

Notes for Operation and Modeling of MOS Transistors

Huang Andong
andonghuang1991@gmail.com

April 10, 2017

Contents

1 量子力学	7
1.1 量子力学原理	7
1.1.1 量子能量	7
1.1.2 波粒二象性	7
1.1.3 不确定性原理	7
1.2薛定谔波动方程	8
1.2.1 波动方程	8
1.2.2 波动方程的物理解释	9
1.2.3 边界条件	9
1.3 薛定谔波动方程的应用	9
1.3.1 空间中的自由电子	9
1.3.2 无限势能井	10
1.3.3 阶跃势能井	12
1.3.4 势垒和隧道效应	14
1.4 原子的波理论	15
2 固体量子理论简介	17
2.1 能带的形成	17
2.2 固体中电的传导	17
2.2.1 能带和键模型	17
2.2.2 漂移电流	17
2.2.3 电子等效质量	18
2.2.4 空穴的概念	19
2.3 状态密度方程	20
2.3.1 数学推导	20
2.3.2 扩展到半导体	21
2.4 统计力学	22
2.4.1 统计规律	22

2.4.2 费米 - 狄拉克概率函数	22
2.4.3 分布函数和费米能级	23
3 平衡态半导体	26
3.1 半导体中的载流子	26
3.1.1 电子和空穴的平衡分布	26
3.1.2 n_0 方程和 p_0 方程	27
3.1.3 本征载流子浓度	29
3.1.4 费米能级位置	30
3.2 掺杂原子与能级	30
3.2.1 定型描述	31
3.2.2 电离能	32
3.3 非本征半导体	32
3.3.1 电子和空穴的平衡状态分布	32
3.3.2 n_0 和 p_0 的乘积	34
3.4 施主和受主的统计学分布	34
3.4.1 概率分布函数	34
3.4.2 完全电离和束缚态	34
3.5 电中性状态	34
3.5.1 补偿半导体	34
3.5.2 平衡电子和空穴浓度	35
3.6 费米能级的位置	36
4 载流子运输现象	38
4.1 载流子的漂流运动	38
4.1.1 漂移电流密度	38
4.1.2 迁移率	40
4.1.3 电导率	41
4.1.4 饱和速度	41
4.2 载流子扩散	42
4.2.1 总电流密度	43
4.3 杂质的梯度分布	43
4.3.1 感应电场	43
4.3.2 爱因斯坦关系	44
5 半导体中过剩的载流子	47
5.1 载流子的产生与复合	47
5.1.1 平衡状态半导体	47

5.1.2	过剩载流子的产生与复合	48
5.2	过剩载流子的性质	49
5.2.1	连续性方程	49
5.2.2	与时间有关的扩散项	50
5.3	双极运输	51
5.3.1	双极运输方程的推导	51
6	pn 结	52
6.1	零偏置下的 pn 结	52
6.1.1	电场强度	53
6.1.2	空间电荷区宽度	55
6.2	反向偏置	55
6.2.1	空间电荷区宽度与电场	56
6.2.2	结电容	56
6.2.3	单边突变结	57
7	pn 结二极管	59
7.1	pn 结电流	59
7.1.1	边界条件	59
7.1.2	少数载流子分布	61
7.1.3	理想 pn 结电流	62
8	金属 - 半导体和半导体异质结	64
8.1	肖特基势垒二极管	64
8.1.1	性质上的特征	64
8.1.2	理想结的特性	65
8.1.3	势垒高度的非理想因素	67
8.1.4	表面状态	69
8.1.5	电压电流关系	69
9	二端口 MOS 电容	71
9.1	接触电势	71
9.2	MOS 电容 Flat Band	72
9.3	电势平衡和电势平衡	73
9.4	MOS 电容一般性分析	74
9.5	积累和耗尽	76
9.5.1	深度积累 Deep in Accumulation	76
9.5.2	深度耗尽 Deep in Depletion	77

9.6 反型层 Inversion	77
9.6.1 反型区一般性分析	77
9.6.2 强反型区	79
9.7 弱反型区	80
9.8 小信号电容	82
9.8.1 C'_c Deep in Accumulation	82
9.8.2 C'_c Deep in Depletion and in Inversion	83
10 三端口 MOS 结构	84
10.1 反型层	86
10.2 Body Effect 体效应	87
10.3 反型区	88
10.3.1 近似界限	88
10.3.2 强反型	88
10.3.3 弱反型	89
10.4 V_{CB} 控制观点	89
10.4.1 基本推导	89
10.4.2 关断电压 Pinch-off Voltage	89
11 四端口 MOSFET	91
11.1 爱因斯坦关系	91
11.2 长沟道 MOSFET 基本介绍	93
11.3 通用电荷薄层模型	93
11.3.1 沟道电流方程	93
11.3.2 沟道两端表面电势	96
11.4 简化的通用模型	97
11.4.1 耗尽区电荷线性化	97
11.4.2 Body Reference 简化通用模型	97
11.4.3 Source-Referenced 简化通用模型	98
11.4.4 基于电荷的简化通用模型	99
11.4.5 Quasi-Fermi Potential based Model	100
11.5 反型层区域和外部偏压的关系	100
11.5.1 Definition in Terms of Gate Voltage	100
11.5.2 Definition in Terms of Source and Drain Voltages	100
11.6 强反型区域	101
11.6.1 精确的强反型模型	101
11.6.2 Body-Referenced 简化版强反型模型	103

11.6.3 Source-Referenced 简化版强反型模型	103
11.7 Single-Piece Models	104
11.8 有效效载流子迁移率	105
11.8.1 有效垂直电场和迁移率	105
11.8.2 有效迁移率和沟道电流	106
11.8.3 基于表面势的模型	107
11.8.4 强反型	108
11.8.5 外部源和漏极串联电阻的影响	108
11.8.6 温度的影响	108
12 小尺寸效应	109
12.1 载流子速度饱和	109
12.2 短沟道效应	111
12.2.1 Channel Length Modulation	111
12.2.2 Charge Sharing	112
12.2.3 Drain Induced Barrier Lowering	112
12.2.4 Punch Through	112
13 动态工作下的 MOS 晶体管 -大信号建模	113
13.1 准静态工作	113
13.2 准静态工作时的端电流	115
13.3 准静态工作下的电荷计算	117
13.3.1 强反型	117
14 MIT MVS MOSFET 和 HEMT 模型	121
14.1 MOSFET Current-Voltage Model @Ali Khakifirooz2009	121
14.1.1 饱和区的 VS 模型	121
14.1.2 非饱和区	123
14.2 Virtual-Source-Based Current and Charge FET Models @LanWei2012	124
14.2.1 回顾 VS 模型	124
14.2.2 电荷分割下的动态 VS 模型	125
14.2.3 附录 A: 漂移/扩散输运状态的电荷分割模型	126
14.3 Silicon MIT Virtual Source Model 1.0.1	128
14.4 MIT Virtual Source GaNFET-RF (MVSG-RF) Model@Ujwal	128
14.4.1 氮化镓 HEMT: 工作原理	128
14.4.2 MVSG-RF 内部晶体管模型	129
14.4.3 MVSG-RF implicit-gate 晶体管沟道电流	131

15 MIT 氮化镓高频模型 MVSGHF 和高电压模型 MVSGHV	134
15.1 Quasi-ballistic GaN HEMT 模型 (MVSGRF)	134

Chapter 1

量子力学

1.1 量子力学原理

1.1.1 量子能量

下面介绍一些基本的概念和公式. 普朗克在 1900 年提出了辐射是以离散量子态进行的.

$$E = h\nu, \quad h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \quad (1.1)$$

$$\nu = c/\lambda \quad (1.2)$$

h 为普朗克常量, ν 是辐射的频率.

Definition 1.1 (逸出功 (Work Function)). 把电子从材料激发到真空需要的最小的能量叫做逸出功, 剩下的多余的能量都转化为了光电子的动能. 光电子最大的动能可以写成

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - \Phi = h\nu - h\nu_0 \quad (\nu \geq \nu_0) \quad (1.3)$$

$h\nu$ 是入射光子的能量, 而 $\Phi = h\nu_0$ 是该材料的逸出功.

1.1.2 波粒二象性

德布罗意提出了波粒二象性假设. 粒子的波长为

$$\lambda = h/p \quad (1.4)$$

p 为例子的动量.

1.1.3 不确定性原理

海森伯格 1927 年提出了不确定性原理. 动量 Δp 和位置 Δx 的不确定性

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \quad (1.5)$$

能量 ΔE 和时间 Δt 的不确定性

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad (1.6)$$

不确定原理的一个结果就是, 我们不能决定一个电子的精确位置, 而只能决定在某个位置发现该例子的概率.

1.2 薛定谔波动方程

薛定谔在 1926 年提出了一种叫波动力学的理论, 融合了普朗克的量子理论和德布罗意的波粒二象性. 在波粒二象性的基础上, 我们使用波动理论来描述晶格中电子的运动, 薛定谔波动方程正是用来描述此种运动.

1.2.1 波动方程

一维非相对论薛定谔波动方程为

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t) = j\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

$\Psi(x, t)$ 是波动方程, $V(x)$ 是与时间无关的势能函数, 显然势能函数只和电子的空间位置相关. 波动方程与时间和空间都相关, 可以写成如下的形式

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t) \quad (1.8)$$

利用分离变量法可以得到

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) = j\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \eta \text{ (constant)} \quad (1.9)$$

很容易得到

$$\phi(t) = e^{-j(\eta/\hbar)t} \quad (1.10)$$

由于

$$E = h\nu = h\omega/2\pi = \hbar\omega \quad (1.11)$$

于是有角频率 $\omega = E/\hbar = \eta/\hbar$. 也即 $\eta = E$ (E 为电子总能量)

$$\phi(t) = e^{-j(\eta/\hbar)t} = e^{-j(E/\hbar)t} = e^{-j\omega t} \quad (1.12)$$

然后薛定谔方程中与时间无关的部分为

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) = E \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi(x) = 0 \quad (1.14)$$

其中 $V(x)$ 为例子的势能, E 是粒子的总能量.

1.2.2 波动方程的物理解释

总的波动方程为

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t) = \psi(x)e^{-j(E/\hbar)t} = \psi(x)e^{-j\omega t} \quad (1.15)$$

Max Born 在 1926 年假设 $|\Psi(x, t)|^2 dx$ 是在某个时间点在 x 与 dx 之间发现粒子的概率. 因此 $|\Psi(x, t)|^2$ 也叫做概率密度方程. 且有

$$|\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x)e^{-j(E/\hbar)t}|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (1.16)$$

概率密度方程和时间无关.

1.2.3 边界条件

由于 $|\Psi(x, t)|^2$ 代表概率密度, 那么对于某个粒子来说, 在全空间发现粒子的概率必然为 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (1.17)$$

波动方程还有两个其他的条件

- (1) $\psi(x)$ 必须有界, 单值且连续.
- (2) $\partial\psi(x)/\partial x$ 必须有界, 单值且连续.

如果第一个条件不满足, 说明在某个位置发现粒子的概率无穷大, 与不确定性原理矛盾. 对于公式 (1.14), 若总能量 E 和势能 V 都有限, 那么 $\psi(x)$ 二阶导数也有限, 这就说明 $\psi(x)$ 的一阶导数连续, 而一阶导数反映了粒子的动量, 因此也必须是有限和单值的. 最后, 有限的一阶导数也意味着方程本身是连续的.

1.3 薛定谔波动方程的应用

1.3.1 空间中的自由电子

自由空间中的电子, 如果没有受到外界力的作用, 那么其势能 $V(x)$ 是一个常量, 且有 $E > V(x)$ (总能量大于其势能, 即动能不为零). 为了简单起见, 我们假设 $V(x) = 0$, 然后 (1.14) 可以改写成

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad (1.18)$$

上式的解为

$$\psi(x) = A \exp\left[\frac{jx\sqrt{2mE}}{\hbar}\right] + B \exp\left[\frac{-jx\sqrt{2mE}}{\hbar}\right] \quad (1.19)$$

我们简写为

$$\psi(x) = A \exp(jkx) + B \exp(-jkx), \quad \text{where } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (1.20)$$

k 被称为波动数. 总的波动方程为

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t) = A \exp[j(kx - \omega t)] + B \exp[-j(kx + \omega t)] \quad (1.21)$$

上式说明自由空间的粒子的波动方程为一个行波. 假设粒子在某时刻向 $+x$ 方向传播, 则 $B = 0$.

$$\Psi(x, t) = A \exp[j(kx - \omega t)] \quad (1.22)$$

其中 k 为波数

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{p^2}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar} \quad (1.23)$$

或者可以写成

$$p = \hbar k \quad (1.24)$$

结合德布罗意波动公式

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\hbar k} = \frac{2\pi}{k} \quad (1.25)$$

上式说明一个给定能量的自由空间粒子, 也将具有给定的波长和动量. 而概率密度则为常数 AA^* , 说明这个粒子在空间里每个位置出现的概率相等.

1.3.2 无限势能井

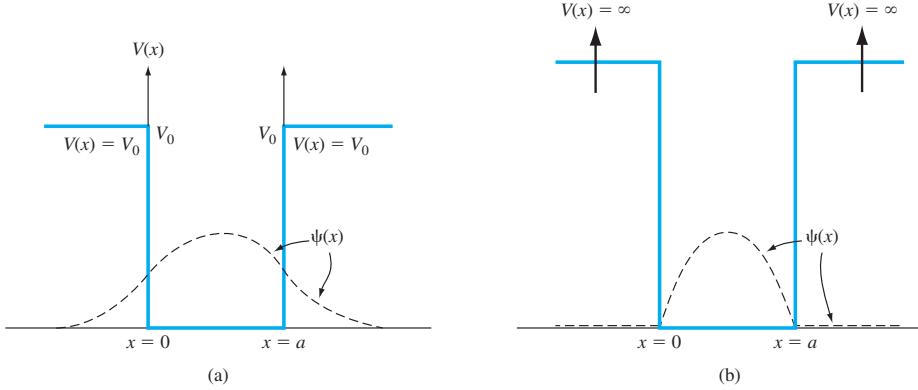


Figure 1.1: (a) 势能函数处处有界 (b) 势能函数在某些区域无界

这里重新回顾下时间无关的薛定谔波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi(x) = 0 \quad (1.26)$$

对于图1.1中的情况 (b) 势能函数在 I 和 III 区域无界, 则若 E 有界, 则 $(E - V(x))$ 无界, 那么在这两个区域 $\psi(x) = 0$. 一个粒子无法穿透无限势能壁垒, 因此在区域 I 和 III 中发现粒子的概率为 0. 对于区域 II($V = 0$), 则有

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad (1.27)$$

上述方程的解为

$$\psi(x) = A_1 \exp(jkx) + A_2 \exp(-jkx), \quad \text{where} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (1.28)$$

结合两个边界条件

$$\psi(x=0) = \psi(x=a) = 0 \quad (1.29)$$

得到 $A_1 = 0$, 且 $A_2 \sin ka = 0$, 故

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad (1.30)$$

然后利用概率密度归一化条件有

$$\int_0^a A_2^2 \sin(kx) dx = 1 \quad (1.31)$$

可得到

$$A_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (1.32)$$

时间无关的波动方程可以表示为

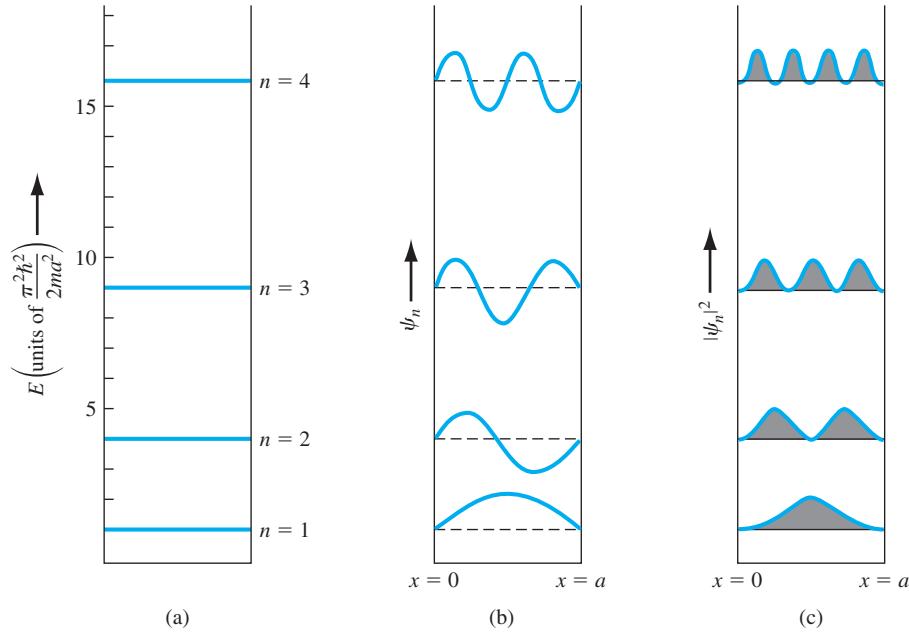


Figure 1.2: 无限势能井中的粒子:(a) 四个最低离散的能级 (b) 波动方程 (c) 概率密度方程

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \text{where } n = 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

上式说明在无限势能井里的电子的波动方程为驻波. 让两个 k 值相等可得

$$\frac{2mE_n}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \quad (1.34)$$

由此可以算出电子的总能量为

$$E = E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}, \quad \text{where } n = 1, 2, \dots \quad (1.35)$$

上式说明无限势能井中电子的能量是离散的.

1.3.3 阶跃势能井

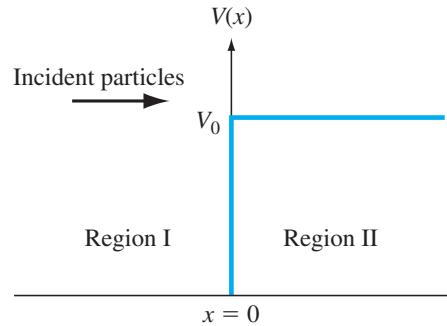


Figure 1.3: 阶跃势能函数示意图

在这个例子当中, 我们假设有一串粒子流从 $x = -\infty$ 向 $+x$ 方向传播. 在这里我们只考虑 $E < V_0$ 的情况, 即粒子的总能量要小于势垒的高度.

对于 I 区域, $V = 0$, 因此有

$$\frac{\partial^2 \psi_1(x)}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1(x) = 0 \quad (1.36)$$

上述方程的一般解为

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(jk_1 x) + B_1 \exp(-jk_1 x), \quad \text{where } k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (1.37)$$

$\exp(jk_1 x)$ 表示向着 $+x$ 方向传播的粒子, 而 $\exp(-jk_1 x)$ 表示向着 $-x$ 方向被反射的粒子. 在自由空间中, 入射和反射的粒子都以行波方式存在.

对于入射波, $A_1 A_1^*$ 是入射粒子的概率密度函数. 如果我们用入射的速度乘以这个概率密度, 那么 $v_i \cdot A_1 \cdot A_1^*$ 就得到了入射粒子的 flux, 其单位为 $cm^2 \cdot s$. 同理 $v_r \cdot B_1 \cdot B_1^*$ 代表了反射粒子的 flux.

对于区域 II , 我们假设 $V = V_0 > E$, 那么时间无关的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \psi_2(x)}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \psi_2(x) = 0 \quad (1.38)$$

其一般解为

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(jk_2 x) + B_2 \exp(-jk_2 x), \quad (x \geq 0) \quad \text{where } k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (1.39)$$

由于波动方程有界, 故 $B_2 = 0$, 因此有

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(jk_1 x), \quad (x \geq 0) \quad (1.40)$$

再由 $x = 0$ 处波动方程必须连续, 故 $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, 可得到

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (1.41)$$

再根据波动方程处处有界, 其一阶导数也是连续的, 故 $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}|_{x=0}$, 把波动方程表达式带入可得

$$jk_1 A_1 - jk_1 B_1 = -k_2 A_2 \quad (1.42)$$

根据上述两个方程, 我们可以用 A_1 来表示 A_2 和 B_1

$$B_1 = \frac{-(k_2^2 + 2jk_1 k_2 - k_1^2)}{k_2^2 + k_1^2} \cdot A_1 \quad (1.43)$$

$$A_2 = \frac{2k_1(k_1 - jk_2)}{k_2^2 + k_1^2} \cdot A_1 \quad (1.44)$$

可以很容易得到粒子反射概率密度函数为

$$B_1 \cdot B_1^* = \frac{(k_2^2 - k_1^2 + 2jk_1 k_2)(k_2^2 - k_1^2 - 2jk_1 k_2)}{(k_2^2 + k_1^2)^2} \cdot A_1 \cdot A_1^* \quad (1.45)$$

我们可以定义一个反射系数 R 来表征反射和入射的粒子通量率.

$$R = \frac{v_r \cdot B_1 \cdot B_1^*}{v_i \cdot A_1 \cdot A_1^*} \quad (1.46)$$

在 I 区, $V = 0$, 因此粒子的总能量 E 等于其动能 $E = T = \frac{1}{2}mv^2$, 据此可以算出入射波数

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m \cdot \frac{1}{2}mv^2}}{\hbar} = \frac{mv}{\hbar} \quad (1.47)$$

因此入射波粒子的速度为

$$v_i = \frac{\hbar}{m} k_1 \quad (1.48)$$

同理在 I 区的反射波粒子的速度为

$$v_r = \frac{\hbar}{m} k_1 \quad (1.49)$$

由此可以算出粒子的通量反射率

$$R = \frac{v_r \cdot B_1 \cdot B_1^*}{v_i \cdot A_1 \cdot A_1^*} = \frac{B_1 \cdot B_1^*}{A_1 \cdot A_1^*} = \frac{(k_2^2 - k_1^2 + 2jk_1 k_2)(k_2^2 - k_1^2 - 2jk_1 k_2)}{(k_2^2 + k_1^2)^2} = 1 \quad (1.50)$$

$R = 1$ 这个结果意味着所有 $E < V_0$ 的入射粒子最终都被反射回了. 但是 A_2 以及 II 区域内发现粒子的概率密度不为 0, 这说明粒子有一定的概率穿透这个壁垒 (尽管自身的动能小于势垒), 这一点违背了经典物理, 但是在量子物理下是允许发生的. 但最终粒子还是会全部回到 I 区, 根据反射系数 $R = 1$ 这个事实.

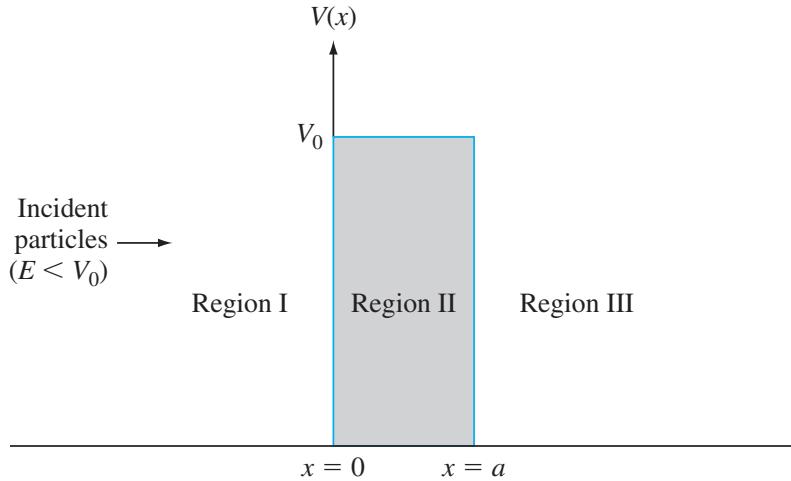


Figure 1.4: 势垒函数示意图

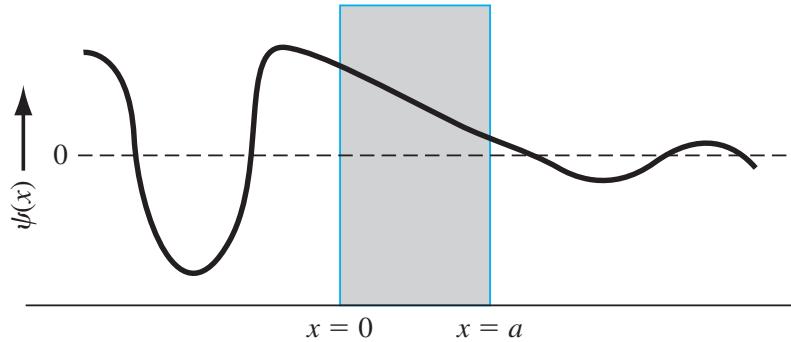


Figure 1.5: 隧道效应意图

1.3.4 势垒和隧道效应

如图, 我们现在考虑一个势垒函数, 入射粒子的总能量要小于势垒 $E < V_0$. 而且粒子从 $-x$ 向着 $+x$ 传播. 这种情况, 我们必须考虑三个区域 I、II、III 中的波动方程

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(jk_1 x) + B_1 \exp(-jk_1 x) \quad (1.51)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(jk_2 x) + B_2 \exp(-jk_2 x) \quad (1.52)$$

$$\psi_3(x) = A_3 \exp(jk_1 x) + B_3 \exp(-jk_1 x) \quad (1.53)$$

其中

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (1.54)$$

III 区域没有反射, 因此 $B_3 = 0$, 我们在 $x = 0, x = a$ 有四个边界方程 (波动方程及其导数连续). 因此我们可以用 A_1 来表示 B_1, A_2, B_2, A_3 . 此时我们可以定义穿透系数, 表征粒子从

I 区域穿过 II 区域到了 III 区域

$$T = \frac{v_t \cdot A_3 \cdot A_3^*}{v_i \cdot A_1 \cdot A_1^*} = \frac{A_3 \cdot A_3^*}{A_1 \cdot A_1^*} \quad (1.55)$$

由于 I, III 区域的势能同时为 0, 故 $v_t = v_i$. 对于特殊的情况 $E \ll V_0$, 我们发现

$$T = 16 \left(\frac{E}{V_0} \right) \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) \exp(-2k_2 a) \quad (1.56)$$

这个公式说明粒子有一定的概率穿越比自身能量还要高的势垒到达另外一个区域. 这个效应称为隧道或者隧穿效应, 与经典物理相矛盾. 这种效应可以用于半导体器件的制造, 比如隧道二极管.

1.4 原子的波理论

根据波尔理论, 单个原子中电子的势能函数为

$$V(r) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (1.57)$$

这里我们需要用求坐标系来解波动方程

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi(r, \theta, \phi) = 0 \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi = 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

解上述微分方程需要用到分离变量和如下假设

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi) \quad (1.60)$$

然后便有

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \\ & + r^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

对于上述方程的第二项只和 ψ 有关, 因此我们可以写成

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \quad (1.62)$$

m 是一个常数 (非质量), 很容易得到

$$\Phi = e^{jm\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.63)$$

对剩下的式子两端同时除以 $\sin^2 \theta$, 便可以分离出 R 的表示式, 此时对应了分离常数 n , 最后可以得到 Θ 的表达式, 利用到了分离常数 l . 分离常数 n, l, m 称为量子数. 其中 n 称为主量子数, l 称为角量子数, m 称为磁量子数. 这些量子数的关系为

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 0 \\ |m| &= l, l - 1, \dots, 0 \end{aligned} \tag{1.64}$$

其中的每一个量子态都可能被电子占领. 电子的离散量子能量可以表示为

$$E_n = \frac{-m_0 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} \tag{1.65}$$

负的电子能量说明被质子束缚, 而当电子的能量为正时, 说明此时电子不再是一个受到约束的电子, 总能量也不会再被量化.

波动方程的解可以写成 ψ_{nlm} , 对于最低的能级, $n = 1, l = 0, m = 0$, 此时波动方程为

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0} \tag{1.66}$$

上述方程是球对称的, 其参数 $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_0e^2} = 0.529\text{\AA}$

Chapter 2

固体量子理论简介

在这一章节中, 我们将

- (1) 开发出单个晶格材料中电子的允带和禁带的概念, 使用导带和价带来描述半导体材料.
- (2) 讨论电子和空穴这两种不同的载流子.
- (3) 开发出能量和动量的关系曲线, 根据这个曲线得出直接和间接能带半导体材料.
- (4) 讨论电子和空穴的有效质量.
- (5) 推导出允带中各个量子态的概率密度.
- (6) 开发出费米 - 狄拉克概率方程, 用来描述允带中电子的统计分布, 以及定义费米能级.

2.1 能带的形成

2.2 固体中电的传导

下面我们讨论电子在不同允带中的运动.

2.2.1 能带和键模型

当 $T = 0K$ 时, 处于最低能带的 $4N$ 价带完全被电子束缚, 价电子组成了共价键, 此时导带则没有电子. 当温度上升, 电子获得能量, 有些电子从价带跃迁到导带, 于是在价带创造了一个空穴.

2.2.2 漂移电流

电流是由电荷的定向运动产生的. 假设有一簇正电荷, 体密度为 $N(cm^{-3})$, 平均漂移速度为 $v_d(cm/s)$, 则其漂移速度为

$$J = qNv_d \quad (A/cm^2) \tag{2.1}$$

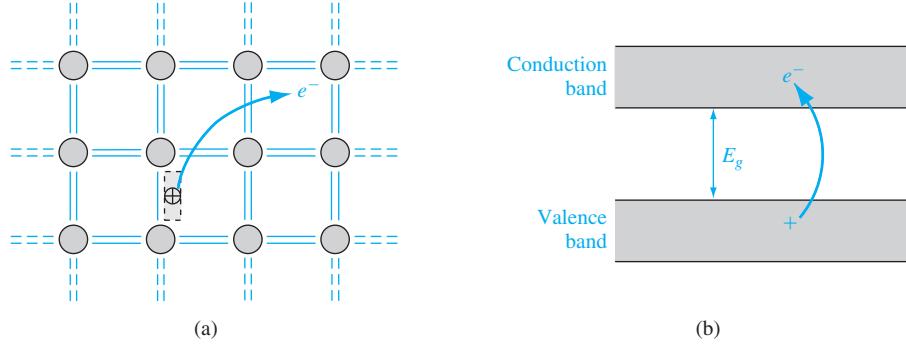


Figure 2.1: (a) 共价键断裂的二维图 (b) 共价键断裂对应的能带线形图及正负电荷的产生.

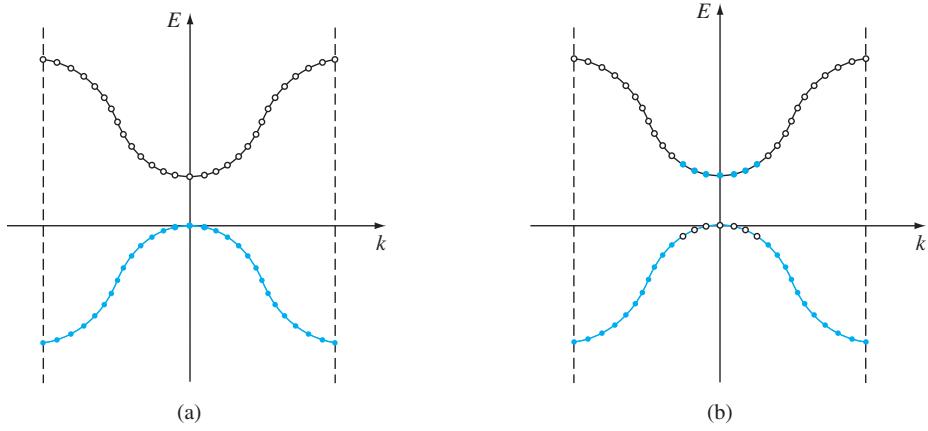


Figure 2.2: 半导体导带和价带的 E-k 关系图 (a) $T = 0K$ (b) $T > 0K$

用平均漂移速度替代单个粒子的速度, 那么漂移电流可以表示为

$$J = q \sum_{i=1}^N v_i \quad (2.2)$$

2.2.3 电子等效质量

在晶格中的电子, 当施加外部电场时, 同时收到内部和外部的力

$$F_{total} = F_{ext} + F_{int} = ma \quad (2.3)$$

其中 F_{total}, F_{ext} 和 F_{int} 分别代表总的力, 外部施加的力, 内部施加的力. 由于非常难定量刻画电子收到晶格内部的各种力, 因此我们只考虑外部的力, 而内部的力全部归为新的等效质量中.

$$F_{ext} = m^* a \quad (2.4)$$

m^* 为电子的有效质量. 此时加速度 a 只和外界施加的力相关. 但是这种假设暗含了

$$F_{int} = (m - m^*)a \quad (2.5)$$

由于 $(m - m^*)$ 为一个常数, 因此内部的力与电子的加速度成正比, 并不是一个常数. 电子的等效质量也可以从 $E - k$ 图上求出, 由于

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.6)$$

根据上式可知, 动量和波数的联系为 $p = \hbar k$, 且

$$\frac{dE}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m} = \frac{\hbar p}{m} \quad (2.7)$$

另外

$$\frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{p}{m} = v \quad (2.8)$$

v 是粒子的速度, E 对波数 k 的一阶导数和速度相关.

$$\frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} = \frac{1}{m} \quad (2.9)$$

E 对波数 k 的一阶导数与粒子质量成反比. 在导带中的电子的 $E - k$ 图在 $k = 0$ 附近可以

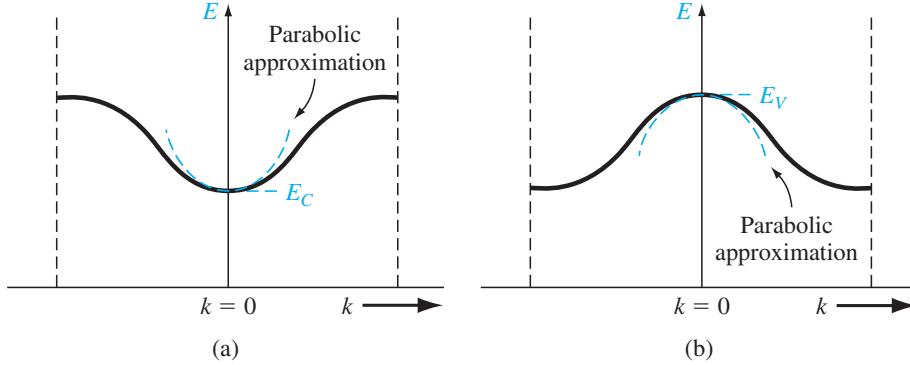


Figure 2.3: (a) 导带中的简化抛物线 $E - K$ 近似 (b) 价带中的简化抛物线 $E - K$ 近似

等效为

$$E - E_c = C_1 k^2 \quad (2.10)$$

E_c 为导带底部能级. 显然在导带中的电子其等效质量为正数

$$\frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} = \frac{2C_1}{\hbar^2} = \frac{1}{m^*} > 0 \quad (2.11)$$

所以在导带中的电子还是正常概念的电子, 下面小节将考虑价带中等效质量为负的电子.

2.2.4 空穴的概念

如上图, 价带中电子的 E_k 图可以近似为

$$E - E_v = -C_2 k^2 \quad (2.12)$$

且有

$$\frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} = \frac{-2C_2}{\hbar^2} = \frac{1}{m^*} < 0 \quad (2.13)$$

可以看出在价带中的电子，其等效质量为负。当外界施加一个电场时，这些电子的宏观表现等价于一群质量为 $\frac{2C_2}{\hbar^2} = \frac{-1}{m^*}$ 的正电荷。由此，我们可以定义空穴概念，这些空穴的密度和价带中空缺的电子能级密度一致。

2.3 状态密度方程

2.3.1 数学推导

首先我们考虑被限制在三维无限势能井里的电子。三维无限势能井可以表示为

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{for } x, y, z \in (0, a) \\ \infty, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

在此假定晶体边长为 a 的立方体。三维薛定谔波动方程可以根据一维情况推广

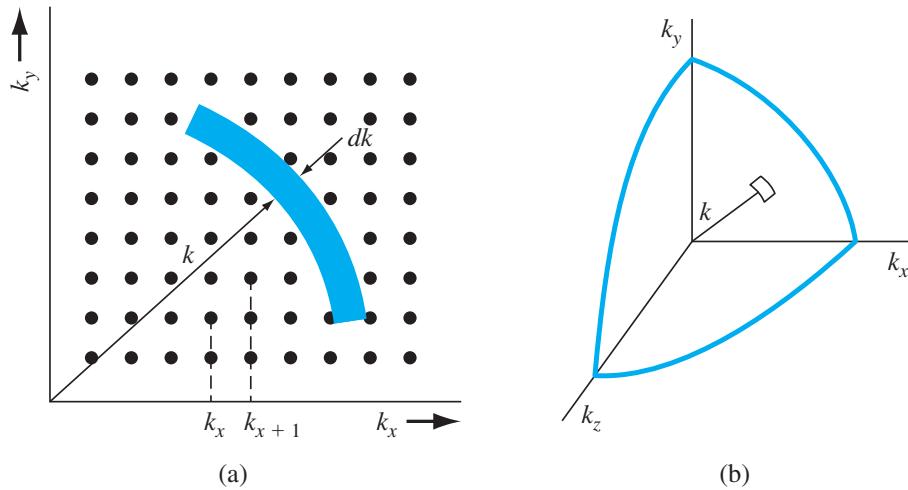


Figure 2.4: (a) k 空间的有效量子态的二维阵列; (b) k 空间的正坐标的八分之一球

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2}{a^2} \quad (2.14)$$

由于对称性，可以只考虑 $n_{x,y,z}$ 为正整数的情况，也就是八分之一圆。在 k_x 方向，两个量子态之间的距离是

$$k_{x+1} - k_x = (n_x + 1) \frac{\pi}{a} - n_x \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{a} \quad (2.15)$$

将这个结果推广到三维情况，一个量子态所占据的空间 V_k 为

$$V_k = \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \quad (2.16)$$

现在就可以确定 k 空间的量子态密度了。 k 空间中的体积微分为 $4\pi k^2 dk$. 因此 k 空间的量子态密度的微分为

$$g_T(E)dk = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^3} \quad (2.17)$$

其中第一个因子 2 代表了每个量子态的两种自旋状态. 第二个八分之一是指正的八分之一圆. 上式可以简化为

$$g_T(E)dk = \frac{\pi k^2 dk}{\pi^3} \cdot a^3 \quad (2.18)$$

上式给出了量子态密度函数, 由于波数 k 可以用动量表示, 也可以用能量 E 表示

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2.19)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (2.20)$$

故微分 dk 为

$$dk = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} dE \quad (2.21)$$

将 k^2 和 dk 代入状态密度方程, 得到 E 和 $E + dE$ 之间的能量状态数

$$g_T(E)dE = \frac{4\pi a^3}{h^3} \cdot (2m)^{3/2} \cdot \sqrt{E} dE \quad (2.22)$$

上式给出了体积为 a^3 的晶体中 E 和 $E + dE$ 之间的量子状态数, 在这里我们可以归一化得到单位空间内的量子状态密度

$$g_T(E) = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E} \quad (2.23)$$

2.3.2 扩展到半导体

前面我们导出了在三维无限势能井中质量为 m 的电子的有效量子态密度的一般表达式. 推广到半导体时, 由于电子和空穴被半导体晶体束缚, 需要使用到等效质量概念. 对于导带中的电子, 在 $k = 0$ 附近的图形近似抛物线

$$E = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*} \quad (2.24)$$

我们可以把晶体中的电子等效为具有特殊质量 m_n^* 的自由电子. 可以很容易得到导带中电子的量子态密度

$$g_c(E) = \frac{4\pi(2m_n^*)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E - E_c} \quad (E \geq E_c) \quad (2.25)$$

对于空穴

$$E_v - E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p^*} \quad (2.26)$$

故在价带中的量子状态密度为

$$g_v(E) = \frac{4\pi(2m_p^*)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E_v - E} \quad (E \leq E_v) \quad (2.27)$$

在硅晶体中, 当 $T = 300K$ 时, E_c 和 $E_c + kT$ 之间的量子状态数大约为 $N = 2.12 \times 10^{19} cm^{-3}$. 而在 $E_v - kT$ 和 E_v 之间的空穴数大致为 $7.92 \times 10^{18} cm^{-3}$ 个.

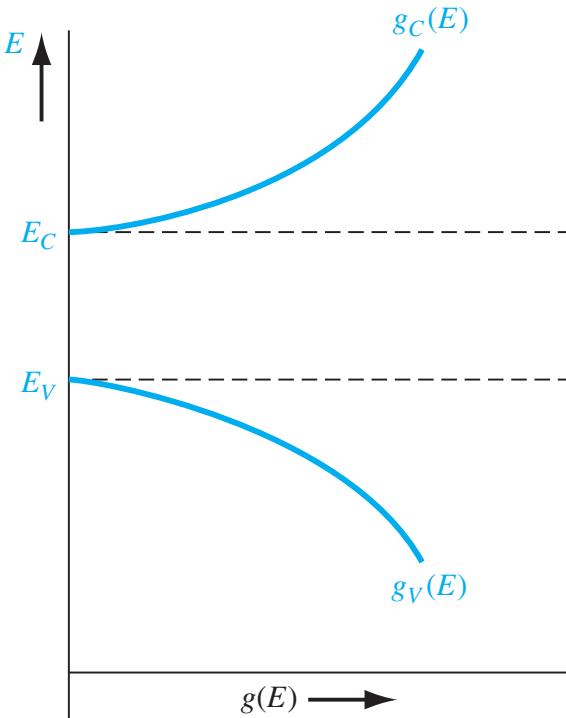


Figure 2.5: 量子状态密度方程

2.4 统计力学

晶体的电学特性是由大量电子的统计学状态决定的.

2.4.1 统计规律

通常有三种分布法则来确定粒子在有效能态中的分布.

第一种分布定律是麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布函数. 这种分布认为粒子是可以被一一区别分开的, 而且对每个能态所能容纳的粒子数没有限制. 容器中的气体处于相对低压时的状态可以看作是这种分布.

第二种分布定律是波色 - 爱因斯坦分布函数. 这种分布的粒子是不可区分的, 但每个能态所能容纳的粒子数仍然没有限制. 光子的状态或者黑体辐射就是这种分布的例子.

第三种分布定律是费米 - 狄拉克分布函数. 这种分布的粒子也是不可分辨的, 而且每个量子态只允许一个粒子. 晶体中的电子符合这种分布. 在这三种情况中, 都假设粒子之间不存在相互影响.

2.4.2 费米 - 狄拉克概率函数

假设第 i 个能级有 g_i 个量子态, 现在有 $N_i (g_i \geq N_i)$ 个粒子来占据这些能级, 由 Pauli 原理, 每个粒子最多只能占据一个量子态, 而根据费米 - 狄拉克分布, 粒子是不可分的, 因此

总的方式数为

$$C_{g_i}^{N_i} = \frac{g_i!}{(g_i - N_i)!} \quad (2.28)$$

对于 n 个能级中所有粒子的排列方式的总数为

$$W = \prod_{i=1}^n \frac{g_i!}{(g_i - N_i)!} \quad (2.29)$$

W 为 $N = \sum_{i=1}^n N_i$ 个电子在该系统的排列总数. 想要得到最大的概率分布, 就要求出 W 的最大值. 我们要保持粒子总数和总能量不变的前提下, 改变 E_i 能级中的 N_i 来改变粒子的分布, 从而求出 W 的最大值. 我们将概率密度函数写为

$$\frac{N(E)}{g(E)} = f_F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} \quad (2.30)$$

其中 E_F 为费米能级, 密度数 $N(E)$ 代表单位体积单位能量的粒子数, 函数 $g(E)$ 代表单位体积单位能量的量子状态数. 函数 $f_F(E)$ 称为费米 - 狄拉克分布概率函数, 代表了能量为 E 的量子态被电子占据的可能性. 该分布的另一个含义是被电子填充的量子态占总量子态的比率.

2.4.3 分布函数和费米能级

我们考虑温度 $T = 0K$ 的情况, 此时当 $E < E_F$, 费米 - 狄拉克概率函数为 1, 而当 $E > E_F$, 费米 - 狄拉克概率函数为 0. 意味着绝对零度时, 费米能级以下所有量子态都被电子占领, 费米能级以上没有电子存在. 如下图所示

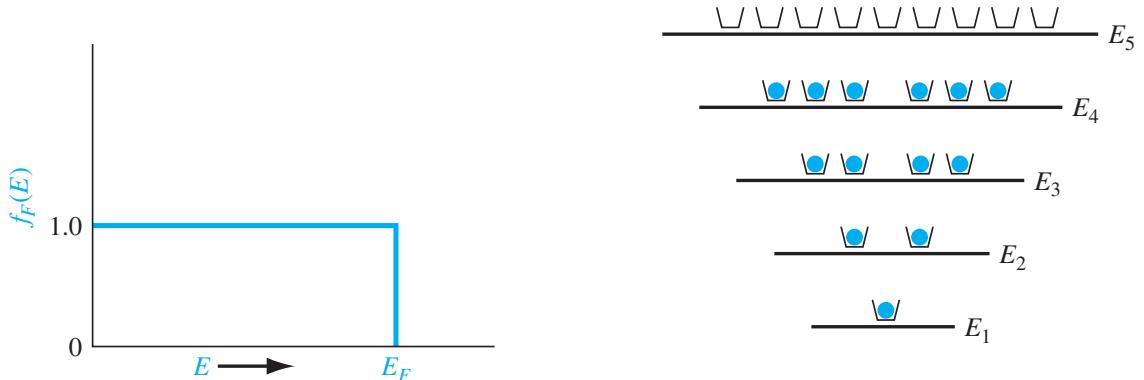


Figure 2.6: (a) $T = 0K$ 时费米概率函数与能量的关系图; (b) $T = 0K$ 时一个特定系统的分离能级和量子态

当 $T = 0K$ 时, 假设系统有 N_0 个电子, 那么电子在量子态中的分布如下图虚线所示. 电子处于最低能量状态, 从而使低于 E_F 的状态都被填满, 高于 E_F 的状态都为空. 若该系统的 $g(E)$, N_0 都已知, 就可以确定费米能级 E_F .

$$N_0 = \int_0^{E_F} g(E)dE \quad (2.31)$$

当温度上升时, 电子获得热能, 一部分电子会跃迁到高能级中, 也就意味着有效能量状态中的电子分布发生了改变. 我们可以大概计算一下 $T = 300K$ 时比费米能级高 $3kT$ 的能级

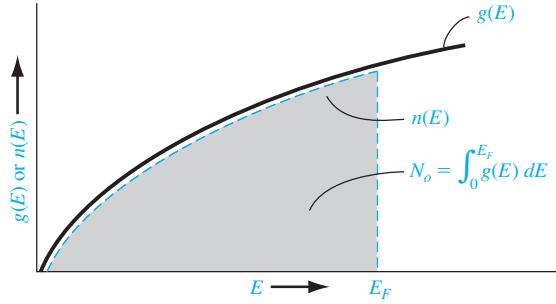


Figure 2.7: $T = 0K$ 时量子状态密度方程 $g(E)$

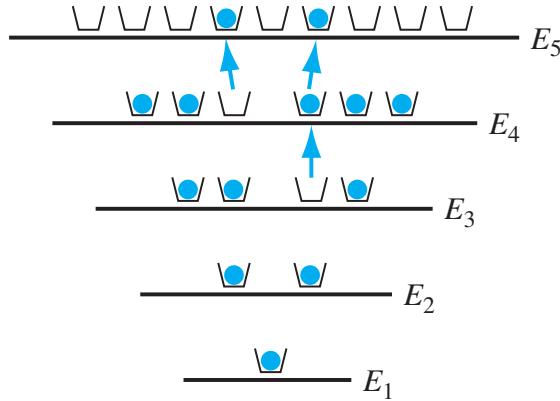


Figure 2.8: $T > 0K$ 时系统的分离能级和量子态

被电子占领的概率. 根据 (2.30)

$$f_F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{3kT}{kT}\right)} = 4.74\% \quad (2.32)$$

某个量子态被空置的概率为

$$1 - f_F(E) = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} \quad (2.33)$$

$f_F(E)$ 和 $1 - f_F(E)$ 关于费米能级是对称的, 如图 (2.9) 所示现在我们考虑 $E - E_F \gg kT$ 的情况, 此时费米分布函数可以简化成

$$f_F(E) \approx \exp\left(\frac{-(E-E_F)}{kT}\right) \quad (2.34)$$

方程 (2.34) 称为简约玻尔兹曼近似. 如图 (2.10). 当我们设定这个近似误差为 5% 以内时, 可以解出 $E - E_F \approx 3kT$, 近似误差在 2% 以内时, 可以解出 $E - E_F \approx 3.9kT$.

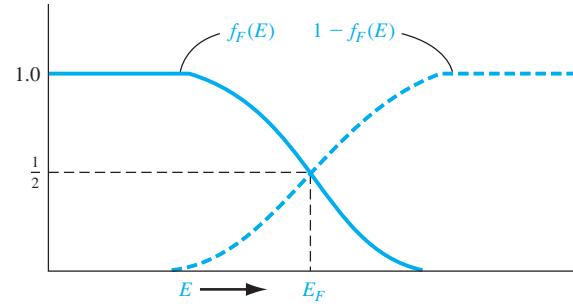


Figure 2.9: 费米概率函数以及量子态被空置的概率

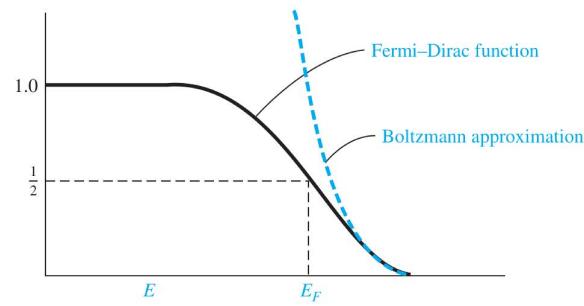


Figure 2.10: 费米狄拉克概率方程的麦克斯韦 - 玻尔兹曼近似

Chapter 3

平衡态半导体

平衡态是指没有外界影响 (如电压、电场、磁场或者温度梯度等) 作用于半导体上的状态. 在这种状态下, 材料的所有特性均与时间无关.

3.1 半导体中的载流子

3.1.1 电子和空穴的平衡分布

导带电子关于能量的分布为导带中允许量子态的密度与某个量子态被电子占据的概率的乘积. 其公式为

$$n(E) = g_c(E)f_F(E) \quad (3.1)$$

其中 $f_F(E)$ 是费米概率分布函数, $g_c(E)$ 是导带中的量子态密度. 在整个导带能量范围对式 (3.1) 积分就得到了导带中单位体积的总电子浓度.

同理, 价带中空穴与能量有关的分布为价带允许量子态的密度与某个量子态不被电子占据的概率乘积. 我们可以将其写为

$$p(E) = g_v(E)[1 - f_F(E)] \quad (3.2)$$

在整个价带内对式 (3.2) 积分便可以得到价带中单位体积的总空穴数.

如图 (3.1) 所示, $T > 0K$ 时, E_F 近似位于 E_c 和 E_v 之间二分之一处. 此时, 如果我们假设电子和空穴的有效质量相等, 则 $g_c(E)$ 和 $g_v(E)$ 关于禁带能量 $0.5(g_c(E) + g_v(E))$ 对称. 此前已经知道了, $E > E_F$ 时的 $f_F(E)$ 函数与 $E < E_F$ 时的 $1 - f_F(E)$ 函数关于能量 $E = E_F$ 对称. 这就意味着 $E = E_F + dE$ 时的 $f_F(E)$ 函数与 $E = E_F - dE$ 时的 $1 - f_F(E)$ 函数相等. 如果 $g_c(E)$, $g_v(E)$ 对称, 那么为了获得相等的电子和空穴浓度, 费米能级必然位于禁带能量中. 如果电子和空穴的有效质量并不精确相等, 那么有效状态和密度函数 $g_c(E)$, $g_v(E)$ 不会关于禁带中央精确对称. 本征半导体费米能级将从禁带中央轻微地移动, 以保持电子和空穴浓度相等.

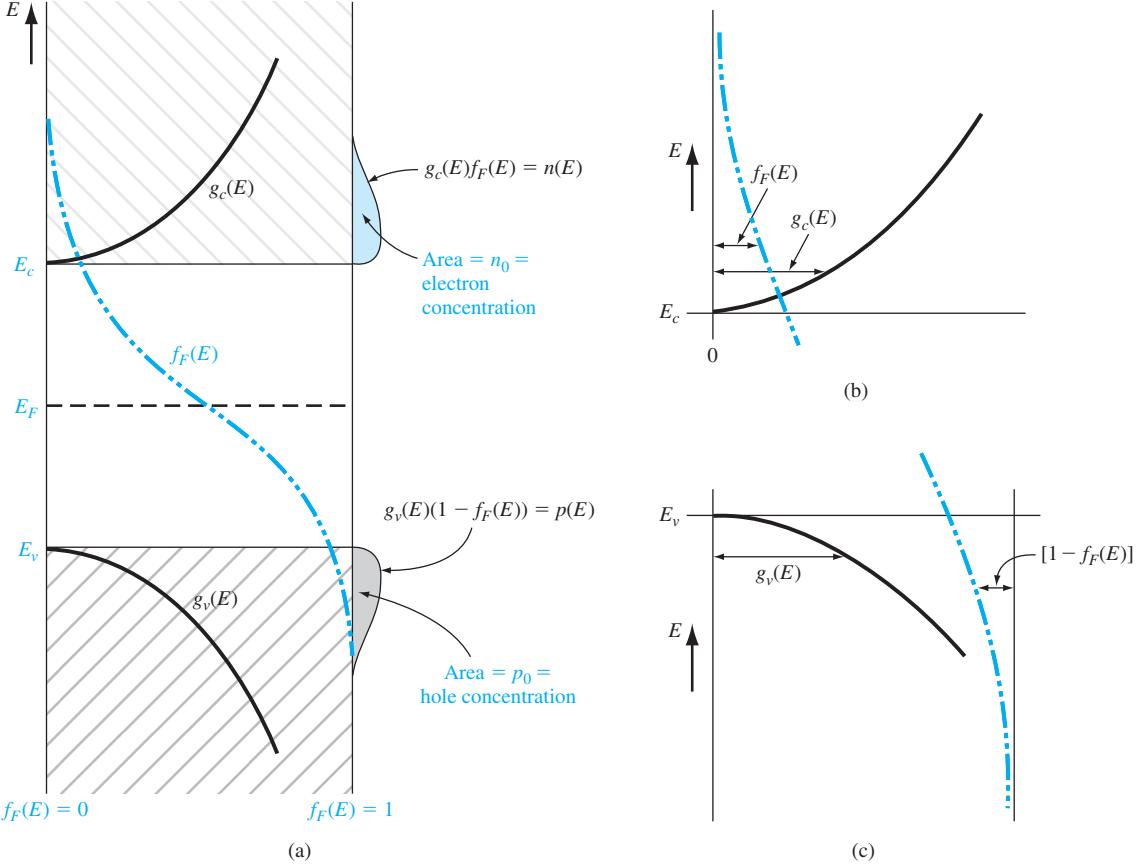


Figure 3.1: (a) 状态密度函数, 费米 - 狄拉克概率分布函数, 以及 E_F 位于禁带中央附近时表示电子和空穴浓度的面积; (b) 导带边缘放大图; (c) 价带边缘的放大图

3.1.2 n_0 方程和 p_0 方程

在推导热平衡电子浓度 n_0 和空穴浓度 p_0 的方程式, 我们将使用简约玻尔兹曼假设 (2.34). 在热平衡时电子浓度为

$$n_0 = \int g_c(E) f_F(E) dE \quad (3.3)$$

积分下限为 E_c , 积分上限为允许的导带能量的最大值. 但是由于费米概率分布函数随着能量增加而呈指数衰减, 因此可以把积分上限设为无穷大. 我们利用简约玻尔兹曼假设可以得到带到电子热平衡浓度为

$$n_0 = \int g_c(E) f_F(E) dE \approx \int_{E_c}^{\infty} \frac{4\pi(2m_n^*)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E - E_c} \exp\left(\frac{-(E - E_F)}{kT}\right) dE \quad (3.4)$$

对上式做一个积分变量替换

$$\eta = \frac{E - E_c}{kT} \quad (3.5)$$

则有

$$n_0 = \frac{4\pi(2m_n^* kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(\frac{-(E_c - E_F)}{kT}\right) dE \int_0^{\infty} \sqrt{\eta} e^{-\eta} d\eta \quad (3.6)$$

积分项为伽马函数, 其值为

$$\int_0^\infty \sqrt{\eta} e^{-\eta} d\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (3.7)$$

因此有

$$n_0 = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right) \quad (3.8)$$

我们可以定义参数 N_c 为

$$N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* k T}{h^2} \right)^{3/2} \quad (3.9)$$

所以导带电子的热平衡浓度可以表示为

$$n_0 = N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right] \quad (3.10)$$

参数 N_c 称为导带有效状态密度. 若假设 $m_n^* = m_0$, 则 $T = 300K$ 时有效状态底函数值为 $N_c = 2.5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 这是大多数半导体中 N_c 的数量级.

假设 $T = 300K$ 时硅的费米能级位于导带下方 $0.25eV$ 处, 且此时硅中 $N_c = 2.8 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, 那么

$$f_F(E_c) \approx \exp \left[\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right] = \exp \left(\frac{-0.25}{0.0259} \right) \approx 6.34 \times 10^{-5} \quad (3.11)$$

相应的电子浓度为

$$n_0 = N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right] = 1.8 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3} \quad (3.12)$$

需要注意, 某个能级被占据的概率很小, 但是有大量的能级存在, 所以电子浓度值也是可观的. 另外在 $T = 300K$ 时, $kT \approx 0.0259eV$.

同理可得价带中空穴的热平衡浓度

$$p_0 = \int g_v(E) [1 - f_F(E)] dE \quad (3.13)$$

若价带中 $(E_F - E_v) \gg kT$, 那么对玻尔兹曼近似改动可以得到

$$[1 - f_F(E)] dE \approx \exp \left[\frac{-(E_F - E)}{kT} \right] \quad (3.14)$$

$$p_0 \approx \int_{-\infty}^{E_v} \frac{4\pi(2m_p^*)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E_v - E} \exp \left(\frac{-(E_F - E)}{kT} \right) dE \quad (3.15)$$

同样使用积分变换

$$\zeta = \frac{E_v - E}{kT} \quad (3.16)$$

则有

$$p_0 = \frac{-4\pi(2m_p^*)^{3/2}}{h^3} \exp \left(\frac{-(E_F - E_v)}{kT} \right) \int_{+\infty}^0 \sqrt{\zeta} e^{-\zeta} d\zeta \quad (3.17)$$

因此有

$$p_0 = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{-(E_F - E_v)}{kT} \right) \quad (3.18)$$

我们可以定义参数 N_v 为

$$N_v = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* k T}{h^2} \right)^{3/2} \quad (3.19)$$

所以价带空穴的热平衡浓度可以表示为

$$p_0 = N_v \exp \left[\frac{-(E_F - E_v)}{kT} \right] \quad (3.20)$$

N_v 为价带有效状态密度. 当 $T = 300K$ 时, 对于大多数半导体, N_v 的数量级也是 $10^{19} cm^{-3}$.

需要牢记的是

$$N_c, N_v \sim (m^* T)^{3/2} \quad (3.21)$$

$T = 300K$ 时, 硅的 $N_v = 1.04 \times 10^{19} cm^{-3}$

Table 3.1: 有效状态密度和有效质量

	$N_c(cm^{-3})$	$N_v(cm^{-3})$	m_n^*/m_0	m_p^*/m_0
硅	2.8×10^{19}	1.04×10^{19}	1.08	0.56
砷化镓	4.7×10^{17}	7.0×10^{18}	0.064	0.48
锗	1.04×10^{19}	6.0×10^{18}	0.55	0.37

3.1.3 本征载流子浓度

本征半导体中导带中的电子浓度等于价带中的空穴浓度值, 因为电子和空穴是成对出现的. 本征半导体中电子浓度和空穴浓度分别表示为 n_i, p_i . 由于 $n_i = p_i$, 我们通常简单地用 n_i 表示本征载流子浓度.

本征半导体的费米能级称为本征费米能级, 或 $E_F = E_{Fi}$, 且有

$$n_0 = n_i = N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_{Fi})}{kT} \right] \quad (3.22)$$

$$p_0 = p_i = n_i = N_v \exp \left[\frac{-(E_{Fi} - E_v)}{kT} \right] \quad (3.23)$$

将上述两式合并有

$$\begin{aligned} n_i^2 &= N_c N_v \exp \left[\frac{-(E_c - E_{Fi})}{kT} \right] \cdot \exp \left[\frac{-(E_{Fi} - E_v)}{kT} \right] \\ &= N_c N_v \exp \left[\frac{-(E_c - E_v)}{kT} \right] = N_c N_v \exp \left[\frac{-E_g}{kT} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

其中 E_g 为禁带宽度. 对于给定的半导体材料, 当温度恒定时, n_i 为定值, 与费米能级无关.

Table 3.2: $T = 300K$ 时公认的 n_i 值

硅	$n_i = 1.5 \times 10^{10} cm^{-3}$
砷化镓	$n_i = 1.8 \times 10^6 cm^{-3}$
锗	$n_i = 2.4 \times 10^{13} cm^{-3}$

3.1.4 费米能级位置

下面我们将精确计算出本征费米能级的位置。由于电子浓度和空穴浓度相等，令式 (3.44) 和式 (3.20) 相等，则有

$$N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_{Fi})}{kT} \right] = N_v \exp \left[\frac{-(E_{Fi} - E_v)}{kT} \right] \quad (3.25)$$

对上式两端同时取对数有

$$E_{Fi} = \frac{1}{2}(E_c + E_v) + \frac{1}{2}kT \ln \left(\frac{N_v}{N_c} \right) \quad (3.26)$$

把式 (3.9) 和式 (3.19) 带代入上式有

$$E_{Fi} = \frac{1}{2}(E_c + E_v) + \frac{3}{4}kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) \quad (3.27)$$

我们定义禁带中央能量为 E_{midgap}

$$E_{midgap} = \frac{1}{2}(E_c + E_v) \quad (3.28)$$

则

$$E_{Fi} - E_{midgap} = \frac{3}{4}kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) \quad (3.29)$$

如果 $m_p^* = m_n^*$, 则本征费米能级在禁带中央, 若 $m_p^* > m_n^*$, 则本征费米能级会稍高于禁带中央, 若 $m_p^* < m_n^*$, 则本征费米能级会稍低于禁带中央。因为状态密度函数与载流子的有效质量直接相关, 有效质量越大意味着状态密度越大, 因此本征费米能级位置也必定将随状态密度的增大而发生移动, 以保持电子和空穴数量相等。

$T = 300K$ 时, 硅的本征费米能级相对禁带中央位置为

$$E_{Fi} - E_{midgap} = \frac{3}{4}kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) = \frac{3}{4}0.0259 \ln \left(\frac{0.56}{1.08} \right) = -0.0128eV = -12.8meV \quad (3.30)$$

12.8meV 与硅的禁带宽度的一半 (560meV) 相比可以忽略。

3.2 掺杂原子与能级

掺杂半导体称为非本征半导体。

3.2.1 定型描述

在硅晶格中掺杂入 V 族元素, 如磷, 由于 V 族元素有五个价电子, 其中四个与硅原子结合形成共价键, 剩下的第五个则松散地束缚于磷原子上, 第五个价电子称为施主电子. 磷原子失去施主电子后带正电. 在温度极低时, 施主电子束缚在磷原子上. 但是很显然, 激发价电子进入导带所需的能量, 与激发那些共价键束缚的电子所需的能量相比, 会小得多. 下图画出了我们所设想的能带图, 能级 E_d 是施主电子的能量状态.

如果施主电子获得了少量能量, 如热能, 就能激发到导带, 留下一个带正电的磷原子. 导带中的这个电子此时能在整个晶体中形成电流, 而带正点的磷离子固定不动. 因为这种类型的杂质原子向导带提供了电子, 所以我们称之为施主杂质原子. 由于施主杂质原子增加导带电子而不产生价带空穴, 所以此时的半导体称为 n 形式半导体.

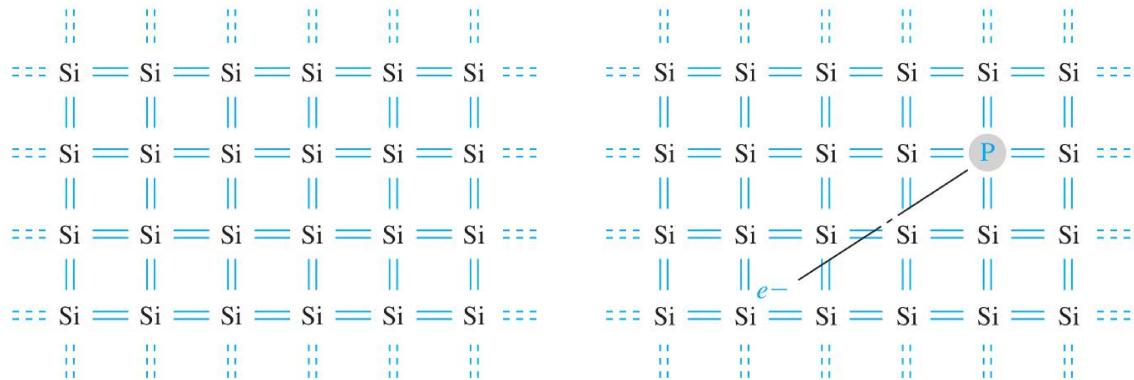


Figure 3.2: (a) 本征硅晶格的二维表示; (b) 掺有一个磷原子的硅晶格的二维表示

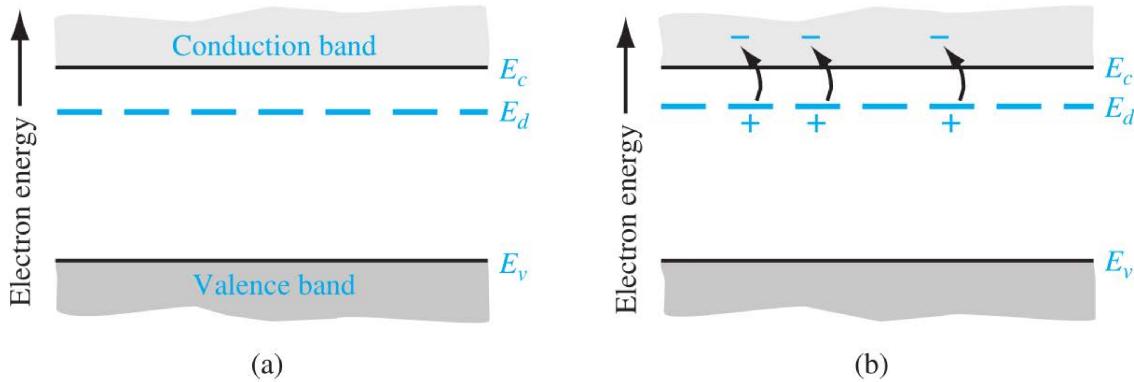


Figure 3.3: (a) 带有分立的施主能级的能带图; (b) 施主能级电离能带图

现在假定掺入 III 族元素, 如硼, 作为硅的杂质.III 族元素有三个价电子, 并且与硅都结合形成共价键. 有一个共价键的位置是空的. 如果有一个电子想要填充这个空位, 因为此时硼原子带负电, 它的能量必须比价电子的能量高. 但是占据这个空位的电子并不具有足够的能量进入到导带, 它的能量远小于导带底部能量.III 族元素原子从价带中获得电子, 因此我

们称之为受主杂质原子. 受主杂质原子能在价带中产生空穴, 但是不在导带中产生电子. 我们称这类半导体材料为 p 型材料.

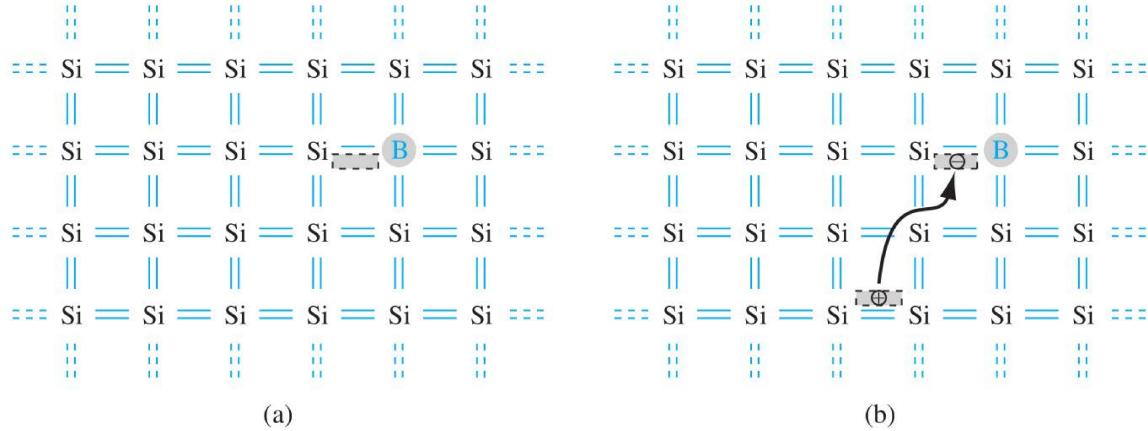


Figure 3.4: (a) 掺有一个硼原子的硅晶格的二维表示; (b) 硼原子电离产生空穴

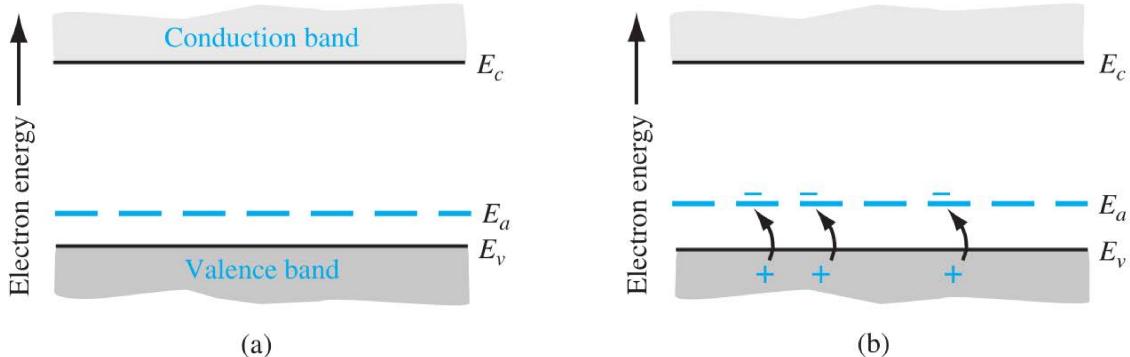


Figure 3.5: (a) 带有分立的受主能级的能带图; (b) 受主能级电离能带图

3.2.2 电离能

To be continued...

3.3 非本征半导体

在非本征半导体中, 电子或空穴两者中的一种将占据主导作用.

3.3.1 电子和空穴的平衡状态分布

图 (3.6(a)) 显示了 $E_F > E_{Fi}$ 的情况, 此时电子浓度高于空穴浓度, 为 n 型掺杂, 很显然, 只有费米能级更高时, 在导带的量子能态才有更大的几率被电子占领, 才会有更多的自由电子出现. 图 (3.6(b)) 显示了 $E_F < E_{Fi}$ 的情况, 此时电子浓度低于空穴浓度, 为 p 型掺

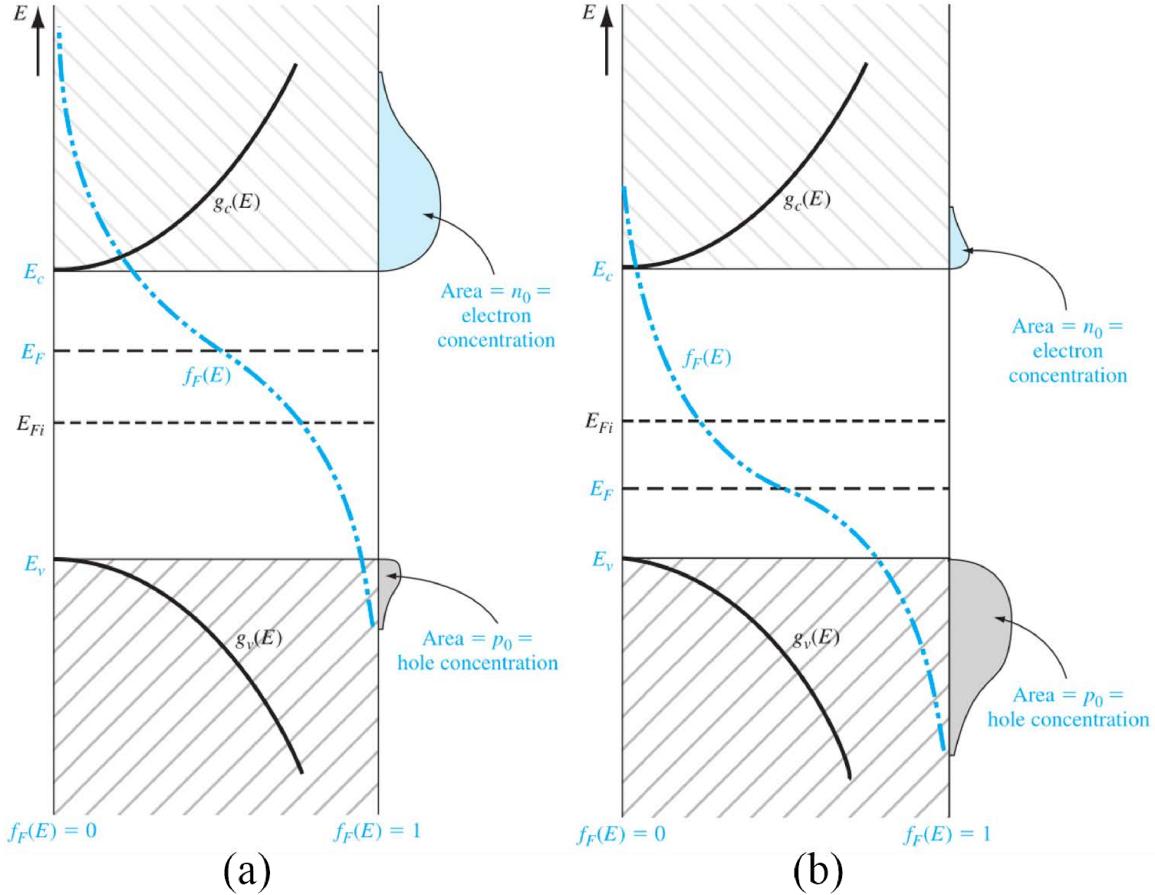


Figure 3.6: (a)n 型半导体 E_F 高于本征费米能级; (b)p 型半导体 E_F 低于本征费米能级时的状态函数密度, 费米 - 狄拉克概率分布函数以及代表电子浓度和空穴浓度

杂, 很显然, 只有费米能级更低时, 在价带的量子能态才有更大的几率不被电子占领 (或者说被空穴占领), 才会有更多的空穴出现.

$$n_0 = N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right] \quad (3.31)$$

$$p_0 = N_v \exp \left[\frac{-(E_F - E_v)}{kT} \right] \quad (3.32)$$

上述两个公式说明了费米能级是如何影响 n_0 和 p_0 的浓度的. 我们也可以推导出热平衡状态下电子浓度和空穴浓度的另一种表达形式

$$\begin{aligned} n_0 &= N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right] = N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_{Fi}) + (E_F - E_{Fi})}{kT} \right] \\ &= N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_{Fi})}{kT} \right] \exp \left[\frac{(E_F - E_{Fi})}{kT} \right] \\ &= n_i \exp \left[\frac{(E_F - E_{Fi})}{kT} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

同理有

$$p_0 = p_i \exp \left[\frac{-(E_F - E_{F_i})}{kT} \right] \quad (3.34)$$

从式子 (3.33)(3.34) 可以看出, 当 E_F 变大时, 电子浓度 n_0 变大, 空穴浓度 p_0 变小, 反之亦反.

3.3.2 n_0 和 p_0 的乘积

根据式 (3.44) 和 (3.20) 表达式可得

$$n_0 p_0 = N_c N_v \exp \left[\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right] \exp \left[\frac{-(E_F - E_v)}{kT} \right] \quad (3.35)$$

该式也可以写成

$$n_0 p_0 = N_c N_v \exp \left[\frac{-E_g}{kT} \right] = n_i^2 \quad (3.36)$$

对于某一温度下的给定的半导体材料, 其 n_0 和 p_0 的乘积总是一个常数, 与掺杂浓度无关. 但需要注意的是, 上述关系式是基于玻尔兹曼近似得到的, 如果此假设不成立, 那么上述关系式也不成立.

3.4 施主和受主的统计学分布

3.4.1 概率分布函数

推导费米 - 狄拉克概率分布函数的基本前提是 Pauli 不相容原理, 它规定每个量子态只允许容纳一个粒子.

3.4.2 完全电离和束缚态

To be continued...

3.5 电中性状态

在热平衡条件下, 半导体处于电中性, 净电荷密度为零. 下面将定义补偿半导体, 并确定以施主和受主浓度为函数的电子浓度和空穴浓度.

3.5.1 补偿半导体

补偿半导体是指在同一区域内同时含有施主和受主杂质原子的半导体. 当 $N_d > N_a$ 时, 就形成了 n 型补偿半导体; 当 $N_d < N_a$ 时, 就形成了 p 型补偿半导体; 当 $N_d = N_a$ 时, 就形成了完全型补偿半导体, 它具有本征半导体的特性. 后面我们会看到, 在器件生产过程中, 补偿半导体的出现是必然的.

3.5.2 平衡电子和空穴浓度

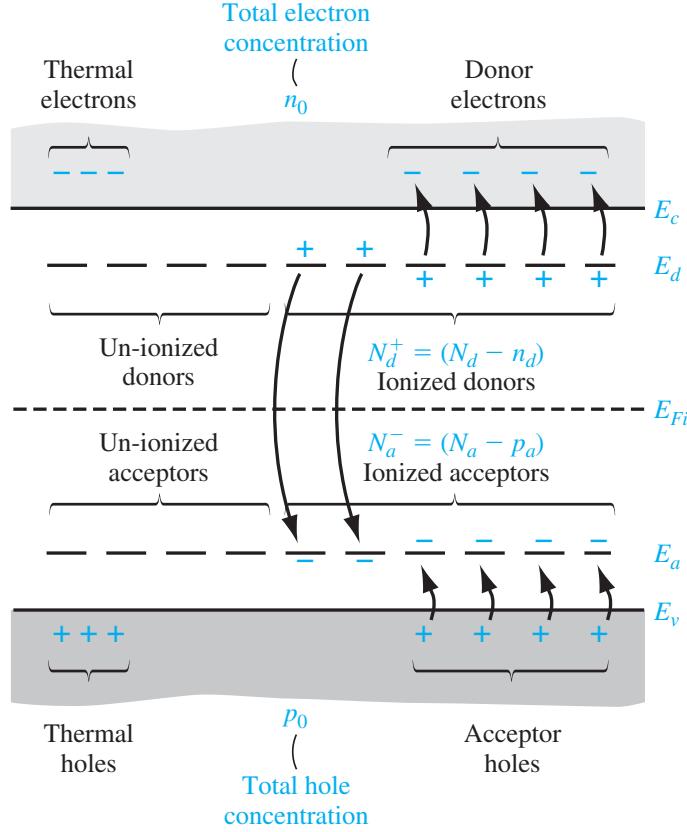


Figure 3.7: 补偿型半导体能带图揭示了电离和非电离的施主和受主状态

由电中性条件有

$$n_0 + N_a^- = p_0 + N_d^+ \quad (3.37)$$

或者

$$n_0 + (N_a - p_a) = p_0 + (N_d - n_d) \quad (3.38)$$

其中 n_d 是指电子占据施主能级的密度 (施主未电离), N_d 是掺杂施主密度, N_d^+ 是电离的施主浓度; p_a 是受主能级中空穴密度, N_a 是掺杂受主元素密度, N_a^- 是电离受主浓度. 上述公式说的是补偿型半导体热平衡时导带中的电子 (负电) 密度加上电离后带负电的受主浓度会等于价带中的空穴浓度加上电离后带正点的施主的密度.

假设完全电离, 则 n_d 和 p_a 均为零, 故有

$$n_0 + N_a = p_0 + N_d \quad (3.39)$$

如果用 n_i^2/n_0 表示 p_0 , 那么上式可以写为

$$n_0 + N_a = \frac{n_i^2}{n_0} + N_d \quad (3.40)$$

进一步有

$$n_0^2 - (N_d - N_a)n_0 - n_i^2 = 0 \quad (3.41)$$

于是可以解出电子的浓度 n_0

$$n_0 = \frac{(N_d - N_a)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(N_d - N_a)}{2}\right)^2 + n_i^2} \quad (3.42)$$

公式 (3.43) 对于 $N_a = 0$ 的情况也适用。当掺杂浓度 $N_d \gg n_i$ 时，基本导带中的电子浓度等于掺杂浓度。但是掺杂浓度和 n_i 差不多时，导带中的电子浓度还会受到本征载流子浓度的影响，特别当温度非常高时， n_i^2 占据主导，此时半导体将失去其非本征 (extrinsic) 特性。

对于空穴，同理我们可以解出

$$p_0 = \frac{(N_a - N_d)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(N_a - N_d)}{2}\right)^2 + n_i^2} \quad (3.43)$$

3.6 费米能级的位置

假设玻尔兹曼假设有效，那么根据

$$n_0 = N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right] \quad (3.44)$$

我们可以求解出

$$E_c - E_F = kT \ln \frac{N_c}{n_0} \quad (3.45)$$

其中 n_0 由公式 (3.43) 给出，如果掺杂浓度远远高于本征载流子浓度，即 $N_d \gg n_i$ ，则有 $n_0 \approx N_d$ ，于是

$$E_c - E_F = kT \ln \left(\frac{N_c}{N_d} \right) \quad (3.46)$$

若是补偿型半导体，则上式改写为

$$E_c - E_F = kT \ln \left(\frac{N_c}{N_d - N_a} \right) \quad (3.47)$$

对于 n 型半导体，我们还可以推导出不同于费米能级位置的表达式，根据 (3.33)

$$n_0 = n_i \exp \left[\frac{(E_F - E_{Fi})}{kT} \right] \quad (3.48)$$

可以得到

$$E_F - E_{Fi} = kT \ln \left(\frac{n_0}{n_i} \right) \quad (3.49)$$

对于 p 型半导体同理有

$$E_F - E_v = kT \ln \left(\frac{N_v}{p_0} \right) \quad (3.50)$$

若 $N_a \gg n_i$, 则

$$E_F - E_v = kT \ln \left(\frac{N_v}{N_a} \right) \quad (3.51)$$

我们也可以推导出费米能级与本征费米能级之差的表达式.

$$E_{Fi} - E_F = kT \ln \left(\frac{p_0}{n_i} \right) \quad (3.52)$$

Chapter 4

载流子运输现象

半导体中的电子和空穴都会产生电流, 我们把载流子的这种运动过程称为运输 (Carrier Transport).

4.1 载流子的漂流运动

在电场里的作用下载流子的运动称为漂移运动, 载流子电荷的净漂移形成漂移电流.

4.1.1 漂移电流密度

如果密度为 ρ 的正电荷以平均漂移速度 v_d 运动, 则其形成的漂移电流密度为

$$J_{drf} = \rho v_d \quad (4.1)$$

其中 J 的单位是 $Ccm^{-2}s^{-1}$ 或者 Acm^{-2} . 若体电荷是带正点的空穴, 那么

$$J_{p|drf} = (ep)v_{dp} \quad (4.2)$$

其中 $J_{p|drf}$ 表示空穴形成的漂移电流, 而 v_{dp} 表示空穴的平均漂移速度.

在电场的作用下, 空穴的运动方程为

$$F = m_p^* a = eE \quad (4.3)$$

在电场的作用下, 晶体中的空穴获得加速度, 速度增加. 当载流子同晶体中的原子碰撞后, 载流子粒子损失了大部分或者全部能量. 然后粒子将重新开始加速并且获得能量, 直到下一次受到散射. 这一过程不断重复. 因此, 在整个过程中, 粒子将具有一个平均漂移速度. 在弱电场情况下, 平均漂移速度与电场成正比.

$$v_{dp} = \mu_p E \quad (4.4)$$

其中 μ_p 称为**空穴迁移率 (hole mobility)**. 迁移率描述了粒子在电场作用下的运动情况. 迁移率的单位是 $cm^2V^{-1}s^{-1}$. 空穴的漂移电流可以用迁移率表示

$$J_{p|drf} = (ep)v_{dp} = e\mu_p p E \quad (4.5)$$

同理可以得到电子的漂移电流密度为

$$J_{n|drf} = (-en)v_{dn} = (-en)(-\mu_n E) = e\mu_n n E \quad (4.6)$$

下面给出 $T = 300K$ 时低掺杂浓度下的一些典型迁移率. 电子和空穴对漂移电流都有贡献,

Table 4.1: $T = 300K$ 时, 低掺杂浓度下的典型迁移率值

	$\mu_n(cm^2V^{-1}s^{-1})$	$\mu_p(cm^2V^{-1}s^{-1})$
Si	1350	480
GaAs	8500	400
Ge	3900	1900

所以总漂移电流密度是电子漂移电流密度与空穴漂移密度之和.

$$J_{drf} = e(\mu_n + \mu_p p)E \quad (4.7)$$

Problem 4.1.1. 当 $T = 300K$ 时, GaAs 的掺杂浓度为 $N_a = 0$, $N_d = 10^{16}cm^{-3}$, 设杂质全部电离, 电子和空穴的迁移率如表 (??). 若外加电场强度为 $E = 10Vcm^{-1}$, 求漂移电流密度.

Solution 4.1.1. 此半导体为 n 型半导体体, 多数载流子的浓度为

$$n = \frac{(N_d - N_a)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(N_d - N_a)}{2}\right)^2 + n_i^2} \approx 10^{16}cm^{-3} \quad (4.8)$$

少数载流子空穴的浓度为

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{(1.8 \times 10^6)^2}{10^{16}} = 3.24 \times 10^{-4}cm^{-3} \quad (4.9)$$

n 型非本征半导体漂移电流为

$$J_{drf} = e(\mu_n + \mu_p p)E \approx e\mu_n N_d E = (1.6 \times 10^{-19})(8500)(10^{16})(10) = 136 Acm^2 \quad (4.10)$$

Remark 4.1. 上面例子说明, 半导体上加较小的电场就能获得很大的漂移电流密度, 在非本征半导体中, 漂移电流密度基本上取决于多数载流子.

4.1.2 迁移率

空穴加速度与外力如电场力之间的关系为

$$F = m_p^* \frac{dv}{dt} = eE \quad (4.11)$$

其中 v 为电场作用下的漂移电流, 不包含热运动的速度. 假设初始漂移速度为零, 则上式对时间积分为

$$v = \frac{eEt}{m_p^*} \quad (4.12)$$

下图是无外加电场半导体中空穴的随机热运动示意图. τ_{cp} 表示碰撞的平均时间. 如果外加一个小电场 E , 空穴将在电场 E 的方向上发生漂移, 但是它的漂移速度仅仅是随机热运动速度的微小扰动, 平均碰撞时间不会显著变化. 如果把碰撞或散射前粒子的平均最大随度为

$$v_{d|peak} = \left(\frac{e\tau_{cp}}{m_p^*} \right) E \quad (4.13)$$

可见平均漂移速度为最大漂移速度的一半

$$\bar{v}_d = \frac{1}{2} \left(\frac{e\tau_{cp}}{m_p^*} \right) E \quad (4.14)$$

实际的彭汉族昂不像上述没顶那么简单, 但是该模型具有统计学性质. 在考虑了统计分布影响的精确模型中, 上述式子讲没有因此 $1/2$. 空穴迁移率为

$$\mu_p = \frac{v_{dp}}{E} = \frac{e\tau_{cp}}{m_p^*} \quad (4.15)$$

对电子进行类似分析也有

$$\mu_n = \frac{v_{dn}}{E} = \frac{e\tau_{cn}}{m_n^*} \quad (4.16)$$

在半导体中有两种散射机制影响载流子的迁移率:**晶格散射 (phonon or lattice scattering)** 和**电离杂质散射 (ionized impurity sattering)**.

当温度高于绝对零度, 半导体原子在晶格位置上做无规则热振动, 破坏了理想的周期势场. 导致载流子电子, 空穴与振动的晶格原子发生作用, 这种晶格散射也叫声子散射. 温度越高, 那么原子振动越剧烈, 散射概率增大, 因此根据散射理论, 在一阶近似情况下有

$$\mu_L \propto T^{-3/2} \quad (4.17)$$

在室温下杂质已经电离, 在电子或空穴与杂质之间存在库伦作用. 当温度升高时, 载流子随机热运动增强, 减少了位于电离杂质散射中心附近的时间. 库伦作用时间越短, 受到散射的影响就越小, μ_I 就越大. 如果电离杂质散射中心数量增加, 那么载流子与电离杂质散射中心碰撞的概率就相应的增加, μ_I 值减小.

$$\mu_I \propto \frac{T^{+3/2}}{N_I} \quad (4.18)$$

其中 $N_I = N_d^+ + N_a^-$ 表示半导体电离杂质总浓度.

dt/τ 表示在微分时间 dt 内散射的概率, 两种散射过程相互独立, 因此在 dt 时间内散射的概率为两者之和

$$\frac{dt}{\tau} = \frac{dt}{\tau_I} + \frac{dt}{\tau_L} \quad (4.19)$$

故有

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_L} \quad (4.20)$$

4.1.3 电导率

根据公式 (4.7), 漂移电流密度公式可以表示为

$$J_{drf} = e(\mu_n n + \mu_p p)E = \sigma E \quad (4.21)$$

其中 σ 表示半导体材料的电导率, 单位是 $(\Omega \cdot cm)^{-1}$. 电导率就是载流子浓度和迁移率的函数. 电阻率是电导率的倒数, 单位是 Ωcm

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{e(\mu_n + \mu_p p)} \quad (4.22)$$

对于条形半导体材料两端加上电压 V 就会产生电流 I , 假设条形横截面为 A , 长度为 L , 则

$$J = \frac{I}{A} \quad (4.23)$$

$$E = \frac{V}{L} \quad (4.24)$$

故

$$J = \frac{I}{A} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L} \quad (4.25)$$

因此

$$V = \frac{L}{\sigma A} I = \frac{\rho L}{A} I = IR \quad (4.26)$$

上述公式就是半导体中的欧姆定律.

4.1.4 饱和速度

一般来说外加电场不会显著改变电子的能量, 假如外加电场大约为 $75V/cm$, 对于 $T = 300K$ 时, 硅的热运动速度大约为 $10^7 cm/s$, 而低掺杂硅中电子迁移率为 $\mu_n = 1300 cm^2 V^{-1} s^{-1}$, 漂移速度大约为 $10^5 cm/s$, 大致为热运动速度的 1%. 但是当外加电场达到很大时, 载流子的漂移速度严重偏离了弱电场的线性关系. 例如硅电子漂移速度在外加电场达到 $30kV/s$ 时达到饱和, 饱和速度大致为 $10^7 cm/s$. 实验中得出了硅中电子对电场的关系式

$$v_n = \frac{v_s}{\sqrt{1 + \left(\frac{E_{on}}{E}\right)^2}} \quad (4.27)$$

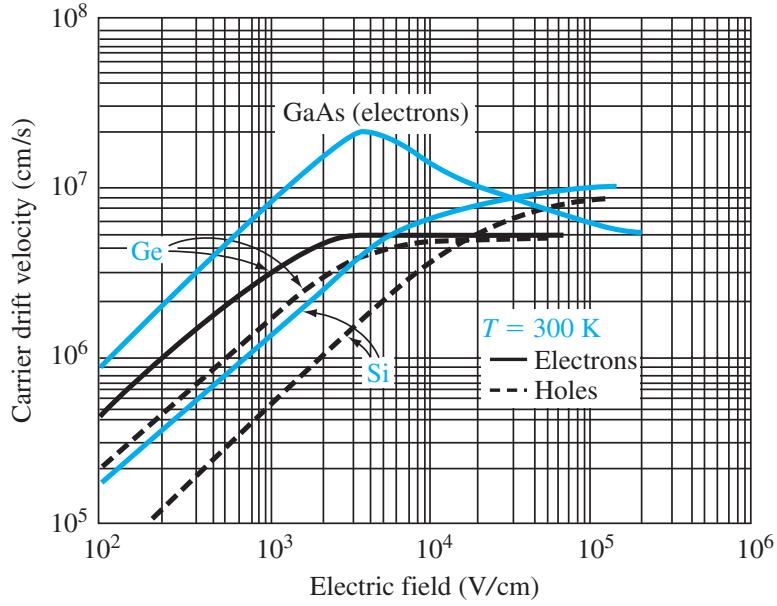


Figure 4.1: 材料载流子速度和外加电场的关系图

对于空穴有

$$v_p = \frac{v_s}{1 + \left(\frac{E_{op}}{E} \right)} \quad (4.28)$$

其中在 $T = 300K$ 时, $v_s = 10^7 \text{ cm/s}$, $E_{on} = 7 \times 10^3 \text{ V/cm}$, $E_{op} = 2 \times 10^4 \text{ V/cm}$

4.2 载流子扩散

若电子的平均自由程即电子在两次碰撞之间走过的平均距离为 l ($l = v_{th}\tau_{cn}$), 那么 $x = -l$ 处向右运动的电子和 $x = +l$ 处向左运动的电子都将通过 $x = 0$ 处, 故 x_0 处沿 $+x$ 方向的电子流速 F_n 为

$$F_n = \frac{1}{2}n(-l)v_{th} - \frac{1}{2}n(+l)v_{th} = \frac{1}{2}v_{th}[n(-l) - n(+l)] \quad (4.29)$$

进一步有

$$F_n = -v_{th}l \frac{n(-l) - n(+l)}{-2l} = -v_{th}l \frac{dn}{dx} \quad (4.30)$$

因此电流密度为

$$J = -eF_n = ev_{th}l \frac{dn}{dx} \quad (4.31)$$

上述公式的直观理解可以令 $dx = l$, 然后 $J = ev_{th}(dn)$ 了, 这个和漂移速度表达式非常像, 但是这种驱动力不是来源于外界电场, 而是内部载流子浓度在空间上的分布不均, 即 dn . 在这里我们定义电子扩散系数 $D_n = v_{th}l$, 其单位为 cm^2/s .

$$J_{nx|dif} = eD_n \frac{dn}{dx} \quad (4.32)$$

对于空穴有

$$J_{px|dif} = -eD_p \frac{dp}{dx} \quad (4.33)$$

4.2.1 总电流密度

半导体中总电流包括电子漂移电流和扩散电流, 空穴漂移电流和扩散电流, 对于一维情况有

$$J = en\mu_n E_x + ep\mu_p E_x + eD_n \frac{dn}{dx} - eD_p \frac{dp}{dx} \quad (4.34)$$

推广到三维

$$J = en\mu_n E + ep\mu_p E + eD_n \nabla n - eD_p \nabla p \quad (4.35)$$

4.3 杂质的梯度分布

4.3.1 感应电场

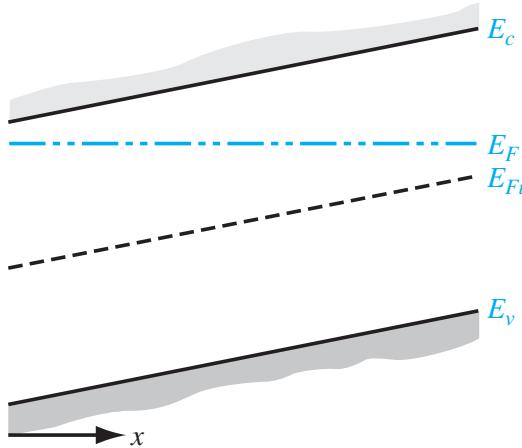


Figure 4.2: 非均匀半导体热平衡时的能带图

考虑一块非均匀掺入施主的 n 型半导体, 掺杂浓度随着 x 增加而减小, 多数载流子电子从高浓度区域向低浓度区域沿着 $+x$ 方向扩散, 留下了带正点的施主杂质离子. 分离的正负电荷产生了一个沿着 $+x$ 的内建电场, 抵抗了扩散过程. 当达到平衡状态时, 扩散载流子的浓度并不等于固定杂质的浓度, 感生电场组织了正负电荷的进一步分离. 大多数情况下, 扩散感应出的空间电荷数只占据杂质浓度的很小部分.

电势 ϕ 等于电子势能除以电子电量 ($-e$)

$$\phi = +\frac{1}{e}(E_F - E_{Fi}) \quad (4.36)$$

一维情况下感生电场定义为

$$E_x = -\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{e} \frac{dE_{Fi}}{dx} \quad (4.37)$$

当电场加载在 n 型半导体两端, 每个电子都会经历一个 $-qE$ 的力, 而这个力等于负的势能的梯度

$$-qE = -\frac{dE_c}{dx} \quad (4.38)$$

就爱如满足准中性条件, 电子浓度与施主杂质浓度基本相等, 则有

$$n_0 = n_i \exp \left[\frac{E_F - E_{Fi}}{kT} \right] \approx N_d(x) \quad (4.39)$$

求解 $E_F - E_{Fi}$ 得

$$E_F - E_{Fi} = kT \ln \left(\frac{N_d(x)}{n_i} \right) \quad (4.40)$$

两边对 x 微分得到

$$-\frac{dE_{Fi}}{dx} = \frac{kT}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} \quad (4.41)$$

故

$$E_x = -\frac{kT}{e} \frac{1}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} \quad (4.42)$$

4.3.2 爱因斯坦关系

考虑图 (11.1) 中所示的非均匀掺杂半导体. 假设没有外加电场, 半导体处于热平衡, 则电子电流和空穴电流分别等于零 (否则某个地方的电子或空穴会随时间凭空增加).

$$J_n = 0 = en\mu_n E_x + eD_n \frac{dn}{dx} \quad (4.43)$$

设半导体满足准中性条件, 即 $n \approx N_d(x)$, 则上式可以重写为

$$J_n = 0 = e\mu_n N_d(x) E_x + eD_n \frac{dN_d(x)}{dx} \quad (4.44)$$

把公式 (11.14) 代入上式有

$$0 = -e\mu_n N_d(x) \left(\frac{kT}{e} \right) \frac{1}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} + eD_n \frac{dN_d(x)}{dx} \quad (4.45)$$

由此我们

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{e} \quad (4.46)$$

同理我们由空穴电流为零, 可以得到

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT}{e} \quad (4.47)$$

因此有

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT}{e} \quad (4.48)$$

可以看到扩散系数和迁移率不是彼此独立的参数. 公式 (11.20) 给出的扩散系数和迁移率之间的关系称为爱因斯坦关系. 在 $T = 300K$, $\frac{kT}{e}$ 大致为 $1/40$, 即扩散系数约为迁移率的 $1/40$.

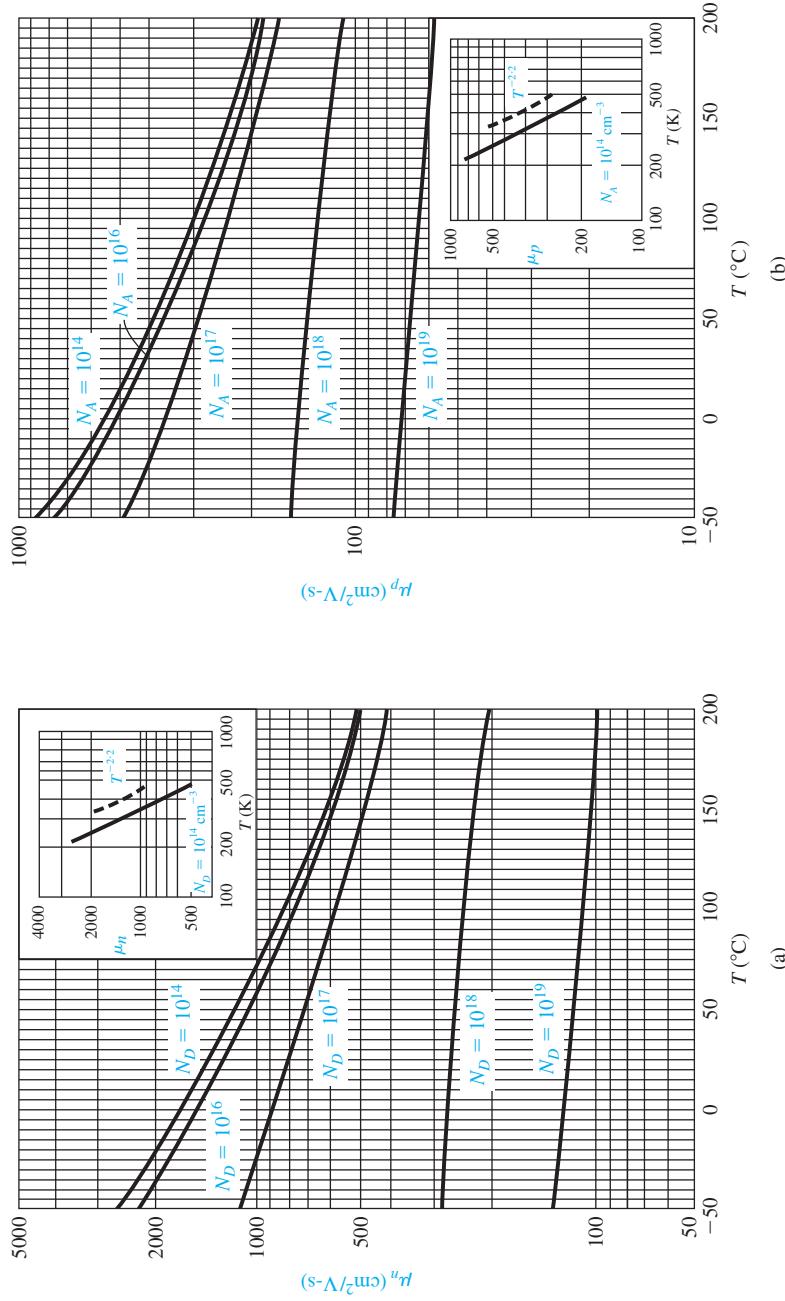


Figure 5.2 | (a) Electron and (b) hole mobilities in silicon versus temperature for various doping concentrations. Insets show temperature dependence for “almost” intrinsic silicon.
(From Pierret [8].)

Figure 4.3: 材料迁移率和温度的关系图

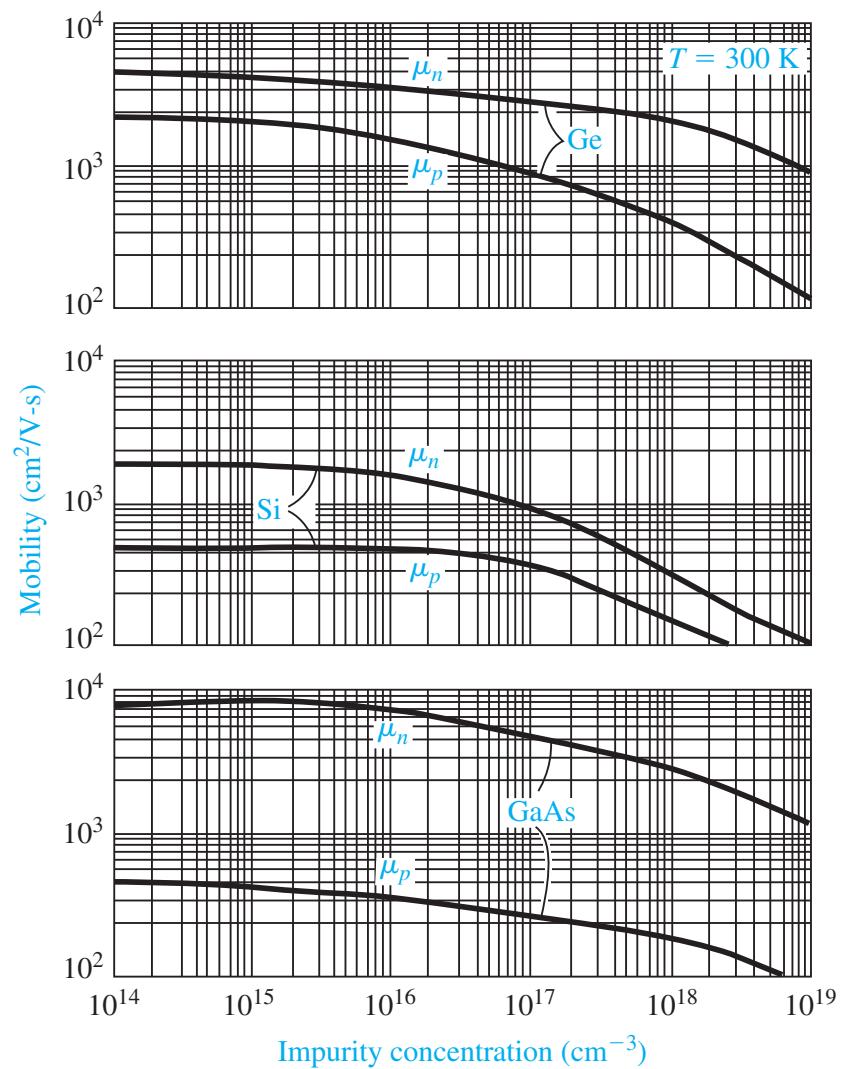


Figure 4.4: 材料迁移率和掺杂浓度的关系图

Chapter 5

半导体中过剩的载流子

5.1 载流子的产生与复合

5.1.1 平衡状态半导体

由于热学过程的随机性, 电子会不断收到热激发而从价带跃迁入导带. 同时导带中电子会在晶体中随机移动, 当其靠近空穴时就有可能落入价带中的空穴状态. 这种复合过程同时消灭了电子和空穴. 在热平衡状态下, 电子和空穴的产生率一定与它们的复合率相等. 如图 (5.1) 分别令 G_{n0} 和 G_{p0} 为电子和空穴的产生率, 单位是 $\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$, 即单位时间单位空间内

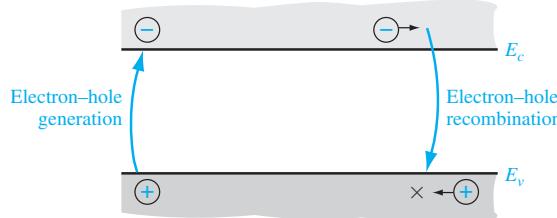


Figure 5.1: 电子和空穴的产生与复合

产生的数量. 对于直接带隙产生来说, 电子和空穴是成对出现的, 因此一定有

$$G_{n0} = G_{p0} \quad (5.1)$$

分别令 R_{n0} 和 R_{p0} 为电子和空穴的复合率, 单位仍然是 $\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$. 对于直接带隙产生来说, 电子和空穴是成对消失的, 因此一定有

$$R_{n0} = R_{p0} \quad (5.2)$$

因此对于热平衡状态来说, 电子和空穴的浓度与时间无关, 因此产生和复合的概率相等

$$G_{n0} = G_{p0} = R_{n0} = R_{p0} \quad (5.3)$$

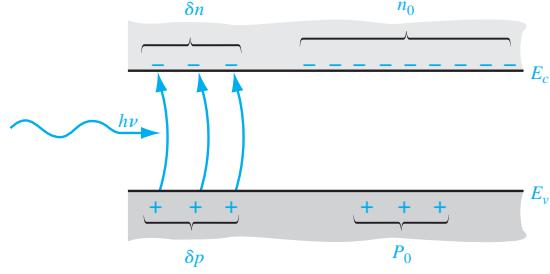


Figure 5.2: 光产生过剩电子和空穴的密度

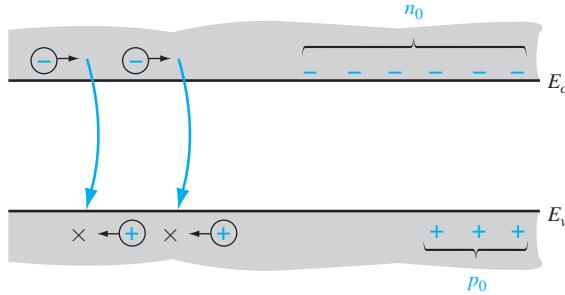


Figure 5.3: 过剩载流子复合后重建热平衡

5.1.2 过剩载流子的产生与复合

Table 5.1: 本章中用到的一些相关符号

符号	定义
n_0, p_0	热平衡电子和空穴的浓度 (时间空间无关)
n, p	总电子和空穴的浓度 (可能是时间或者位置的函数)
$\delta n = n - n_0$	过剩电子的浓度 (可能是时间或者位置的函数)
$\delta p = p - p_0$	过剩空穴的浓度 (可能是时间或者位置的函数)
g'_n, g'_p	过剩电子和空穴产生率
R'_n, R'_p	过剩电子和空穴复合率
τ_{n0}, τ_{p0}	过剩少数载流子电子和空穴的寿命

假设外界有高能光子入射半导体, 从而导致价带中电子被激发到导带. 这种额外电子和空穴就称为过剩电子和过剩空穴. 此时平衡状态受到扰动, 此时半导体不再处于热平衡状态, 即 $np \neq n_0 p_0 = n_i^2$.

$$\frac{dn(t)}{dt} = \alpha_r [n_i^2 - n(t)p(t)] \quad (5.4)$$

其中

$$n(t) = n_0 + \delta n(t) \quad (5.5)$$

$$p(t) = p_0 + \delta p(t) \quad (5.6)$$

$\alpha_r n_i^2$ 是热平衡状态的生成率.

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta n(t))}{dt} &= \alpha_r [n_i^2 - (n_0 + \delta n(t))(p_0 + \delta p(t))] \\ &= -\alpha_r \delta n(t) [(n_0 + p_0) + \delta n(t)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

考虑 p 型材料 ($p_0 \gg n_0$), 过剩载流子小注入条件 ($\delta n(t) \ll p_0$) 下有

$$\frac{d(\delta n(t))}{dt} = -\alpha_r p_0 \delta n(t) \quad (5.8)$$

上述方程解为非平衡浓度的指数衰减函数

$$\delta n(t) = \delta n(0) e^{-\alpha_r p_0 t} = \delta n(0) e^{-t/\tau_{n0}} \quad (5.9)$$

其中 $\tau_{n0} = 1/(\alpha_r p_0)$. 且 τ_{n0} 用来代表过剩少数载流子的寿命. 对于直接带间复合, 有

$$R'_n = R'_p = -\frac{d(\delta n(t))}{dt} = \alpha_r p_0 \delta n(t) = \frac{\delta n(t)}{\tau_{n0}} \quad (5.10)$$

一般情况下, 产生率和复合率是时间和空间的函数.

5.2 过剩载流子的性质

扩散和漂移同时存在时, 称为双极运输 (ambipolar transport).

5.2.1 连续性方程

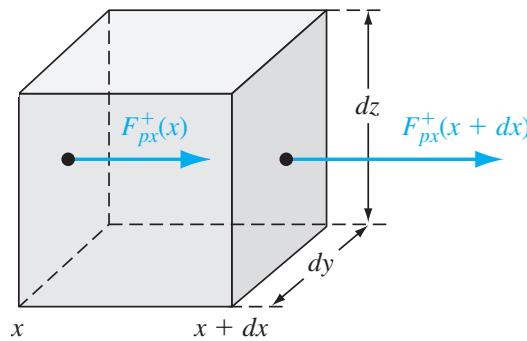


Figure 5.4: 微分体积元中空穴粒子流图

下面讨论电子和空穴的连续性方程. 参数 F_{px}^+ 是空穴粒子的流量 (flux), 单位为 $cm^{-2}s^{-1}$. 对于 x 方向的粒子流密度有

$$F_{px}^+(x + dx) = F_{px}^+(x) + \frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} dx \quad (5.11)$$

微分体积元中沿着 x 方向的粒子流产生的空穴净增量为

$$\frac{\partial p}{\partial t} dx dy dz = [F_{px}^+(x+dx) - F_{px}^+(x)] dy dz = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} dx dy dz \quad (5.12)$$

空穴的产生率和复合率也会影响微分体积中的空穴浓度，于是微分体积元中单位时间空穴的总增加量为

$$\frac{\partial p}{\partial t} dx dy dz = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} dx dy dz + g_p dx dy dz - \frac{p}{\tau_{pt}} dx dy dz \quad (5.13)$$

其中 p 为空穴密度，单位时间单位空间内空穴数量的增加等于由外部流入的空穴数加上单位时间内生成的空穴数，再减去单位时间内复合导致的空穴减少量。空穴复合率由 p/τ_{pt} 给出， τ_{pt} 包括热平衡载流子寿命以及过剩载流子寿命。上式可以精简为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} + g_p - \frac{p}{\tau_{pt}} \quad (5.14)$$

同理对于一维电子连续性方程有

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial F_{nx}^-}{\partial x} + g_n - \frac{n}{\tau_{nt}} \quad (5.15)$$

5.2.2 与时间有关的扩散项

$$J_p = en\mu_p E - eD_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.16)$$

$$J_n = en\mu_n E + eD_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad (5.17)$$

两边同时除以电荷就得到了粒子流量 flux

$$\frac{J_p}{+e} = F_p^+ = n\mu_p E - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.18)$$

$$\frac{J_n}{-e} = F_p^- = -n\mu_n E - D_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad (5.19)$$

将上述两式子带入到连续性方程 (5.14)(5.15) 中

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mu_p \frac{\partial(pE)}{\partial x} + D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + g_p - \frac{p}{\tau_{pt}} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = +\mu_n \frac{\partial(nE)}{\partial x} + D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + g_n - \frac{n}{\tau_{nt}} \quad (5.21)$$

且

$$\frac{\partial(pE)}{\partial x} = E \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x} \quad (5.22)$$

故我们有

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_p \left(E \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g_p - \frac{p}{\tau_{pt}} \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_n \left(E \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g_n - \frac{n}{\tau_{nt}} \quad (5.24)$$

5.3 双极运输

5.3.1 双极运输方程的推导

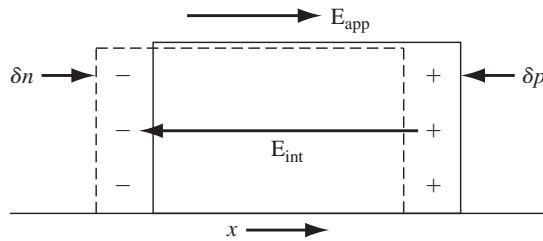


Figure 5.5: 过剩电子和空穴分离产生的内建电场

半导体内电场包含了外加电场和内建电场

$$E = E_{app} + E_{int} \quad (5.25)$$

泊松方程把过剩电子和空穴浓度与内建电场联系起来了

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot E_{int} = \frac{e(\delta p - \delta n)}{\varepsilon_s} = \frac{\partial E_{int}}{\partial x} \quad (5.26)$$

ε_s 为介电常数.

Chapter 6

pn 结

6.1 零偏置下的 pn 结

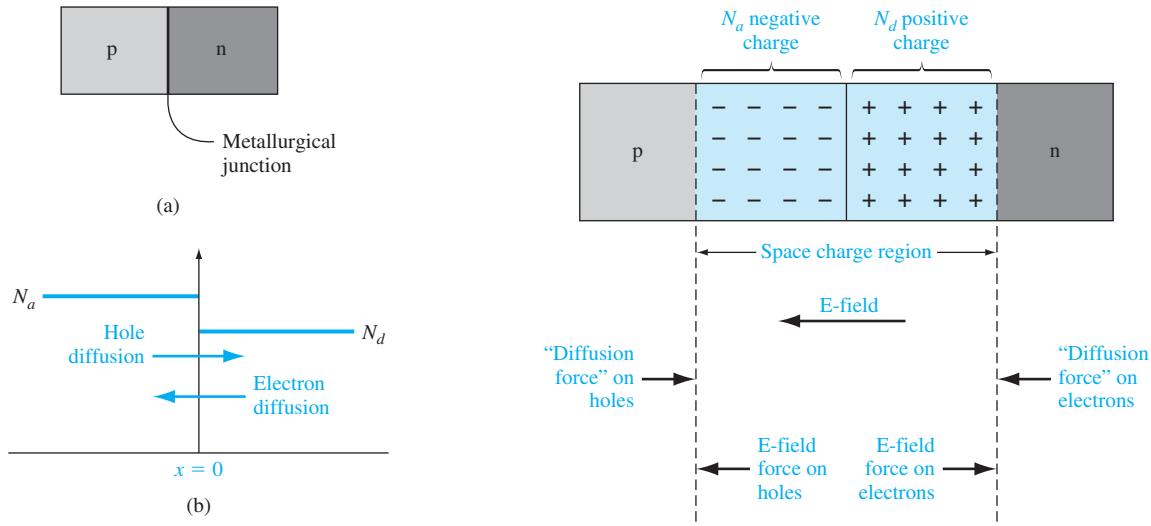


Figure 6.1: PN 结内建电场示意图

由于 pn 结两端载流子掺杂浓度差异，在 pn 结处发生扩散，从而产生内建电势差 V_{bi} ，热平衡状态下的 pn 结的能带图如 (6.2) 根据图 (6.2) 我们有

$$V_{bi} = |\phi_{Fn}| + |\phi_{Fp}| \quad (6.1)$$

n 区内的导带电子浓度可以表示为

$$n_0 = N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_F)}{kT} \right] \quad (6.2)$$

也可以表示为

$$n_0 = n_i \exp \left[\frac{-(E_F - E_{Fi})}{kT} \right] \quad (6.3)$$

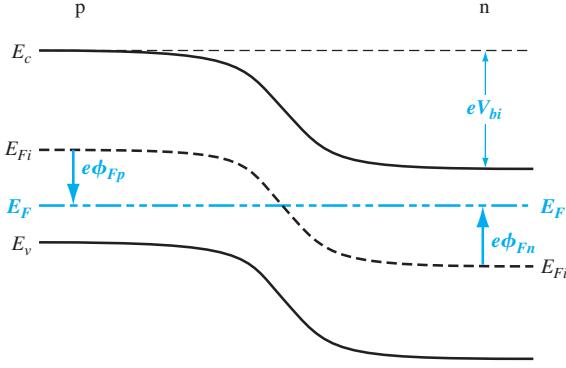


Figure 6.2: 热平衡状态下 pn 结的能带图

因此 n 区的电势 ϕ_{Fn} 为

$$e\phi_{Fn} = E_{Fi} - E_F \quad (6.4)$$

故

$$n_0 = n_i \exp \left[\frac{-e\phi_{Fn}}{kT} \right] \quad (6.5)$$

假设 $n_0 = N_d$, 求解 ϕ_{Fn}

$$\phi_{Fn} = \frac{-kT}{e} \ln \left(\frac{N_d}{n_i} \right) \quad (6.6)$$

对于 p 区空穴

$$e\phi_{Fp} = E_{Fi} - E_F \quad (6.7)$$

$$p_0 = N_a = n_i \exp \left[\frac{E_{Fi} - E_F}{kT} \right] = n_i \exp \left[\frac{e\phi_{Fp}}{kT} \right] \quad (6.8)$$

故有

$$\phi_{Fp} = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{N_a}{n_i} \right) \quad (6.9)$$

最后, 我们可以得到 V_{bi} 和掺杂浓度的关系

$$V_{bi} = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{N_a N_d}{n_i^2} \right) = V_t \ln \left(\frac{N_a N_d}{n_i^2} \right) \quad (6.10)$$

其中 $V_t = kT/e$ 为热电压.

6.1.1 电场强度

如图 (6.3), 根据电场的一维泊松方程

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \frac{-\rho(x)}{\varepsilon_s} = -\frac{dE(x)}{dx} \quad (6.11)$$

电荷密度 $\rho(x)$ 为

$$\rho(x) = \begin{cases} -eN_a, & -x_p < x < 0 \\ -eN_d, & 0 < x < x_n \end{cases}$$

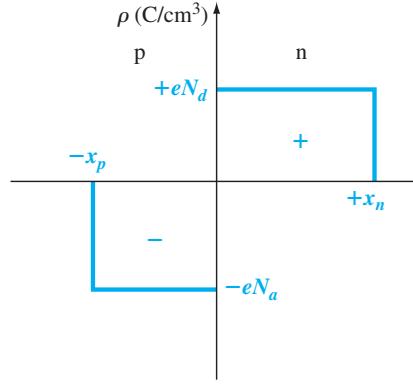


Figure 6.3: 突变结近似均匀掺杂 pn 结的空间电荷密度

对泊松方程积分有

$$E = \int \frac{\rho(x)}{\varepsilon_s} dx = - \int \frac{eN_a}{\varepsilon_s} dx = \frac{-eN_a}{\varepsilon_s} x + C_1 \quad (6.12)$$

利用条件 $x = -x_p$ 处 p 型区域内电场为零, 可以得到 C_1 , 故

$$E = \frac{-eN_a}{\varepsilon_s} (x + x_p), \quad -x_p < x < 0 \quad (6.13)$$

同理对于 n 型半导体内

$$E = \frac{-eN_d}{\varepsilon_s} (x_n - x), \quad 0 < x < x_n \quad (6.14)$$

再利用 $x = 0$ 处电场函数连续可得

$$N_a x_p = N_d x_n \quad (6.15)$$

其实上述条件可以通过在整个 abrupt Junction 使用高斯方程, 此区域内净电荷为零来得到. 得到了整个区域的电场, 我们就可以算出 pn 结上的内建电压了

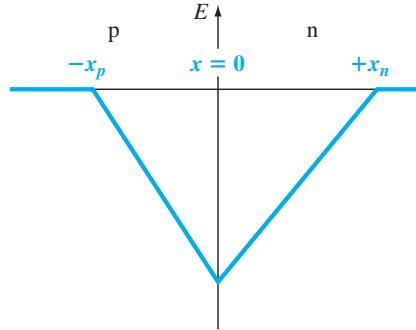


Figure 6.4: 均匀掺杂 pn 结空间电荷区的电场

$$\phi(x) = - \int E(x) dx = \int \frac{eN_a}{\varepsilon_s} (x + x_p) dx = \frac{eN_a}{\varepsilon_s} \left(\frac{x^2}{2} + x_p \cdot x \right) + C'_1 \quad (6.16)$$

我们令 $x = -x_p$ 处的电势为零, 则可以确定常数 $c'_1 = eN_a x_p^2 / (2\epsilon_s)$, 由此

$$\phi(x) = \frac{eN_a}{2\epsilon_s} (x + x_p)^2, \quad -x_p < x < 0 \quad (6.17)$$

同理对 n 区域内电场积分, 且令 $x = 0$ 处电势连续得到

$$\phi(x) = \frac{eN_a}{\epsilon_s} \left(x_n \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{eN_a}{2\epsilon_s} x_p^2, \quad 0 < x < x_n \quad (6.18)$$

内建电势 V_{bi} 等于 $x = x_n$ 处的电势

$$V_{bi} = |\phi(x = x_n)| = \frac{e}{2\epsilon_s} (N_d x_n^2 + N_a x_p^2) = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{N_a N_d}{n_i^2} \right) \quad (6.19)$$

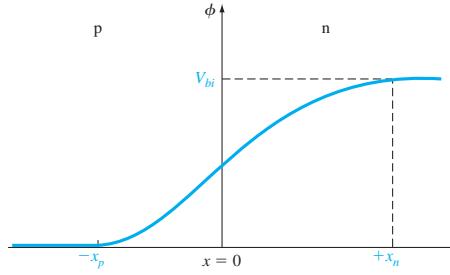


Figure 6.5: 均匀掺杂 pn 结空间电荷区的电势

6.1.2 空间电荷区宽度

我们结合公式 (6.15)(6.19) 有

$$x_n = \left(\frac{2\epsilon_s V_{bi}}{e} \left[\frac{N_a}{N_d} \right] \left[\frac{1}{N_a + N_d} \right] \right)^{1/2} \quad (6.20)$$

$$x_p = \left(\frac{2\epsilon_s V_{bi}}{e} \left[\frac{N_d}{N_a} \right] \left[\frac{1}{N_a + N_d} \right] \right)^{1/2} \quad (6.21)$$

总的耗尽区宽度 W 为

$$W = x_n + x_p = \left(\frac{2\epsilon_s V_{bi}}{e} \left[\frac{N_a + N_d}{N_a N_d} \right] \right)^{1/2} \quad (6.22)$$

6.2 反向偏置

反偏下 pn 结的能带图如 (6.6), 总的电势差 V_{total} 增加了. 外加的电压为反偏电压, 那么总电势差可以表示为

$$V_{total} = V_{bi} + V_R = |\phi_{Fn}| + |\phi_{Fp}| + V_R \quad (6.23)$$

其中 V_R 为反偏电压的大小.

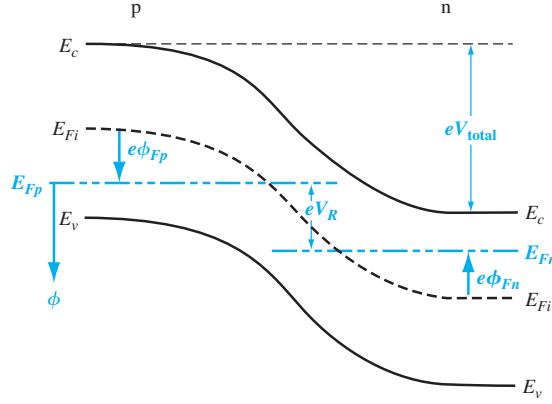


Figure 6.6: 反偏下 pn 结的能带图

6.2.1 空间电荷区宽度与电场

当加入反向偏置时, 空间电荷区会拓宽, 此时空间总电荷区宽度的推导, 只需要把 V_{bi} 替换成 V_{total}

$$W = \left(\frac{2\epsilon_s(V_{bi} + V_R)}{e} \left[\frac{N_a + N_d}{N_a N_d} \right] \right)^{1/2} \quad (6.24)$$

可以发现, 如果两边掺杂浓度相差很大, 空间电荷区宽度基本上是由掺杂少的一边决定的。进一步, 我们可以发现在 pn 冶金结处电场最大

$$E_{max} = \frac{-eN_a x_p}{\epsilon_s} = \frac{-eN_d x_n}{\epsilon_s} = - \left(\frac{2e(V_{bi} + V_R)}{\epsilon_s} \left[\frac{N_a N_d}{N_a + N_d} \right] \right)^{1/2} \quad (6.25)$$

pn 结内最大的电场也可以表示为

$$E_{max} = \frac{-2(V_{bi} + V_R)}{W} \quad (6.26)$$

下面给出公式 (6.26) 的一个直观理解. 结合图 (6.4) 可以知道, 在 p 区和 n 区电场随空间都是线性的, 所以两边总电势可以表示为

$$\frac{1}{2}E_{max}x_p + \frac{1}{2}E_{max}x_p = \frac{1}{2}E_{max}(x_p + x_n) = \frac{1}{2}E_{max}W = -(V_{bi} + V_R) \quad (6.27)$$

因此可得公式 (6.26). 本质上 pn 结特性只和 N_a 与 N_d 有关, 因此两个不同的方程就足以确定整个器件特性.

6.2.2 结电容

电容反映了在外界偏压扰动下系统电荷的变化情况, 即

$$C = \frac{dQ}{dV_R} = \frac{eN_d dx_n}{dV_R} \quad (6.28)$$

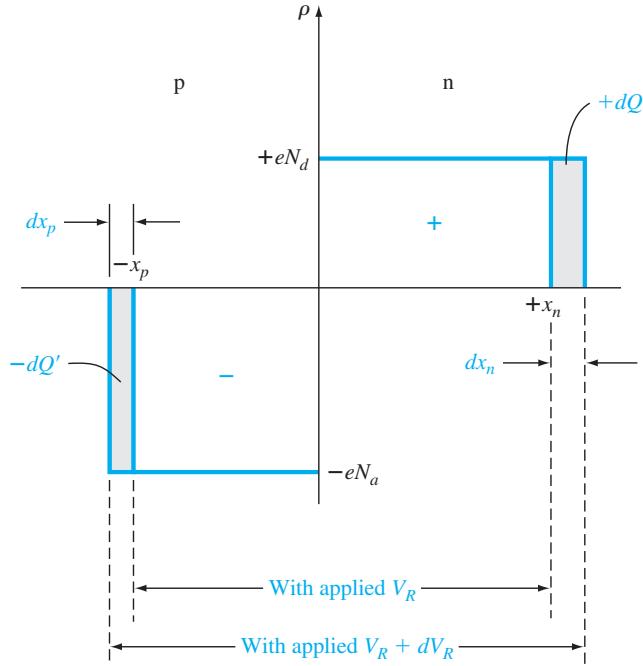


Figure 6.7: 均匀掺杂 pn 结空间电荷区宽度反偏电压改变的微分变化量

而 x_n 为

$$x_n = \left(\frac{2\epsilon_s(V_{bi} + V_R)}{e} \left[\frac{N_a}{N_d} \right] \left[\frac{1}{N_a + N_d} \right] \right)^{1/2} \quad (6.29)$$

故有

$$C = \left[\frac{e\epsilon_s N_a N_d}{2(V_{bi} + V_R)(N_a + N_d)} \right]^{1/2} = \frac{\epsilon_s}{W} \quad (6.30)$$

上述表达式与单位面积平行板电容表达式是一样的. 仔细观察图 (6.7) 其实就可以发现这一结论.

6.2.3 单边突变结

如图 (6.8), 考虑一种单边突变结的特殊 pn 结. 若 $N_a \gg N_d$, 称这种结为 p^+n 结. 于是总空间电荷区宽度表达式为

$$W \approx \left(\frac{2\epsilon_s(V_{bi} + V_R)}{eN_d} \right)^{1/2} \quad (6.31)$$

此时会有 $x_p \ll x_n$, 且 $W \approx x_n$, 即结宽度几乎就是轻掺杂区的宽度. 此时 p^+n 结电容为

$$C \approx \left[\frac{e\epsilon_s N_d}{2(V_{bi} + V_R)} \right]^{1/2} = \frac{\epsilon_s}{W} \quad (6.32)$$

上式可以变化为

$$\left(\frac{1}{C} \right)^2 = \frac{2(V_{bi} + V_R)}{e\epsilon_s N_d} \quad (6.33)$$

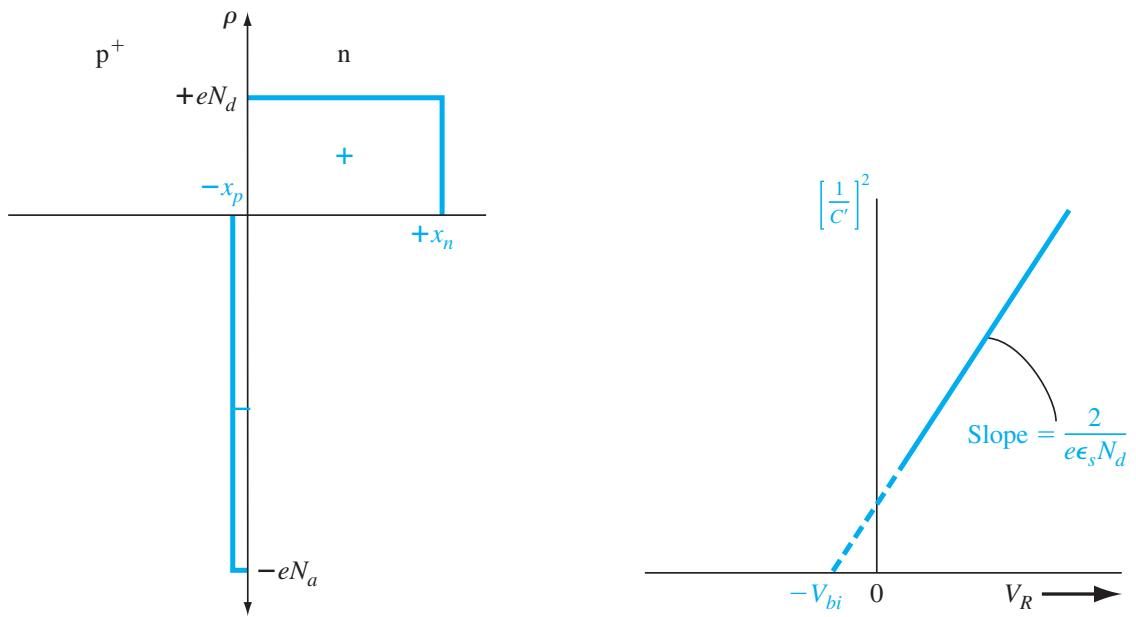


Figure 6.8: 单边 pn 结和电容

Chapter 7

pn 结二极管

7.1 pn 结电流

7.1.1 边界条件

Table 7.1: 本章中用到的一些相关符号

符号	定义
N_a	pn 结内 p 区的受主浓度
N_d	pn 结内 n 区的施主浓度
$n_{n0} = N_d$	热平衡状态下 n 区内的多子电子浓度
$p_{n0} = n_i^2 / N_d$	热平衡状态下 n 区内的少子电子浓度
$p_{p0} = N_a$	热平衡状态下 p 区内的多子电子浓度
$n_{p0} = n_i^2 / N_a$	热平衡状态下 p 区内的少子电子浓度
n_p	p 区内少子电子的浓度
p_n	n 区内少子空穴的浓度
$n_p(-x_p)$	空间电荷区边缘处 p 区内的少子电子浓度
$p_n(x_n)$	空间电荷区边缘处 n 区内的少子空穴浓度
$\delta n_p = n_p - n_{p0}$	p 区内过剩少数载流子的浓度
$\delta p_n = p_n - p_{n0}$	n 区内过剩少数载流子空穴的浓度

上一章节我们得到内建电势的表达式

$$V_{bi} = V_t \ln \left(\frac{N_a N_d}{n_i^2} \right) \quad (7.1)$$

变形有

$$\frac{n_i^2}{N_a N_d} = \exp \left(\frac{-eV_{bi}}{kT} \right) \quad (7.2)$$

假设杂质完全电离,n 区电子浓度就等于施主浓度 $n_{n0} \approx N_d$, 而 p 区的少子电子浓度为 n_i^2/N_a . 故上式可写成

$$n_{p0} = n_{n0} \exp\left(\frac{-eV_{bi}}{kT}\right) \quad (7.3)$$

上式把平衡状态下 p 区少子电子浓度与 n 区内多子电子的浓度联系在一起了. 当加载了正

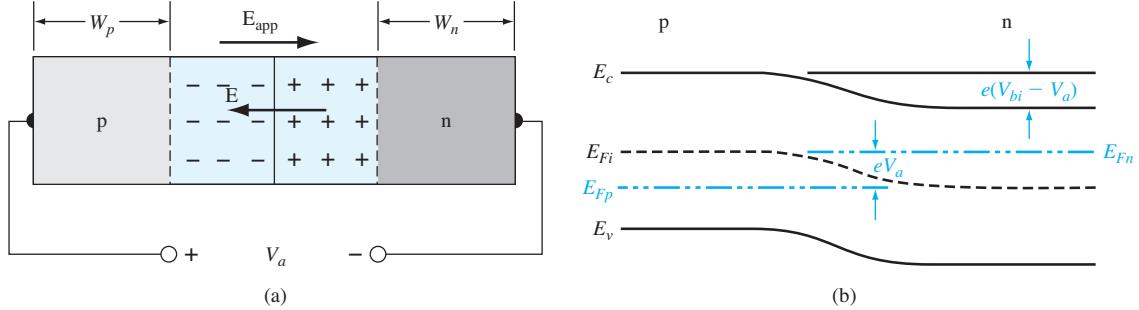


Figure 7.1: (a) 由正向电压感生的电场和空间电荷区电场方向的正偏 pn 结; (b) 相应的能量带图

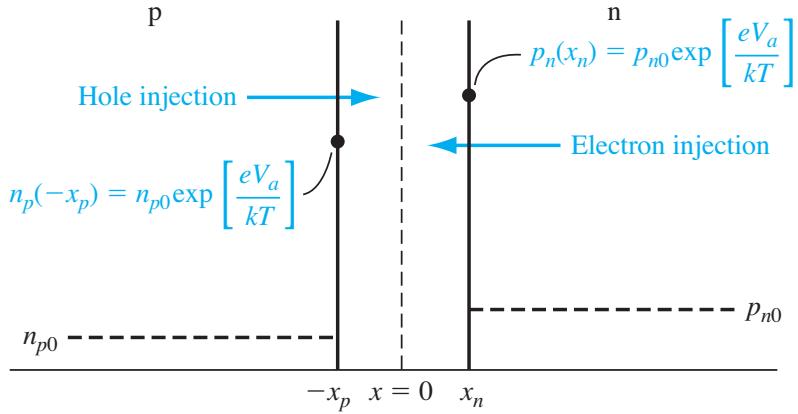


Figure 7.2: 正偏电压形成的空间电荷区边缘处的过剩少子浓度图

向电压时, 大部分的偏压影响都落在了 pn 结上. 外加的正向电压, 打破了热平衡状态, 阻止多数载流子穿越空间电荷区的电场被削弱了,n 区内的多子电子被注入到 p 区, 而 p 区的多子被空穴被注入到 n 区. 此时关系式 (7.3) 可以表示为

$$n_p = n_{n0} \exp\left[\frac{-e(V_{bi} - V_a)}{kT}\right] = n_{n0} \exp\left(\frac{-eV_{bi}}{kT}\right) \exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) \quad (7.4)$$

由于我们采用了小注入假设, 多子电子的浓度 n_{n0} 基本保持不变, 但是少子浓度 n_p 会偏离其热平衡 n_{p0} 好几个数量级.

$$n_p = n_{p0} \exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) \quad (7.5)$$

同理正向偏压下, 注入到 n 区内的 p 区少子空穴也经历了上述过程

$$p_n = p_{n0} \exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) \quad (7.6)$$

其中 p_n 为 n 区内空间电荷区边缘处少子空穴的浓度. 图 (7.2) 显示正向偏压时 p 区和 n 区内均存在过剩少数载流子.

7.1.2 少数载流子分布

在一维情况下 n 区内过剩少子空穴的双极运输方程为

$$\frac{\partial(\delta p_n)}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_p E \frac{\partial(\delta p_n)}{\partial x} + g' - \frac{\delta p_n}{\tau_{pt}} \quad (7.7)$$

其中 $\delta p_n = p_n - p_{n0}$ 是过剩少子空穴的浓度, 且等于总的少子浓度与热平衡少子浓度的差值. 为了简化计算和理解, 我们假设在 n 区内 $x > x_n$ 区域 $E = 0$, 且 $g' = 0$. 我们还假设 pn 结处于稳态, 则 $\partial(\delta p_n)/\partial t = 0$, 则

$$\frac{\partial^2(\delta p_n)}{\partial x^2} - \frac{\delta p_n}{L_p^2} = 0 \quad (x > x_n) \quad (7.8)$$

其中 $L_p^2 = D_p \tau_{p0}$. 同理,p 区过剩少子电子的浓度满足下式:

$$\frac{\partial^2(\delta n_p)}{\partial x^2} - \frac{\delta n_p}{L_n^2} = 0 \quad (x < x_p) \quad (7.9)$$

其中 $L_n^2 = D_n \tau_{n0}$.

总的少子浓度边界条件为

$$p_n(x_n) = p_{n0} \exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) \quad (7.10)$$

$$n_p(-x_p) = n_{p0} \exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) \quad (7.11)$$

$$p_n(x \rightarrow +\infty) = p_{n0} \quad (7.12)$$

$$n_p(x \rightarrow -\infty) = n_{p0} \quad (7.13)$$

当少子经过空间电荷区扩散进入中性半导体区时, 它们会与多子复合. 假设 $W_n \gg L_p$, $W_p \gg L_n$. 再离空间电荷区很远的地方, 过剩少数载流子的浓度必须趋近于零. 这种 pn 结称为长 pn 结果.

式 (7.8) 通解为

$$\delta p_n(x) = p_n(x) - p_{n0} = A e^{x/L_p} + B e^{-x/L_p} \quad (x \geq x_n) \quad (7.14)$$

式 (7.9) 通解为

$$\delta n_p(x) = n_p(x) - n_{p0} = A e^{x/L_n} + B e^{-x/L_n} \quad (x \leq -x_p) \quad (7.15)$$

由边界条件 (7.12)(7.13) 可知 A 和 D 必须为零. 最后解出当 $x \geq x_n$ 处的过剩少子浓度为

$$\delta p_n(x) = p_n(x) - p_{n0} = p_{n0} \left[\exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) - 1 \right] \exp\left(\frac{x_n - x}{L_p}\right) \quad (7.16)$$

$x \leq -x_p$ 处的过剩少子浓度为

$$\delta n_p(x) = n_p(x) - n_{p0} = p_{n0} \left[\exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) - 1 \right] \exp\left(\frac{x_p - x}{L_n}\right) \quad (7.17)$$

图 (7.3) 显示了少子浓度随着空间电荷区边缘向中性区内延伸的距离的增大而指数衰减, 并

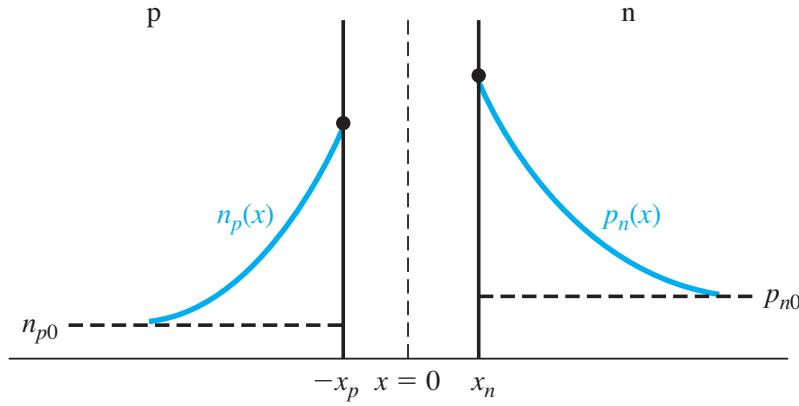


Figure 7.3: 正偏条件下 pn 结内部的稳态少子浓度图

逐渐趋向其热平衡值.

正偏压降低了 pn 结的内建电势差, n 区的电子穿过了空间电荷区注入到 p 区, 形成了 p 区的过剩少数载流子. 这些过剩电子逐渐向电中性 p 区内扩散, 然后与多子空穴复合. 这样, 过剩少子电子的浓度就随着距离的增加而指数衰减. 上述过程同适用于穿过空间电荷区注入到 n 区内的空穴.

7.1.3 理想 pn 结电流

首先我们假设流过 pn 结的电流为电子电流与空穴电流之和. 应该注意, 我们假设流过耗尽区的电子电流与空穴电流值为定值. 由于 pn 结内的电子电流与空穴电流分别为连续函数, 则 pn 结的电流即为 $x = x_n$ 处的少子空穴扩散电流与 $x = -x_p$ 处的少子电子扩散电流之和. 如图 (7.3) 所示, 少子浓度的梯度产生了扩散电流. 由于采用了空间电荷区以外区域的电场为零的假设, 因此我们可以忽略任何少子漂移电流的成分. 上述求 pn 结电流的方法如图 (7.4) 所示.

我们可以通过下式确定 $x = x_n$ 处的少子空穴扩散电流密度:

$$J_p(x_n) = -eD_p \frac{dp_n(x)}{dx} \Big|_{x=x_n} \quad (7.18)$$

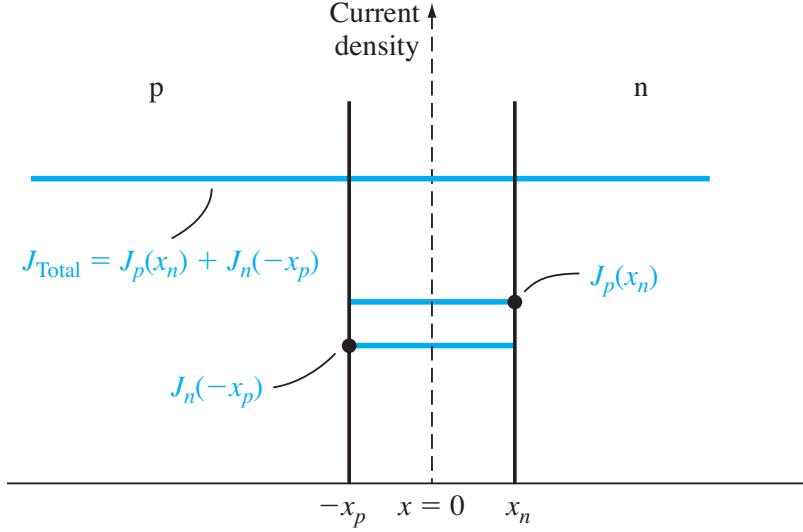


Figure 7.4: PN 结空间电荷区内电子电流和空穴电流的密度图

由于采用了均匀掺杂假设, 热平衡载流子的浓度为常量, 所以上式可以写为

$$J_p(x_n) = -eD_p \frac{d(\delta p_n(x))}{dx} \Big|_{x=x_n} \quad (7.19)$$

把公式 (7.16)(7.17) 代入上式由

$$J_p(x_n) = \frac{eD_p p_{n0}}{L_p} \left[\exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) - 1 \right] \quad (7.20)$$

同理可以计算出 $x = -x_p$ 处电子扩散电流密度

$$J_n(-x_p) = -eD_n \frac{d(\delta n_p(x))}{dx} \Big|_{x=-x_p} = \frac{eD_n n_{p0}}{L_n} \left[\exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) - 1 \right] \quad (7.21)$$

总电流密度为

$$J = J_p(x_n) + J_n(-x_p) = \left[\frac{eD_p p_{n0}}{L_p} + \frac{eD_n n_{p0}}{L_n} \right] \left[\exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) - 1 \right] \quad (7.22)$$

我们令

$$J_s = \frac{eD_p p_{n0}}{L_p} + \frac{eD_n n_{p0}}{L_n} \quad (7.23)$$

则有

$$J = J_s \left[\exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) - 1 \right] \quad (7.24)$$

Chapter 8

金属 - 半导体和半导体异质结

前面两章中我们讨论了 pn 结, 它们是由同一种半导体材料组成的, 通常称为同质结. 这一章节中, 我们将讨论由不同材料组成的结, 即金属 - 半导体和半导体异质结, 这两种结也能制成二极管.

半导体器件或集成电路必须与外部电路相连. 这种连接是通过金属 - 半导体结的非整流接触实现的, 即欧姆接触. 欧姆接触是接触电阻很低的结, 且在结两边都能形成电流的接触. 我们将讨论产生金属 - 半导体欧姆接触的条件.

8.1 肖特基势垒二极管

这一节讲述金属 - 半导体的整流接触, 即肖特基势垒二极管. 多数情况下, 整流接触发生在 n 型半导体中, 我们将主要讨论金属和 n 型半导体形成的整流接触.

8.1.1 性质上的特征

特定金属与 n 型半导体接触前的理想能带如图 (8.1). 真空能级作为参考能级, 参数 ϕ_m 为金属功函数, ϕ_s 为半导体功函数, χ 是电子亲和能. 接触前, 半导体的费米能级高于金属的费米能级, 热平衡时为了使费米能级连续变化, 半导体中的电子流向比它能级低的金属中, 带正电荷的空穴仍留在半导体中, 从而形成了一个空间电荷区 (耗尽层).

参数 ϕ_{B0} 是半导体的理想势垒高度, 金属中的电子向半导体中移动所遇见的势垒. 该势垒为

$$\phi_{B0} = \phi_m - \chi \quad (8.1)$$

当半导体和金属接触后, 电子要向想从金属跑到半导体, 其能量只需要大于半导体导带 E_c 和金属的 E_F 之差, 即 ϕ_{B0} . 另外半导体一侧的电子要想跨越结到金属去则需要克服空间电荷区形成的内建电势差 V_{bi} .

$$V_{bi} = \phi_{B0} - \phi_n \quad (8.2)$$

V_{bi} 是半导体掺杂浓度的函数, 类似于 pn 结中的情况.

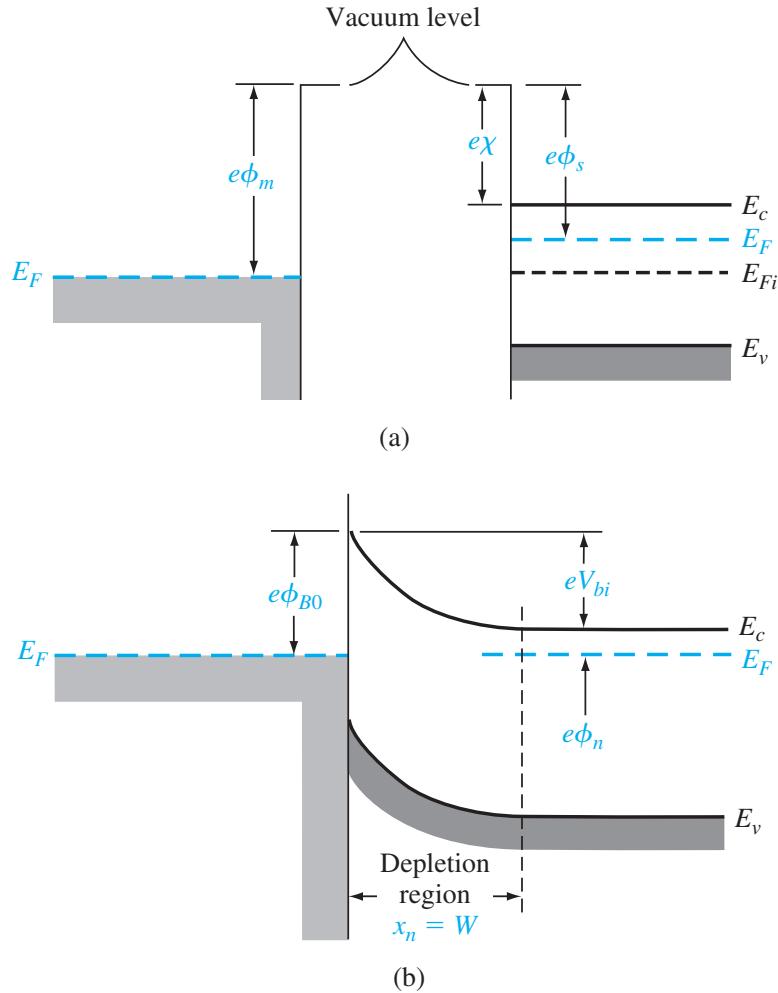


Figure 8.1: (a) 接触前金属半导体能带图; (b) 理想的金属与 n 型半导体结 ($\phi_m > \phi_s$) 的能带图

8.1.2 理想结的特性

我们可以用处理 pn 结同样的方法来处理异质结的静电特性。空间电荷区电场用泊松方程描述

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_s} \quad (8.3)$$

$$E = \int \frac{eN_d}{\varepsilon_s} dx = \frac{eN_d x}{\varepsilon_s} + C_1 \quad (8.4)$$

由于空间边界的电场强度为零, 可求得积分常数为

$$C_1 = -eN_d x_n \varepsilon_s \quad (8.5)$$

$$E = -\frac{eN_d(x_n - x)}{\varepsilon_s} \quad (8.6)$$

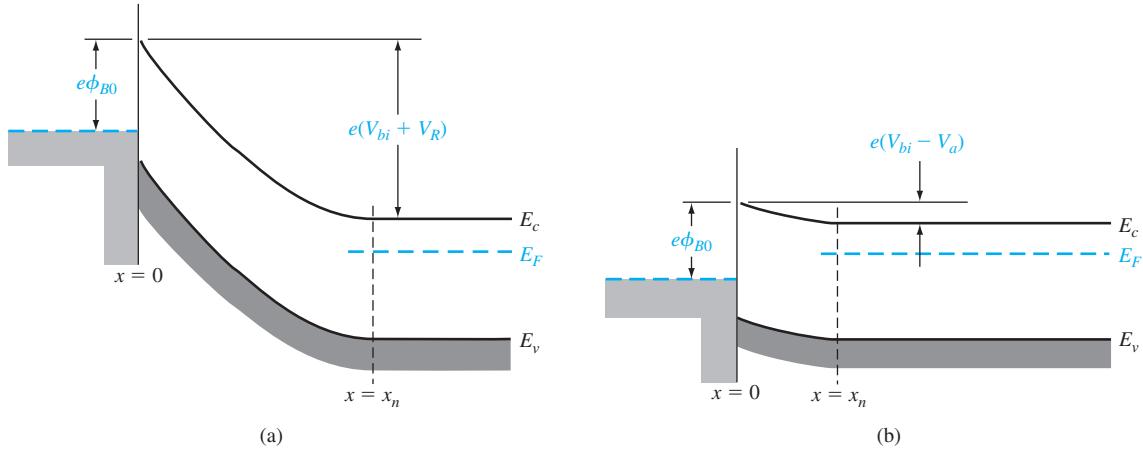


Figure 8.2: 有偏压时理想金属半导体结的能带图:(a) 反偏; (b) 正偏

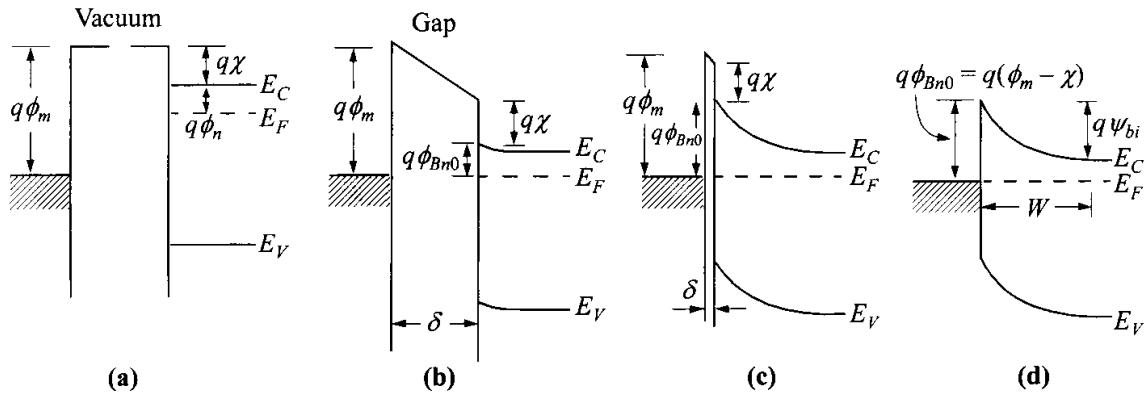


Figure 8.3: 金属 - 半导体接触能带图. 金属和半导体 (a) 分离系统中; (b) 连接为一个系统; (c) 间隔 δ 减小; (d) 间隔 δ 变为零

对于均匀掺杂的半导体来说, 场强是距离的线性函数, 在金属与半导体接触处, 场强达到最大值. 由于金属场强为零, 所以在金属 - 半导体的金属区中一定存在表面负电荷. 其实这个和单边 pn 结非常像 $W = x_n$.

$$\frac{1}{2}E_{max}x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{eN_d x_n}{\epsilon_s} x_n = V_{bi} + V_R \quad (8.7)$$

因此有

$$W = x_n = \left[\frac{2\epsilon_s (V_{bi} + V_R)}{eN_d} \right]^{1/2} \quad (8.8)$$

由于电荷耗尽区是均匀的, 因此我们可以把这部分电荷等效为在 $x_n/2$ 处, 电量为 eN_d 的平行板电容

$$Q = ex_n N_d = V_{bi} C = V_{bi} \cdot \frac{\epsilon_s}{x_n/2} \quad (8.9)$$

由此可得公式 (8.8).

考虑图 (8.3), 我们可以求出半导体费米能级和导带之间的能级差 ϕ_n

$$N_d = N_c \exp\left(\frac{-(E_c - E_F)q}{kT}\right) = N_c \exp\left(\frac{-\phi_n q}{kT}\right) \quad (8.10)$$

$$\phi_n = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_c}{N_d}\right) \quad (8.11)$$

此时的 V_{bi} 可以求得

$$V_{bi} = \phi_{B0} - \phi_n = \phi_m - \chi - \phi_n = \phi_m - \chi - \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_c}{N_d}\right) \quad (8.12)$$

结电容可以对结电荷进行微分

$$C = eN_d \frac{dx_n}{dV_R} = \left[\frac{e\varepsilon_s N_d}{2(V_{bi} + V_R)} \right]^{1/2} \quad (8.13)$$

我们把上式转换下

$$\left(\frac{1}{C}\right)^2 = \frac{2(V_{bi} + V_R)}{e\varepsilon_s N_d} \quad (8.14)$$

由此, 我们可以根据电容和偏压的关系, 得出掺杂浓度 N_d , 有了掺杂浓度, 那么一切都能计算出来了.

Problem 8.1.1. 考虑由 tungsten 和 n 型硅形成肖特基二极管, $T = 300K$, $N_d = 3 \times 10^{15} cm^{-3}$, 求:(a) 理想肖特基势垒高度 (b) 内建电势差 (c) 加 $V_R = 5V$ 反偏压时的电场强度的峰值 (d) 就爱 $V_R = 5V$ 反偏压时的结电容.

8.1.3 势垒高度的非理想因素

有一种势垒的镜像力降低效应, 如图 (8.4). 镜像电场对于电子的力为

$$F = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_s(2x)^2} = -eE \quad (8.15)$$

由此可得

$$-\phi(x) = \int_x^\infty Edx' = \int_x^\infty \frac{e}{4\pi\varepsilon_s(2x')^2} dx' = \frac{-e}{16\pi\varepsilon_s x} \quad (8.16)$$

注意这里的电势能 $-e\phi(x)$ 是指把一个镜像电子搬到无穷远处所需要的功. 假定无穷远出为零电势点. 电介质中存在电场时 (这个电场不是上面积分的电场), 电势表达式为

$$-\phi(x) = \frac{-e}{16\pi\varepsilon_s x} - Ex \quad (8.17)$$

在恒定电场影响下, 电子的电势曲线如图 (8.4c), 势垒由于镜像作用峰值减小了, 这种势垒减小效应就是肖特基效应. 我们可以对上式求导数, 得到极大值

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = 0 \quad (8.18)$$

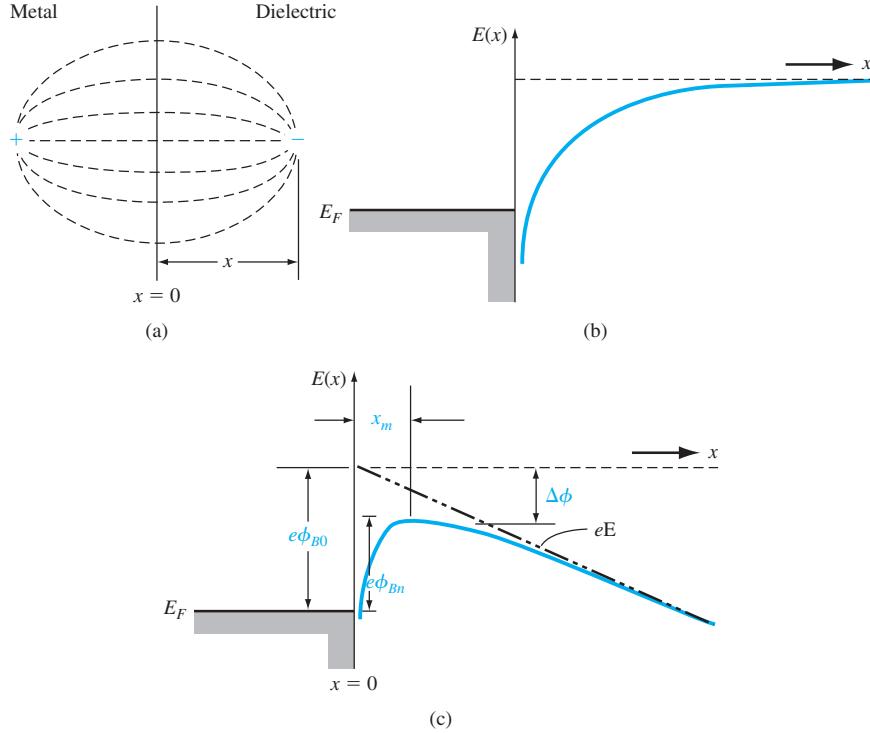


Figure 8.4: (a) 金属 - 半导体表面镜像电场线; (b) 零电场时的电势能; (c) 恒定电场时的电势能

$$x_m = \sqrt{\frac{e}{16\pi\epsilon_s E}} \quad (8.19)$$

需要注意, 此电势 $\phi(x)$ 是相对真空而言的, 而势垒减小值为由镜像电场引起的势垒下降

$$\Delta\phi = -\phi(x_m) = \sqrt{\frac{eE}{4\pi\epsilon_s}} \quad (8.20)$$

在实际的肖特基二极管中, 内部的电场 E 不会是距离的一个常值函数, 根据耗尽电荷近似理论可以认为这个电场是结表面的最大电场

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{2eN_d|\psi_s|}{\epsilon_s}} \quad (8.21)$$

这个表面电势为

$$|\psi_s| = \phi_{Bn0} - \phi_n + V_R \quad (8.22)$$

我们把这个近似的恒定电场带入 $\Delta\phi$ 表达式

$$\Delta\phi = -\phi(x_m) = \sqrt{\frac{e\mathcal{E}_m}{4\pi\epsilon_s}} = \left[\frac{e^3 N_d |\psi_s|}{8\pi^2 \epsilon_s^3} \right]^{1/4} \quad (8.23)$$

对于反向偏置 V_R 为正, 那么 $|\psi_s|$ 增大, $\Delta\phi$ 增大, 那么意味着势垒比零偏时降低了更多, 此时势垒高度比零偏置稍微低一点. 反之, 如果是正向偏置 $V_R < 0$, 那么 $|\psi_s|$ 减小, $\Delta\phi$ 减小,

那么意味着势垒比零偏置时升高了, 此时势垒高度比零偏置稍微高一些. 由此可见, 势垒高度是偏置的函数, 正向偏置时, 势垒更高, 反向偏置时, 势垒更低, 如图 (8.6) 所示.

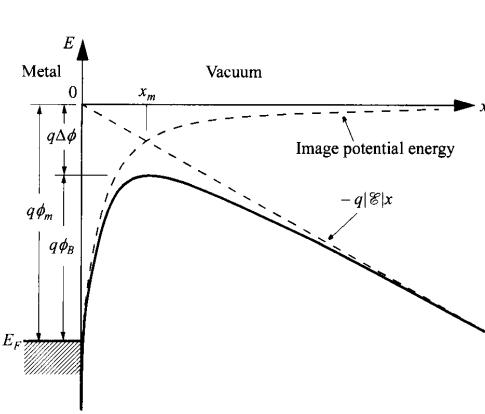


Figure 8.5: 金属半导体镜像效应图 2

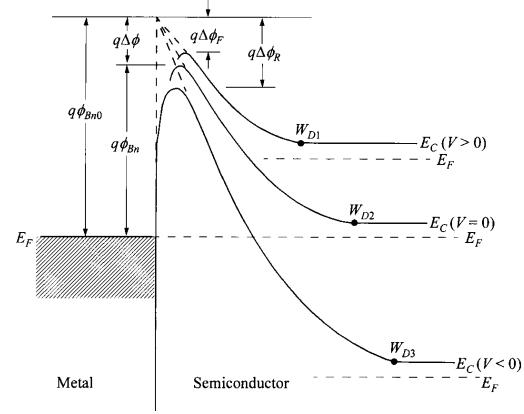


Figure 8.6: 金属半导体势垒和偏置的关系

8.1.4 表面状态

金属半导体表面层和表面状态图如 (8.7)(8.8)

8.1.5 电压电流关系

在金属 - 半导体结中的电流, 主要是多数载流子的运动, 比如 n 型半导体, 主要载流子就是电子啦. 下面我们将根据热电子假设 (thermionic emission), 即势垒高度要远大于 kT , 这样麦克斯韦 - 玻尔兹曼假设就可以近似使用了. 如图 (8.9). 半导体中电子流向金属导致的电流 J_{sm} , 这个电流大小和那些能量可以跨国势垒的的电子浓度有关

$$J_{sm} = e \int_{E'_c}^{\infty} v_x dn \quad (8.24)$$

其中 E'_c 是热电子发射到金属所需要的最小的能量. v_x 是载流子输运的速度. 电子浓度的微分为

$$dn = g_c(E) f_F(E) dE = \frac{4\pi(2m_n^*)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E - E_c} \exp\left(\frac{-(E - E_F)}{kT}\right) dE \quad (8.25)$$

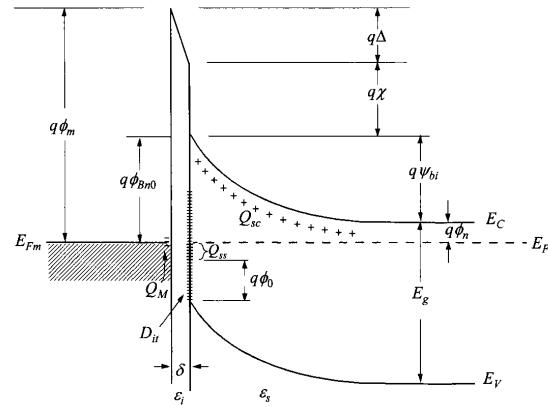
$$\frac{1}{2} m_n^* v^2 = E - E_c \quad (8.26)$$

流过结的总电流有

$$J = \left[A * T^2 \exp\left(\frac{-e\phi_{Bn}}{kT}\right) \right] \left[\exp\left(\frac{eV_a}{kT}\right) - 1 \right] \quad (8.27)$$

其中

$$A^* = \frac{4\pi e m_n^* k^2}{\hbar^3} \quad (8.28)$$



ϕ_m = Work function of metal
 ϕ_{Bn0} = Barrier height (without image-force lowering)
 ϕ_0 = Neutral level (above E_F) of interface states
 Δ = Potential across interfacial layer
 χ = Electron affinity of semiconductor
 ψ_{bi} = Built-in potential
 δ = Thickness of interfacial layer
 Q_{sc} = Space-charge density in semiconductor
 Q_{ss} = Interface-trap charge
 Q_M = Surface-charge density on metal
 D_{it} = Interface-trap density
 ϵ_i = Permittivity of interfacial layer (vacuum)
 ϵ_s = Permittivity of semiconductor

Figure 8.7: 金属半导体表面层和表面状态图

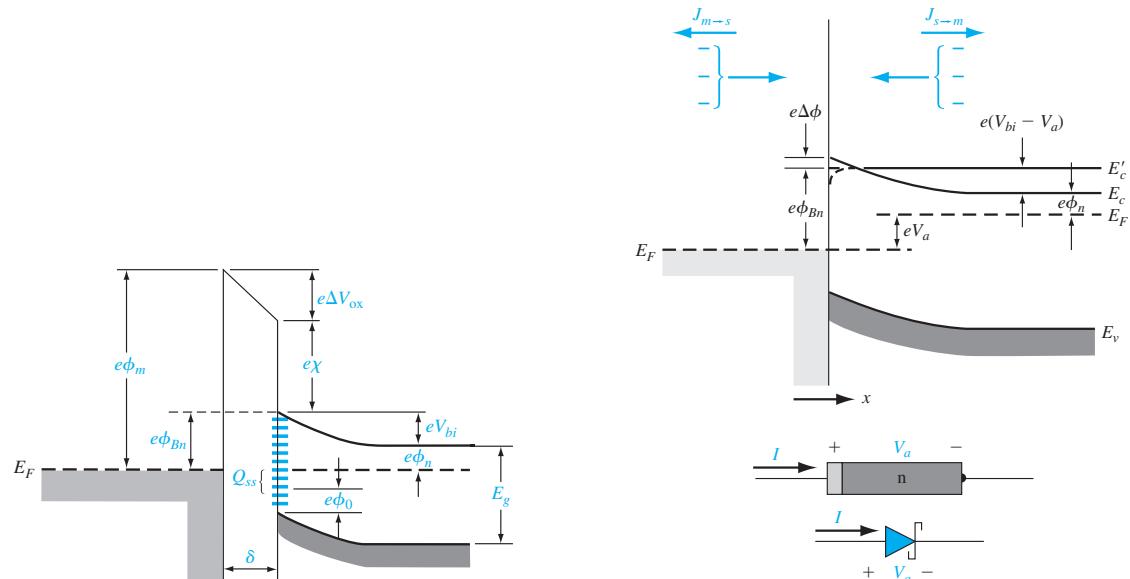


Figure 8.8: 金属半导体表面层和表面状态图 2

Figure 8.9: 正向偏置下的金属半导体包含镜像效应的能带图

Chapter 9

二端口 MOS 电容

9.1 接触电势

Table 9.1: 材料对本征硅的近似接触电势 (V)

材料	ϕ_J
银 (Ag)	-0.4
金 (Au)	-0.3
铜 (Cu)	0
镍 (Ni)	+0.15
铝 (Al)	+0.6
镁 (Mg)	+1.35
非本征硅 (Extrinsic Si)	+1.35
本征硅 (Intrinsic Si)	$-\phi_F$

Table 9.2: 有效状态密度和有效质量

	$N_c(cm^{-3})$	$N_v(cm^{-3})$	m_n^*/m_0	m_p^*/m_0
硅	2.8×10^{19}	1.04×10^{19}	1.08	0.56
砷化镓	4.7×10^{17}	7.0×10^{18}	0.064	0.48
锗	1.04×10^{19}	6.0×10^{18}	0.55	0.37

对于两个不同掺杂的材料, 我们定义一个接触电势 ϕ_F

$$\phi_F = \frac{E_i - E_F}{q} \quad (9.1)$$

Table 9.3: $T = 300K$ 时公认的 n_i 值

硅	$n_i = 1.5 \times 10^{10} cm^{-3}$
砷化镓	$n_i = 1.8 \times 10^6 cm^{-3}$
锗	$n_i = 2.4 \times 10^{13} cm^{-3}$

Table 9.4: $T = 300K$ 时, 低掺杂浓度下的典型迁移率值

	$\mu_n(cm^2V^{-1}s^{-1})$	$\mu_p(cm^2V^{-1}s^{-1})$
Si	1350	480
GaAs	8500	400
Ge	3900	1900

所以对于 p 型掺杂有

$$\phi_F = \phi_t \ln \left(\frac{N_A}{n_i} \right) \quad (9.2)$$

对于 n 型材料有

$$\phi_F = -\phi_t \ln \left(\frac{N_D}{n_i} \right) \quad (9.3)$$

在 300K 时, $\phi_t = 0.0259eV$. 对于 pn 结, 其内建电势差为

$$V_{bi} = |\phi_{Fn}| + |\phi_{Fp}| \quad (9.4)$$

9.2 MOS 电容 Flat Band

在 MOS 电容中, 由于 SiO_2 中存在固定的陷阱电荷 Q_o , 而且金属和半导体的 work function 存在差异, 导致 SiO_2 两端诱导出电荷, 现在定义一个平带电压 (Flat-band voltage) 使得这些诱导电荷为零.

$$\phi_{MS} = \phi_{Bulk} - \phi_{Metal} \quad (9.5)$$

$$\psi_{ox} = -\frac{Q'_o}{C'_{ox}} \quad (9.6)$$

$$V_{FB} = \phi_{MS} - \frac{Q'_o}{C'_{ox}} \quad (9.7)$$

其中 C'_{ox} 为绝缘层单位面积的电容, 且

$$C'_{ox} = \frac{k_{ox}\varepsilon_0}{d_{ox}} \quad (9.8)$$

对于于 SiO_2 , 其 $k_{ox} = 3.9$, 真空的介电常数 ε_0 为 $8.854 \times 10^{-3} fF/\mu m$

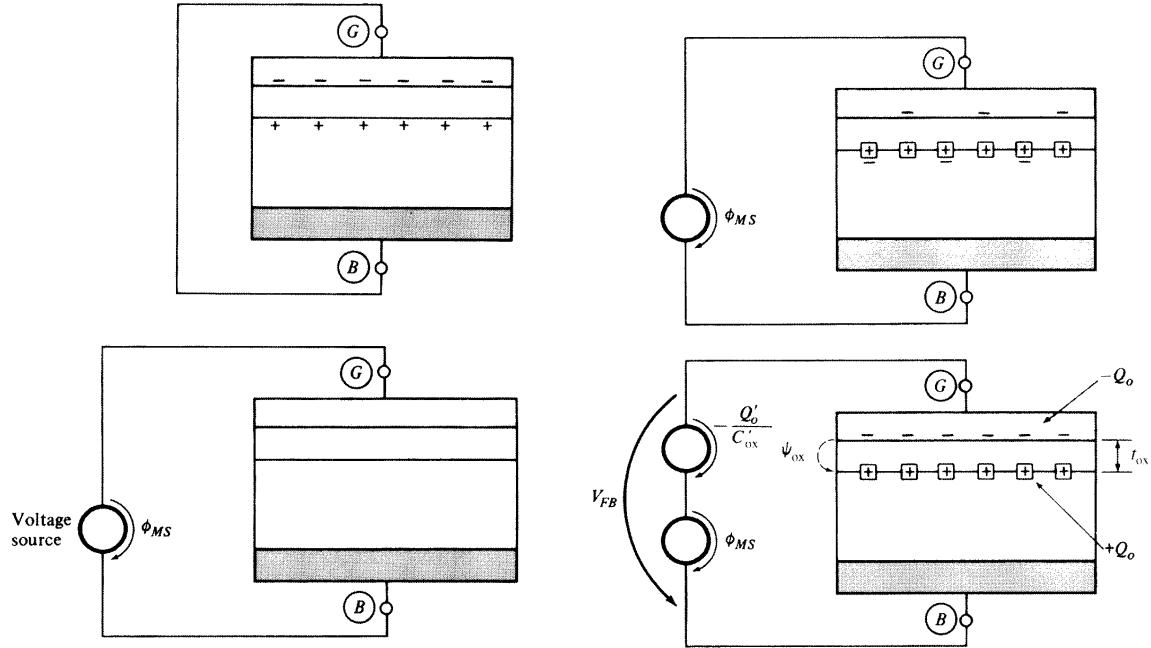


Figure 9.1: MOS 电容接触电势示意图

Figure 9.2: MOS 电容平带示意图

9.3 电势平衡和电势平衡

当我们外加一个电压 $V_{GB} \neq V_{FB}$ 时, 我们来探讨衬底的情况. 定义表面电势 ψ_s 为绝缘层下表面指向中性衬底 (Deep in the Bulk) 的压降, 如图 (9.3) 根据基尔霍夫定理有

$$V_{GB} = \psi_{ox} + \psi_s + \phi_{MS} \quad (9.9)$$

接触电势 ϕ_{MS} 是一个常数, 故

$$\Delta V_{GB} = \Delta \psi_{ox} + \Delta \psi_s \quad (9.10)$$

在该体系中我们有三种电荷: 栅极上的电荷 Q'_G , 有效界面电荷 Q'_o 以及氧化层下面半导体中的电荷 Q'_C .

$$Q'_G + Q'_o + Q'_C = 0 \quad (9.11)$$

一般可以假定绝缘层中的电荷是固定的, 因此

$$Q'_G + Q'_C = 0 \quad (9.12)$$

绝缘层下表面的电子密度 n_s 可以和 ψ_s 联系起来

$$n_s = n_0 e^{\psi_s / \phi_t} = n_i e^{(\psi_s - \phi_F) / \phi_t} = p_0 e^{(\psi_s - 2\phi_F) / \phi_t} \approx N_A e^{(\psi_s - 2\phi_F) / \phi_t} \quad (9.13)$$

现在我们来进行一般性的分析, 位置 y 处的电子浓度为

$$n(y) = n_0 e^{\psi(y) / \phi_t} \quad (9.14)$$

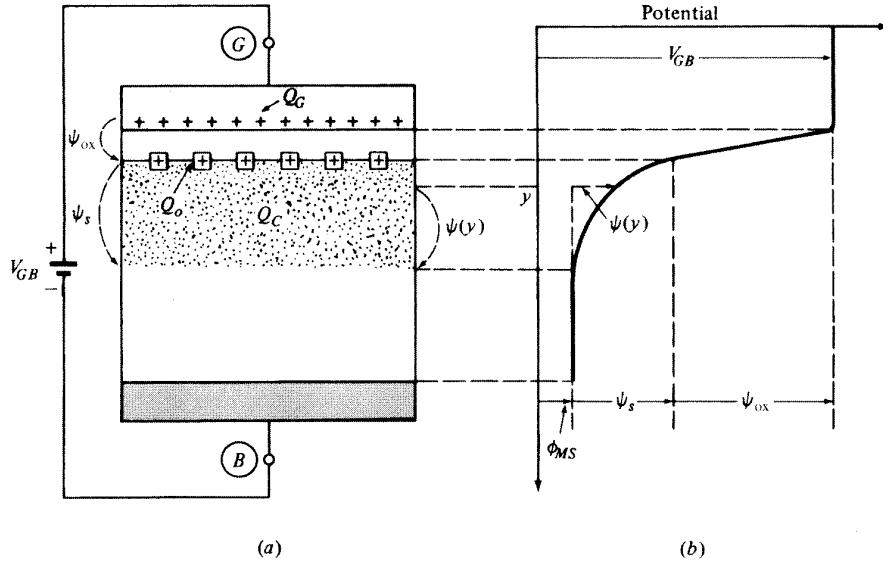


Figure 9.3: MOS 电容外加电压后衬底的电势分布

同样对于空穴有

$$p(y) = p_0 e^{-\psi(y)/\phi_t} \quad (9.15)$$

电荷密度有

$$\rho(y) = q [p(y) - n(y) - N_A] \quad (9.16)$$

根据泊松方程

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{-q}{\varepsilon_s} [p_0 e^{-\psi(y)/\phi_t} - n_0 e^{\psi(y)/\phi_t} - N_A] \quad (9.17)$$

9.4 MOS 电容一般性分析

这里我们对 MOS 电容电势分布进行一般性分析, 假设衬底既有 n 掺杂还有 p 掺杂. 公式 (9.17) 变为

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{-q}{\varepsilon_s} [p_0 e^{-\psi(y)/\phi_t} - n_0 e^{\psi(y)/\phi_t} - N_A + N_D] \quad (9.18)$$

由于

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 = \frac{d(\psi')^2}{dy} = 2 \frac{d\psi}{dy} \frac{d^2\psi}{dy^2} = 2\psi' \psi'' \quad (9.19)$$

因此有

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 &= \int \frac{d}{dy} \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 dy = \int \frac{d^2\psi}{dy^2} 2 \cdot \frac{d\psi}{dy} dy \\ &= \int 2 \frac{d\psi}{dy} \cdot \frac{-q}{\varepsilon_s} [p_0 e^{-\psi(y)/\phi_t} - n_0 e^{\psi(y)/\phi_t} - N_A + N_D] dy \\ &= \frac{2q}{\varepsilon_s} \left[p_0 \phi_t e^{-\psi(y)/\phi_t} + (N_A - N_D) \psi(y) + n_0 \phi_t e^{\psi(y)/\phi_t} \right] + Constant \end{aligned} \quad (9.20)$$

当 y 无穷远处时, $\psi = 0$, $\psi' = 0$, 把这两个边界条件带入上式有

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\psi}{dy} \\ &= \text{sign}(\psi_s) \sqrt{\frac{2q}{\varepsilon_s}} \sqrt{p_0 \phi_t (e^{-\psi(y)/\phi_t} - 1) + (N_A - N_D) \psi(y) + n_0 \phi_t (e^{\psi(y)/\phi_t} - 1)}\end{aligned}\quad (9.21)$$

我们选取绝缘层下表面单位面积到衬底深处的体积作为高斯面, 此时只有 $y = 0$ 处有电场, 故根据高斯定律

$$\iint \mathcal{E} \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_s} \quad (9.22)$$

在 $y = 0$ 处电场为 $-y$ 方向, 故

$$-\mathcal{E}_{surface} = \frac{Q'_C}{\varepsilon_s} \quad (9.23)$$

假设 $y = 0$ 处表面电势为 ψ_s , 由此可以得到电荷表达式

$$\begin{aligned}Q'_C &= -\varepsilon_s \mathcal{E}_{surface} \\ &= -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s} \sqrt{p_0 \phi_t (e^{-\psi_s/\phi_t} - 1) + (N_A - N_D) \psi_s + n_0 \phi_t (e^{\psi_s/\phi_t} - 1)}\end{aligned}\quad (9.24)$$

当 $\psi = 0$ (flatband) 时, 衬底到处都是中性的, 此时有

$$p_0 - N_A + N_D - n_0 = 0 \quad (9.25)$$

由此我们可以消去 $N_A - N_D$, 故有

$$Q'_C = -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s} \sqrt{p_0 \phi_t (e^{-\psi_s/\phi_t} - 1) + (p_0 - n_0) \psi_s + n_0 \phi_t (e^{\psi_s/\phi_t} - 1)} \quad (9.26)$$

同时, 我们可以我们可以用 p_0 来表示 n_0 , $p_0 \approx N_A$

$$n_0 = \frac{n_i^2}{p_0} = \frac{\left[p_0 \exp\left(\frac{-\phi_F}{\phi_t}\right) \right]^2}{p_0} = p_0 e^{-2\phi_F/\phi_t} \approx N_A e^{-2\phi_F/\phi_t} \quad (9.27)$$

由此可得

$$Q'_C = -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} + \psi_s - \phi_t + e^{-2\phi_F/\phi_t} (\phi_t e^{\psi_s/\phi_t} - \psi_s - \phi_t)} \quad (9.28)$$

我们可以根据如下四个方程来求解在特定偏置 V_{GB} 情况下的 MOS 电容的电荷和电势分布

- (1) 电势平衡: $V_{GB} = \psi_{ox} + \psi_s + \phi_{MS}$
- (2) 电荷平衡: $Q'_G + Q'_o + Q'_C = 0$
- (3) 衬底电荷和衬底电势差 ψ_s 的关系: $Q'_C = Q'_C(\psi_s)$
- (4) 栅极电荷和绝缘层电势差的关系: $Q'_G = C'_{ox} \psi_{ox}$

上述四个方程中, ϕ_{MS} , Q'_o , C'_{ox} , N_A 为已知量, 给定 V_{GB} , 可以求解出 ψ_{ox} , ψ_s , Q'_G , Q'_C . 在绝缘层中的陷阱电荷可以表示为

$$Q'_o = C'_{ox} (\phi_{MS} - V_{FB}) \quad (9.29)$$

因此有

$$\begin{aligned} Q'_C &= -Q'_G - Q'_o = -C'_{ox} \psi_{ox} - C'_{ox} (\phi_{MS} - V_{FB}) = -C'_{ox} (\psi_{ox} + \phi_{MS} - V_{FB}) \\ &= -C'_{ox} (\psi_{ox} - V_{FB} + (V_{GB} - \psi_{ox} - \psi_s)) \\ &= -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s) \end{aligned} \quad (9.30)$$

我们可以这么来理解这个方程, 首先 $V_{GB} - V_{FB}$ 相当于衬底中没有任何的电荷, 绝缘层中的陷阱电荷以及金属半导体的接触电势也已经去掉了, 如果此时再增加外加偏压 V_{GB} , 则在绝缘层上两端诱导的额外的电荷全部都是 Q'_C 了. 由此我们得到

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s - \frac{Q'_C(\psi_s)}{C'_{ox}} \quad (9.31)$$

把式 (9.28) 带入上式中得到

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s + \text{sign}(\psi_s) \gamma \sqrt{\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} + \psi_s - \phi_t + e^{-2\phi_F/\phi_t} (\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} - \psi_s - \phi_t)} \quad (9.32)$$

其中

$$\gamma = \frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{C'_{ox}} = (0.53V^{1/2}) \left(\frac{t_{ox}}{10nm} \right) \sqrt{\frac{N_A}{10^{17}cm^{-3}}} \quad (9.33)$$

$\sqrt{2q\varepsilon_s} = 5.8 \times 10^{-16} F \cdot cm^{-1/2} \cdot V^{1/2}$, 参数 γ 被叫做衬底效应系数 (body effect coefficient).

9.5 积累和耗尽

对于积累和耗尽状态, 电子对于衬底电荷的贡献可以忽略, 把所有 n_0 相关量忽略, 因此有

$$Q'_C = -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} + \psi_s - \phi_t} \quad (9.34)$$

事实上, 只要 $\psi_s < \phi_F$, 即处在积累和耗尽层时, 式子 (9.34) 就比较准确.

9.5.1 深度积累 Deep in Accumulation

当 ψ_s 等于负的几个 ϕ_t 时, 我们说 MOS 电容处在深度积累状态. 此时 (9.34) 中的指数项起主导作用, 因此可以简化为

$$Q'_C = -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s N_A \phi_t} e^{-\psi_s/(2\phi_t)} \quad (9.35)$$

9.5.2 深度耗尽 Deep in Depletion

当 ψ_s 等于正的几个 ϕ_t , 且小于 ϕ_F 时, 我们说 MOS 电容处在深度耗尽状态. 此时 (9.34) 中的指数项可以忽略, 如果我们也忽略掉 ϕ_t , 则可以简化为

$$Q'_C \approx -\text{sign}(\psi_s)\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}\sqrt{+\psi_s} \quad (9.36)$$

以后在更加高级的建模中 ϕ_t 会重新再考虑. 根据式子 (9.32), 我们可以得到

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s + \gamma\sqrt{\psi_s} \quad (9.37)$$

上述公式的解为

$$\psi_{sa} = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}} \right)^2 \quad (9.38)$$

ψ_{sa} 是表面深度耗尽的电势, 此时电子和空穴的浓度都可以忽略.

9.6 反型层 Inversion

9.6.1 反型区一般性分析

对于 MOS 晶体管费米势 ϕ_F 近似为 $9\phi_t \sim 16\phi_t$, 因此在反型区 ($\psi_s \geq \phi_F$), 故 (9.28) 近似可得

$$Q'_C = -\text{sign}(\psi_s)\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}\sqrt{\psi_s + \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}} \quad (9.39)$$

实际上, 衬底电荷主要的贡献来源于电离的掺杂原子和反型电子. 我们可以把电荷 Q'_C 拆解为反型层电荷 Q'_I 和耗尽区电离的受主原子 Q'_B .

$$Q'_C = Q'_I + Q'_B \quad (9.40)$$

电子的浓度 $n(y) \sim e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}$, 因此随着 y 轴离开表面, $\psi(y)$ 由 ψ_s 降低到零, 且 $n(y)$ 呈指数衰减. 由此, 我们可以使用电荷薄层假设 (Charge Sheet Approximation). 由于忽略了反型层的厚度, 因此这里也没有压价, 全部的表面电势 ψ_s 都落在了 p 型衬底的耗尽区上, 类似于一个 n^+p 结. 在这种情况下由泊松方程很容易得到耗尽区表面的电势 \mathcal{E}_B

$$\mathcal{E} = \int \frac{-eN_A}{\varepsilon_s} dy = \frac{-eN_A}{\varepsilon_s} y + C_1 \quad (9.41)$$

由于在 d_B 处的电场为零, 则有

$$\mathcal{E} = \frac{eN_A}{\varepsilon_s}(d_B - y) \quad (9.42)$$

令 $y = 0$

$$\mathcal{E}_B = \frac{eN_A}{\varepsilon_s} d_B \quad (9.43)$$

对电场积分得到表面电势 ψ_s

$$\psi_s = \int_0^{d_B} \mathcal{E} dy = \int_0^{d_B} \frac{eN_A}{\varepsilon_s} (d_B - y) dy = \frac{\mathcal{E}_B}{2} d_B \quad (9.44)$$

因此有

$$d_B = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_A}} \sqrt{\psi_s} \quad (9.45)$$

有了耗尽区宽度，我们可以计算耗尽区的电荷量了

$$Q'_B = -qN_A d_B = -qN_A \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_A}} \sqrt{\psi_s} = -\sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\psi_s} \quad (9.46)$$

现在我们可以计算反型层的电子浓度了

$$\begin{aligned} Q'_I &= Q'_C - Q'_B = -\sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \left(\sqrt{\psi_s + \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}} - \sqrt{\psi_s} \right) \\ &= \frac{-\sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \cdot \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}}{\sqrt{\psi_s + \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}} + \sqrt{\psi_s}} \end{aligned} \quad (9.47)$$

公式 (9.47) 在数值计算可能会出现问题，当 $\psi_s < 2\phi_F$ 时， $\phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}$ 非常小，容易出现数值误差，所以可以化成另外一种形式。为了方便，我们把反型层划分为弱 ($\psi_s = \phi_F$)，中等 ($\psi_s = 2\phi_F$)，和强反型层 ($\psi_s = 2\phi_F + \phi_{Z0}$)。强反型区的一个特征是 ψ_s 基本不再变化，外界的电场的变化基本上都落在了绝缘层上。如图 (9.7)，我们可以把衬底的电荷变化分成

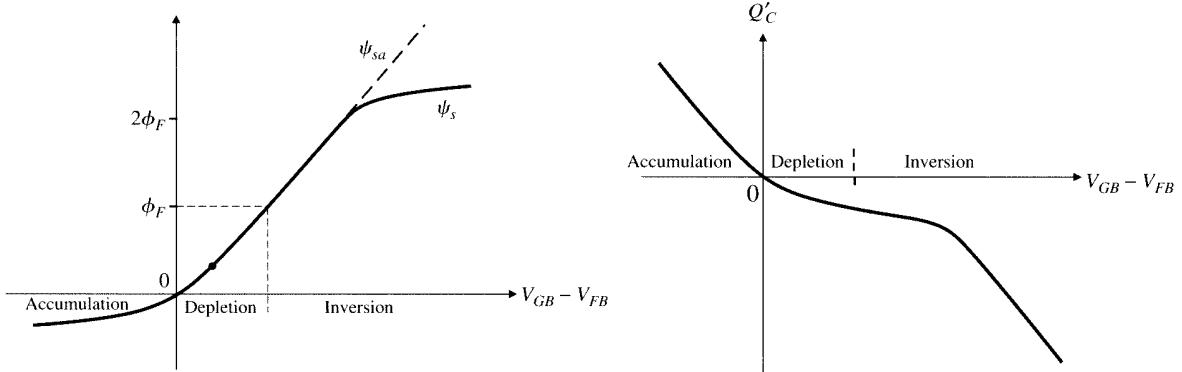


Figure 9.4: MOS 电容表面电势随外加电势关系 Figure 9.5: MOS 电容半导体电荷随外加电势关系

两部分

$$\Delta Q'_C = \Delta Q'_I + \Delta Q'_B \quad (9.48)$$

在弱反型区以下 $\psi_s \leq 2\phi_F$ ，衬底电荷基本上都是由电离层提供，到了强反型区时，衬底电荷基本上由反型层电子提供，而衬底由于掺杂浓度确定，因此掺杂原子电离带来的电荷是有限的。现在我们来推导反型层电荷的另一种表达形式

$$\begin{aligned} Q'_I &= Q'_C - Q'_B = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s) - Q'_B \\ &= -C'_{ox} \left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_s - \gamma \sqrt{\psi_s} \right) \end{aligned} \quad (9.49)$$

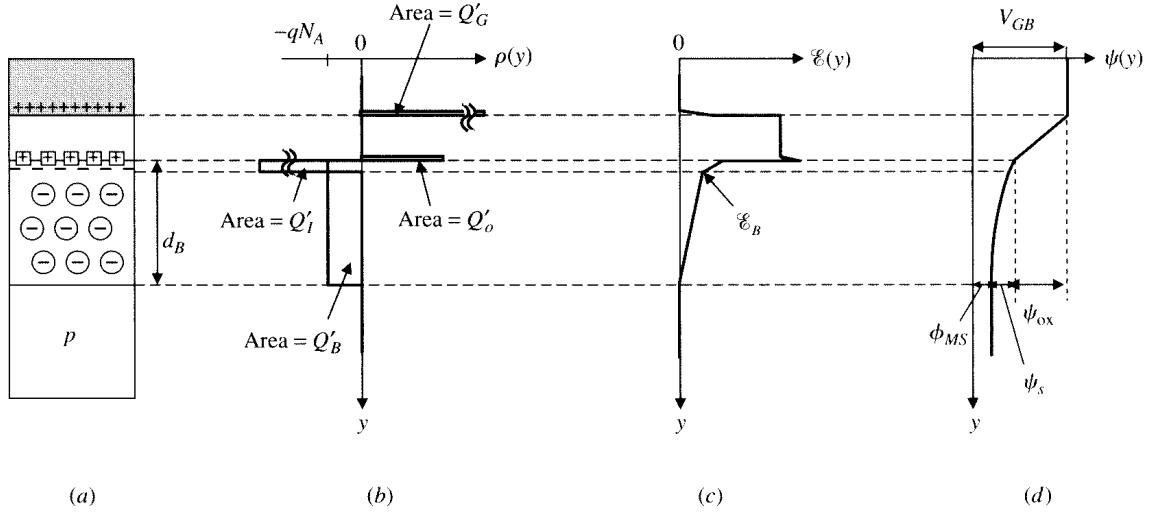


Figure 9.6: MOS 电容 (a) 结构; (b) 电荷浓度; (c) 电场分布; (d) 电势分布

我们再把 Q'_I 表达式代入进来

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s + \gamma \sqrt{\psi_s + \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}} \quad (9.50)$$

我们定义当表面电势为 $\phi_F, 2\phi_F, 2\phi_F + \phi_{Z0}$ 时外界电压 V_{GB} 为 V_{L0}, V_{M0}, V_{H0} , 此时有

$$V_{L0} = V_{FB} + \phi_F + \gamma \sqrt{\phi_F} \quad (9.51)$$

$$V_{M0} = V_{FB} + 2\phi_F + \gamma \sqrt{2\phi_F} \quad (9.52)$$

$$V_{H0} = V_{M0} + \phi_{Z0} \approx V_{M0} + 6\phi_t \quad (9.53)$$

9.6.2 强反型区

在工程中, 如果得不到 ϕ_{Z0} 的精确值, 我们可以用一个近似 $\phi_{Z0} \approx 6\phi_t$. 在强反型区时, 表面电势被钉在一个值不再变化

$$\psi_0 = 2\phi_F + \phi_{Z0} \quad (9.54)$$

说明了耗尽区电荷已经达到了最大值, 且根据 (9.45), 耗尽区最大宽度 d_{Bm} 为

$$d_{Bm} = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_A}} \sqrt{\psi_0} \quad (9.55)$$

此时最大耗尽区的电荷为

$$Q'_{B0} = -qN_A d_{Bm} = -\sqrt{2q\epsilon_s N_A} \sqrt{\psi_0} \quad (9.56)$$

此时反型区的电荷为

$$Q'_I = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{T0}) \quad (9.57)$$

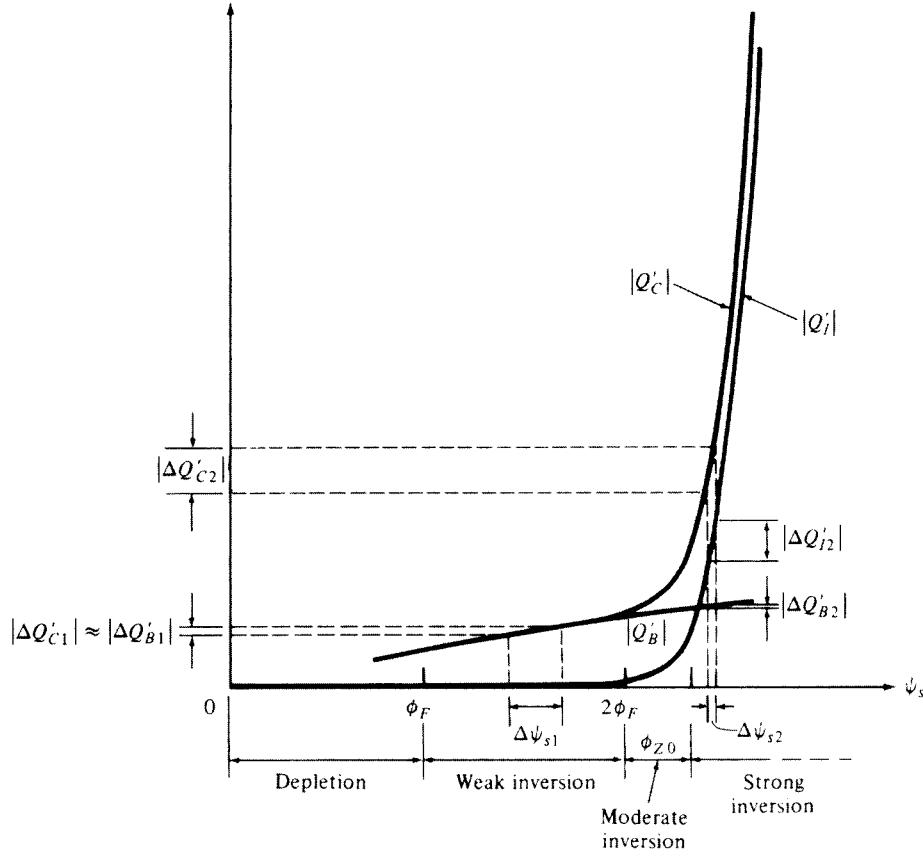


Figure 9.7: MOS 电容反型层耗尽层区域定义图

其中

$$V_{T0} = V_{FB} + \psi_0 + \gamma \sqrt{\psi_0} = \phi_{MS} - \frac{Q'_o}{C'_{ox}} + \phi_0 - \frac{Q'_{B0}}{C'_{ox}} \quad (9.58)$$

我们把 V_{T0} 定义为阈值电压.

9.7 弱反型区

弱反型区时 $\psi_s < 2\phi_F$, 此时

$$\xi = \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t} \quad (9.59)$$

ξ 非常的小, 因此根据泰勒展开有

$$\sqrt{\psi_s + \xi} - \sqrt{\psi_s} \approx \frac{1}{2\sqrt{\psi_s}} \xi \quad (9.60)$$

根据 (9.47), 有

$$Q'_I \approx \frac{-\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_s}} \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t} \quad (9.61)$$

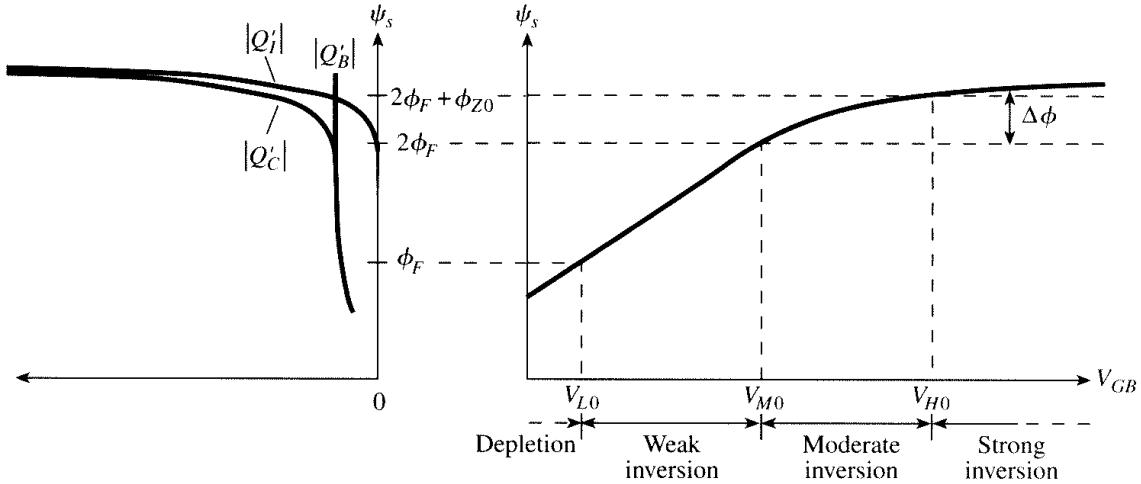


Figure 9.8: MOS 电容电荷和外界电压关系以及电荷和表面电势的关系

弱反型区时, 反型区的电子比耗尽区的电荷少的多, 几乎不影响表面电势, 衬底的电荷基本上可以认为等于耗尽区的电荷. 根据式子 (9.38) 因此我们有

$$\psi_s \approx \psi_{sa} = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}} \right)^2, \quad \text{Weak inversion} \quad (9.62)$$

此时有

$$Q'_I \approx \frac{-\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}} \phi_t e^{(\psi_{sa}(V_{GB}) - 2\phi_F)/\phi_t} \quad (9.63)$$

在弱反型区, ψ_{sa} 基本上是 V_{GB} 的线性函数, 我们定义一个斜率为

$$n = \frac{d\psi_{sa}}{dV_{GB}}^{-1} = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F}} \quad (9.64)$$

通常 n 的值在 $1 \sim 1.5$ 之间.(9.63) 中, 相比于快速变化的指数项, $\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}$ 的变化可以忽略, 一般可以 $\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})} \approx \sqrt{2\phi_F}$. 因此斜率 n 等于

$$n_0 = n|_{\psi_{sa}=2\phi_F} = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F}} \quad (9.65)$$

由此可得

$$\psi_{sa} - 2\phi_F = \frac{1}{n_0} (V_{GB} - V_{M0}) \quad (9.66)$$

$$Q'_I \approx Q'_{M0} e^{(V_{GB} - V_{M0})/(n_0 \phi_t)} \quad (9.67)$$

其中

$$Q'_{M0} = \frac{-\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}} \phi_t \quad (9.68)$$

9.8 小信号电容

总的电荷为 C'_{gb} , 定义为

$$C'_{gb} = \frac{dQ'_G}{dV_{GB}} \quad (9.69)$$

同时有栅极的电荷变化全部体现在衬底的变化上, 因为绝缘体中的陷阱电荷被认为是不变的.

$$\Delta Q'_C = -Q'_G \quad (9.70)$$

同时, 外界偏压的变化体现在绝缘体上的电压和衬底表面电压

$$\Delta V_{GB} = \Delta\psi_{ox} + \Delta\psi_s \quad (9.71)$$

因此有

$$\frac{1}{C'_{gb}} = \frac{dV_{GB}}{dQ'_G} = \frac{d\psi_{ox} + d\psi_s}{dQ'_G} = \frac{d\psi_{ox}}{dQ'_G} + \frac{d\psi_s}{-dQ'_C} \quad (9.72)$$

我们定义

$$C'_{ox} = \frac{dQ'_G}{d\psi_{ox}}, \quad C'_c = \frac{-dQ'_C}{d\psi_s} \quad (9.73)$$

则有

$$\frac{1}{C'_{gb}} = \frac{1}{C'_{ox}} + \frac{1}{C'_c} \quad (9.74)$$

根据 C'_c 的定义, 回顾式子 (9.28)

$$Q'_C = -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} + \psi_s - \phi_t + e^{-2\phi_F/\phi_t} (\phi_t e^{\psi_s/\phi_t} - \psi_s - \phi_t)} \quad (9.75)$$

可以得到

$$C'_c = \begin{cases} \text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \frac{1 - e^{-\psi_s/\phi_t} + e^{-2\phi_F/\phi_t} (e^{\psi_s/\phi_t} - 1)}{2\sqrt{\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} + \psi_s - \phi_t + e^{-2\phi_F/\phi_t} (\phi_t e^{\psi_s/\phi_t} - \psi_s - \phi_t)}} & \psi_s \neq 0 \\ \sqrt{q\varepsilon_s N_A (1 + e^{-2\phi_F/\phi_t}) / \phi_t} & \psi_s = 0 \end{cases}$$

9.8.1 C'_c Deep in Accumulation

深度积累时, ψ_s 是负几个 ϕ_t , 根据式子 (9.36)

$$C'_c = \sqrt{\frac{q\varepsilon_s N_A}{2\phi_t}} e^{-\psi_s/(2\phi_t)} \quad (9.76)$$

9.8.2 C'_c Deep in Depletion and in Inversion

此时 ψ_s 是正几个 ϕ_t , 回顾式子 (9.39)

$$Q'_C = -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\psi_s + \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}} \quad (9.77)$$

可以得到

$$C'_c = \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \frac{1 + e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}}{2\sqrt{\psi_s + \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}}}, \quad \psi_s > 5\phi_t \quad (9.78)$$

可以把衬底的电荷分割成反型层和耗尽层电荷

$$\Delta Q'_C = \Delta Q'_B + \Delta Q'_I \quad (9.79)$$

$$C'_c = \frac{-dQ'_B}{d\psi_s} + \frac{-dQ'_I}{d\psi_s} \quad (9.80)$$

定义

$$C'_b \equiv \frac{-dQ'_B}{d\psi_s}, \quad C'_i \equiv \frac{-dQ'_I}{d\psi_s} \quad (9.81)$$

电容是电荷的微分, 因此很容易出现大的偏差, 即使电荷误差很小, 此时我们用更加准确的 Q'_B 表达式, 此时可以得到 (参考原书附录 D,E)

$$C'_b = \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \frac{1}{2\sqrt{\psi_s + \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}}} \quad (9.82)$$

$$C'_i = \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \frac{e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}}{2\sqrt{\psi_s + \phi_t e^{(\psi_s - 2\phi_F)/\phi_t}}} \quad (9.83)$$

最后有

$$\frac{1}{C'_{gb}} = \frac{1}{C'_{ox}} + \frac{1}{C'_b + C'_i} \quad (9.84)$$

Chapter 10

三端口 MOS 结构

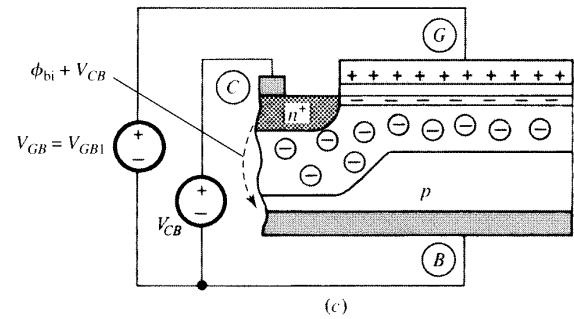
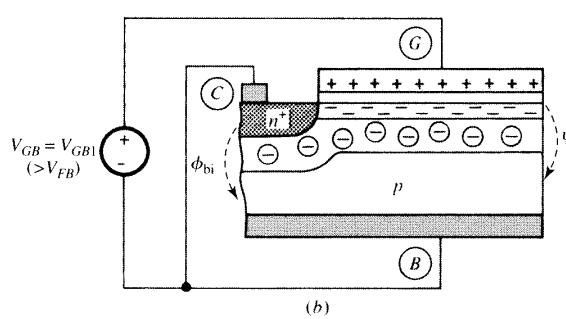
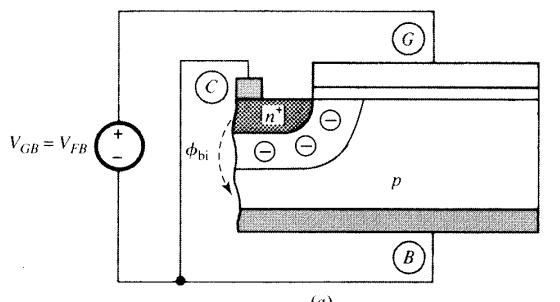


Figure 10.1: 三端口 MOS 图 1

Figure 10.2: 三端口 MOS 图 2

我们假定 V_{GB} 固定在某一值上, 该电压在氧化层下面产生一表面电势 ψ . 我们总是把 ψ_s 和 $2\psi_F$ 对比, 例如, 若 ψ_s 小于 $2\psi_F$, 则衬底电荷表达式中的指数项可以忽略, 从而说 MOS 结构处于弱反型区或者耗尽区. 若 ψ_s 大于 $2\psi_F$, 则指数项称为重要项, 于是说 MOS 结构处于中反型或者强反型状态.

假设 $V_{CB} = 0$, 固定 V_{GB} 使得表面处于某种程度的反型. 现在我们考虑 V_{CB} 有一突然的增量, 此时 n⁺ 的电势将因 V_{CB} 而变得比以前更正一些. 这一正电势将吸引反型层中的电子, 使电子流向 n⁺ 区, 并再从 n⁺ 区流入电压源的正端, 于是反型程度将减弱或者消失. 为了把表面恢复到原先状态, 必须增加表面势, 且增加量必须与 n⁺ 区所增加的电势量相等, 这样使得 n⁺ 区对电子不再具有更大的吸引力, 因此表面势必须从 ψ_x 增加到 $\psi_x + V_{CB}$. 所

以为了使得表面势得到这样一个增量, 必须适当增加 V_{GB} . 换言之, 确定表面对电子吸引程度的不是 ψ_s 多大, 而是 ψ_s 比 V_{CB} 大多少. 即要考虑 $\psi_s - V_{CB}$ 的差值. 只要这个差值固定, 表面电子浓度就固定. 把 (9.13) 中的 ψ_s 替换成 $\psi_s - V_{CB}$

$$n_s = \approx N_A e^{(\psi_s - 2\phi_F - V_{CB})/\phi_t} \quad (10.1)$$

因此在 (9.13) 中, ψ_s 是与 $2\phi_F$ 对抗以增加表面反型的程度, 而这里 ψ_s 是与 $2\phi_F + V_{CB}$ 比大小, 以确定表面反型的程度. 应当注意, 当 $V_{CB} > 0$ 时, 将有一微小电流通过电池. 这个电流的一部分来源于从 n^+ 区流向衬底的结反向偏置电流, 零一部分来源于反型层流向衬底的反向偏置电流. 除高温外, 这个偏置电流非常小. 上述的分析并不适用于空穴, 因为 n^+ 区并不吸引空穴. 因此空穴浓度还是由以前的表达式给出. 接下来我们将着重讨论反型情况.

类比 (9.18) 衬底的泊松方程可以表示为

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{-q}{\varepsilon_s} \left[p_0 e^{-\psi(y)/\phi_t} - n_0 e^{-V_{CB}/\phi_t} e^{\psi(y)/\phi_t} - N_A + N_D \right] \quad (10.2)$$

进而可知道衬底电荷为

$$\begin{aligned} Q'_C &= -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s} \sqrt{p_0 \phi_t (e^{-\psi_s/\phi_t} - 1) + (N_A - N_D) \psi_s + n_0 e^{-V_{CB}/\phi_t} \phi_t (e^{\psi_s/\phi_t} - 1)} \\ &= -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} + \psi_s - \phi_t + e^{-(2\phi_F + V_{CB})/\phi_t} (\phi_t e^{\psi_s/\phi_t} - \psi_s - \phi_t)} \end{aligned} \quad (10.3)$$

我们可以根据如下四个方程来求解在特定偏置 V_{GB} 情况下的 MOS 电容的电荷和电势分布

- (1) 电势平衡: $V_{GB} = \psi_{ox} + \psi_s + \phi_{MS}$
- (2) 电荷平衡: $Q'_G + Q'_o + Q'_C = 0$
- (3) 衬底电荷和衬底电势差 ψ_s 的关系: $Q'_C = Q'_C(\psi_s)$
- (4) 栅极电荷和绝缘层电势差的关系: $Q'_G = C'_{ox} \psi_{ox}$

根据上面的假设容易得到

$$Q'_C = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s) \quad (10.4)$$

我们可以这么来理解这个方程, 首先 $V_{GB} - V_{FB}$ 相当于衬底中没有任何的电荷, 绝缘层中的陷阱电荷以及金属半导体的接触电势也已经去掉了, 如果此时再增加外加偏压 V_{GB} , 则在绝缘层上两端诱导的额外的电荷全部都是 Q'_C 了. 由此我们得到

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s - \frac{Q'_C(\psi_s)}{C'_{ox}} \quad (10.5)$$

把式 (9.28) 带入上式中得到

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s + \text{sign}(\psi_s) \gamma \sqrt{\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} + \psi_s - \phi_t + e^{-(2\phi_F + V_{CB})/\phi_t} (\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} - \psi_s - \phi_t)} \quad (10.6)$$

从 (10.6) 中可以得出外部偏压和表面电势的关系.

10.1 反型层

处于反型状态时, 忽略掉一些项得到衬底电荷, 参考 MOS 电容易得

$$Q'_C = -\text{sign}(\psi_s) \sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\psi_s + \phi_t e^{[\psi_s - (2\phi_F + V_{CB})]/\phi_t}} \quad (10.7)$$

此时 (10.5) 可以表示为

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s + \gamma \sqrt{\psi_s + \phi_t e^{[\psi_s - (2\phi_F + V_{CB})]/\phi_t}} \quad (10.8)$$

我们依然假设电荷薄层, 即反型层电荷没有厚度, 表面电势都是由耗尽层电荷引起

$$\psi_s = \int_0^{d_B} \mathcal{E} dy = \int_0^{d_B} \frac{eN_A}{\varepsilon_s} (d_B - y) dy = \frac{\mathcal{E}_B}{2} d_B \quad (10.9)$$

因此有

$$d_B = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_A}} \sqrt{\psi_s} \quad (10.10)$$

有了耗尽区宽度, 我们可以计算耗尽区的电荷量了

$$Q'_B = -qN_A d_B = -qN_A \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_A}} \sqrt{\psi_s} = -\sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\psi_s} = -\gamma C'_{ox} \sqrt{\psi_s} \quad (10.11)$$

现在我们可以计算反型层的电子浓度了

$$Q'_I = Q'_C - Q'_B = -\sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \left(\sqrt{\psi_s + \phi_t e^{[\psi_s - (2\phi_F + V_{CB})]/\phi_t}} - \sqrt{\psi_s} \sqrt{\psi_s} \right) \quad (10.12)$$

为了以后方便, 我们把 Q'_I 变形

$$\begin{aligned} Q'_I &= Q'_C - Q'_B = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s) - Q'_B \\ &= -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s - \gamma \sqrt{\psi_s}) \end{aligned} \quad (10.13)$$

当处于弱反型层时或者耗尽层时, 可以忽略掉反型层电荷, 因此有

$$Q'_C \approx Q'_B \quad (10.14)$$

因此有

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s + \gamma \sqrt{\psi_s} \quad (10.15)$$

上述公式的解为

$$\psi_{sa} = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}} \right)^2 \quad (10.16)$$

ψ_{sa} 是表面深度耗尽的电势, 此时电子和空穴的浓度都可以忽略. 上式说明对于给定的 V_{GB}, ψ_{sa} 与 V_{CB} 无关, 因为此时 V_{CB} 对于 ψ_s 的影响可以忽略, 从物理意义上讲, 这是因为此时不存在反型层电荷.

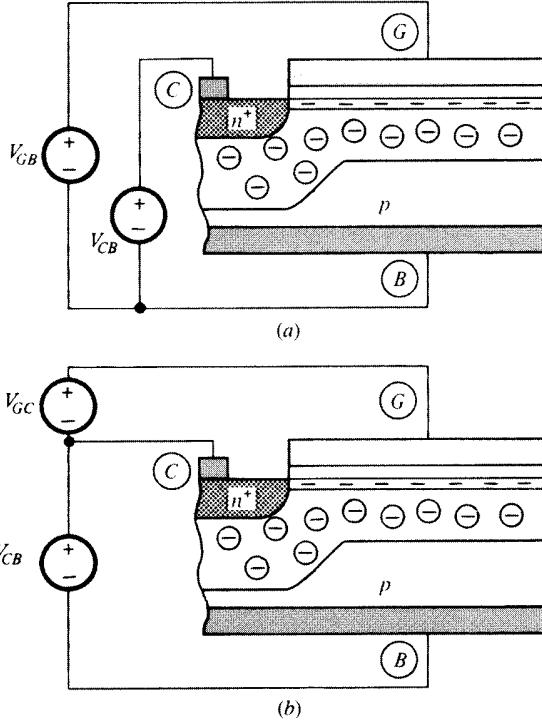


Figure 10.3: 三端口 MOS 结构体效应图

10.2 Body Effect 体效应

若要保持反型程度不变, V_{GB} 的增加量必须大于 V_{CB} 的增加量. 这一现象称为体效应或者衬底效应. 如图 (10.3). 体效应实际上与下面事实相关: 图中所连接的 V_{CB} 增大, 而 V_{GC} 保持常数, 则尽管 $V_{GB} = V_{GC} + V_{CB}$, 然而反型程度还是减弱了, 为了重新恢复原来的反型程度, 将不得不增大 V_{GC} .

V_{CB} 起着反偏电压 V_R 的作用. 和怎样 V_R 会使得 n^+p 的耗尽区变宽一样, 增加 V_{CB} 也将使强反型表面下的耗尽区变宽. 现在假设表面已经充分进入强反型层, 然后假设 V_{CB} 增加一个微小的量, 而 V_{GC} 保持不变. 具有大量电子的强反型层可以看作一个电容器的底极板, 而栅极是顶极板. 由于 V_{GC} 不变, 该电容器两端电压不变, 因此栅极的电荷也不变. 但是由于 V_{CB} 已经增大, 因此耗尽区将变宽, 更多的受主原子将电离, 总的耗尽区电荷将变得更负. 然而, 氧化层下面总的电荷必定与栅上的正电荷相平衡, 而栅电荷, 如上所述保持不变. 现在已有更多的电离受主为这一平衡做出贡献, 那么反型层只需要较少的自由电子即可, 这样反型程度将减弱, 为了重新恢复原来的反型程度, 将不得不增大 V_{GC} , 这就是体效应.

掺杂浓度越高, 那么体效应越强, 因为电离提供的电荷更多了, 这个影响直接体现在体效应系数 γ 上面. 上述效应的结果是: 增加 V_{CB} 将导致 V_L, V_M, V_H 等值的增加, 标在轴上的 V_T 也就是外推阈值电压, 也要相应增大, 事实上, 体效应这一术语的意思往往正式指 V_T 随 V_{CB} 的增加而增大.

10.3 反型区

10.3.1 近似界限

前面我们已经定义了 MOS 电容的弱、中、强反型状态的开始点，即表面电势为 $\phi_F, 2\phi_F, 2\phi_F + \phi_{Z0}$ 时外界电压 V_{GB} 为 V_{L0}, V_{M0}, V_{H0} (9.51,9.52,9.53). 对于三端口 MOS 结构，我们也相应定义这三个开始点，其表面电势分别为

$$\phi_L = \phi_F + V_{CB} \quad (10.17)$$

$$\phi_M = 2\phi_F + V_{CB} \quad (10.18)$$

$$\phi_H = 2\phi_F + \phi_Z + V_{CB} \approx 2\phi_F + 6\phi_t + V_{CB} \quad (10.19)$$

当 ψ_s 大于 ϕ_H 时，表面电势相对恒定。根据 (9.51,9.52,9.53) 我们有

$$V_L = V_{FB} + \phi_F + \gamma \sqrt{\phi_F + V_{CB}} \quad (10.20)$$

$$V_L = V_{LB} - V_{CB} \quad (10.21)$$

$$V_M = V_{FB} + 2\phi_F + \gamma \sqrt{2\phi_F + V_{CB}} \quad (10.22)$$

$$V_M = V_{MB} - V_{CB} \quad (10.23)$$

$$V_H = V_M + \phi_{Z0} \quad (10.24)$$

我们重复体效应常数 γ

$$\gamma = \frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{C'_{ox}} = \left(0.53V^{1/2}\right) \left(\frac{t_{ox}}{10nm}\right) \sqrt{\frac{N_A}{10^{17}cm^{-3}}} \quad (10.25)$$

$\sqrt{2q\varepsilon_s} = 5.8 \times 10^{-16} F \cdot cm^{-1/2} \cdot V^{1/2}$, 参数 γ 被叫做衬底效应系数 (body effect coefficient).

10.3.2 强反型

在强反型区时，表面电势被钉在一个值 $\phi_s = \phi_0 + V_{CB}$ 不再变化

$$\psi_s \approx \phi_0 + V_{CB} \approx 2\phi_F + \phi_{Z0} \quad (10.26)$$

其中 $\phi_{Z0} \approx 6\phi_t$. 由于表面电势固定，耗尽区电荷已经达到了最大值，且根据 (9.45)，耗尽区最大宽度 d_{Bm} 为

$$d_{Bm} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_A}} \sqrt{\phi_0 + V_{CB}} \quad (10.27)$$

此时最大耗尽区的电荷为

$$Q'_B = -qN_A d_{Bm} = -\sqrt{2q\varepsilon_s N_A} \sqrt{\phi_0 + V_{CB}} = -\gamma C'_{ox} \sqrt{\phi_0 + V_{CB}} \quad (10.28)$$

此时反型区的电荷为

$$Q'_I = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{TB}) \quad (10.29)$$

其中

$$V_{TB} = V_T + V_{CB} = V_{FB} + \phi_0 + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{CB}} + V_{CB} \quad (10.30)$$

$$V_T = V_{FB} + \phi_0 + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{CB}} \quad (10.31)$$

我们把 V_{TB} 定义为外插阈值电压. 我们可以重写下 Q'_I

$$Q'_I = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{TB}) = -C'_{ox} (V_{GC} - V_T) \quad (10.32)$$

上式说明, 体效应通过 V_T 体现了出来, 如果提高 V_{CB}, V_{GC} 不变, 也意味这 V_{GB} 等量提高, 那么反型层将减弱, 因为 V_T 将增强, 这就是 Body effect. 由 (10.33) 我们可以对外插阈值电压变形

$$V_{T0} = V_{FB} + \phi_0 + \gamma \sqrt{\phi_0} \quad (10.33)$$

$$V_T = V_{FB} + \phi_0 + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{CB}} = V_{T0} + \gamma \left(\sqrt{\phi_0 + V_{CB}} - \sqrt{\phi_0} \right) \quad (10.34)$$

10.3.3 弱反型

To be continued..

10.4 V_{CB} 控制观点

10.4.1 基本推导

当我们固定 V_{GB} 不变, 逐渐提高 V_{CB} , 那么强反型层慢慢退化成弱反型状态直至反型消失. 这个观点很有意思, 本质上等效为 MOSFET 电流表达式中固定 V_{GS} , 慢慢提高 V_{DS} , 漏端反型的变化, 进入饱和区本质上就是漏端反型的消失. 我们可以考虑给定 V_{GB} , 求取 V_{CB} 使得反型层状态处在中反型的起点 ($\psi_s = 2\phi_F + V_{CB}$), 记录这个时候的 $V_{CB} = V_W$

$$V_{FB} + 2\phi_F + V_W + \gamma \sqrt{2\phi_F + V_W} = V_{GB} \quad (10.35)$$

上式可以解出 V_W

$$V_W = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}} \right)^2 - 2\phi_F \quad (10.36)$$

10.4.2 关断电压 Pinch-off Voltage

在强反型区, 反型层电荷基本和外界偏压呈线性, 如图 (10.4).

$$Q'_I = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{TB}(V_{CB})) \quad (10.37)$$

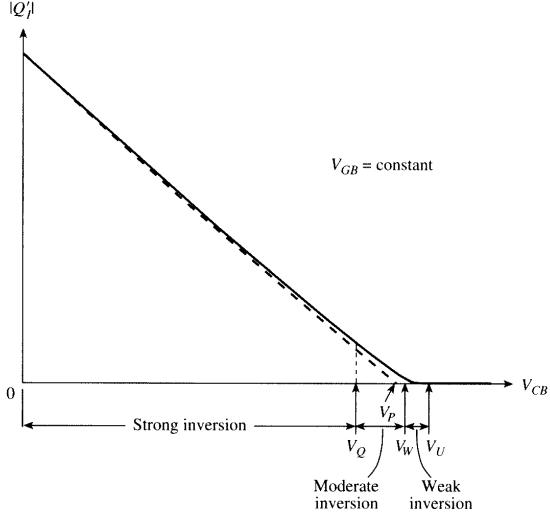


Figure 10.4: 三端口 MOS 结构反型层电荷和 VCB 关

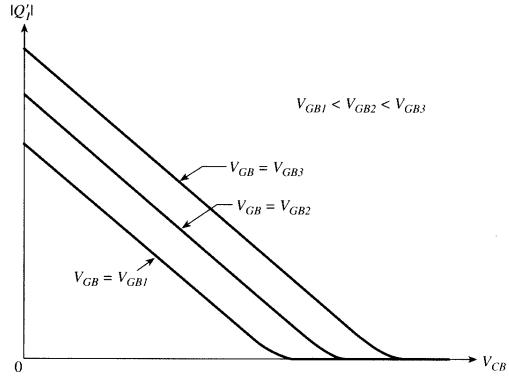


Figure 10.5: 三端口 MOS 结构反型层电荷和 VCB 与 VGB 关系

其中

$$V_{TB}(V_{CB}) = V_{FB} + \phi_0 + V_{CB} + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{CB}} \quad (10.38)$$

很显然, 当 V_{CB} 增加, $V_{TB}(V_{CB})$ 也相应增加, 而 $|Q'_I|$ 相应减小. 如图 (??), 我们定义关断电压 V_p (Pinchoff voltage). 关断电压指的是给定栅极电压 V_{GB} , 提高 V_{CB} 的值, 直至反型层电荷为零, 此时 $V_{CB} \equiv V_p$, 如式子 (10.37), 令反型层电荷为零可以得到

$$V_p \equiv V_{CB} \Big|_{Q'_I=0} = V_{CB} \Big|_{V_{TB}=V_{GB}} \quad (10.39)$$

故有

$$V_{TB}(V_{CB}) = V_{GB} = V_{FB} + \phi_0 + V_p + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_p} \quad (10.40)$$

解得

$$V_p = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}} \right)^2 - \phi_0 \quad (10.41)$$

对比式 (9.38), 可以发现

$$V_p = \psi_{sa} - \phi_0 \quad (10.42)$$

这个结果并不奇怪, 假设表面电势正好处于某个状态使得反型层电荷消失, 比如说表面电势正好使得空穴被耗尽, 那么表面电势就正如前面所讨论的 ψ_{sa} . 现在我们假设反型层表面电势为 $\phi_0 + V_{CB}$, 然后慢慢增大 V_{CB} 直至反型层消失, 此时表面电势基本等于 ϕ_{sa} . 故

$$\phi_0 + V_{CB} = \phi_0 + V_p = \psi_{sa} \quad (10.43)$$

Chapter 11

四端口 MOSFET

11.1 爱因斯坦关系

若电子的平均自由程即电子在两次碰撞之间走过的平均距离为 $l(l = v_{th}\tau_{cn})$, 那么 $x = -l$ 处向右运动的电子和 $x = +l$ 处向左运动的电子都将通过 $x = 0$ 处, 故 x_0 处沿 $+x$ 方向的电子流速 F_n 为

$$F_n = \frac{1}{2}n(-l)v_{th} - \frac{1}{2}n(+l)v_{th} = \frac{1}{2}v_{th}[n(-l) - n(+l)] \quad (11.1)$$

进一步有

$$F_n = -v_{th}l \frac{n(-l) - n(+l)}{-2l} = -v_{th}l \frac{dn}{dx} \quad (11.2)$$

因此电流密度为

$$J = -eF_n = ev_{th}l \frac{dn}{dx} \quad (11.3)$$

上述公式的直观理解可以令 $dx = l$, 然后 $J = ev_{th}(dn)$ 了, 这个和漂移速度表达式非常像, 但是这种驱动力不是来源于外界电场, 而是内部载流子浓度在空间上的分布不均, 即 dn . 在这里我们定义电子扩散系数 $D_n = v_{th}l$, 其单位为 cm^2/s .

$$J_{nx|dif} = eD_n \frac{dn}{dx} \quad (11.4)$$

对于空穴有

$$J_{px|dif} = -eD_p \frac{dp}{dx} \quad (11.5)$$

半导体中总电流包括电子漂移电流和扩散电流, 空穴漂移电流和扩散电流, 对于一维情况有

$$J = en\mu_n E_x + ep\mu_p E_x + eD_n \frac{dn}{dx} - eD_p \frac{dp}{dx} \quad (11.6)$$

推广到三维

$$J = en\mu_n E + ep\mu_p E + eD_n \nabla n - eD_p \nabla p \quad (11.7)$$

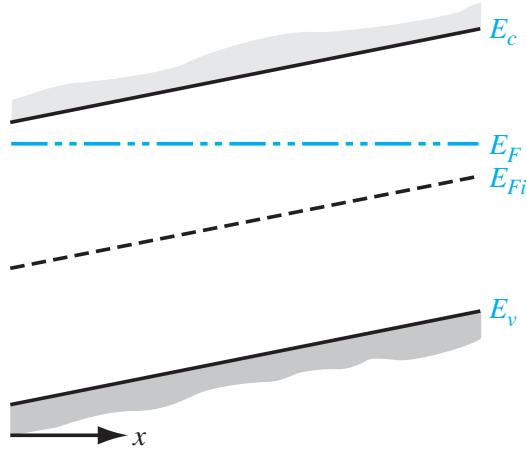


Figure 11.1: 非均匀半导体热平衡时的能带图

考虑一块非均匀掺入施主的 n 型半导体，掺杂浓度随着 x 增加而减小，多数载流子电子从高浓度区域向低浓度区域沿着 $+x$ 方向扩散，留下了带正点的施主杂质离子。分离的正负电荷产生了一个沿着 $+x$ 的内建电场，抵抗了扩散过程。当达到平衡状态时，扩散载流子的浓度并不等于固定杂质的浓度，感生电场组织了正负电荷的进一步分离。大多数情况下，扩散感应出的空间电荷数只占据杂质浓度的很小部分。

电势 ϕ 等于电子势能除以电子电量 ($-e$)

$$\phi = +\frac{1}{e}(E_F - E_{Fi}) \quad (11.8)$$

一维情况下感生电场定义为

$$E_x = -\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{e} \frac{dE_{Fi}}{dx} \quad (11.9)$$

当电场加载在 n 型半导体两端，每个电子都会经历一个 $-qE$ 的力，而这个力等于负的势能的梯度

$$-qE = -\frac{dE_c}{dx} \quad (11.10)$$

就爱如满足准中性条件，电子浓度与施主杂质浓度基本相等，则有

$$n_0 = n_i \exp \left[\frac{E_F - E_{Fi}}{kT} \right] \approx N_d(x) \quad (11.11)$$

求解 $E_F - E_{Fi}$ 得

$$E_F - E_{Fi} = kT \ln \left(\frac{N_d(x)}{n_i} \right) \quad (11.12)$$

两边对 x 微分得到

$$-\frac{dE_{Fi}}{dx} = \frac{kT}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} \quad (11.13)$$

故

$$E_x = -\frac{kT}{e} \frac{1}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} \quad (11.14)$$

考虑图 (11.1) 中所示的非均匀掺杂半导体. 假设没有外加电场, 半导体处于热平衡, 则电子电流和空穴电流分别等于零 (否则某个地方的电子或空穴会随时间凭空增加).

$$J_n = 0 = en\mu_n E_x + eD_n \frac{dn}{dx} \quad (11.15)$$

设半导体满足准中性条件, 即 $n \approx N_d(x)$, 则上式可以重写为

$$J_n = 0 = e\mu_n N_d(x) E_x + eD_n \frac{dN_d(x)}{dx} \quad (11.16)$$

把公式 (11.14) 代入上式有

$$0 = -e\mu_n N_d(x) \left(\frac{kT}{e} \right) \frac{1}{N_d(x)} \frac{dN_d(x)}{dx} + eD_n \frac{dN_d(x)}{dx} \quad (11.17)$$

由此我们

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{e} \quad (11.18)$$

同理我们由空穴电流为零, 可以得到

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT}{e} \quad (11.19)$$

因此有

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT}{e} \quad (11.20)$$

可以看到扩散系数和迁移率不是彼此独立的参数. 公式 (11.20) 给出的扩散系数和迁移率之间的关系称为爱因斯坦关系. 在 $T = 300K$, $\frac{kT}{e}$ 大致为 $1/40$, 即扩散系数约为迁移率的 $1/40$.

我们还可以用另外一种简单的方法来推导爱因斯坦关系. 根据扩散系数定义 $D_n = v_{th}l$, 而在一个方向上的速度为 $1/2kT = 1/2mv_{th}^2$, 且 $l = v_{th}\tau_c$ 故有

$$D_n = v_{th}l = v_{th} \cdot v_{th}\tau_c = v_{th}^2\tau_c = \frac{kT}{m}\tau_c = \frac{q\tau_c}{m} \frac{kT}{q} = \mu \frac{kT}{q} = \mu\phi_t \quad (11.21)$$

11.2 长沟道 MOSFET 基本介绍

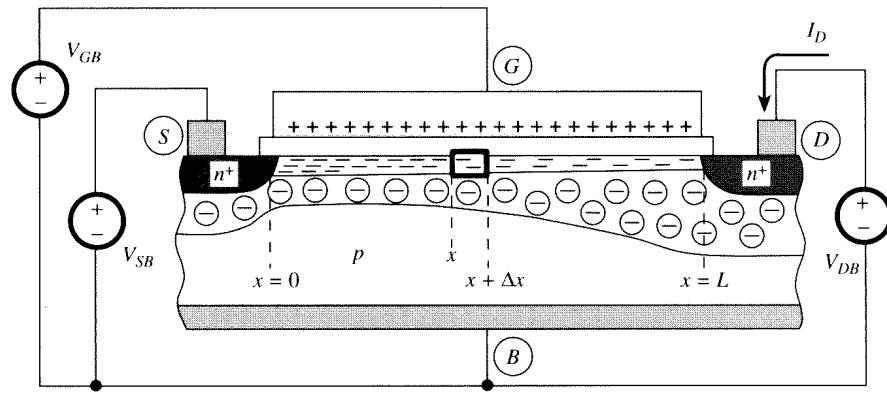
我们从长沟道的 MOSFET 开始讨论, 也就是说并不考虑边缘效应, 比如不考虑 access region 对于整个器件的影响. 另外我们需要加一个 gradual channel approximation 假设, 即在沟道中垂直方向的电场占主导, 水平方向的电场很弱.

11.3 通用电荷薄层模型

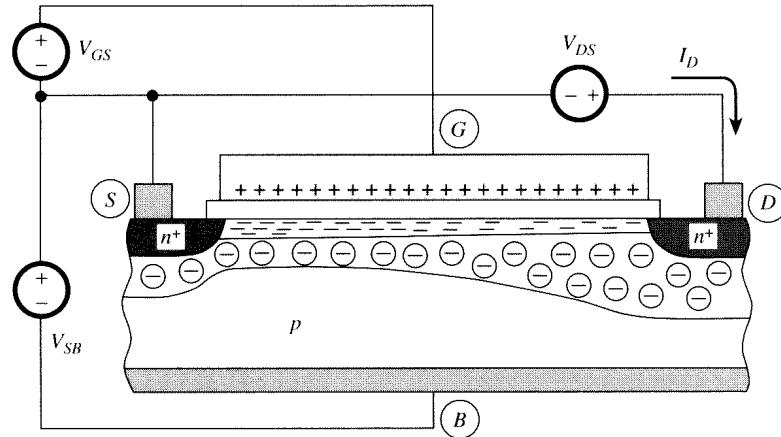
11.3.1 沟道电流方程

推导通用电荷薄层模型, 有一个电荷薄层基本假设 (charge sheet approximation). 沟道中的电流主要漂移电流和扩散电流

$$I(x) = I_{drift}(x) + I_{diff}(x) \quad (11.22)$$



(a)



(b)

Figure 11.2: nMOSFET 沟道示意图 (a)body reference; (b)source reference

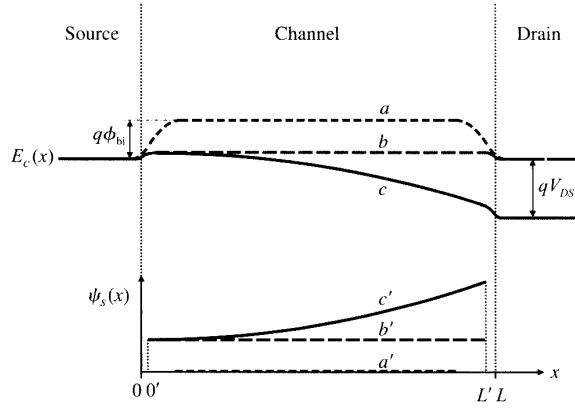


Figure 11.3: nMOSFET 沟道能带图

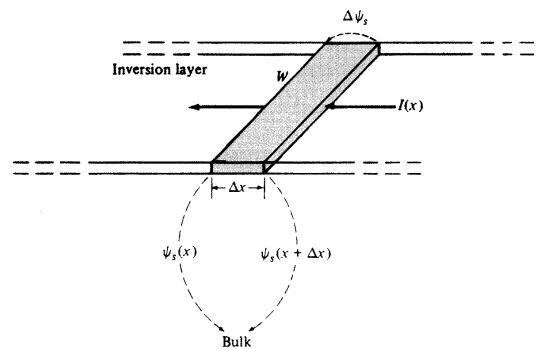


Figure 11.4: nMOSFET 沟道微分示意图

反型层的电荷迁移率需要用一个较小的迁移值, 因为电子平行于表面 (半导体 - 氧化层界面) 运动时, 会被垂直方向的电场拉向表面, 故运动困难. 对应的迁移率称为表面迁移率, 区别于

Bulk 的电荷迁移率 μ_B , 我们用 μ 来表示表面迁移率. 这样有

$$I_{drift}(x) = \mu(-Q'_I)W \cdot \mathcal{E}(x) = \mu(-Q'_I)W \frac{d\psi_s}{dx} \quad (11.23)$$

而扩散电流为

$$I_{diff}(x) = D_n W \frac{dQ'_I}{dx} = \mu W \phi_t \frac{dQ'_I}{dx} \quad (11.24)$$

我们把源端 ($x=0$) 的表面势记为 ψ_{s0} , 该处的 Q'_I 记为 Q'_{I0} , 记沟道漏端处 ($x=L$) 的相应量记为 ψ_{sL} 和 Q'_{IL} , 则有

$$\begin{aligned} \int_0^L I_{DS} dx &= \int_0^L I_{drift}(x) + I_{diff}(x) dx \\ &= \int_0^L \left[\left(\mu(-Q'_I)W \frac{d\psi_s}{dx} \right) + \left(\mu W \phi_t \frac{dQ'_I}{dx} \right) \right] dx \\ &= W \int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q'_I) d\psi_s + W \phi_t \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} \mu dQ'_I \end{aligned} \quad (11.25)$$

由于 I_{DS} 与位置无关, 故

$$I_{DS} = \frac{W}{L} \left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q'_I) d\psi_s + \phi_t \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} \mu dQ'_I \right] \quad (11.26)$$

这样我们可以把 I_{DS} 看成两个分量

$$I_{DS} = I_{D1} + I_{D2} \quad (11.27)$$

其中 I_{D1} 由漂移引起

$$I_{D1} = \frac{W}{L} \int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q'_I) d\psi_s \quad (11.28)$$

I_{D1} 由扩散引起

$$I_{D2} = \frac{W}{L} \phi_t \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} \mu dQ'_I = \frac{W}{L} \mu \phi_t (Q'_{IL} - Q'_{I0}) \quad (11.29)$$

回顾下反型层电荷表达式 (10.13)

$$Q'_I = Q'_C - Q'_B = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s) - Q'_B \quad (11.30)$$

因此有

$$I_{D1} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB})(\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{1}{2} (\psi_{sL}^2 - \psi_{s0}^2) \right] + \frac{W}{L} \mu \int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} Q'_B d\psi_s \quad (11.31)$$

$$I_{D2} = \frac{W}{L} C'_{ox} \mu \phi_t (\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{W}{L} \mu \phi_t [Q'_B(\psi_{sL}) - Q'_B(\psi_{s0})] \quad (11.32)$$

耗尽区的电荷表达式为

$$Q'_B = -C'_{ox} \gamma \sqrt{\psi_s} \quad (11.33)$$

因此我们可以得到漂移引起的沟道电流分量

$$\begin{aligned} I_{D1} &= \frac{W}{L} \mu \int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} C'_{ox} \left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_s - \gamma \sqrt{\psi_s} \right) d\psi_s \\ &= \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB})(\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{1}{2}(\psi_{sL}^2 - \psi_{s0}^2) - \frac{2}{3}\gamma(\psi_{sL}^{3/2} - \psi_{s0}^{3/2}) \right] \end{aligned} \quad (11.34)$$

公式 (11.34) 在弱反型区很容易出现数值问题, 因为此时两端的表面电势差别非常小, 我们可以通过分解出因子 $\psi_{sL} - \psi_{s0}$ 来改善

$$I_{D1} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB}) - \frac{1}{2}(\psi_{sL} + \psi_{s0}) - \frac{2}{3}\gamma \frac{\psi_{sL} + \psi_{sL}^{1/2}\psi_{s0}^{1/2} + \psi_{s0}}{\psi_{sL}^{1/2} + \psi_{s0}^{1/2}} \right] (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \quad (11.35)$$

其中我们利用了如下事实

$$\begin{aligned} \psi_{sL}^{3/2} - \psi_{s0}^{3/2} &= (\psi_{sL}^{1/2} - \psi_{s0}^{1/2}) (\psi_{sL} + \psi_{sL}^{1/2}\psi_{s0}^{1/2} + \psi_{s0}) \\ &= \frac{\psi_{sL} + \psi_{sL}^{1/2}\psi_{s0}^{1/2} + \psi_{s0}}{\psi_{sL}^{1/2} + \psi_{s0}^{1/2}} (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \end{aligned} \quad (11.36)$$

同理有

$$\begin{aligned} I_{D2} &= \frac{W}{L} C'_{ox} \mu \phi_t \left(Q'_{IL} - Q'_{I0} \right) = \frac{W}{L} C'_{ox} \mu \phi_t \left[(\psi_{sL} - \psi_{s0}) + \gamma(\psi_{sL}^{1/2} - \psi_{s0}^{1/2}) \right] \\ &= \frac{W}{L} C'_{ox} \mu \phi_t \left[(\psi_{sL} - \psi_{s0}) + \gamma \frac{\psi_{sL} - \psi_{s0}}{\psi_{sL}^{1/2} + \psi_{s0}^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (11.37)$$

11.3.2 沟道两端表面电势

根据 (9.50), 反型区的表面电势表示为

$$\psi_{s0} = V_{GB} - V_{FB} - \gamma \sqrt{\psi_{s0} + \phi_t e^{(\psi_{s0} - 2\phi_F - V_{SB})/\phi_t}} \quad (11.38)$$

$$\psi_{sL} = V_{GB} - V_{FB} - \gamma \sqrt{\psi_{sL} + \phi_t e^{(\psi_{sL} - 2\phi_F - V_{GB})/\phi_t}} \quad (11.39)$$

我们必须要非常注意, 我们忽略了漏附近的边缘效应, 结果沟道漏端处的表面势为 ψ_{sL} , 一般情况下它与 n^+ 区的电势是不一样的, 这样, 在 n^+ 区边界上电势似乎是不连续的. 所以可以把 L 解释为去除了源漏过渡区后的沟道长度, 这也是为什么 MVSG 的模型中要加入 virtual source 的原因. 在强反型区时, $I_{DS} \approx I_{D1}$, 此时漂移电流占据主导地位, 在弱反型区内, $I_{DS} \approx I_{D2}$, 故电流主要由扩散引起.

很容易知道, I_{DS} 关于 ψ_{s0} 和 ψ_{sL} 对称, 且可以写成如下形式

$$I_{DS} = \frac{W}{L} [f(\psi_{sL}) - f(\psi_{s0})] \quad (11.40)$$

其中

$$f(\psi_s) = \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB} + \phi_t) \psi_s - \frac{1}{2} \psi_s^2 - \frac{2}{3} \gamma \psi_s^{3/2} + \phi_t \gamma \psi_s^{1/2} \right] \quad (11.41)$$

在某一偏置 V_{GB} 下, 通过计算可以发现 $I_{drift}(x)$ 随 x 的增大而减小, $I_{diff}(x)$ 随 x 的增大而增大, 但是两者和为定值.

11.4 简化的通用模型

11.4.1 耗尽区电荷线性化

由于耗尽区电荷随位置变化近似线性, 因此可以在某个恰当的位置 $\psi = \psi_{se}$ 对此电荷进行线性化

$$\frac{-Q'_B}{C'_{ox}} \approx \gamma \sqrt{\psi_{se}} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{se}}}(\psi_s - \psi_{se}) \quad (11.42)$$

其中 $\gamma/2\sqrt{\psi_{se}}$ 是斜率. 我们定义一个量 α

$$\alpha = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{se}}} \quad (11.43)$$

因此有

$$\frac{-Q'_B}{C'_{ox}} \approx \gamma \sqrt{\psi_{se}} + (\alpha - 1)(\psi_s - \psi_{se}) \quad (11.44)$$

此时我们回顾式子 (11.31,11.32), 对耗尽区电荷积分进行简化得

$$\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} Q'_B d\psi_s = -C'_{ox} \left[\gamma \sqrt{\psi_{se}} + (\alpha - 1) \left(\psi_s - \frac{\psi_{sL} - \psi_{s0}}{2} \right) \right] (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \quad (11.45)$$

$$Q'_B(\psi_{sL}) - Q'_B(\psi_{s0}) = C'_{ox}(\alpha - 1)(\psi_{s0} - \psi_{sL}) \quad (11.46)$$

因此有

$$I_{D1} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB} - \psi_{se} - \gamma \sqrt{\psi_{se}}) + \alpha \left(\psi_{se} - \frac{\psi_{sL} + \psi_{s0}}{2} \right) \right] (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \quad (11.47)$$

$$I_{D2} = \frac{W}{L} C'_{ox} \mu \alpha \phi_t (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \quad (11.48)$$

在这里我们也给出反型层电荷表达式

$$\begin{aligned} Q'_I &= Q'_C - Q'_B = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s) - Q'_B \\ &= -C'_{ox} \left[V_{GB} - V_{FB} - \psi_{se} - \gamma \sqrt{\psi_{se}} - \alpha(\psi_s - \psi_{se}) \right] \end{aligned} \quad (11.49)$$

11.4.2 Body Reference 简化通用模型

对于耗尽区电荷线性化, 可以选在源漏电势中间点展开

$$\psi_{se} = \psi_{sm} = \frac{\psi_{sL} + \psi_{s0}}{2} \quad (11.50)$$

如图 (11.5), 均值线性化精度还是比较高. 此时 Q'_B 变为了

$$-Q'_B \approx -C'_{ox} \left[\gamma \sqrt{\psi_{sm}} + (\alpha_m - 1)(\psi_s - \psi_{sm}) \right] \quad (11.51)$$

$$\alpha_m = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{sm}}} \quad (11.52)$$

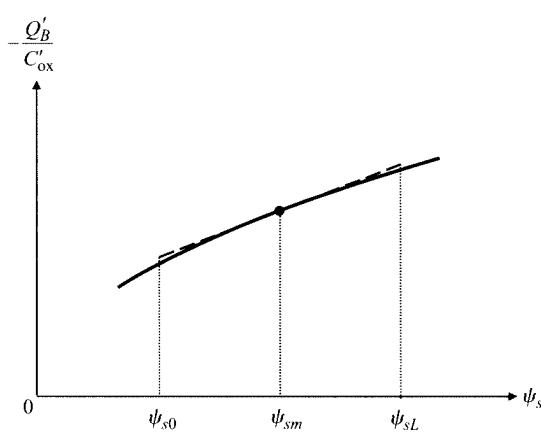


Figure 11.5: nMOSFET 耗尽区电荷均值线性化

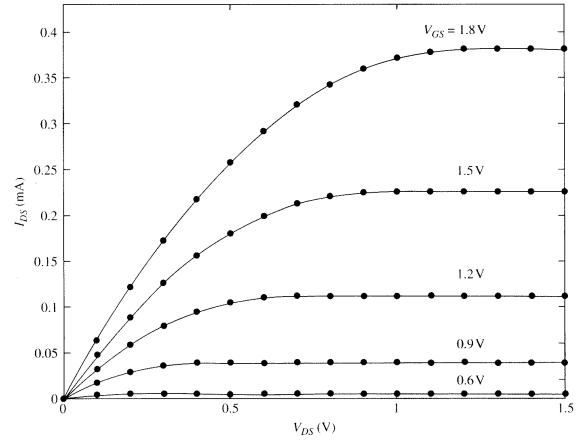


Figure 11.6: 耗尽区电荷在表面电势中点展开简化模型(实线)和全局通用模型(点)比较, $V_{FB} = -0.8V$, $N_A = 5 \times 10^{17} cm^{-3}$, $t_{ox} = 2.5 nm$, $\mu = 400 cm^2/(V \cdot s)$, $W = L = 10 \mu m$, $V_{SB} = 0V$

沟道电流为

$$I_{D1} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB} - \psi_{sm} - \gamma \sqrt{\psi_{sm}}) \right] (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \quad (11.53)$$

$$I_{D2} = \frac{W}{L} C'_{ox} \mu \alpha_m \phi_t (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \quad (11.54)$$

上面的简化公式只当器件处于反型层时使用, 对于耗尽和积累, 则会出现很大的误差, 但是我们可以对 Q'_B 做适当修改就可以了

$$Q'_B = -C'_{ox} \gamma \sqrt{\phi_t e^{-\psi_s/\phi_t} - \phi_t + \psi_s} \quad (11.55)$$

上述耗尽层电荷线性化简化 (Valid for $\psi_s \geq 3\phi_t$) 属于简化版的 PSP 模型.

11.4.3 Source-Referenced 简化通用模型

另一种方法是把源端看作是泰勒展开点

$$\psi_{se} = \psi_{s0} \quad (11.56)$$

此时对 $-Q'_B/C'_ox$ 线性化可得到沟道电流

$$I_{D1} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB} - \psi_{s0} - \gamma \sqrt{\psi_{s0}})(\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{\alpha_1}{2} (\psi_{sL} - \psi_{s0})^2 \right] \quad (11.57)$$

$$I_{D2} = \frac{W}{L} C'_{ox} \mu \alpha_1 \phi_t (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \quad (11.58)$$

$$\alpha_1 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{s0}}} \quad (11.59)$$

由于 $-Q'_B/C'_{ox}$ 近似呈现凹函数特性, 故在源端展开会高估了整个区域的值, 在通常情况下, 我们可以稍微把 α_1 的值调小一点来达到合理的精度.

11.4.4 基于电荷的简化通用模型

我们重新回顾下式子 (11.49)

$$\begin{aligned} Q'_I &= Q'_C - Q'_B = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s) - Q'_B \\ &= -C'_{ox} \left[V_{GB} - V_{FB} - \psi_{se} - \gamma\sqrt{\psi_{se}} - \alpha(\psi_s - \psi_{se}) \right] \end{aligned} \quad (11.60)$$

Q'_I 线性化的准确度要比 Q'_B 高, 因为其本身就含有一项起主导作用的 ψ_s 项, 而这一项并没有参与到线性化中. 根据 (11.49) 可以得到

$$\frac{\partial Q'_I}{\partial \psi_s} = \alpha C'_{ox} \quad (11.61)$$

根据式 (11.28), 我们使用积分变量替换 $\psi_s = f(Q'_I)$

$$\begin{aligned} I_{DS1} &= \frac{W}{L} \int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q'_I) d\psi_s = \frac{W}{L} \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} \mu(-Q'_I) \frac{\partial \psi_s}{\partial Q'_I} dQ'_I \\ &= \frac{W}{L} \mu \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} \frac{-Q'_I}{\alpha C'_{ox}} dQ'_I = \frac{W}{L} \frac{\mu}{2\alpha C'_{ox}} (Q'^2_{I0} - Q'^2_{IL}) \end{aligned} \quad (11.62)$$

根据 (11.29), 扩散电流为

$$I_{DS2} = \frac{W}{L} \phi_t \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} \mu dQ'_I = \frac{W}{L} \mu \phi_t (Q'_{IL} - Q'_{I0}) \quad (11.63)$$

对于耗尽区电荷我们在如下点线性展开

$$\psi_{se} = \psi_{sa} \quad (11.64)$$

而 ψ_{sa} 是给定 V_{GB} 后可能的最大的表面电势, 根据 (11.42,11.43) 因此有

$$\alpha = n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{sa}}} \quad (11.65)$$

上述基于电荷的模型通常叫做 inversion charge based model, charge-controlled model, 或者是 unified charge controlled model(UCCM). 这类模型发展成为了我们熟知的 EKV 和 ACM 模型. Q'_I 可以线性化为

$$Q'_I = nC'_{ox}(\psi_s - \psi_{sa}) + Q'_I(\psi_{sa}) \quad (11.66)$$

上述公式在原书中并没有 $Q'_I(\psi_{sa})$ 这一项, 是否是打印错误?

总的电流可以表示为

$$\begin{aligned} I_{DS} &= I_{DS1} + I_{DS2} = \frac{W}{L}\mu \left[\frac{1}{2\alpha C'_{ox}} \left(Q'^2_{I0} - Q'^2_{IL} \right) + \phi_t \left(Q'_{IL} - Q'_{I0} \right) \right] \\ &= \frac{W}{L}\mu \left(\frac{Q'^2_{I0}}{2\alpha C'_{ox}} - \phi_t Q'_{I0} \right) - \frac{W}{L}\mu \left(\frac{Q'^2_{IL}}{2\alpha C'_{ox}} - \phi_t Q'_{IL} \right) \end{aligned} \quad (11.67)$$

上述公式可以分成两部分

$$I_{DS} = I_F - I_R \quad (11.68)$$

$$I_F = \frac{W}{L}\mu \left(\frac{Q'^2_{I0}}{2\alpha C'_{ox}} - \phi_t Q'_{I0} \right) \quad (11.69)$$

$$I_R = \frac{W}{L}\mu \left(\frac{Q'^2_{IL}}{2\alpha C'_{ox}} - \phi_t Q'_{IL} \right) \quad (11.70)$$

当进入到饱和区时, 漏端反型层电荷 Q'_{IL} 趋于零, 因此反向电流 I_R 接近于零. 故有

$$I_{DS,saturation} = I_F \quad (11.71)$$

很容易观察到上述基于电荷的电流源表达式是对称的. 在 saturation 区域, 沟道电流只受到 Q'_{I0} 的影响, 而 Q'_{I0} 只和 V_{GB} 和 V_{SB} 有关, 与 V_{DB} 无关, 因此可以发现,saturation 之后, 增加 V_{DS} 的值, 沟道电流不再继续增加.

11.4.5 Quasi-Fermi Potential based Model

To be continued...

11.5 反型层区域和外部偏压的关系

11.5.1 Definition in Terms of Gate Voltage

对于源端, 回顾 (10.35)

$$V_M = V_{FB} + 2\phi_F + \gamma \sqrt{2\phi_F + V_{CB}} \quad (11.72)$$

$$V_H = V_{M0} + V_Z \quad (11.73)$$

11.5.2 Definition in Terms of Source and Drain Voltages

对于给定的 V_{GB} , 对于 V_{SB}, V_{DB} 可以和下面两个值 V_Q, V_W 比较从而决定是处在哪个反型区域

$$V_Q = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB} - V_Z} \right)^2 - 2\phi_F \quad (11.74)$$

$$V_W = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}} \right)^2 - 2\phi_F \quad (11.75)$$

如下图所示 (11.7)

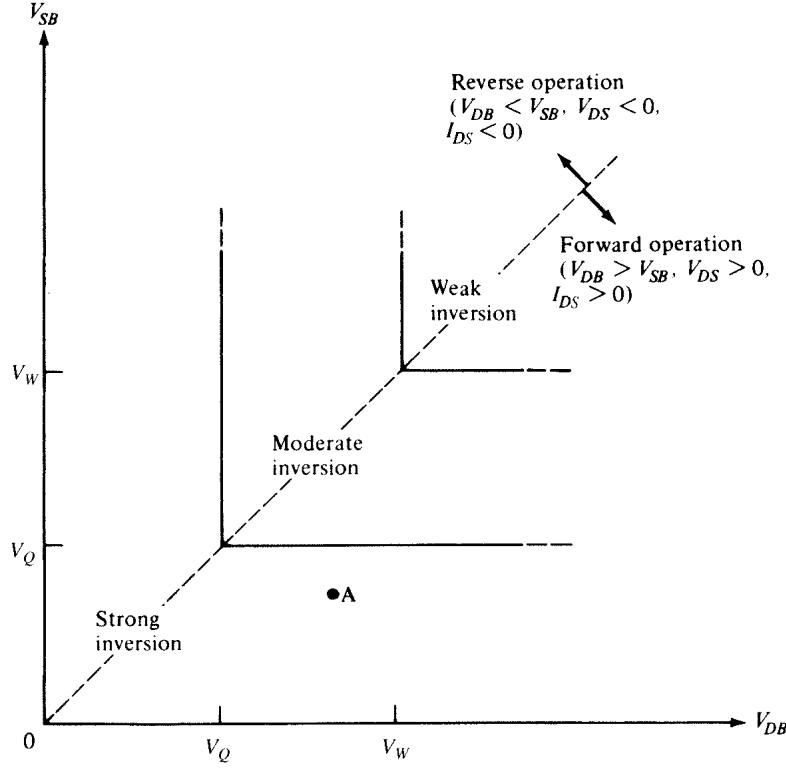


Figure 11.7: MOS 晶体管给定 VGB 下源和漏端的反型区域

11.6 强反型区域

晶体管的工作在强反型区时, 至少其中一个端 (Source or Drain) 必须要处于强反型状态. 在强反型区时源和漏的表面电势被钉在了一个固定的值

11.6.1 精确的强反型模型

Nonsaturation

假设 $V_{SB} = V_{DB}$, 当 V_{GB} 足够大使得两端都处于强反型区, 加入现在漏端电势升高, 该处反型程度会减弱, 并且强反型将最终消失. 目前肯定漏端电势足够低, 以致这种情况不会发生. 当沟道两端都处于强反型时, 根据 (10.26) 我们有

$$\psi_{s0} \approx \phi_0 + V_{SB} \quad (11.76)$$

$$\psi_{sL} \approx \phi_0 + V_{DB} \quad (11.77)$$

$$\phi_0 \approx 2\phi_F + 6\phi_t \quad (11.78)$$

当 MOSFET 处于反型状态时, 漂移电流占主导. 所以根据式 (11.34)

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left\{ (V_{GB} - V_{FB})(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{1}{2} [(\phi_0 + V_{DB})^2 - (\phi_0 + V_{SB})^2] \right\} - \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \cdot \frac{2}{3} \gamma [(\phi_0 + V_{DB})^{3/2} - (\phi_0 + V_{SB})^{3/2}] \quad (11.79)$$

整理后有

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0)(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{1}{2} (V_{DB}^2 - V_{SB}^2) \right] - \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \cdot \frac{2}{3} \gamma [(\phi_0 + V_{DB})^{3/2} - (\phi_0 + V_{SB})^{3/2}] \quad (11.80)$$

上式也可以等效变形为

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \cdot \frac{1}{2} [(V_{GS} - V_{FB} - \phi_0)^2 (V_{GD} - V_{FB} - \phi_0)^2] - \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \cdot \frac{2}{3} \gamma [(\phi_0 + V_{DB})^{3/2} - (\phi_0 + V_{SB})^{3/2}] \quad (11.81)$$

这样沟道电流便成了端电压的显示函数, 与前面所述的通用模型相反, 这正是一个十分希望得到的结果. 注意 I_{DSN} 也可以写成如下形式

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} [g(V_{GB}, V_{DB}) - g(V_{GB}, V_{SB})] \quad (11.82)$$

说明源和漏是对称的. 方程 (11.80) 是 Berkeley SPICE 模型 level 2 的核心.

Derivation Directly in Strong Inversion

Forward Saturation

上述推导的沟道电流公式假设了源漏端都处于强反型层, 因此当漏端电压不断增加, 使得漏端的反型层电荷消失, 此时上述模型就失效了, 取而代之的是饱和电流. 为了简单起见, 我们可以对式 (11.34) 微分

$$\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DB}} = 0 \quad (11.83)$$

解得 V_{DB} 的值, 记为 V_P

$$V_P = V_{DB} \Big|_{\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DB}}=0} = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}} \right)^2 - \phi_0 \quad (11.84)$$

而沟道饱和电流

$$I'_{DS} = I_{DSN} \Big|_{V_{DB}=V_P} \quad (11.85)$$

其中 V_P 为关断电压 Pinchoff Voltage. 最终电流表达式为

$$I_{DS} = \begin{cases} I_{DSN}, & V_{DB} \leq V_P \\ I'_{DS}, & V_{DB} > V_P \end{cases}$$

11.6.2 Body-Referenced 简化版强反型模型

Body-Referenced 是指耗尽层电荷在源和漏表面电势的中点展开. 在强反型区时, 只考虑漂移电流, 扩散电流可以忽略掉. 我们重写下 (11.53)

$$I_{D1} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB} - \psi_{sm} - \gamma \sqrt{\psi_{sm}}) \right] (\psi_{sL} - \psi_{s0}) \quad (11.86)$$

此时有

$$\psi_{sm} = \frac{\phi_{s0} + \phi_{sL}}{2} = \frac{V_{SB} + \phi_0 + V_{DB} + \phi_0}{2} = \phi_0 + \frac{V_{SB} + V_{DB}}{2} \quad (11.87)$$

$$\psi_{sL} - \psi_{s0} = (V_{DB} + \phi_0) - (V_{SB} + \phi_0) = V_{DB} - V_{SB} \quad (11.88)$$

故 (11.53) 可以另写为

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0 - \frac{V_{SB} + V_{DB}}{2} - \gamma \sqrt{\phi_0 + \frac{V_{SB} + V_{DB}}{2}}) \right] (V_{DB} - V_{SB})$$

(11.89)

11.6.3 Source-Referenced 简化版强反型模型

Source-Referenced 指的是耗尽层的电荷 $Q'_B(\psi_s)$ 在源端表面电势 ψ_{s0} 展开.

$$\psi_{se} = \psi_{s0} \quad (11.90)$$

回顾下 (11.57)

$$I_{D1} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{FB} - \psi_{s0} - \gamma \sqrt{\psi_{s0}})(\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{\alpha_1}{2} (\psi_{sL} - \psi_{s0})^2 \right] \quad (11.91)$$

我们把 $\psi_{s0} = \phi_0 + V_{SB}$ 和 $\psi_{sL} = \phi_0 + V_{DB}$ 代入上式有

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GB} - V_{SB} - V_{FB} - \phi_0 - \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}})(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{\alpha}{2} (V_{DB} - V_{SB})^2 \right] \quad (11.92)$$

其中

$$\alpha = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{s0}}} = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}} \quad (11.93)$$

公式 (11.92) 中用 V_{DS} 替代 $V_{DB} - V_{SB}$, 用 V_{GS} 替代 $V_{GB} - V_{SB}$ 得到

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \left[(V_{GS} - V_T|_{V_{SB}}) V_{DS} - \frac{\alpha}{2} V_{DS}^2 \right] \quad (11.94)$$

其中 $V_T|_{V_{SB}}$ 叫做栅源外推阈值电压 (gate-source extrapolated threshold voltage), 由 (10.34) 给出, 我们在这里重写下

$$V_T = V_{FB} + \phi_0 + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} = V_{T0} + \gamma \left(\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} - \sqrt{\phi_0} \right) \quad (11.95)$$

$$V_{T0} = V_{FB} + \phi_0 + \gamma \sqrt{\phi_0} \quad (11.96)$$

由于上述简化模型假设了源漏端同时处于强反型状态, 故当某一端电压过高从而不符合这个假设时, 模型失效, 因此当漏端 pinchoff 后, 我们可以分段函数让模型继续发挥作用, 最大电流发生在

$$\frac{\partial I_{DSN}}{\partial V_{DS}} = 0 \quad (11.97)$$

此时有

$$V'_{DS} = \frac{V_{GS} - V_T}{\alpha} \quad (11.98)$$

最大值为

$$I'_{DS} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \frac{(V_{GS} - V_T)^2}{2\alpha} \quad (11.99)$$

所以我们使用分段函数

$$I_{DS} = \begin{cases} I_{DSN}, & V_{DS} \leq V'_{DS} \\ I'_{DS}, & V_{DS} > V'_{DS} \end{cases} \quad (11.100)$$

也即

$$I_{DS} = \begin{cases} \frac{W}{L} \mu C'_{ox} [(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{\alpha}{2}V_{DS}^2], & V_{DS} \leq V'_{DS} \\ \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \frac{(V_{GS} - V_T)^2}{2\alpha}, & V_{DS} > V'_{DS} \end{cases} \quad (11.101)$$

上述模型是 Berkeley SPICE 仿真器 level 3 模型的核心. 上述公式可以写成如下形式

$$I_{DS} = I'_{DS}(1 - \eta^2), \quad \text{both nonsaturation and saturation} \quad (11.102)$$

其中

$$\eta = \begin{cases} 1 - \frac{V_{DS}}{V'_{DS}}, & V_{DS} \leq V'_{DS} \\ 0, & V_{DS} > V'_{DS} \end{cases} \quad (11.103)$$

大量的实验发现, $\alpha \approx 1.15$ 是一个很好的选择. 很多场合选择性假设 $\alpha = 1$, 这种假设使得耗尽层电荷是一个常数, 整个沟道的耗尽层电荷 Q'_B 都等于其在源端的值. 从而高估了反型层电荷 Q'_L , 因此预测的电流会偏大. 为了更好的拟合实际的 MOSFET 的特性, 我们对 α 做一些修正

$$\alpha = 1 + d_2 \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}\phi_3}} \quad (11.104)$$

其中 d_2, ϕ_3 可作调整. 通常 d_2 在 0.5 到 0.8 之间. 在一些其他的研究中, ϕ_3 是与 V_{GS} 相关的函数.

11.7 Single-Piece Models

如下的模型, 是一个通用模型, 适用于各种反型区, 饱和和非饱和区.

$$I_{DS} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} (2n) \phi_t^2 \left\{ \left[\ln \left(1 + e^{(V_{GS} - V_T)/(2n\phi_t)} \right) \right]^2 - \left[\ln \left(1 + e^{(V_{GS} - V_T - nV_{DS})/(2n\phi_t)} \right) \right]^2 \right\} \quad (11.105)$$

上述模型使用了 interpolation function, 且是 source-referenced. 这个模型显式的使用了阈值电压.

11.8 有效载流子迁移率

反型层的电子迁移率称为表面迁移率, 小于其体内迁移率. 因为垂直于电流流动方向的电场分量 (称为垂直分量或横向分量) 企图加速电子向着半导体 - 氧化层界面运动, 而在界面上电子除了与晶格和电离杂质原子碰撞外, 还会遭受另外的碰撞, 用上述理由来解释这一现象似乎是合理的. 对迁移率的这种附加影响称为表面散射.

11.8.1 有效垂直电场和迁移率

在某一给定的温度条件下, 发现表面迁移率仅仅是反型层垂直场强平均值 $\overline{\mathcal{E}_y}$ 的函数 (注意: GCA 假设 gradual channel approximation), 有好几种方法来定义 $\overline{\mathcal{E}_y}$, 比如使用简单的算数平均

$$\overline{\mathcal{E}_y} = \frac{\mathcal{E}_{ys} + \mathcal{E}_{yb}}{2} \quad (11.106)$$

其中 \mathcal{E}_{ys} 是上表面的垂直场强之值, \mathcal{E}_{yb} 恰好在反型层下表面的垂直场强之值 (也就是考虑反型层是有厚度的, 上表面和下表面的场强是不一样的, 虽然在强反型时相差很小). 这些发现暗示了反型层内高电子浓度屏蔽了那里的电离受主原子, 也说明了表面散射超过体内散射. 根据高斯定律, 很容易得到

$$\mathcal{E}_{ys} = -\frac{Q'_I + Q'_B}{\varepsilon_s} \quad (11.107)$$

$$\mathcal{E}_{yb} = -\frac{Q'_B}{\varepsilon_s} \quad (11.108)$$

于是我们可以得到有效反型层垂直方向电压

$$\overline{\mathcal{E}_y} = -\frac{Q'_B + 0.5Q'_I}{\varepsilon_s} \quad (11.109)$$

如果要更加精细的定义反型层有效垂直电压 $\overline{\mathcal{E}_y}$, 比如考虑到反型层反型层电子浓度随深度的分布, 会导出一个类似的结果,

$$\overline{\mathcal{E}_y} = -\frac{Q'_B + \eta_E Q'_I}{\varepsilon_s} \quad (11.110)$$

其中 η_E 与晶格的朝向有关, 对于电子载流子的典型值在 0.25 到 0.6 之间, 对于空穴载流子其典型值在 0.33 到 0.4 之间. 表面有效迁移率可以表示为如下

$$\mu = \mu(\overline{\mathcal{E}_y}) \quad (11.111)$$

根据 Matthiessen 原理

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \quad (11.112)$$

其中 μ_1 是只有库伦散射情况下的迁移率, μ_2 是只有晶格闪射 (声子散射) 情况下的迁移率, μ_3 是只有 surface roughness scattering 情况下的迁移率.

11.8.2 有效迁移率和沟道电流

回顾下 (11.23,11.24)

$$I_{drift}(x) = \mu(-Q'_I)W \cdot \mathcal{E}(x) = \mu(-Q'_I)W \frac{d\psi_s}{dx} \quad (11.113)$$

而扩散电流为

$$I_{diff}(x) = D_n W \frac{dQ'_I}{dx} = \mu W \phi_t \frac{dQ'_I}{dx} \quad (11.114)$$

$$I_{DS} = I_{drift}(x) + I_{diff}(x) = \mu(-Q'_I)W \frac{d\psi_s}{dx} + \mu W \phi_t \frac{dQ'_I}{dx} \quad (11.115)$$

我们对上式从 $x = 0$ 积分到 $x = L$, 于是有 (11.26)

$$I_{DS} = \frac{W}{L} \left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q'_I) d\psi_s + \phi_t \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} \mu dQ'_I \right] \quad (11.116)$$

在前面章节中, 我们假设了 μ 是一个常数, 因此有

$$I_{DS} = \frac{W}{L} \mu \left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} (-Q'_I) d\psi_s + \phi_t \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} dQ'_I \right] \quad (11.117)$$

现在 μ 和表面有效垂直场强相关, 而这个场强是位置 x 的函数, 要得到解析的方程非常困难而且复杂, 因此我们假定一个有效迁移率 μ_{eff} , 使得

$$I_{DS} = \frac{W}{L} \mu_{eff} \left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} (-Q'_I) d\psi_s + \phi_t \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} dQ'_I \right] \quad (11.118)$$

我们对式 (11.115) 变形积分得到

$$\int_0^L \frac{I_{DS}}{\mu} dx = I_{DS} \int_0^L \frac{dx}{\mu} = W \left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q'_I) d\psi_s + \phi_t \int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}} \mu dQ'_I \right] \quad (11.119)$$

对比 (11.118,11.119) 有

$$\mu_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{\mu}} \quad (11.120)$$

由于 μ 是 $\overline{\mathcal{E}_y}$ 的函数, 而 $\overline{\mathcal{E}_y}$ 是表面电势的函数, 表面电势随位置的关系可以通过各种简化求出. 但是上述求解任然非常的复杂, 我们通过实验得到了一个比较好的经验公式, 这个经验公式适合于便宜不是特别小的情况, 因此库伦散射可以忽略

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + a_\theta \overline{\mathcal{E}_y}} = \frac{\mu_0}{1 - \frac{a_\theta}{\varepsilon_s} (Q'_B + \eta_E Q'_I)} \quad (11.121)$$

其中 a_θ, μ_0 与温度相关, 可以认为是拟合参数. 通常情况下 μ_0 可以是 bulk mobility 的一半. 对于电子的典型值为 $400 - 600 \text{ cm}^2 / (\text{V} \cdot \text{s})$, 对于空穴的典型值为 $100 - 200 \text{ cm}^2 / (\text{V} \cdot \text{s})$. 在

室温下, a_θ 在 $10^{-6} \text{cm}/V$ 量级. 把 (11.121) 代入到 (11.120)

$$\begin{aligned}\mu_{eff} &= \frac{1}{\frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{\mu}} = \frac{\mu_0}{\frac{1}{L} \int_0^L (1 + a_\theta \bar{\mathcal{E}_y}) dx} = \frac{\mu_0}{\frac{1}{L} \int_0^L \left[1 - \frac{a_\theta}{\varepsilon_s} (Q'_B + \eta_E Q'_I) \right] dx} \\ &= \frac{\mu_0}{1 - \frac{a_\theta}{\varepsilon_s} \left[\frac{1}{L} \int_0^L Q'_B dx + \eta_E \frac{1}{L} \int_0^L Q'_I dx \right]} \\ &= \frac{\mu_0}{1 - (a_\theta / \varepsilon_s) (\bar{Q}'_B + \eta_E \bar{Q}'_I)}\end{aligned}\quad (11.122)$$

其中

$$\bar{Q}'_B = \frac{1}{L} \int_0^L Q'_B dx \quad (11.123)$$

$$\bar{Q}'_I = \frac{1}{L} \int_0^L Q'_I dx \quad (11.124)$$

为了简化计算, 我们使用如下近似

$$\bar{Q}'_B \approx \frac{Q'_{B0} + Q'_{BL}}{2} \quad (11.125)$$

$$\bar{Q}'_I \approx \frac{Q'_{I0} + Q'_{IL}}{2} \quad (11.126)$$

11.8.3 基于表面势的模型

根据 (10.13)

$$\bar{Q}'_I = Q'_C - Q'_B = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \psi_s) - \bar{Q}'_B \quad (11.127)$$

而 Q'_B 在不同的点线性展开会得到不同的模型

Complete all-region model

$$\bar{Q}'_B = -C'_{ox} \gamma \frac{\sqrt{\psi_{s0}} + \sqrt{\psi_{sL}}}{2} \quad (11.128)$$

Body-referenced simplified all-region model

$$\bar{Q}'_B = -C'_{ox} \gamma \sqrt{\psi_{sm}} \quad (11.129)$$

Source-referenced simplified all-region model

$$\bar{Q}'_B = -C'_{ox} \left[\gamma \sqrt{\psi_{s0}} + (\alpha - 1) \frac{\psi_{sL} - \psi_{s0}}{2} \right] \quad (11.130)$$

11.8.4 强反型

回顾 (11.76,11.77) 强反型表面电势为

$$\psi_{s0} \approx \phi_0 + V_{SB} \quad (11.131)$$

$$\psi_{sL} \approx \phi_0 + V_{DB} \quad (11.132)$$

$$\phi_0 \approx 2\phi_F + 6\phi_t \quad (11.133)$$

现在我们考虑 Source-referenced 模型, 结合 (11.127, 11.130, 11.134), 假设 $\eta_E = 0.5$

$$\begin{aligned} \mu_{eff} &= \frac{\mu_0}{1 - (a_\theta/\varepsilon_s)(\overline{Q'_B} + \eta_E \overline{Q'_I})} \\ &= \frac{\mu_0}{1 + \theta [V_{GS} - V_T + 2\gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} - (1 - 0.5\alpha)V_{DS}]} \end{aligned} \quad (11.134)$$

其中 V_T 由 (11.95) 给出, 且

$$\theta = \frac{a_\theta}{2\varepsilon_s} C'_{ox} \quad (11.135)$$

很显然, 有效表面迁移率和 V_{DS} 有关, 这样我们先前推导出的简化沟道电流公式都必须修改, 并且最终结果会异常复杂. 为了使得先前推导的简单结果继续有效, 另一种经验的有效迁移率公式被提出了

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_0}{1 + \theta(V_{GS} - V_T) + \theta_B V_{SB}} \quad (11.136)$$

其中 μ_0, θ, θ_B 需要通过实验或者优化来提取. 对于电子的 μ_0 典型值为 $400 - 600 \text{ cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$, 而空穴的典型值为电子的三分之一. 而 $\theta = \beta_\theta/t_{ox}$, 而 β_θ 典型值为 $0.5 - 2 \text{ nm} \cdot \text{V}^{-1}$.

11.8.5 外部源和漏极串联电阻的影响

To be continued...

11.8.6 温度的影响

强反型时有

$$\mu(T) = \mu(T_r) \left(\frac{T}{T_r} \right)^{-k_3} \quad (11.137)$$

T 为绝对温度, T_r 为参考温度, k_3 通常在 1.2 到 2 之间. 另外大量实验表明温度对阈值电压综合的影响表现为线性

$$V_T(T) = V_T(T_r) - k_4(T - T_r) \quad (11.138)$$

Chapter 12

小尺寸效应

12.1 载流子速度饱和

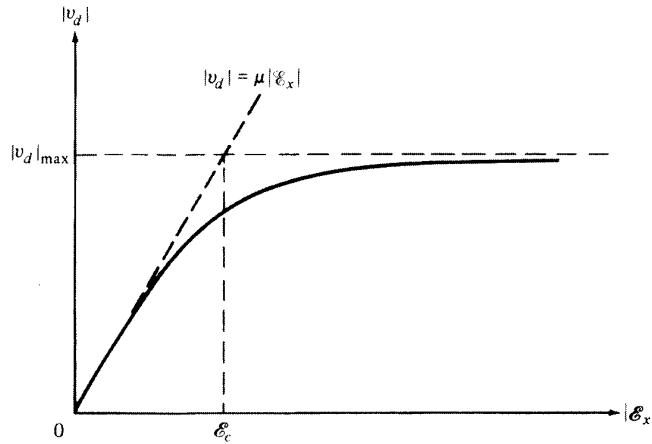


Figure 12.1: MOSFET 速度饱和效应图

由于 v_d 和 \mathcal{E}_x 之间不成比例而产生的对器件性能的影响称为速度饱和效应。我们使用分段函数来近似饱和速度效应，如图 (12.1)

$$V_d \approx \begin{cases} \mu |\mathcal{E}_x| & |\mathcal{E}_x| \leq \mathcal{E}_c \\ |V_d|_{max} & |\mathcal{E}_x| \geq \mathcal{E}_c \end{cases} \quad (12.1)$$

其中

$$\mathcal{E}_c = \frac{|V_d|_{max}}{\mu} \quad (12.2)$$

另一个简单的速度饱和公式为

$$|V_d| = |V_d|_{max} \frac{|\mathcal{E}_x| / |\mathcal{E}_c|}{1 + |\mathcal{E}_x| / |\mathcal{E}_c|} \quad (12.3)$$

现在来考虑强反型特性下的非饱和区工作的情况, 此时漂移电流占主导. 横向电场为 $d\psi_s/dx$. 在强反型区时, 表面电势可以表示为

$$\psi_s(x) \approx \phi_0 + V_{CB}(x) \quad (12.4)$$

因此有

$$|\mathcal{E}_x(x)| = \frac{d\psi_s}{dx} = \frac{d(\phi_0 + V_{CB}(x))}{dx} = \frac{dV_{CB}(x)}{dx} \quad (12.5)$$

因此有

$$|V_d| = |V_d|_{max} \frac{(1/|\mathcal{E}_c|)(dV_{CB}(x)/dx)}{1 + (1/|\mathcal{E}_c|)(dV_{CB}(x)/dx)} = \mu \frac{dV_{CB}(x)/dx}{1 + (1/|\mathcal{E}_c|)(dV_{CB}(x)/dx)} \quad (12.6)$$

于是沟道电流为

$$I_{DSN} = W(-Q'_I)|V_d(x)| = W(-Q'_I)\mu \frac{dV_{CB}(x)/dx}{1 + (1/|\mathcal{E}_c|)(dV_{CB}(x)/dx)} \quad (12.7)$$

上式整理得

$$I_{DSN} \left(1 + \frac{1}{\mathcal{E}_c} \frac{dV_{CB}(x)}{dx} \right) = \mu W(-Q'_I) \frac{dV_{CB}(x)}{dx} \quad (12.8)$$

上式左右两边积分从 $x = 0 (V_{CB} = V_{SB})$ 到 $x = L (V_{CB} = V_{DB})$, 且先假设 μ 和 $|\mathcal{E}_c|$ 和横向电场无关, 则有

$$I_{DSN} \left(L + \frac{V_{DB} - V_{SB}}{\mathcal{E}_c} \right) = I_{DSN} \left(L + \frac{V_{DS}}{\mathcal{E}_c} \right) = \mu W \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} (-Q'_I) dV_{CB} \quad (12.9)$$

于是有

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} \frac{\mu}{1 + V_{DS}/(L\mathcal{E}_c)} \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} (-Q'_I) dV_{CB} \quad (12.10)$$

我们发现上述公式和之前所推导的扩散电流只是相差了一个常系数, 因此之前推导的所有公式和结论也在这里适用

$$I_{DSN, \text{including velocity saturation}} = \frac{I_{DSN, \text{not including velocity saturation}}}{1 + V_{DS}/(L\mathcal{E}_c)} \quad (12.11)$$

还有一个更加一般的经验公式来描述速度饱和效应

$$|V_d| = |V_d|_{max} \frac{|\mathcal{E}_x|/|\mathcal{E}_c|}{[1 + (|\mathcal{E}_x|/|\mathcal{E}_c|)^n]^{1/n}} \quad (12.12)$$

当 $n = 2$ 时

$$|V_d| = \mu \frac{dV_{CB}(x)/dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{dV_{CB}(x)/dx}{\mathcal{E}_c} \right)^2}} \quad (12.13)$$

此时沟道电流为

$$I_{DSN, \text{including velocity saturation}} = \frac{I_{DSN, \text{not including velocity saturation}}}{0.5 \left\{ 1 + \sqrt{1 + 2 [V_{DS}/(L\mathcal{E}_c)]^2} \right\}} \quad (12.14)$$

Remark 12.1. 注意, 公式 (12.11) 在数值仿真会出现问题, 因为分子分母中的 V_{DS} 其实是 $|V_{DS}|$, 因此在 V_{DS} 处的导数是不连续的, 这个在仿真小信号或者是非线性的时候会出现很大的问题, 而利用公式 (12.14) 就可以避免这个问题.

12.2 短沟道效应

12.2.1 Channel Length Modulation

Effects on Drain Current

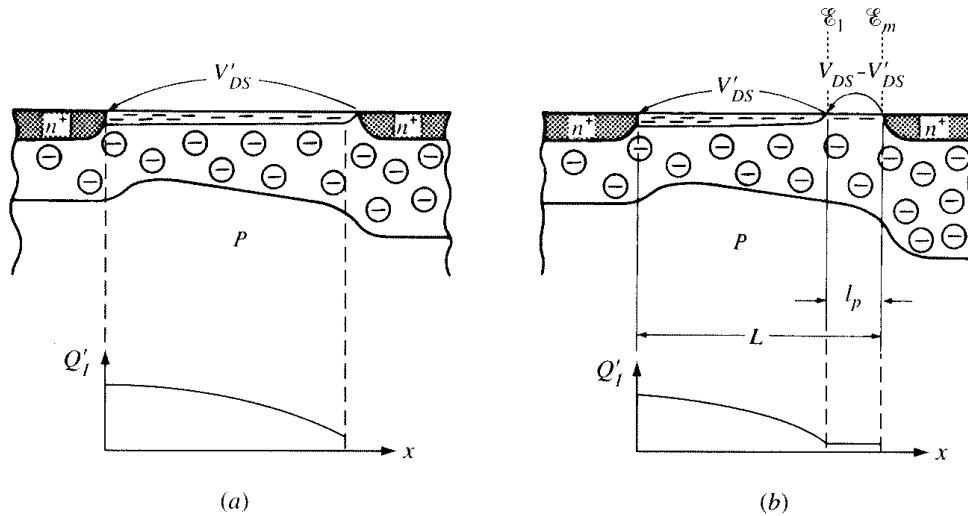


FIGURE 5.3

Channel (a) at pinchoff; (b) above pinchoff. \mathcal{E}_1 is the magnitude of the horizontal electric field at the end of the inversion layer (i.e., the beginning of the pinchoff region) and \mathcal{E}_m is the maximum electric field magnitude which develops near the n^+ junction.

Figure 12.2: MOSFET 短沟道效应图

短沟道效应也叫做 CLM(channel length modulation). 通常在处理这类问题, 我们有一个经验型且合理的吉尼斯, 速度饱和正好发生在 $V_{DS} = V'_{DS}$ 时. 如图, 有

$$I_{DS} = I'_{DS} \frac{L}{L - L_p} = \frac{I'_{DS}}{1 - l_p/L}, \quad I_{DS} \geq I'_{DS} \quad (12.15)$$

如果 $l_p/L \ll 1$, 则有

$$I_{DS} = I'_{DS} \frac{L}{L - L_p} \approx I'_{DS}(1 + l_p/L), \quad I_{DS} \geq I'_{DS} \quad (12.16)$$

Evaluation of l_p

通过高斯定理, 可以很容易求出 l_p

$$l_p = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{qN_A}} \left[\sqrt{\phi_D + (V_{DS} - V'_{DS})} - \sqrt{\phi_D} \right] \quad (12.17)$$

其中

$$\phi_D = \frac{\epsilon_s \mathcal{E}_1^2}{2qN_A} \quad (12.18)$$

上面所有的量都标注在图 (12.2). 通过二维数值分析可以得出如下比较准确的结果

$$l_p = l_a \ln \left(\frac{\frac{V_{DS} - V'_{DS}}{l_a} + \mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_1} \right) \quad (12.19)$$

其中

$$l_a = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{ox}} t_{ox} d_j} \approx \sqrt{3 t_{ox} d_j} \quad (12.20)$$

\mathcal{E}_m 是在 pinch off 区域 x 方向的最大电场幅值, \mathcal{E}_1 是 pinch off 区域开始区域 $x = L - l_p$ 时的电场幅度. 在有些场合也会使用如下的一个公式来表征 pinch off 区域的长度

$$l_p = l_a \ln \left(1 + \frac{V_{DS} - V'_{DS}}{V_E} \right) \quad (12.21)$$

V_E 为拟合变量, 通常小于 1V. 如果 $V_{DS} - V'_{DS} \ll V_E$, 则可以用泰勒一阶近似展开上式

$$l_p = l_a \ln \left(1 + \frac{V_{DS} - V'_{DS}}{V_E} \right) \approx \frac{l_a (V_{DS} - V'_{DS})}{V_E} \quad (12.22)$$

故电流表达式为

$$I_{DS} = I'_{DS} \frac{L}{L - L_p} \approx I'_{DS} (1 + l_p/L) \approx I'_{DS} \left(\frac{l_a (V_{DS} - V'_{DS})}{V_E L} \right), \quad I_{DS} \geq I'_{DS} \quad (12.23)$$

12.2.2 Charge Sharing

To be continued...

12.2.3 Drain Induced Barrier Lowering

这个效应也简称为 DIBL, 主要是因为器件的栅太短, 导致漏极发出的电场线直接通过沟道到达了源极, 降低了源极的 pn 结电势, 从而降低了阈值电压. 通过二维数值分析可以得到阈值电压的下降量

$$\Delta V_{T,DIBL} \approx -[3(\phi_{bi} - \phi_0) + V_{DS}] e^{-L/\lambda} \quad (12.24)$$

其中 ϕ_{bi} 是源或者漏 pn 结的内建电压, 而 λ 是一个特征长度

$$\lambda = \frac{\varepsilon_s t_{ox} d_B}{\varepsilon_{ox} \beta_3} \quad (12.25)$$

$$d_B = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_A}} \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} \quad (12.26)$$

β_3 是拟合参量. 除此之外还有更加简单的经验模型

$$\Delta V_{T,DIBL} \approx -\frac{\beta_4 + \beta_5 V_{SB}}{L^{\beta_6}} V_{DS} \quad (12.27)$$

12.2.4 Punch Through

Chapter 13

动态工作下的 MOS 晶体管 - 大信号建模

我们把重点放在内部的本征部分.

13.1 准静态工作

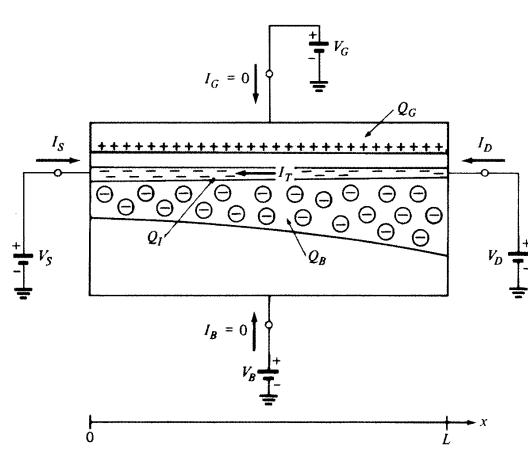


Figure 13.1: DC 情况下的 MOSFET 内部电荷示意图

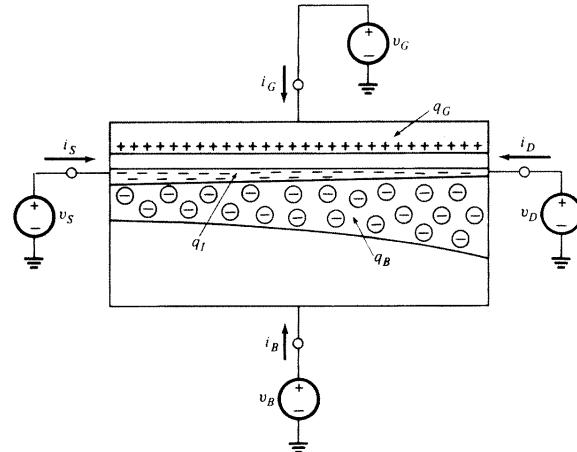


Figure 13.2: 时变信号激励情况下的 MOSFET 内部电荷

我们定义直流电压 V_D, V_G, V_B, V_S 为端口直流电压, 相应流入端口的直流电流为 I_D, I_G, I_B, I_S , 这里我们假设器件的衬底是 p 型, 反型层载流子为电子, 再定义传输电流或者

传导电流的流动是由漏经沟道到源, 并用 I_T 表示, 则有

$$I_D = I_T \quad (13.1a)$$

$$I_G = 0 \quad (13.1b)$$

$$I_B = 0 \quad (13.1c)$$

$$I_S = -I_T \quad (13.1d)$$

因此传输电流可以写成如下形式

$$I_T = h_T(V_D, V_G, V_B, V_S) \quad (13.2)$$

其中 h_T 是我们前面讨论过的某种合适的传输电流方程. 沿着沟道方向位置 x 处, 宽为 W , 长为 Δx 的一小块反型层含有的电荷为 $Q'_I(W \cdot \Delta x)$, 故

$$Q_I = \int_0^L Q'_I(W \cdot dx) = W \int_0^L Q'_I dx \quad (13.3)$$

同理有

$$Q_G = W \int_0^L Q'_G dx \quad (13.4)$$

$$Q_B = W \int_0^L Q'_B dx \quad (13.5)$$

最后可以得到

$$Q_I = f_I(V_D, V_G, V_B, V_S) \quad (13.6)$$

$$Q_G = f_G(V_D, V_G, V_B, V_S) \quad (13.7)$$

$$Q_B = f_B(V_D, V_G, V_B, V_S) \quad (13.8)$$

其中 Q_G, Q_B 是储存在器件中的电荷, 但是对于 Q_I 的解释需要小心, Q_I 是由反型层中电子构成, 这些电子不是真正存储在器件中, 他们由源进入反型层, 最终经漏离开反型层, 并不断地被从源进入的新的电子所取代. 所以 Q_I 仅仅是代表任意给定时刻恰好在反型层中的电子的总电荷. 尽管在不同时刻形成 Q_I 的各个电子不同, 但是 Q_I 这个总量总是恒定不变的.

现在允许端电压随时间变化, 所有随时间变化的量都用带大小下表的小写字符表示, 如图 (13.2), 假设端电压的变化足够慢, 使器件按准静态工作. 也就是说令 $v_D(t), v_G(t), v_B(t), v_S(t)$ 为变化的端电压, 然后就爱摄这个端电压足够慢, 我们可以把每一个时刻定格, 如 t' , 使得在这个时刻, 器件就像是工作在 DC 状态下一样, 也即 $V_D = v_D(t'), V_G = v_G(t'), V_B = v_B(t'), V_S = v_S(t')$. 因此有

$$q_I(t) = f_I(v_D(t), v_G(t), v_B(t), v_S(t)), \quad \text{准静态工作} \quad (13.9)$$

$$q_G(t) = f_G(v_D(t), v_G(t), v_B(t), v_S(t)), \quad \text{准静态工作} \quad (13.10)$$

$$q_B(t) = f_B(v_D(t), v_G(t), v_B(t), v_S(t)), \quad \text{准静态工作} \quad (13.11)$$

如果外部激励变化太快, 那么由于惯性, 电荷不能立即跟随外部电压变化而及时调整, 因此上述分析也就不成立了.

13.2 准静态工作时的端电流

假设栅没有泄漏, 那么全部的栅电流来自于栅电荷的变化

$$i_G(t) = \frac{dq_G}{dt} \quad (13.12)$$

假设器件体内没有泄漏, 则耗尽区的传输电流为零, 则体电流只与耗尽区的电荷变化有关

$$i_B(t) = \frac{dq_B}{dt} \quad (13.13)$$

最后, 漏端电流与源端电流之和表示流入沟道的总电流, 该电流将改变反型层的电荷

$$i_D(t) + i_S(t) = \frac{dq_I}{dt} \quad (13.14)$$

如图 (13.3). 假定现在 $v_D(t), v_B(t), v_S(t)$ 都保持恒定, 只改变 $v_G(t)$, 当 $v_G(t)$ 升高时, 从源

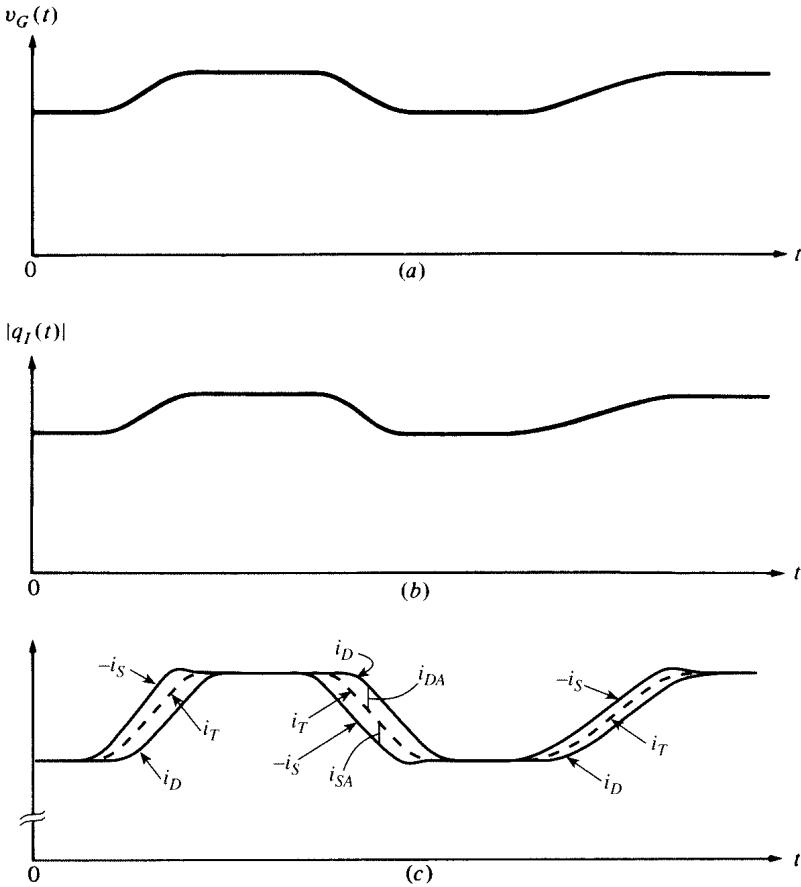


Figure 13.3: MOSFET 准静态 DC 和 AC 沟道电流

进入反型层的电子比漏移去电子的速率暂时要大, 当 $v_G(t)$ 减小时, 从源进入反型层的电子比漏移去电子的速率暂时要小, 而反型层的电子总数等于图中的 i_D, i_S 电流之差的面积, 在一个周期内是不变的. 因此 $i_D(t)$ 和 $i_S(t)$ 与它们的传输电流 $i_T(t)$ 和 $-i_T(t)$ 不

同, 把这些差值记作 $i_{DC}(t)$ 和 $i_{SC}(t)$, 可以写出

$$i_D(t) = i_T(t) + i_{DC}(t) \quad (13.15a)$$

$$i_S(t) = -i_T(t) + i_{SC}(t) \quad (13.15b)$$

从而

$$i_D(t) + i_S(t) = [i_T(t) + i_{DC}(t)] + [-i_T(t) + i_{SC}(t)] = i_{DC}(t) + i_{SC}(t) = \frac{dq_I}{dt} \quad (13.16)$$

现在我们假设 $i_{DC}(t)$ 使反型层中的电荷在 Δt 内变化了 Δq_D , 则可以写出

$$i_{DC}(t) = \frac{dq_D}{dt} \quad (13.17)$$

假设 $i_{SC}(t)$ 使反型层中的电荷在 Δt 内变化了 Δq_S , 则可以写出

$$i_{SC}(t) = \frac{dq_S}{dt} \quad (13.18)$$

最后有现在我们假设 $i_{DC}(t)$ 使反型层中的电荷在 Δt 内变化了 Δq_D , 则可以写出

$$\frac{dq_I}{dt} = \frac{dq_D}{dt} + \frac{dq_S}{dt} \quad (13.19)$$

因此

$$q_I(t) = q_D(t) + q_S(t) \quad (13.20)$$

我们使用 Ward-Dutton 电荷分割方法

$$Q_D = W \int_0^L \frac{x}{L} Q'_I dx \quad (13.21a)$$

$$Q_S = W \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) Q'_I dx \quad (13.21b)$$

传输电流分量由前面一章的模型给出, 这里只考虑充电电流分量, 则有

$$i_{DC}(t) = \frac{dq_D}{dt} \quad (13.22a)$$

$$i_G(t) = \frac{dq_G}{dt} \quad (13.22b)$$

$$i_B(t) = \frac{dq_B}{dt} \quad (13.22c)$$

$$i_{SC}(t) = \frac{dq_S}{dt} \quad (13.22d)$$

且总电流满足基尔霍夫定律

$$i_D(t) + i_G(t) + i_B(t) + i_S(t) = 0 \quad (13.23)$$

也即

$$i_{DC}(t) + i_G(t) + i_B(t) + i_{SC}(t) = 0 \quad (13.24)$$

进一步有

$$i_{DC}(t) = \frac{\partial q_D}{\partial v_D} \frac{\partial v_D}{\partial t} + \frac{\partial q_D}{\partial v_G} \frac{\partial v_G}{\partial t} + \frac{\partial q_D}{\partial v_B} \frac{\partial v_B}{\partial t} + \frac{\partial q_D}{\partial v_S} \frac{\partial v_S}{\partial t} \quad (13.25a)$$

$$i_G(t) = \frac{\partial q_G}{\partial v_D} \frac{\partial v_D}{\partial t} + \frac{\partial q_G}{\partial v_G} \frac{\partial v_G}{\partial t} + \frac{\partial q_G}{\partial v_B} \frac{\partial v_B}{\partial t} + \frac{\partial q_G}{\partial v_S} \frac{\partial v_S}{\partial t} \quad (13.25b)$$

$$i_B(t) = \frac{\partial q_B}{\partial v_D} \frac{\partial v_D}{\partial t} + \frac{\partial q_B}{\partial v_G} \frac{\partial v_G}{\partial t} + \frac{\partial q_B}{\partial v_B} \frac{\partial v_B}{\partial t} + \frac{\partial q_B}{\partial v_S} \frac{\partial v_S}{\partial t} \quad (13.25c)$$

$$i_{SC}(t) = \frac{\partial q_S}{\partial v_D} \frac{\partial v_D}{\partial t} + \frac{\partial q_S}{\partial v_G} \frac{\partial v_G}{\partial t} + \frac{\partial q_S}{\partial v_B} \frac{\partial v_B}{\partial t} + \frac{\partial q_S}{\partial v_S} \frac{\partial v_S}{\partial t} \quad (13.25d)$$

13.3 准静态工作下的电荷计算

13.3.1 强反型

非饱和的一般表达式

回顾式 (11.23)

$$I_{drift}(x) = \mu(-Q'_I)W \cdot \mathcal{E}(x) = \mu(-Q'_I)W \frac{d\psi_s}{dx} \quad (13.26)$$

结合强反型下 $d\psi_s = dV_{CB}$

$$dx = -\frac{\mu W}{I_{DSN}} Q'_I dV_{CB} \quad (13.27)$$

其中 I_{DSN} 为强反型未饱和沟道电流. 结合 (13.4) 有

$$Q_G = W \int_0^L Q'_G dx = W \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} Q'_G \left(-\frac{\mu W}{I_{DSN}} Q'_I \right) dV_{CB} = -\frac{\mu W^2}{I_{DSN}} \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} Q'_G Q'_I dV_{CB} \quad (13.28)$$

同理根据 (13.5) 有

$$Q_B = W \int_0^L Q'_B dx = -\frac{\mu W^2}{I_{DSN}} \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} Q'_B Q'_I dV_{CB} \quad (13.29)$$

根据 (13.3)

$$Q_I = W \int_0^L Q'_I dx = -\frac{\mu W^2}{I_{DSN}} \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} Q'^2_I dV_{CB} \quad (13.30)$$

根据 Ward-Dutton 电荷分割法 (13.21)

$$Q_D = W \int_0^L \frac{x}{L} Q'_I dx = -\frac{\mu W^2}{I_{DSN}} \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} \frac{x}{L} Q'^2_I dV_{CB} \quad (13.31)$$

$$Q_S = W \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) Q'_I dx = -\frac{\mu W^2}{I_{DSN}} \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} \left(1 - \frac{x}{L}\right) Q'^2_I dV_{CB} \quad (13.32)$$

为了得出位置 x 和 V_{CB} 的关系, 我们对式 (13.27) 两边积分

$$x = \int_0^x dx = \int_{V_{SB}}^{V_{CB}} -\frac{\mu W}{I_{DSN}} Q'_I dV_{CB} = -\frac{\mu W}{I_{DSN}} \int_{V_{SB}}^{V_{CB}} Q'_I dU_{CB} \quad (13.33)$$

另一种方法是通过前面一章节的结论

$$x = L \frac{H(V_{GB}, V_{SB}, V_{CB})}{H(V_{GB}, V_{SB}, V_{DB})} \quad (13.34)$$

其中 H 代表了

$$I_{DSN} = \frac{W}{L} H(V_{GB}, V_{SB}, V_{DB}) \quad (13.35)$$

饱和的一般表达式

假设 $V_{DB} = V_P$ 为饱和和非饱和的分界点. 假设长沟道情况下, 如果 V_{DB} 超过了 V_P , 那么沟道将实际上保持不变. 假设 $g_I(V_{GB}, V_{SB}, V_{DB})$ 表示 Q_I 在非饱和时的表达式, 则有

$$Q_I = \begin{cases} g_I(V_{GB}, V_{SB}, V_{DB}) & V_{DB} \leq V_P \\ g_I(V_{GB}, V_{SB}, V_P) & V_{DB} > V_P. \end{cases} \quad (13.36)$$

利用上述结果可以求得不同成都复杂的 Q_G, Q_B, Q_D, Q_S 的表达式.

Source-Referenced 简化模型

我们回顾下 (11.102).

$$I_{DS} = I'_{DS}(1 - \eta^2), \quad \text{both nonsaturation and saturation} \quad (13.37)$$

其中

$$\eta = \begin{cases} 1 - \frac{V_{DS}}{V'_{DS}}, & V_{DS} \leq V'_{DS} \\ 0, & V_{DS} > V'_{DS} \end{cases} \quad (13.38)$$

V'_{DS} 最大沟道电流, 发生在沟道电流对 V_{DS} 导数为零的时候.

$$V'_{DS} = \frac{V_{GS} - V_T}{\alpha} \quad (13.39)$$

$$I'_{DS} = \frac{W}{L} \mu C'_{ox} \frac{(V_{GS} - V_T)^2}{2\alpha} \quad (13.40)$$

由 (11.44), 体电荷 Q_B 为

$$Q'_B = -C'_{ox} \left[\gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} + (\alpha - 1)(V_{CB} - V_{SB}) \right] \quad (13.41)$$

根据 (11.49), 反型层电荷为

$$Q'_I = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \phi_s) - Q'_B = -C'_{ox} (V_{GB} - V_{FB} - \phi_0 - V_{CB}) - Q'_B \quad (13.42)$$

把上述式子代入 (13.30, 13.29)

$$Q_I == -WLC'_{ox}(V_{GS} - V_T) \frac{2}{3} \frac{1 + \eta + \eta^2}{1 + \eta} \quad (13.43)$$

$$Q_B = -WLC'_{ox} \left[\gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} (V_{GS} - V_T) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{1 + \eta + \eta^2}{1 + \eta} \right) \right] \quad (13.44)$$

通过电荷守恒关系

$$Q_G + Q_o + Q_I + Q_B = 0 \quad (13.45)$$

有

$$Q_G = WLC'_{ox} \left[\frac{V_{GS} - V_T}{\alpha} \left(\alpha - 1 + \frac{2}{3} \frac{1 + \eta + \eta^2}{1 + \eta} + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} \right) \right] - Q_o \quad (13.46)$$

为了找到 Q_D, Q_S 关系, 我们必须找到 x 和 V_{CB} 的关系

$$x = L \frac{(V_{GS} - V_T)(V_{CB} - V_{SB}) - \frac{\alpha}{2}(V_{CB} - V_{SB})^2}{(V_{GS} - V_T)(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{\alpha}{2}(V_{DB} - V_{SB})^2} \quad (13.47)$$

根据 (13.31,13.32), 再结合上述体电荷和反型层电荷表达式有

$$Q_D = -WLC'_{ox}(V_{GS} - V_T) \frac{4 + 8\eta + 12\eta^2 + 6\eta^3}{15(1 + \eta^2)} \quad (13.48)$$

$$Q_S = -WLC'_{ox}(V_{GS} - V_T) \frac{6 + 12\eta + 8\eta^2 + 4\eta^3}{15(1 + \eta^2)} \quad (13.49)$$

VDS=0 时的电荷

当 $V_{DS} = 0$ 时, $\eta = 1$, 此时有

$$Q_B|_{V_{DS}=0} = -WLC'_{ox} \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} \quad (13.50)$$

$$Q_I|_{V_{DS}=0} = -WLC'_{ox}(V_{GS} - V_T) \quad (13.51)$$

$$Q_D|_{V_{DS}=0} = -\frac{WLC'_{ox}(V_{GS} - V_T)}{2} \quad (13.52)$$

$$Q_S|_{V_{DS}=0} = -\frac{WLC'_{ox}(V_{GS} - V_T)}{2} \quad (13.53)$$

$$Q_G|_{V_{DS}=0} = WLC'_{ox} \left[(V_{GS} - V_T) + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} \right] - Q_o \quad (13.54)$$

当 $V_{DS} = 0$ 时, 沟道是对称且均匀的, 因此 $Q_S = Q_D$.

饱和时的电荷

在饱和区时 $\eta = 0$, 此时

$$Q_{B,sat}|_{V_{DS}=V'_{DS}} = -WLC'_{ox} \left[\gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha} (V_{GS} - V_T) \right] \quad (13.55)$$

$$Q_{I,sat}|_{V_{DS}=V'_{DS}} = -\frac{2}{3} WLC'_{ox} (V_{GS} - V_T) \quad (13.56)$$

$$Q_{D,sat}|_{V_{DS}=V'_{DS}} = -\frac{4}{15}WLC'_{ox}(V_{GS}-V_T) \quad (13.57)$$

$$Q_{S,sat}|_{V_{DS}=V'_{DS}} = -\frac{2}{5}WLC'_{ox}(V_{GS}-V_T) \quad (13.58)$$

$$Q_{G,sat}|_{V_{DS}=V'_{DS}} = WLC'_{ox} \left[\frac{V_{GS}-V_T}{\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) + \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} \right] - Q_o \quad (13.59)$$

Chapter 14

MIT MVS MOSFET 和 HEMT 模型

14.1 MOSFET Current-Voltage Model @Ali Khakifirooz2009

A simple semiempirical short-channel MOSFET current–voltage model continuous across all regions of operation and employing only physical parameters [1,2].

14.1.1 饱和区的 VS 模型

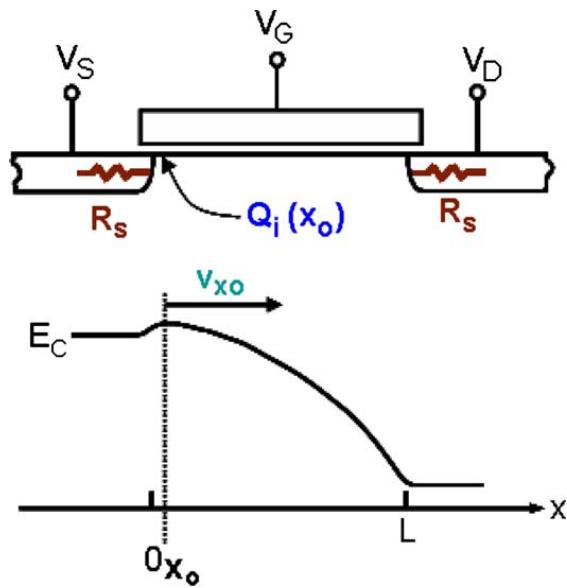


Figure 14.1: 新一代短沟道 MOSFET 虚拟源端点 x_0 , 载流子电荷密度还有速度都定义在这

如图 (14.1), 在虚拟源端 (virtual source) 处写出电流源的表达式, 因为在这一点很容易

对沟道电荷浓度 Q_{ix_o} 进行建模 [3,4].

$$I_D/W = Q_{ix_o} v_{x_o} \quad (14.1)$$

对于短沟道器件来说, 虚拟源端速度 v_{x_o} 和所谓的单向热速度或者弹道速度 v_θ 有关, 且在 [3,4] 里面被广泛讨论. 从后面的实验数据来看, 当器件偏置在反型区时 (强或弱反型), v_{x_o} 和 V_{GS}, V_{DS} 弱相关. 事实上, 在饱和区, 虚拟源端处的弹道速度和反型层电荷密度和 V_{DS} 无关, 除了 DIBL 效应外. 甚至对于 nonballistic 状态, 如果器件偏置在饱和区, 虚拟源端处的反型层电荷密度 Q_{ix_o} 还有载流子速度 v_{x_o} 也几乎与 V_{GS}, V_{DS} 无关. 另一方面, 弹道速度随着 V_{GS} 单调递增 [4], 蒙特卡洛仿真显示在虚拟源端处的速度几乎在高 V_{GS} 下几乎保持恒定, 由于载流子散射也随着栅极电压升高而变的更加剧烈 [5].

相比于使用弹道速度和散射系数描述 $I_D - V_{GS}$ 饱和区的特征, 如 [4] 已经做的, 我们将尝试使用虚拟源端平均载流子速度 v_{x_o} 来避免引入复杂的散射系数和模糊的 $K_B T$ 层.

虚拟源端的电荷密度可以近似地由经验公式描述, 这个表达式能够在弱反型和强反型两个状态平滑转换 (没有 α 项的表达式已经在 [6] 中提出).

$$Q_{ix_o} = C_{inv} n \phi_t \ln \left(1 + \exp \frac{V'_{GS} - (V_T - \alpha \phi_t F_f)}{n \phi_t} \right) \quad (14.2)$$

其中 C_{inv} 是强反型下栅极和沟道之间的单位面积下的有效电容. V'_{GS} 为内部栅源电压

$$V'_{GS} = V_{GS} - I_D R_S \quad (14.3)$$

n 是亚阈值摆幅, 和所谓的”亚阈值摆幅”系数 $S = n \phi_t \ln 10$ 有关, 且

$$V_T = V_{T0} - \delta V'_{DS} \quad (14.4)$$

$$n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F}} \quad (14.5)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2q\epsilon_{Si}N}}{C_g} \quad (14.6)$$

其中 V'_{DS} 为内部漏源电压

$$V'_{DS} = V_{DS} - I_D (R_S + R_D) \quad (14.7)$$

δ 为 DIBL 系数, 正如 (12.27) 所示. 需要注意 DIBL 是 Q_{ix_o} 和漏极电压 V_{DS} 唯一的联系. 经验发现 (14.2) 中 V_T 保持 $3.5\phi_t$ 的平移是一个很好的近似. 反型层转换函数 F_f 是一个费米函数, 能够在两个值之间平滑的过渡

$$F_f = \frac{1}{1 + \exp \left(\frac{V'_{GS} - (V_T - \alpha \phi_t / 2)}{\alpha \phi_t} \right)} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{V'_{GS} - (V_T - \alpha \phi_t / 2)}{\alpha \phi_t} \right) \right] \quad (14.8)$$

公式 (14.8), 在弱反型时 $F_f \approx 1$, 在强反型时 $F_f \approx 0$. 那么式 (14.2) 中的阈值电压漂移 $\alpha \phi_t F_f$ 实际上在弱反型时为 $\alpha \phi_t$, 在强反型时几乎为零, 关于强反型的阈值电压 (更准确来讲是参考电压) 在强反型和弱反型的值是不同的, 这一点在 [1,7,8] 中有大量论证.

由 (14.2), 根据 $\ln(1 + x) \approx x$, 弱反型时 Q_{ix_o} 退化为

$$Q_{ix_o} \approx C_{inv} n \phi_t \exp \frac{V'_{GS} - (V_T - \alpha \phi_t)}{\alpha \phi_t}, \quad \text{weak inversion} \quad (14.9)$$

由 (14.2), 根据 $\ln(1 + e^x) \approx x$, 强反型时 Q_{ix_o} 退化为

$$Q_{ix_o} \approx C_{inv} (V'_{GS} - V_T), \quad \text{strong inversion} \quad (14.10)$$

14.1.2 非饱和区

为了模拟非饱和区域, 虚拟源端速度 v_{x_o} 需要乘以一个“饱和方程” F_s

$$I_D/W = Q_{ix_o} v_{x_o} F_s \quad (14.11)$$

$$F_s = \frac{V'_{DS}/V_{DSAT}}{(1 + (V'_{DS}/V_{DSAT})^\beta)^{1/\beta}} \quad (14.12)$$

其中 V_{DSAT} 为饱和电压, 当 $V_{DS} = 0$ 时, $F_s = 0$, 当当 $V'_{DS} \gg V_{DSAT}$ 时, $F_s = 1$. β 是拟合的常数, 对于 nFETs, $\beta = 1.8$, 对于 pFETs, $\beta = 1.4$, 会是一个很好的近似.

回顾 (14.11,14.12) 很容易发现

$$\frac{1}{W} \frac{\partial I_D}{\partial V'_{DS}} \Big|_{V_{DS}=0} \cong \frac{Q_{ix_o}(V_{DS}=0)v_{x_o}}{V_{DSAT}} \equiv \frac{Q_{ix_o0}v_{x_o}}{V_{DSAT}} \equiv \frac{1}{WR_{C,\min}} \quad (14.13)$$

$WR_{C,\min}$ 是 $V_{DS} = 0$ 时宽度归一化的沟道电阻, 且

$$WR_{C,\min} = \frac{V_{DSAT}}{Q_{ix_o0}v_{x_o}} = \frac{L_C}{Q_{ix_o0}\mu} \quad (14.14)$$

其中 $L_C = L_G - 2L_{ov}$ 是有效的沟道长度, L_{ov} 是源端或者漏端和栅重叠的区域长度, μ 是 $V_{DS} = 0$ 时的电子迁移率. 因此有强反型下的饱和电压为

$$V_{DSATs} = \frac{v_{x_o} L_C}{\mu} \quad (14.15)$$

但是在弱反型时的饱和电压为 ϕ_t , 因此需要一个费米函数来对强反型和弱反型下的饱和电压来平滑转换

$$V_{DSAT} = V_{DSATs}(1 - F_f) + \phi_t F_f \quad (14.16)$$

但是在弱反型时的饱和电压为 ϕ_t , 因此需要一个费米函数来对强反型和弱反型下的饱和电压来平滑转换

Table 14.1: MOSFET Device Parameters

CMOS	65-nm nFET	32-nm nFET	65-nm pFET	32-nm pFET
$C_{inv} [\mu F/cm^2]$	1.83	2.65	1.70	2.60
$L_G [nm]$	35	32	35	32
$L_{ov} [nm]$	5	5	5	5
$S [V/decade]$	0.10	0.098	0.095	0.095
$\delta [V/V]$	0.12	0.13	0.155	0.145
$I_{off}(V_{GS} = 0, V_{dd}) [nA/\mu m]$	120	100	135	100
$V_{dd} [V]$	1.2	1.0	1.2	1.0
$v_{xo} [10^7 cm/s]$	1.4	1.35	0.85	1.3
$WR_S [\Omega.\mu m]$	75	80	130	80
$\mu [cm^2/V.s]$	250	250	140	210
β	1.8	1.8	1.5	1.7

14.2 Virtual-Source-Based Current and Charge FET Models @LanWei2012

Virtual-source-based self-consistent current and charge FET models: From ballistic to drift-diffusion velocity-saturation operation [9]

14.2.1 回顾 VS 模型

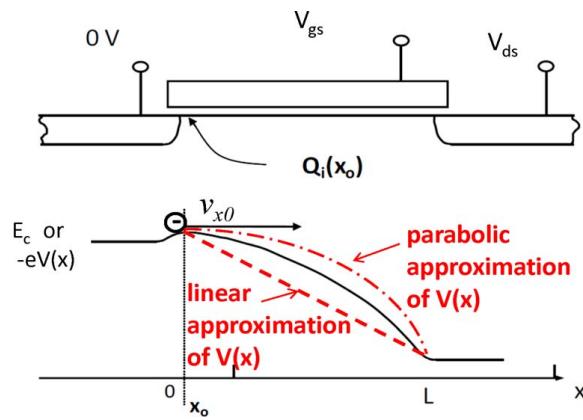


Figure 14.2: 新一代短沟道 MOSFET 虚拟源端点 x_0 和器件能带图

如图 (14.2), 这篇文章基于虚拟源端概念, 使用沟道电荷分割的电荷模型, 并且在 quasi-and fully-ballistic 条件下都能工作. 当器件尺寸达到了深度亚微米 (deep submicrometer) 级

别时, 载流子在经过沟道时, 相比于长沟道器件, 其散射概率相应减小了. 对于充分短的沟道的工作在准弹道输运状态 (quasi-ballistic QB transport regime) [10, 11]. VS 模型是最近开发的, 能够适应于准弹道和全弹道输运状态. 虚拟源端在或者靠近沟道载流子最大能带壁垒处. 我们重复前面 VS 模型的工作 [2].

$$I_D/W = Q_{ix_o} v_{x_o} F_{sat} \quad (14.17)$$

$$F_{sat} = \frac{V'_{DS}/V_{DSAT}}{\left(1 + (V'_{DS}/V_{DSAT})^\beta\right)^{1/\beta}} \quad (14.18)$$

在篇文章中, 我们假设 v_{x_o} 和偏置无关 (注意, v_{x_o} 应该说是饱和时的速度).

14.2.2 电荷分割下的动态 VS 模型

根据 Ward-Dutton 电荷分割方法 [12, 13]

$$Q_D = W \int_0^{L_g} \frac{x}{L} Q'_i dx \quad (14.19a)$$

$$Q_S = W \int_0^{L_g} \left(1 - \frac{x}{L}\right) Q'_i dx \quad (14.19b)$$

在不饱和 (NVsat) 和饱和 (Vsat) 下的漂移速度假设下电荷分割在附录中给出了. 大家熟知对于弹道输运的器件, 漂移/扩散理论已经不能够描述沟道电流了. 因此更加基础的用来计算 Q'_i 的条件是电流连续性方程, 这个已经被 QB(准弹道) 模型采用了. 从先前的仿真研究发现, 对于饱和区的 FET, 在弹道状态下的电势函数 $V(x)$ 可以经验地使用位置 x 的线性或者抛物线函数来描述 [14, 15]

$$V(x) = \frac{x}{L_g} \cdot V_{DS}, \quad \text{linear} \quad (14.20a)$$

$$V(x) = \left(\frac{x}{L_g}\right)^2 \cdot V_{DS}, \quad \text{parabolic} \quad (14.20b)$$

这篇文章将揭示, 推导的内部端电荷和电势函数 (14.20) 的形状没有太大关系. 我们假设器件工作在饱和区且处于弹道状态, 并且使用线性的电势假设 (14.20a)

$$v_x = \sqrt{v_{x_o}^2 + \frac{2qV(x)}{m^*}} \quad (14.21)$$

$$I_D/W = Q_{ix_o} v_{x_o} = Q'_i(x) \cdot v_x(x) \quad (14.22)$$

而沟道电荷在沟道的分布为

$$Q'_i(x) = \frac{Q_{ix_o}}{\sqrt{1 + k \cdot \frac{x}{L}}}, \quad \text{linear} \quad (14.23a)$$

$$Q'_i(x) = \frac{Q_{ix_o}}{\sqrt{1 + k \cdot \left(\frac{x}{L_g}\right)^2}}, \quad \text{parabolic} \quad (14.23b)$$

其中

$$k = \frac{2V_{ds}}{m^* v_{x_o}^2} \quad (14.24)$$

把式 (14.23a) 或者 (14.23b) 代入 (14.19a) 和 (14.19b) 就分别得到了 Q_{DQB} 和 Q_{SQB} , 这两个量分别代表了 QB 输运状态下的漏和源端的沟道电荷. 在 QB 输运状态下, 平均来讲, 载流子由于散射损失了部分的动能, 这个可以粗略的使用载流子的有效质量 m^* 来建模.

$$\begin{cases} Q_{DQB} = L_g Q_{ix_o} \left[\frac{(2k-4)\cdot\sqrt{k+1}+4}{3k^2} \right], & \text{linear} \\ Q_{SQB} = L_g Q_{ix_o} \left[\frac{(4k+4)\cdot\sqrt{k+1}-(6k+4)}{3k^2} \right], & \text{linear.} \end{cases} \quad (14.25)$$

$$\begin{cases} Q_{DQB} = L_g Q_{ix_o} \left[\frac{\sqrt{k+1}-1}{k} \right], & \text{parabolic} \\ Q_{SQB} = L_g Q_{ix_o} \left[\frac{\sinh^{-1}(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{k+1}-1}{k} \right], & \text{parabolic.} \end{cases} \quad (14.26)$$

在非饱和区, V_{DS} 总体上比较小, 且电势的形状比器件饱和时要更加宽且平坦. 在这样的条件下, 载流子的输运接近漂移/扩散条件, 与载流子的迁移率相关, 而在饱和区, 载流子的速度起主导作用 (电场足够大, 发生严重的速度饱和效应). 因此在低电压 V_{DS} 下, 器件假设工作在漂移/扩散模式, 和高电压 V_{DS} 下的各种状态模式无关 (如 NVsat, Vsat, QB). F_{sat} 是用来联系线性到饱和区, 同时拓展 QB 电荷模型到非饱和区, 使得模型在低 V_{DS} 下也能收敛到 NVsat 模式.

$$\begin{cases} Q_D = (1 - F_{sat}) \cdot Q_{DNvsat} + F_{sat} Q_{DQB} \\ Q_S = (1 - F_{sat}) \cdot Q_{SNvsat} + F_{sat} Q_{SQB}. \end{cases} \quad (14.27)$$

14.2.3 附录 A: 漂移/扩散输运状态的电荷分割模型

当 GCA 条件 (长沟道) 成立时, 沟道电荷 Q'_i 基本上是 V 的函数

$$V_{gt} = V_{GS} - V_{th} \quad (14.28a)$$

$$Q'_i = -C_{ox}(V_{gt} - V(x)). \quad (14.28b)$$

速度不饱和 NVsat 情况

在线性区, 假设在强反型下, 根据 (11.23) 可得漂移电流 I_d/W 为 (扩散电流在强反型下可以忽略).

$$I_d/W = -Q'_i(x) \cdot \mu_s \frac{dV}{dx} \quad (14.29)$$

在线性区时, 根据 (11.94) source-referenced 模型中电流的确定式可以表示为

$$I_d/W = \frac{\mu_s C_{ox}}{L_g} \left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{\alpha}{2} V_{DS}^2 \right] = \frac{\mu_s C_{ox}}{L_g} [(V_{gt} - 0.5\alpha V_{DS})V_{DS}] \quad (14.30)$$

其中

$$\alpha = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{s0}}} = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}} \quad (14.31)$$

$V_T|_{V_{SB}}$ 叫做栅源外推阈值电压 (gate-source extrapolated threshold voltage), 由 (10.34) 给出, 我们在这里重写下

$$V_T = V_{FB} + \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} = V_{T0} + \gamma\left(\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} - \sqrt{\phi_0}\right) \quad (14.32)$$

$$V_{T0} = V_{FB} + \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0} \quad (14.33)$$

但是很奇怪, 文章里的电流表达式却是

$$\frac{I_d}{W} = \frac{\mu_s C_{ox}}{L_g} [(V_{gt} - 0.5\alpha V_{DSAT})V_{DS}] \quad (14.34)$$

难道是为了强调线性区, 所以引入了 V_{DSAT} ? 但是文章并没有给出理由.

为了得到反型层端电荷的表达式, 首先必须获得沟道位置和反型层电荷或者表面电势的关系, 根据 (13.33), 对式 (14.29) 变形并两边积分, 并把反型层电荷表达式 (14.29) 带入得到 (定义 $I'_d = I_d/W$)

$$\begin{aligned} x &= \int_0^x dx = \int_0^V -\frac{\mu_s}{I'_d} Q'_i(x) dV = \int_0^V \frac{\mu_s}{I'_d} C_{ox} (V_{gt} - V(x)) dV \\ &= \frac{\mu_s C_{ox}}{I'_d} (V_{gt}V - 0.5V^2) \end{aligned} \quad (14.35)$$

另外一种求取位置 x 和电势 V 关系的方法是, 对 (14.29) 两边积分, 直接引用结论 (MOSFET 位置和电势的一般关系)

$$x = L \frac{H(V_{GS}, V)}{H(V_{GS}, V_{DS})} \quad (14.36)$$

其中 H 代表了

$$\frac{I_d}{W} = \frac{1}{L_g} H(V_{GS}, V) \quad (14.37)$$

结合 (??) 有

$$x = L_g \frac{[(V_{gt} - 0.5\alpha V_{DSAT})V_{DS}]V}{[(V_{gt} - 0.5\alpha V_{DSAT})V_{DS}]V_{DS}} = L_g \frac{V}{V_{DS}} \quad (14.38)$$

显然上式 (14.38) 和前面的假设 (14.20a) 是一致的, 但是和我们使用另一种方法 (14.35) 推导出来的不一致, 本质原因在于电流表达式 (14.34) 引入 V_{DSAT} , 从而使得电流源和外界偏压呈线性关系.

根据 Ward-Dutton 电荷分割方法 (14.19), 并且结合式 (14.35) 可得

$$\begin{aligned} Q_D &= W \int_0^{L_g} \frac{x}{L_g} Q'_i dx \\ &= -W \int_0^{V_{DS}} \frac{\mu_s C_{ox}}{I'_d} (V_{gt}V - 0.5V^2) \frac{1}{L_g} \cdot C_{ox} (V_{gt} - V) \cdot \frac{\mu_s C_{ox}}{I'_d} (V_{gt} - V) dV \end{aligned} \quad (14.39)$$

但是我们没有得到文章最后列出的端口电荷的表达式.

速度饱和 V_{sat} 情况

如果考虑到载流子饱和效应, 则根据图 (12.1), 以及公式 (12.10) 有, 且利用关系 $\mathcal{E}_{crit} = v_{sat}/\mu_s$, 以及 $\mathcal{E}_x = dV/dx$ 则有

$$v_x = V_{sat} \frac{\mathcal{E}_x / \mathcal{E}_{crit}}{1 + \mathcal{E}_x / \mathcal{E}_{crit}} = \mathcal{E}_{crit} \mu_s \frac{\mathcal{E}_x / \mathcal{E}_{crit}}{1 + \mathcal{E}_x / \mathcal{E}_{crit}} = \frac{\mu_s dV / dx}{1 + \frac{dV / dx}{\mathcal{E}_{crit}}} \quad (14.40)$$

因此沟道电流为

$$I_d/W = -Q'_i(x)v_x = -Q'_i(x) \cdot \frac{\mu_s dV / dx}{1 + \frac{dV / dx}{\mathcal{E}_{crit}}} \quad (14.41)$$

根据 (12.10) 和 (14.34) 易得

$$I_d/W = \frac{\mu_s C_{ox}}{L_g \left(1 + \frac{\mu_s V_{DS}}{L_g v_{sat}} \right)} [(V_{gt} - 0.5\alpha V_{DSAT}) V_{DS}] \quad (14.42)$$

14.3 Silicon MIT Virtual Source Model 1.0.1

Silicon MIT Virtual Source Model 1.0.1 [16]

14.4 MIT Virtual Source GaNFET-RF (MVSG-RF) Model@Ujwal

MIT Virtual Source GaNFET-RF (MVSG-RF) Model [17–19]

14.4.1 氮化镓 HEMT: 工作原理

氮化镓基 HEMT 是高压和高频应用的一个很有吸引力的候选者, 因为 AlGaN/GaN 材料具有很高的电子浓度 ($\sim 1 \times 10^{13} cm^2$), 二维电子气 (2DEG) 中高电子迁移率 ($\sim 1500 cm^2/Vs$), 好的热传导系数 ($\sim 1.5 W/cm.K$) 和高的击穿电场 ($\sim 3.0 MV/cm$). 如图 (14.3) 如图 (14.4) 氮化镓基 HEMTs 和其他的 HEMTs 一样, 属于异质结场效应管, 这里的

Semiconductor		Si	AlGaN/ InGaN	InAlAs/ InGaAs	SiC	AlGaN/ GaN
Characterisitic	Unit					
Bandgap	eV	1.1	1.42	1.35	3.26	3.49
Electron mobility at 300 K	cm ² /Vs	1500	8500	5400	700	1500-2200
Saturated (peak) electron velocity	$\times 10^7$ cm/s	1.0 (1.0)	1.3 (2.1)	1.0 (2.3)	2.0 (2.0)	1.3 (2.1)
Critical breakdown field	MV/cm	0.3	0.4	0.5	3.0	3.0

Figure 14.3: 三五族材料特性比较图.

异质结由两种带有不同晶格常数的材料构成, 如 AlGaN 和 GaN. 电子亲和势 χ 和能带宽度 E_g 的不同导致了 GaN 接触面近似三角形的势能阱, 使得电子限制在这里, 从而形成 2DEG. 对于 GaN HEMT, 其 2DEG 不是通过掺杂来实现的, AlGaN 层中自发的和或者压电的电场

会在 AlGaN 表面形成 donor 类型的表面状态, 而这些 donor 被限制在无限势能井里, 成为了 2DEG. 因此需要外部栅压来控制二维电子气的浓度来改变沟道电流. 更多的器件工作原理见 [18].

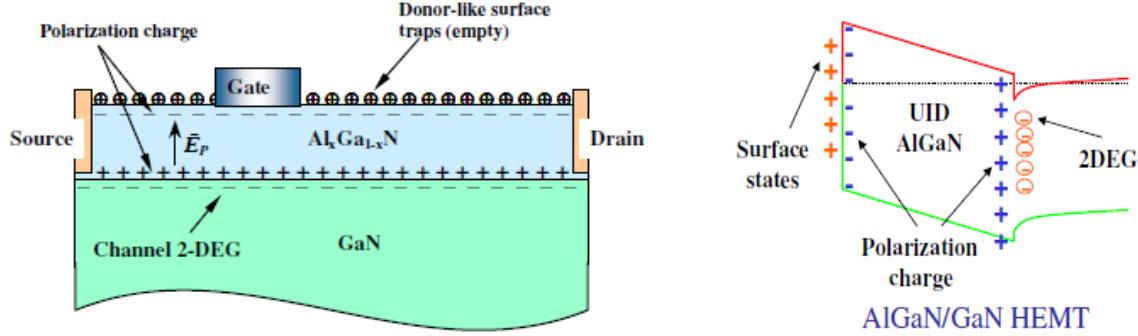


Figure 14.4: (a) 器件横截面; (b) 异质结的能带图

14.4.2 MVSG-RF 内部晶体管模型

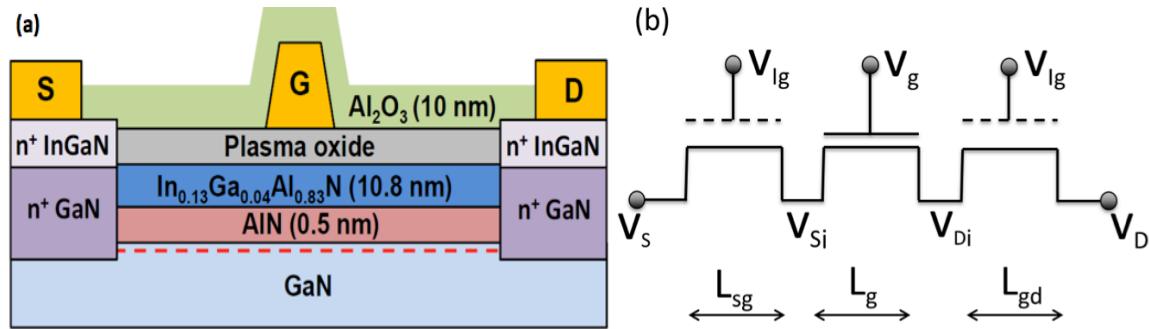


Figure 14.5: (a) 器件横截面; (b) 等效电路以及隐形栅极接触区域

典型的氮化镓器件结构如图 (14.5), 有几点需要注意的, 二维电子气是在栅极下面, 但是栅极和源极并不是紧密相连的, 中间还有一块叫做接触区域 (access region), 并且这两个接触区域被建模为非线性的隐形栅极晶体管. 为高频 (f_T) 应用的氮化镓 HEMT, 其栅极长度 L_g 通常非常短, 在几十个 nm 级别. 在这样短的栅压下通过观察发现饱和区的电流和栅极电压呈现线性关系. 由于 GaN 中的平均自由程非常短 (约 5 nm), 输运过程不可能是全弹道 (fully ballistic), 甚至当 L_g 小到 30 nm 也是如此. 这样的 GaN 器件的能带图如 (14.6), 这使得内部的晶体管区域可以建模为准弹道 (quasi-ballistic)FET. 因此内部核心的晶体管可以从 MVS-Si 模型借鉴过来.

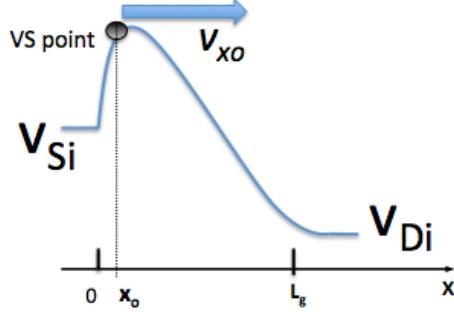


Figure 14.6: 短沟道 GaN HEMT 能带示意图

饱和电流

在虚拟源端点 x_o (node si) 的沟道电流为

$$I_D/W = Q_{ix_o} v_{x_o} \quad (14.43)$$

先前的文章中虚拟源端点的电子速度 v_{x_o} 在饱和区域基本与偏置无关. 但是对于氮化镓, 这一点的速度和垂直电场 (或者说 Q_{ix_o}), 以及自热效应有关. 在 MVSG-RF 中 v_{x_o} 与偏置无关, 叫做虚拟源端注入速度 (injection velocity)(v_{inj}), 然后乘以其他的方程来建模这些额外的效应. 虚拟源端的电荷密度可以很好的被经验方程所描述

$$Q_{ix_o} = C_g n \phi_t \ln \left(1 + \exp \frac{V_{GSi} - (V_T - \alpha \phi_t F_f)}{n \phi_t} \right) \quad (14.44)$$

C_g 是栅和沟道之间强积累状态下的单位面积有效电容 (这个概念从 MOSFET 的积累概念借过来的用来描述 GaN 沟道电荷密度). $\phi_t = kT/q$ 为热电压, V_{GSi} 为内部栅源电压, 把接触区域的压降校准掉了. n 是亚阈值系数, 和亚阈值摆幅 $S = n \phi_t \ln 10$ 有关. V_T 是阈值电压, 里面包含了短沟道 DIBL 效应. 函数 F_f 是费米方程, 可以让两个值平滑的过渡

$$F_f = \frac{1}{1 + \exp \left(\frac{V_{GSi} - (V_T - \alpha \phi_t / 2)}{\alpha \phi_t} \right)} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{V_{GSi} - (V_T - \alpha \phi_t / 2)}{\alpha \phi_t} \right) \right] \quad (14.45)$$

虚拟源端的电荷在弱反型和强反型时可以近似为

$$Q_{ix_o} \approx \begin{cases} C_g n \phi_t \exp \frac{V_{GSi} - (V_T - \alpha \phi_t)}{n \phi_t} & \text{弱反型} \\ C_g n \phi_t (V_{GSi} - V_T) & \text{强反型.} \end{cases} \quad (14.46)$$

非饱和电流

为了考虑非饱和区域, 虚拟源端电子注入速度需要乘以一个经验系数 F_{sat} . 当 V_{DSi} 为零时, $F_{sat} = 1$, 当 $V_{DSi} \gg V_{DSAT}$ 时, $F_{sat} = 0$. F_{sat} 和 Caughey-Thomas 的载流子饱和速度有关 [20, 21]

$$I_D/W = Q_{ix_o} v_{x_o} F_{sat} \quad (14.47)$$

$$F_s = \frac{V_{DSi}/V_{DSAT}}{(1 + (V_{DSi}/V_{DSAT})^\beta)^{1/\beta}} \quad (14.48)$$

β 是拟合的常数, $\beta = 1.5 \sim 1.8$ 提供较好的拟合效果. 为了模拟弱反型和强反型的 V_{DSAT} , 使用一个平滑的过渡函数

$$V_{DSAT} = V_{DSATs}(1 - F_f) + \phi_t F_f \quad (14.49)$$

$$V_{DSATs} = \frac{v_{xo} L_g}{\mu} \quad (14.50)$$

氮化镓特有的效应

氮化镓 HEMT 电子速度由于强烈的电光声子的作用 (散射) 以及自热效应而减小, 这个由修正的 v_{xo} 来建模 [22, 23]

$$v_{xo} = \frac{v_{inj}}{1 + \theta_v \cdot \frac{Q_{ixo}}{C_{inv}}} (1 - \eta_v I_D V_D) \quad (14.51)$$

v_{inj} 偏置无关, 为低沟道电荷浓度时虚拟源端注入速度 (injection velocity), 分母项考虑了载流子的散射效应, 最后一项考虑了自热效应导致的载流子速度下降. 而 θ_v, η_v 为拟合系数. 载流子迁移率也随着散射和自热减小, 被建模为 [22, 23]

$$\mu = \frac{\mu_0}{\left(1 + \theta_\mu \cdot \frac{Q_{ixo}}{C_{inv}}\right) \left(1 + \frac{\eta_\mu I_D V_D}{T_0}\right)^\varepsilon} \quad (14.52)$$

其中 $\theta_\mu, \eta_\mu, \varepsilon$ 为拟合系数, T_0 为参考温度.

14.4.3 MVSG-RF implicit-gate 晶体管沟道电流

在 MVSG-RF 模型中, 栅极和源极的接触区域相对于平均自由程来说足够长, 以至于在这个区域的载流子输运是漂移或扩散的. 因此 implicit-gate 模型的适用范围是沟道长度在 500nm 左右. 栅极的过驱动电压 (gate overdrive voltage) 和薄层电阻 (sheet resistance) 的关系在 [24] 中给出. MVSG-RF 长沟道能带图如 14.7 所示 电流仍然为 VS 点的电荷密度和电

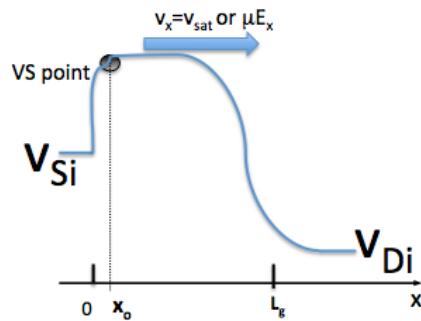


Figure 14.7: MVSGRF 长沟道能带图

子速度的乘积决定,但是在 VS 点的载流子速度并不是一个常数了,在 drift/diffusion(DD)状态的输运中,载流子在沟道任何点和那一点的电场相关 $v_x = \mu_{eff} E_x$. 电流由下面公式给出

$$I_D/W = Q_{ix} v_x = Q_{ix} \mu_{eff} E_x = Q_{ix} \mu_{eff} \frac{d\psi(x)}{dx} \quad (14.53)$$

对于基于电荷的简化全局模型(见11.4.4),其沟道电荷为 [1]

$$\frac{dQ_{ix}}{d\psi} = C_{inv} \quad (14.54)$$

使用 Caughey-Thomas 模型 [20],载流子的速度和电场相关,有效的迁移率为

$$\mu_{eff} = \frac{\mu}{\left(1 + (\mathcal{E}/\mathcal{E}_c)^\beta\right)^\beta} = \frac{\mu}{\left(1 + \left(\frac{d\psi/dx}{v/\mu}\right)^\beta\right)^{1/\beta}} \quad (14.55)$$

上述方程假设载流子速度随着电场的变化和硅类似,把上述几个公式综合得到

$$I_D/W = Q_{ix} \frac{\mu}{\left(1 + \left(\frac{dQ_{ix}/dx}{C_{inv}v/\mu}\right)^\beta\right)^{1/\beta}} \frac{dQ_{ix}/dx}{C_{inv}} \quad (14.56)$$

假定沟道电荷随位置是线性的

$$\frac{dQ_{ix}}{dx} = \frac{Q_{is} - Q_{id}}{L_g} \quad (14.57)$$

其中 $Q_{ix}(0) = Q_{is}$, $Q_{ix}(L_g) = Q_{id}$. 对式子 (14.56) 两边积分,并使用电流连续性方程,以及线性的沟道电压(电荷)分布,则有

$$I_D/W = \frac{\mu}{2C_{inv}L_g} \frac{Q_{is}^2 - Q_{id}^2}{\left(1 + \left(\frac{Q_{is}-Q_{id}}{C_{inv}L_g \cdot v/\mu}\right)^\beta\right)^{1/\beta}} \quad (14.58)$$

上式的速度 v 结合了强和弱积累区域的表达式.为了让电流源的表达式和 VS 模型类似,上式变换为

$$\frac{I_D}{W} = v \frac{1}{2C_{inv}V_{DSAT}} \frac{Q_{is}^2 - Q_{id}^2}{\left(1 + \left(\frac{Q_{is}-Q_{id}}{C_{inv}V_{DSAT}}\right)^\beta\right)^{1/\beta}} = v \frac{Q_{is} + Q_{id}}{2} F_{vsat} \quad (14.59)$$

其中

$$F_{vsat} = \frac{\frac{Q_{is}-Q_{id}}{C_{inv}V_{DSAT}}}{\left(1 + \left(\frac{Q_{is}-Q_{id}}{C_{inv}V_{DSAT}}\right)^\beta\right)^{1/\beta}} \quad (14.60)$$

且

$$V_{DSAT} = V_{DSATs}(1 - F_f) + 2n\phi_t F_f \quad (14.61)$$

$$V_{DSATs} = \frac{v_{sat} L_g}{\mu} \quad (14.62)$$

$$v = v_{sat}(1 - F_f) + 2\phi_t \frac{\mu}{L_g} F_f \quad (14.63)$$

Table 14.2: MVS(1.0.1) 模型参数

符号	意义
tipe	晶体管类型. nFET tipe=1; pFET tipe=-1
W [cm]	Transistor width
L_{gdr} [cm]	Physical gate length
dL_g [nm]	Overlap length including both source and drain sides .
C_g [F/cm^2]	Gate-to-channel areal capacitance at the virtual source
t_{eov} [cm]	Equivalent thickness of dielectric at S/D-G overlap
δ [V/V]	Drain-induced-barrier-lowering (DIBL)
n_0 [unitless]	Subthreshold swing factor, typically between 1.0 and 2.0
R_{s0} [$\Omega \cdot \mu m$]	Access resistance on terminal s
R_{d0} [$\Omega \cdot \mu m$]	Access resistance on terminal d
C_{if} [F/cm]	Inner fringing source or drain capacitance
C_{of} [F/cm]	Outer fringing capacitance
V_{xo} [cm/s]	Virtual source carrier velocity
μ [$cm^2/V.s$]	Virtual source carrier velocity
β [unitless]	Saturation factor. Typ. 1.8
T_{jun} [K]	Junction temperature
ϕ_b [V]	Effective body voltage for V_t dependence on body bias.Typ. $ 2\phi_f $
γ [$V^{1/2}$]	Effective body factor. Typ. 0.1-1 except =0 for fully depleted FETs
V_{t0} [V]	Strong inversion threshold voltage at $V_{ds} = 0V$
α [unitless]	Empirical parameter associated with threshold voltage shift (in kT/q) between strong and weak inversion. Typ. = 3.5
m_c	Carrier effective mass used for computation of charges for ballistic and blended quasi-ballistic model.
CTM_{select}	If $CTM_{select} = 1$, DD-NVSAT charge-transport model is selected, otherwise blended DD-NVSAT and ballistic charge-transport model is selected. Default is 1.
n_d [1/V]	Dependence of n on V_{ds}

Chapter 15

MIT 氮化镓高频模型 MVSGHF 和高电压模型 MVSGHV

Modeling gallium-nitride based high electron Mobility transistors: linking device physics to high voltage and high frequency circuit design [25]

MVSG 模型全称为 MIT Virtual Source GaN-HEMT 模型, 包括 MVSG-RF 和 MVSG-HV. 其中 MVSGRF 是为了射频应用开发的, 其器件工作电压小, 频率高, 结构对称且没有场板 (Field Plate), 这种器件建模相对容易. 另外的 MVSGHV 则是为高功率应用开发的, 高功率器件往往结果不对称, 且引入多个场板 (Gate/Drain Field Plate), 因此引入了额外的建模复杂度.

MVSG 起源于 MIT VS 模型, MVS 模型原本是为 highly-scaled 且工作在 quasi-ballistic 状态下的 Si-FETs 开发的, 这种器件的沟道通常只有几个平均自由程而已, 以至于沟道没有显著的散射效应, 适合这种模型的基本上其沟道长度为 10-100nm.

15.1 Quasi-ballistic GaN HEMT 模型 (MVSGRF)

对于工作在 quasi-ballistic 状态的氮化镓 HEMT, MVS 模型可以直接套用 [17, 19]. 此时, 在虚拟源端 VS 点, 如图 (15.1)

$$Q_{ix_o} = C_{inv} n \phi_t \ln \left(1 + \exp \frac{V'_{GS} - (V_T - \alpha \phi_t F_f)}{n \phi_t} \right) \quad (15.1)$$

n 是亚阈值摆幅, 和所谓的”亚阈值摆幅”系数 $S = n \phi_t \ln 10$ 有关, 且

$$V_T = V_{T0} - \delta V'_{DS} \quad (15.2)$$

$$n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F}} \quad (15.3)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2q\varepsilon_{Si}N}}{C_g} \quad (15.4)$$

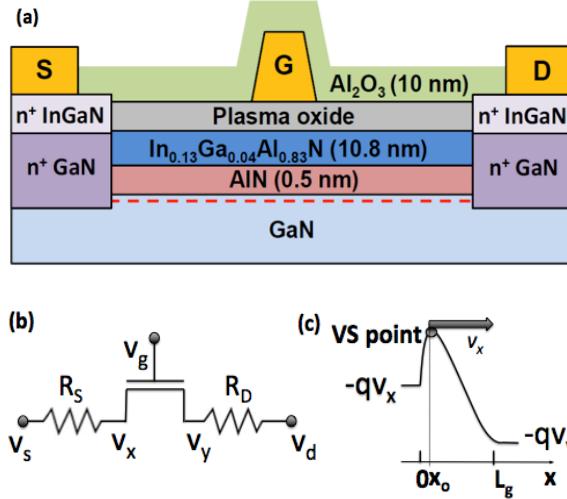


Figure 15.1: (a) 加工的 SiC 上 InAlGaN/GaN HEMTs 横截面; (b) 模型等效电路; (c) 内部饱和区的能带图, 虚拟源端点在沟道电子能量壁垒的最大处附近, V_Y 和 V_X 是内部漏极和源极电压, v_x 是载流子速度, $Q_{i,xo}$ 是虚拟源端单位面积的电荷数, 电流密度等于 $Q_{i,xo} \cdot v_x$. 沟道的电势分布状况通过强加电流连续性条件和能量守恒决定了沟道电荷密度 ($Q'_i(x)$) 的分布.

其中 V'_{DS} 为内部漏源电压

$$V'_{DS} = V_{DS} - I_D(R_S + R_D) \quad (15.5)$$

δ 为 DIBL 系数, 正如 (12.27) 所示. 需要注意 DIBL 是 Q_{ix_o} 和漏极电压 V_{DS} 唯一的联系. 经验发现 (14.2) 中 V_T 保持 $3.5\phi_t$ 的平移是一个很好的近似. 反型层转换函数 F_f 是一个费米函数, 能够在两个值之间平滑的过渡

$$F_f = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{V'_{GS} - (V_T - \alpha\phi_t/2)}{\alpha\phi_t}\right)} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{V'_{GS} - (V_T - \alpha\phi_t/2)}{\alpha\phi_t}\right) \right] \quad (15.6)$$

$$I_D/W = Q_{ix_o} v_{x_o} F_s \quad (15.7)$$

$$F_s = \frac{V'_{DS}/V_{DSAT}}{(1 + (V'_{DS}/V_{DSAT})^\beta)^{1/\beta}} \quad (15.8)$$

其中 V_{DSAT} 为饱和电压, 当 $V_{DS} = 0$ 时, $F_s = 0$, 当当 $V'_{DS} \gg V_{DSAT}$ 时, $F_s = 1$. β 是拟合的常数, 对于 nFETs, $\beta = 1.8$, 对于 pFETs, $\beta = 1.4$, 会是一个很好的近似.

Bibliography

- [1] Y. Tsividis and C. McAndrew, *Operation and Modeling of the MOS Transistor*. Oxford Univ. Press, 2011.
- [2] A. Khakifirooz, O. M. Nayfeh, and D. Antoniadis, “A simple semiempirical short-channel mosfet current–voltage model continuous across all regions of operation and employing only physical parameters,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 56, no. 8, pp. 1674–1680, 2009.
- [3] M. Lundstrom, “Elementary scattering theory of the si mosfet,” *IEEE Electron Device Letters*, vol. 18, no. 7, pp. 361–363, 1997.
- [4] M. Lundstrom and Z. Ren, “Essential physics of carrier transport in nanoscale mosfets,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 49, no. 1, pp. 133–141, 2002.
- [5] A. Khakifirooz and D. A. Antoniadis, “Transistor performance scaling: The role of virtual source velocity and its mobility dependence,” in *Electron Devices Meeting, 2006. IEDM’06. International*. IEEE, 2006, pp. 1–4.
- [6] G. Wright, “Threshold modelling of mosfets for cad of cmos-vlsi,” *Electronics Letters*, vol. 21, no. 6, pp. 223–224, 1985.
- [7] Y. Cheng, M.-C. Jeng, Z. Liu, J. Huang, M. Chan, K. Chen, P. K. Ko, and C. Hu, “A physical and scalable iv model in bsim3v3 for analog/digital circuit simulation,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 44, no. 2, pp. 277–287, 1997.
- [8] N. Arora, “Mosfet models for vlsi circuit simulation theory and practice springer,” *New York*, 1993.
- [9] L. Wei, O. Mysore, and D. Antoniadis, “Virtual-source-based self-consistent current and charge fet models: From ballistic to drift-diffusion velocity-saturation operation,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 59, no. 5, pp. 1263–1271, 2012.
- [10] K. Natori, “Ballistic metal-oxide-semiconductor field effect transistor,” *Journal of Applied Physics*, vol. 76, no. 8, pp. 4879–4890, 1994.

- [11] J.-H. Rhew, Z. Ren, and M. S. Lundstrom, “A numerical study of ballistic transport in a nanoscale mosfet,” *Solid-State Electronics*, vol. 46, no. 11, pp. 1899–1906, 2002.
- [12] D. E. Ward, “Charge-based modeling of capacitance in mos transistors,” 1981.
- [13] S.-Y. Oh, D. E. Ward, and R. W. Dutton, “Transient analysis of mos transistors,” *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 15, no. 4, pp. 636–643, 1980.
- [14] Y. Liu, M. Luisier, A. Majumdar, D. A. Antoniadis, and M. S. Lundstrom, “On the interpretation of ballistic injection velocity in deeply scaled mosfets,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 59, no. 4, pp. 994–1001, 2012.
- [15] A. J. Lochtefeld, “Toward the end of the mosfet roadmap: Investigating fundamental transport limits and device architecture alternatives,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [16] S. Rakheja and D. Antoniadis, “Mvs nanotransistor model (silicon),” Dec 2015. [Online]. Available: <https://nanohub.org/publications/15/4>
- [17] U. Radhakrishna and D. Antoniadis, “Mit virtual source ganfet-rf (mvsg-rf) model,” Oct 2014. [Online]. Available: <https://nanohub.org/publications/14/1>
- [18] U. Radhakrishna, “A compact transport and charge model for gan-based high electron mobility transistors for rf applications,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2013.
- [19] U. Radhakrishna, L. Wei, D.-S. Lee, T. Palacios, and D. Antoniadis, “Physics-based gan hemt transport and charge model: Experimental verification and performance projection,” in *Electron Devices Meeting (IEDM), 2012 IEEE International*. IEEE, 2012, pp. 13–6.
- [20] D. Caughey and R. Thomas, “Carrier mobilities in silicon empirically related to doping and field,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 55, no. 12, pp. 2192–2193, 1967.
- [21] C. Maziar and M. Lundstrom, “Caughey-thomas parameters for electron mobility calculations in gaas,” *Electronics Letters*, vol. 22, no. 11, pp. 565–566, 1986.
- [22] Y. Chang, Y. Zhang, Y. Zhang, and K. Tong, “A thermal model for static current characteristics of al_xga_{1-x}n/ ga n high electron mobility transistors including self-heating effect,” *Journal of applied physics*, vol. 99, no. 4, p. 044501, 2006.
- [23] R. Van Langevelde and F. M. Klaassen, “Effect of gate-field dependent mobility degradation on distortion analysis in mosfets,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 44, no. 11, pp. 2044–2052, 1997.

- [24] U. Radhakrishna, D. Piedra, Y. Zhang, T. Palacios, and D. Antoniadis, “High voltage gan hemt compact model: Experimental verification, field plate optimization and charge trapping,” in *Electron Devices Meeting (IEDM), 2013 IEEE International*. IEEE, 2013, pp. 32–7.
- [25] U. Radhakrishna, “Modeling gallium-nitride based high electron mobility transistors: linking device physics to high voltage and high frequency circuit design,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2016.