\int_E f_k(x)dx \ge \int_{E_k} f_k(x)dx \ge \int_{E_k} \alpha h(x)dx \ge \alpha \int_{E_k} h(x)dx \tag{3.43}$$

令 $k \to \infty$, 得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \ge \alpha \int_E h(x)dx \tag{3.44}$$

再令 $\alpha \to 1$, 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \ge \int_E h(x)dx \tag{3.45}$$

根据 $f(x)$ 积分的定义显然有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \ge \int_E f(x)dx \tag{3.46}$$

证毕. □

Levi 定理不等式本质上还是单调递增可测集列测度和极限操作可交换顺序.Levi 定理的重要性在于对于非负可测上升可测函数列, 其极限运算与积分运算的次序可以交换. 而任何非负可测函数可以由上升的非负简单函数列来逼近, 因此非负可测函数的性质可以通过逼近方式从简单函数的积分性质来获得.

Corollary 3.13 (**递减非负可测函数列积分与极限交换**). 设定义在可测集 E 上的非负可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots \tag{3.47}$$

且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E \tag{3.48}$$

如果存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, *s.t.* $f_{n_0}(x)$ 可积, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx \tag{3.49}$$

Proof. 记 $g_k(x) = f_{n_0}(x) - f_k(x)$, $k \geq n_0$, 则 $\{g_k(x)\}$ 为递增非负可测函数列, 根据 Levi 定理有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)dx \tag{3.50}$$

替换掉 $g_k(x)$

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \left(f_{n_0}(x) - f_k(x)\right) dx = \int_E \lim_{k\to\infty} \left(f_{n_0}(x) - f_k(x)\right) dx \tag{3.51}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_E f_{n_0}(x) - \int_E f_k(x)\right) dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_{n_0}(x)dx - \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx \tag{3.52}$$

由 $f_{n_0}(x)$ 可积, 有 $\int_E f_{n_0}(x)dx < \infty$, 故上述等式可以化简为

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx \tag{3.53}$$

证毕. □

Theorem 3.14 (**非负可测函数积分线性性质**). 设 $f(x), g(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数, 对于任给的非负常数 a, b 有

$$\int_E \left(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\right) dx = a \int_E f(x)dx + b \int_E g(x)dx \tag{3.54}$$

Proof. 设 $\{\varphi_k(x)\}, \{\psi_k(x)\}$ 是非负上升可测简单函数列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = g(x), \quad \forall x \in E \tag{3.55}$$

则 $\{\varphi_k(x) + \psi_k(x)\}$ 还是非负上升可测简单函数列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \left(a \cdot \varphi_k(x) + b \cdot \psi_k(x)\right) = a \cdot f(x) + b \cdot g(x), \quad \forall x \in E \tag{3.56}$$

非负简单函数积分满足线性性质

$$\int_E \left(a \cdot \varphi_k(x) + b \cdot \psi_k(x)\right) dx = a \int_E \varphi_k(x)dx + b \int_E \psi_k(x)dx \tag{3.57}$$

令 $k\to\infty$, 且由非负简单函数列积分和极限可交换顺序的性质可得

$$\begin{aligned}\int_E (a\cdot f(x)+b\cdot g(x))\,dx &= \int_E \lim_{k\to\infty}(a\cdot\varphi_k(x)+b\cdot\psi_k(x))\,dx\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_E (a\cdot\varphi_k(x)+b\cdot\psi_k(x))\,dx\\ &= a\lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k(x)dx+b\lim_{k\to\infty}\int_E\psi_k(x)dx\\ &= a\int_E\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)dx+b\int_E\lim_{k\to\infty}\psi_k(x)dx\\ &= a\int_E f(x)dx+b\int_E g(x)dx\end{aligned}\tag{3.58}$$

得证. □

Corollary 3.15 (**几乎处处相等非负可测函数积分相等**)**.** 设 $f(x),g(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数, 若 $f(x)=g(x),a.e.[E]$ 则

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx\tag{3.59}$$

Proof. 记 $E_1=E(f\neq g)$, $E_2=E\backslash E_1$, 则 $m(E_1)=0$, 因而有

$$\begin{aligned}\int_E f(x)dx &= \int_E f(x)\left(\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)\right)dx\\ &= \int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx\\ &= \int_{E_1} g(x)dx+\int_{E_2} g(x)dx=\int_E g(x)dx\end{aligned}\tag{3.60}$$

证毕. □

Corollary 3.16 (**非负可积函数在可测集上几乎处处有限**)**.** 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数, 若 $\int_E f(x)<\infty$, 则 $f(x)<\infty,a.e.[E]$.

Proof. 令 $E_k=E(f>k)$, 则

$$E_\infty=E(f=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\tag{3.61}$$

对于每个 k 有

$$k\cdot m(E_k)\le\int_{E_k} f(x)dx\le\int_E f(x)dx\tag{3.62}$$

故当 $k\to\infty$, $m(E_k)\to 0$, 因此 $m(E_\infty)=0$. □

Theorem 3.17. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数. 若 $\int_E f(x)dx=0$, 则则 $f(x)=0,a.e.[E]$.

Proof. $\forall k \in \mathbb{N}$, 记 $E_k = E(f \geq 1/k)$, 则有

$$0 = \int_E f(x)dx \geq \int_{E_k} f(x)dx \geq \int_{E_k} \frac{1}{k}dx = \frac{1}{k}m(E_k) \geq 0 \tag{3.63}$$

故 $m(E_k) = 0$, 即 $m(E(f \geq 1/k)) = 0$, 进而有

$$m(E(f \neq 0)) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(f \geq 1/k)\right) = 0 \tag{3.64}$$

证毕. □

3.1.3 一般可测函数的积分及其性质

Definition 3.18 (一般可测函数 L-可积定义). 设 $E \in \mathfrak{M}$, $f(x) \in \mathfrak{M}(E)$. 若 $f^+(x), f^-(x)$ 中至少有一个是可积的, 则称

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx \tag{3.65}$$

为 $f(x)$ 在 E 上的积分. 当上式右端两个积分皆为有限值时 (可积), 称 $f(x)$ 在 E 上是 Lebesgue 可积的 (简称可积). 在 E 上可积函数的全体记为 $L(E)$.

Corollary 3.19. *设 $E \in \mathfrak{M}$, $f(x) \in \mathfrak{M}(E)$, 若 $f(x)$ 在 E 上可积, 则由*

$$\int_E |f(x)|dx = \int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx \tag{3.66}$$

$|f(x)|$ 在 E 上也是可积的.

Theorem 3.20 (一般可测函数可积等价条件及积分缩放). *设 $E \in \mathfrak{M}$, $f(x) \in \mathfrak{M}(E)$. 则 $f \in L(E)$ 的充分必要条件是 $|f| \in L(E)$, 且有下列不等式*

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|dx \tag{3.67}$$

Proof. 必要性是显然的, 现在证明充分性. 若 $|f| \in L(E)$, 则 $\int_E |f(x)|dx < \infty$, 故有

$$\int_E f^+(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx < \infty, \quad \int_E f^-(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx < \infty \tag{3.68}$$

根据 f 可积定义得证. 缩放不等式可以通过把积分拆成正部和负部来证明. □

Proposition 3.21 (一般可测函数可积的性质). *这些性质对于非负可测函数已经证明过了, 对于一般可测函数, 可以看成是正部和负部之差, 则也很容易证明这些性质.*

(1) 若 $f \in L(E)$, 则 $|f(x)| < \infty, a.e.[E]$.

(2) 若 $f = g$, $a.e.[E]$, $f \in L(E)$, 则 $g \in L(E)$, 且 $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$.

(3) 若 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数, $g \in L(E)$, 且 $|f(x)| < g(x)$, 则 $f \in L(E)$, 此外还有 $|\int_E f(x)dx| \le \int_E g(x)dx$.

(4) 若 $f, g \in L(E)$, $f(x) \le g(x)$, 则 $\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$.

(5) 若 $m(E) < \infty$, 则 E 上任意有界可测函数都是可积的.

Theorem 3.22 (**积分线性性质**)**.** 设 $f, g \in L(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f \in L(E)$, $f + g \in L(E)$, 且

$$\int_E \alpha f(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx \tag{3.69}$$

$$\int_E (f(x) + g(x))\, dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx \tag{3.70}$$

Theorem 3.23 (**有界可测函数可积等价判定**)**.** 设 $f(x)$ 是 E 上有界可测函数 $|f(x)| < M$, $m(E) < \infty$. 作 $[-M, M]$ 的划分:

$$-M = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = M, \quad \delta = \max_{1 \le j \le k}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \tag{3.71}$$

记 $E_j = E(\alpha_{j-1} < f < \alpha_j)$, $j = 1, 2, \cdots, k$. 则对任意的 $\xi_j \in [\alpha_{j-1},\ \alpha_j], j = 1, 2, \cdots, k$, 极限

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{k} \xi_j m(E_j) \tag{3.72}$$

存在. 此时

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{k} \xi_j m(E_j) = \int_E f(x)dx \tag{3.73}$$

Proof. 利用关键的缩放不等式 $\forall x \in E_j, \alpha_{j-1} < f(x) < \alpha_{j-1} + \delta$. □

Theorem 3.24 (**积分的绝对连续性!**)**.** 设 $f(x) \in L(E)$, 则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 E 中子集 A, 只要 $m(A) < \delta$ 时, 就有

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \le \int_E |f(x)|dx < \varepsilon \tag{3.74}$$

Proof. 因为 $f(x) \in L(E)$, 故 $|f(x)| \in L(E)$. 对于任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在简单函数 $\varphi(x)$, 满足 $\forall x \in E$, 有

$$0 \le \varphi(x) \le |f(x)| \tag{3.75}$$

使得

$$\int_E (|f(x)| - \varphi(x))dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.76}$$

对于一个给定的简单函数, 根据其定义必有界, 不妨设 $0 \le \varphi(x) \le M$, 取 $\delta = \varepsilon/2M$, 则当 $A \subset E$, $m(A) < \delta$ 时, 就有

$$
\begin{aligned}
\int_A |f(x)|dx &= \int_A (|f(x)| - \varphi(x))dx + \int_A \varphi(x)dx \\
&\le \int_E (|f(x)| - \varphi(x))dx + \int_A \varphi(x)dx \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot m(A) \le \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

本质上利用了非负可积函数积分可以用简单函数列积分无限逼近, 而有界简单函数在任意小的区间内积分随着区间的无限减小而趋近于零. □

Theorem 3.25 (**积分平移不变性**). 设 $f(x) \in L(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x+y) \in \mathbb{R}^n$, 而且

$$
\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \tag{3.78}
$$

Theorem 3.26 (**可积函数与连续函数的关系**). 假设 $f \in L(E)$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $\varphi(x)$ 使得

$$
\int_E |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon \tag{3.79}
$$

Proof. 如下图 □

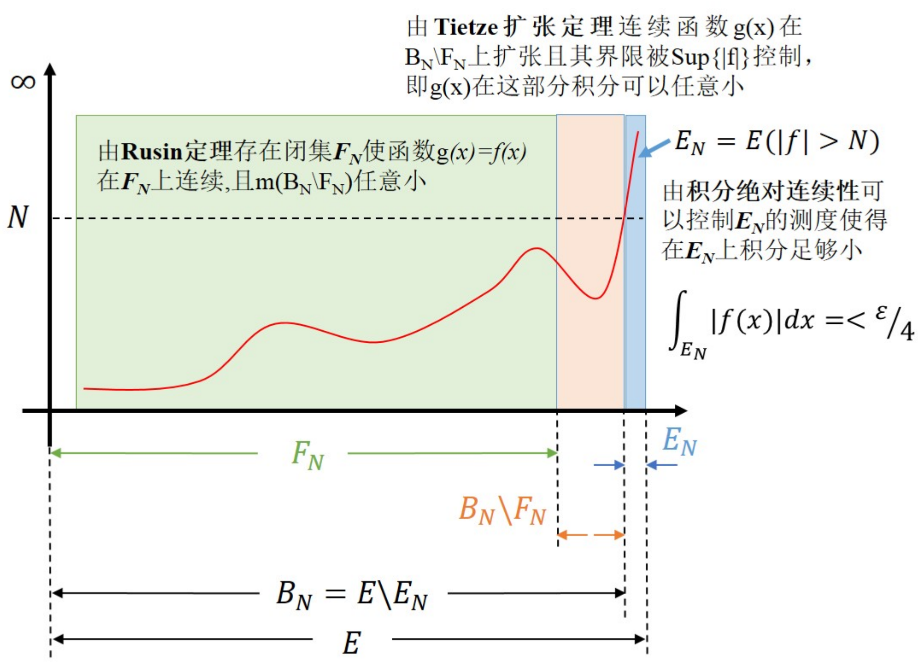

Figure 3.2: 可积函数与连续函数的关系

上述定理结论表明, 若 $f \in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 f 的分解:

$$f(x) = g(x) + [f(x) - g(x)] = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in E \tag{3.80}$$

其中 $f_1(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数,$|f_2(x)|$ 在 E 上的积分小于 ε.

Corollary 3.27. 设 $f \in L(E)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f(x) - g_k(x)|\, dx = 0 \tag{3.81}$$

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x), \quad a.e.[E] \tag{3.82}$$

3.1.4 黎曼积分和 Lebesgue 积分的关系

3.2 Lebesgue 积分的极限定理

3.2.1 Lebesgue 积分与极限的交换定理

Theorem 3.28 (**Lebesgue 基本定理**)**.** 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列, 且 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 则

$$\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)dx \tag{3.83}$$

Proof. 构造函数列 $S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$, 则 $\{S_k(x)\}$ 是非负可测递增函数列, 即

$$S_k(x) \le S_{k+1}(x), \quad \lim_{k\to\infty} S_k(x) = f(x) \tag{3.84}$$

故由 Levi 定理

$$\begin{aligned} \int_E f(x)dx &= \int_E \lim_{k\to\infty} S_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_E S_k(x)dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{k} f_n(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_E f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)dx \end{aligned} \tag{3.85}$$

证毕. □

Corollary 3.29. 若 $\{E_n\}$ 是可测集 E 的互不相交的可测子集,$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 当函数 $f(x)$ 在 E 上有积分时,$f(x)$ 在每一个子集 E_n 上都是有积分的. 特别地, 当 $f \in L(E)$ 时,$f \in L(E)$, 且

$$\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)dx \tag{3.86}$$

Proof. 关键一步在于把积分定义域等价映射为特征函数. 记函数 $\chi_{E_n}(x)$ 为 E_n 的特征函数, 则

$$\int_{E_n} f^+(x)dx = \int_E f^+(x)\chi_{E_n}(x)dx \tag{3.87}$$

因为

$$f^+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f^+(x)\chi_{E_n}(x) \tag{3.88}$$

有 Lebesgue 基本定理有

$$\int_E f^+(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f^+(x)\chi_{E_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^+(x)dx \tag{3.89}$$

对于 $f^-(x)$ 有类似结论. 余下细节省略. □

Theorem 3.30 (**Fatou 定理**). 若 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx \tag{3.90}$$

Proof. 定理证明的关键在于对函数列下极限定义的理解. 考虑非负函数

$$g_n(x) = \inf_{j\ge n} f_j(x),\ n = 1, 2, \cdots \tag{3.91}$$

显然有

$$g_n(x) \le g_{n+1}(x),\ n = 1, 2, \cdots \tag{3.92}$$

而且还有

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{j\ge n} f_j(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E \tag{3.93}$$

由 Levi 定理得

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)dx \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx \tag{3.94}$$

最后的不等关系利用到了如下事实

$$g_n(x) = \inf_{j\ge n} f_j(x) \le f_n(x) \tag{3.95}$$

证毕. □

Fatou 定理本质上就是关系式 (3.95). 并且由此可以看出如果 $f_n(x)$ 是非负递增的函数列, 那么等号是可以取的, 这时候上极限和下极限相等, 那就又回到了 Levi 定理. 现在来举一反三, 根据如下不等式

$$g_n(x) = \sup_{j\ge n} f_j(x) \ge f_n(x) \tag{3.96}$$

那么我们可以得出上极限函数列积分有相反的不等式, 如果函数列单调递减且某一项有限, 则等号可取.

Theorem 3.31 (**控制收敛定理**)**.** 给定可测集 E. 设 $\{f_n(x)\} \subset \mathfrak{M}(E)$ 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad a.e.[E] \tag{3.97}$$

若存在函数 $F(x) \in L(E)$ 使得对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$|f_n(x)| \le F(x), \quad a.e.[E] \tag{3.98}$$

则 $f_n(x) \in L(E),\ n = 1, 2, \cdots, f(x) \in L(E)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx \tag{3.99}$$

函数 $F(x)$ 称为 $\{f_n(x)\}$ 的控制函数

Proof. 可测函数的极限还是可测函数, 且任何函数在零测度集上仍是可测函数, 由此可知,$f(x)$ 是 E 上的可测函数. 考虑

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|,\ a.e.[E], \quad n = 1, 2, \cdots \tag{3.100}$$

根据题设显然有 $g_n(x) \le 2F(x),\ a.e.[E]$. 由于数列极限存在则极限值必与下极限相等, 且根据 Fatou 定理有

$$\begin{aligned}\int_E \lim_{n\to\infty} (2F(x) - g_n(x))\, dx &= \int_E \varliminf_{n\to\infty} (2F(x) - g_n(x))\, dx \\ &\le \varliminf_{n\to\infty} \int_E (2F(x) - g_n(x))\, dx\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$\int_E 2F(x)dx - \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx \le \int_E 2F(x)dx - \int_E \varlimsup_{n\to\infty} g_n(x)dx \tag{3.102}$$

$F(x) \in L(E)$, 则 $\int_E F(x)dx < \infty$, 故上式可以简化为

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E g_n(x)dx \le \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = 0 \tag{3.103}$$

因此有

$$0 \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E g_n(x)dx \le \varlimsup_{n\to\infty} \int_E g_n(x)dx \le 0 \tag{3.104}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)dx = 0 \tag{3.105}$$

根据积分绝对连续性有

$$\left|\int_E g_n(x)dx\right| = \left|\int_E f(x)dx - \int_E f_n(x)dx\right| \le \int_E |g_n(x)|dx = \int_E g_n(x)dx \tag{3.106}$$

故有

$$\int_E f(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx \tag{3.107}$$

证毕. □

Remark 3.32. 上述定理证明过程中涉及到上极限和下极限变换关系. 事实上

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}(-g_n) &= \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}(-g_k)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(-\sup_{k\geq n}g_k\right) = -\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}g_k\right) = -\varlimsup_{n\to\infty}(g_n)\end{aligned} \tag{3.108}$$

负号从 inf, sup 运算符跳出时,inf 变换成 sup, sup 变换成 inf, 即

$$\inf(-g_n) = -\sup(g_n), \quad \sup(-g_n) = -\inf(g_n) \tag{3.109}$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(-g_n) = -\varlimsup_{n\to\infty}(g_n), \quad \varlimsup_{n\to\infty}(-g_n) = -\varliminf_{n\to\infty}(g_n) \tag{3.110}$$

Corollary 3.33 (**控制收敛定理推论**). $E\in\mathfrak{M}$, $\{f_m(x)\}\in\mathfrak{M}(E)$, $f_m \xrightarrow{m} f$. 如果存在 $F(x)\in L(E)$, *s.t.*

$$|f_m(x)| \leq F(x),\ a.e.[E], \quad m=1,2,\cdots \tag{3.111}$$

则 f_m, $f\in L(E)$, 且

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx = \int_E f(x)dx \tag{3.112}$$

Proof. 由 $f_m \xrightarrow{m} f$, 根据 Riesz 定理, 存在子列 $f_{m_k}\to f$, $a.e.[E]$, 故 $f(x)\in L(E)$.

记 $g_m(x) = |f_m)(x) - f(x)|$, 如上述定理证明一样, 只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx = 0 \tag{3.113}$$

反证法, 若不然, 存在子列 $0<m_1<m_2<\cdots<m_k$ 和 $\varepsilon>0$, 使得

$$\int_E g_{m_k}(x)dx \geq \varepsilon, \quad k=1,2,\cdots \tag{3.114}$$

由 Riesz 定理, 依测度收敛函数列 $\{f_{m_k}\}$ 都存在子列 $\{f_{m_{k_j}}\}$ 处处收敛到 $f(x)$, 依照控制收敛定理必有

$$\lim_{j\to\infty}\int_E g_{m_{k_j}}(x)dx = 0 \tag{3.115}$$

这与上述假设矛盾. □

Corollary 3.34 (**有界收敛定理**). $m(E)<\infty$. 设 $\{f_m(x)\}\subset\mathfrak{M}(E)$ 且一致有界, 即存在常数 $M>0$, 使得

$$|f_m(x)| \leq M, \quad m=1,2,\cdots, \quad \forall x\in E \tag{3.116}$$

则当 $f_m(x) \xrightarrow{a.e} f$ 或者 $f_m(x) \xrightarrow{m} f$ 时, 均有

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx = \int_E f(x)dx \tag{3.117}$$

Proof. 注: 此时控制函数就是常函数 M. □

Fatou 引理常用于判断非负极限函数的可积性, 而 Lebesgue 控制收敛定理则给出积分与极限可交换次序的充分条件. 前面讲述了对于非负可积函数列可以逐项积分, 下面给出一般可积函数逐项积分的条件.

Theorem 3.35 (**级数和的积分与积分的和**). 设 E 是可测集,$f_n(x) \in L(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n(x)| dx < \infty \tag{3.118}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛, 记其和函数为 $f(x)$, 则 $f(x) \in L(E)$, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx \tag{3.119}$$

Theorem 3.36 (**含参变量积分性质一**). 对于含参变量积分 $\varphi(y) = \int_E f(x,y)dx$, 若存在 $F(x) \in L(E)$, 使得 $|f(x,y)| \leq F(x)$, $\forall x \in E$, $y \in [a,b]$, 则若

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y), \quad 在E上a.e.存在 \tag{3.120}$$

就有

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \int_E f(x,y) dx = \int_E \lim_{y \to y_0} f(x,y) dx \tag{3.121}$$

Proof. 函数的连续性等价为定义域上任意收敛的数列通过函数映射后也收敛. 故考虑任何收敛于 y_0 的序列 $\{y_n\} \subset [a,b]$, 则

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{n \to \infty} \varphi(y_n) \tag{3.122}$$

因此序列 $f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y_n)$ 在 E 上几乎处处收敛, 而且 $|f_n(x)| \leq F(x)$, 由控制收敛可得

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(y_n) = \lim_{n \to \infty} \int_E f(x,y_n) dx = \int_E \lim_{n \to \infty} f(x,y_n) dx \tag{3.123}$$

证毕. □

Theorem 3.37 (**含参变量积分性质二**). 对于含参变量积分 $\varphi(y) = \int_E f(x,y)dx$, 若存在 $F(x) \in L(E)$, 使得 $|f(x,y)| \leq F(x)$, $\forall x \in E$, $y \in [a,b]$. 若对于几乎所有的 $x \in E$, 函数 $f(x,y)$ 在 $y_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $\varphi(y)$ 在 y_0 处连续.

Proof. 此定理和上述定理等价, 关键在于理解函数连续的几种不同形式的表述. □

Theorem 3.38 (**含参变量积分性质三**). 对于含参变量积分 $\varphi(y) = \int_E f(x,y)dx$, 若函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_y'(x,y)$ 存在, 且存在 $F(x,y) \in L(E)$, 使得 $|f_y'(x,y)| \leq F(x)$, $\forall x \in E$, $y \in [a,b]$, 则

$$\varphi^{'}(y) = \int_E f_y'(x,y) dx \tag{3.124}$$

Proof. 证明的关键在于理解微分和极限的关系. 微分定义就是一个极限过程, 因此根据上述定理, 微分问题可以转化为极限问题, 从而利用上述定理结论.

取定 $y \in [a,b]$, 令

$$g(x,z) = \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z-y}, \quad z \in [a,b] \tag{3.125}$$

由于

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(y) &= \lim_{z\to y} \frac{\int_E f(x,z)dx - \int_E f(x,y)}{z-y} dx \\ &= \lim_{z\to y} \int_E \frac{f(x,z)dx - f(x,y)}{z-y} dx = \lim_{z\to y} \int_E g(x,z)dx \end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\int_E f_y^{'}(x,y)dx = \int_E \lim_{z\to y} \frac{f(x,z) - f(x,y)}{z-y} = \int_E \lim_{z\to y} g(x,z)dx \tag{3.127}$$

故有

$$\varphi^{'}(y) = \int_E f_y^{'}(x,y)dx \ \Leftrightarrow \ \lim_{z\to y} \int_E g(x,z)dx = \int_E \lim_{z\to y} g(x,z)dx \tag{3.128}$$

根据微分中值定理必有 $\bar{z} \in [a,b]$ 使得

$$|g(x,z)| = |f_y^{'}(x,\bar{z})| \leq F(x), \quad \forall x \in E \tag{3.129}$$

根据前面证明的结论推出上述交换极限运算与积分运算次序的等式成立. □

3.2.2 黎曼可积性的刻画

Theorem 3.39. *若 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的有界函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的充分必要条件是:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集.*

Remark 3.40. 其实利用了有界收敛定理, 振幅函数的的勒贝格积分极限与极限的积分可交换顺序, 然后通过振幅函数的勒贝格积分把黎曼积分的达部上和与达部下和联系起来. 而又勒贝格积分在零测度集上的积分不影响总体积分值, 因此可以得到黎曼可积性的刻画.