泛函分析笔记

Huang Andong
andonghuang1991@gmail.com
https://github.com/GitHuang

May 5, 2017

Contents

1 度量空间 **3**

1.1 度量空间基本概念 3

1.1.1 距离的定义 3

1.1.2 常见的度量空间 4

1.1.3 可分距离空间 6

1.1.4 紧列的距离空间 7

1.2 线性空间上的范数 8

1.2.1 线性空间 8

1.2.2 赋范线性空间 10

1.2.3 凸集 10

1.3 L^p 空间 11

1.3.1 L^p 上的范数 11

1.3.2 平均收敛和依测度收敛 12

1.3.3 L^p 空间定义 12

1.3.4 空间 $L^\infty(E,\mu)$ 13

1.3.5 数列 l^p 空间 13

1.4 度量空间中的点集 13

1.4.1 内点和开集 13

1.4.2 极限点和闭集 14

1.4.3 点集间的距离 15

1.4.4 n 维欧几里德空间中的 Borel 集 16

1.5 连续映照 17

1.5.1 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 17

1.5.2 度量空间上的连续映照和开映照 18

1.5.3 连续曲线 19

1.6 稠密性 19

1.6.1 稠密性的概念 19

1.6.2 可析 (可分) 点集 23

1.7 完备性 23
1.7.1 完备性的概念 23
1.7.2 某些完备的子空间 24
1.7.3 完备空间的重要性质 24
1.7.4 度量空间的完备化 25
1.8 不动点理论 26
1.8.1 压缩映射定义 26
1.8.2 压缩映射的应用 28
1.9 列紧集 30
1.9.1 列紧集的概念 30
1.9.2 列紧集和完全有界集 30

Chapter 1

度量空间

本章将考察 p 次可积函数类 $L^p(E)$, 其中 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集,p 是大于或者等于 1 的正实数. 当 p 等于 1 时,$L^1(E)$ 就是全体集合 E 上的 Lebesgue 可积函数. 现在着重点不是其中各个函数的积分性质, 而是研究集合中函数与函数之间的相互关系, 研究这些集合作为整体的结构, 如线性结构、拓扑结构和分析结构. 在 $L^p(E)$ 上引入由积分定义的度量

$$d(f,\ g) = \parallel f - g \parallel_p \qquad (f,\ gL^p(E)) \tag{1.1}$$

通过这个度量在这集合 $L^p(E)$ 上引入拓扑. 依靠这个度量, 在 $L^p(E)$ 中可以建立类似于欧式空间的空间结构, 这就是所谓的 L^p 空间理论

1.1 度量空间基本概念

1.1.1 距离的定义

定义 1.1 (**距离空间定义**). 设 R 是任一非空集合, 对于 R 中的任何两点 x, y, 均有一个实数 $\rho(x, y)$ 与它对应, 且满足

(1) $\rho(x, y) \geq 0$ 且 $\rho(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$. (非负性)

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. (对称性)

(3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$. (三角不等式)

则称数 $\rho(x, y)$ 为 R 中的一个距离. 定义了距离 ρ 的集合称为一个距离空间, 记作 (R, ρ), 简记为 X. 度量空间 R 的任何非空子集 M, 就以 R 总距离 ρ 作为 M 上的距离, 显然 (M, ρ) 也是度量空间, 称 (M, ρ) 为 R 的**子空间**.

定义 1.2 (**一致离散**). 在一个度量空间 R 中, 如果存在正的常数 α, 使得任何 $x, y \in R, x \neq y$, 都有 $\rho(x, y) \geq \alpha$, 称 R 为**一致离散的距离空间**.

定义 1.3 (**等距映照**)**.** 设 (R, ρ) 及 (R_1, ρ_1) 是两个度量空间,ϕ 是 R 到 R_1 的映照. 如果对每个 $x, y \in R$, 成立着

$$\rho(x, y) = \rho_1(\varphi x, \varphi y), \tag{1.2}$$

那么称 φ 是 (R, ρ) 到 (R_1, ρ_1) 上的**等距映照**. 进一步, 如果还有 $\varphi(R) = R_1$, 那么称这两个度量空间是**等距同构**的.

极限的概念

定义 1.4 (**收敛点列**)**.** 设 R 是一个度量空间,$x_n (n = 1, 2, 3, \cdots), x \in R$, 假如当 $n \to \infty$ 时数列 $\rho(x_n, x) \to 0$, 也就是说点列 $\{x_n\}$ **按照距离** $\rho(x, y)$ **收敛**, 记作

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \tag{1.3}$$

或 $x_n \to x$, 这时称 $\{x_n\}$ 为**收敛点列**,x 为 $\{x_n\}$ 的**极限**.

在度量空间中, 任何一个点列 $\{x_n\}$ 最多只有一个极限, 即收敛点列的极限是唯一的, 唯一性由距离空间的三条性质很容易推导出. 另外如果 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$, 那么 $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$, 也就是说距离 $\rho(x, y)$ 是两个变元 x, y 的连续函数, 同样可由距离的三角不等式推出.

定义 1.5 (**开球和 r-环境**)**.** 设 R 为度量空间,x_0 是 R 中的点. 对于有限的正数 r, 我们把集 $\{x \mid x \in R, \rho(x, x_0) < r\}$ 称为一个**开球**, 它的中心是 x_0, 半径是 r, 把它记作 $O(x_0, r)$. 也把球 $O(x_0, r)$ 称为 x_0 的 **r-环境**.

定义 1.6 (**有界集**)**.** 设 M 是度量空间 R 中的点集, 如果 M 包含在某个开球 $O(x_0, r)$ 中, 则称 M 是 R 中的**有界集**.

定理 1.7 (**收敛点列有界性**)**.** *设 $\{x_n\}$ 为度量空间 R 中的收敛点列, 那么 $\{x_n\}$ 是有界的.*

1.1.2 常见的度量空间

常见的度量空间有 E^2, $C[a, b]$, $L(X, B, \mu)$. 下面举一些常见的例子.

定义 1.8 (**欧几里德距离**)**.** 在 n 维欧几里德空间 E^n 中, 对于

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

规定距离

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2} \tag{1.4}$$

这个 $\rho(x, y)$ 为欧几里德距离.

Proof. 证明最关键的一步是三角不等式. 利用到 Cauchy 不等式.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} \tag{1.5}$$

Cauchy 不等式的证明可以利用如下等式的非负性

$$y = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k\lambda)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\lambda^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)\lambda + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \geq 0 \tag{1.6}$$

于是有

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \tag{1.7}$$

上式还可以推出

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} \tag{1.8}$$

这个式子的证明只需对不等式两边进行平方, 然后利用 Cauchy 不等式. 令 $a_k = (x_k - z_k), b_k = (z_k - y_k)$, 即三角不等式得证. 下面给出柯西不等式的向量证明.

考虑向量 $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$, $t \in \mathbb{R}$, 由于

$$\langle \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \rangle = \| \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \|^2 \geq 0 \tag{1.9}$$

展开有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \leq \| \boldsymbol{a} \| \cdot \| \boldsymbol{b} \| \tag{1.10}$$

柯西不等式本质上可以理解为一个向量在另外一个向量上的投影小于其本身的模. □

距离空间中点列的收敛等价于按坐标收敛.

命题 1.8.1. *设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合, 定义*

$$d_2(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 dt\right)^{1/2} \tag{1.11}$$

$d_2(x, y)$ 也是 X 上定义的距离.

命题 1.8.2 (空间 s). *设 $s = \xi_n$, 即全体实数列组成的集合, 定义*

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \tag{1.12}$$

其中 $x = \xi_k$, $y = \eta_k$, 则 s 为距离空间, 且 s 中的收敛是按坐标收敛.

Proof. 证明的关键在于利用函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ 的单调递增特性.

$$\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}\le\frac{|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|+|\eta_k-\zeta_k|}\le\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\frac{|\eta_k-\zeta_k|}{1+|\eta_k-\zeta_k|}\tag{1.13}$$

余下证明略. □

命题 1.8.3. S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数, 其中 $E\subset\mathbb{R}$ 是一个 *Lebesgue* 可测集, 且 $m(E)<\infty$. 对于 $x=x(t),\ y=y(t)\in S$, 定义

$$d(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt\tag{1.14}$$

则 S 为距离空间, 且 S 中的收敛是按测度收敛.

Proof. 首先来回顾下依照测度收敛. 对于 $\forall\sigma>0$

$$m\left(t\in E\mid|x_n(t)-x(t)|\ge\sigma\right)\to 0\tag{1.15}$$

即对于 $\forall\epsilon>0,\ \exists N,\ s.t.\ n>N$, 我们有

$$m\left(t\in E\mid|x_n(t)-x(t)|\ge\sigma\right)\le\epsilon\tag{1.16}$$

正面的关键在于把集合 E 拆成两部分 $E=E_1\bigcup E_2$

$$E_1=m\left(t\in E\mid|x_n(t)-x(t)|<\sigma\right)\tag{1.17}$$

$$E_2=m\left(t\in E\mid|x_n(t)-x(t)|\ge\sigma\right)\tag{1.18}$$

然后利用函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ 的单调递增特性. □

1.1.3 可分距离空间

在实数空间中, 有理数是稠密的, 有理数是可数的. 任何一个实数都可以用有理数列来逼近. 我们希望把这样的性质类比的推广到一般空间中. 重点：稠密集, 由其定义可分距离空间; 判定稠密性、距离空间的可分性.

定义 1.9 (点到集合的距离). 设 X 是一个距离空间,$A\subset X,\ x\in X$, 称

$$d(x,A)=\inf\{d(x,\omega)\mid\omega\in A\}\tag{1.19}$$

为 x 到集合 A 的距离.

定义 1.10 (稠密集). 设 $A,\ B$ 是距离空间 X 中的点集, 如果 $\overline{B}\supset A$, 即 A 包含在 B 的闭包里时, 称 B 在 A 中稠密. 显然闭包为闭集, 闭集中的每一个点, 都能在此集合中找到一个点列来趋近. 所以我们还可以使用另外一套语言来描述稠密集. $\varepsilon-\delta$ 语言:$\forall x\in A,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in B,\ s.t.\ d(x,y)<\varepsilon$. 注意: 定义中没有要求 B 和 A 的包含关系.

命题 1.10.1. $A=[0,1]$,$B=[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$, 则 $\overline{B}=A$, 所以 B 在 A 中稠密. 但是这里 $B\subset A$, 且 $B\neq A$. 这里其实 A 也在 B 中稠密.

命题 1.10.2. $A=[0,1]\backslash\mathbb{Q}$,$B=[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$, 则 $\overline{B}\supset A$, 所以 B 在 A 中稠密. 但是这里 $B\bigcap A=\emptyset$.

定义 1.11 (可分距离空间). 设 X 是一个距离空间, 如果 X 中存在一个可数稠密集, 则称 X 是可分的. 对于子集 $A\subset X$, 如果 X 中存在可数子集 B, 使得 B 在 A 中稠密, 则称 A 是可分的.

命题 1.11.1. 距离空间 (X,d) 是可分的当且仅当存在一个具有下列性质的可数集 x_n: 对于 $\forall\varepsilon>0$, $x\in X$, 至少存在一个 x_n, 使得 $d(x_n,x)<\varepsilon$.

命题 1.11.2 ($\mathbb{R}^n$ 是可分的). $\mathbb{R}^n$ 中的有理点是可数集, 且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

命题 1.11.3 ($C[a,b]$ 是可分的). 由 *Weierstrass* 定理, 对于 $\forall x(t)\in C[a,b]$, 存在多项式 $P_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$. 即对于 $\forall x(t)\in C[a,b]$, $\varepsilon>0$, $\exists P_n(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$ $(a_i\in\mathbb{R})$, 使得

$$|P_n(t)-x_n(t)|<\varepsilon\quad(\forall t\in[a,b]). \tag{1.20}$$

而 $P_n(t)$ 又可以用有理多项式 $P_n^r(t)$ 一致逼近. 而 $P_n^r(t)$ 是可数的, 故 $C[a,b]$ 可分.

1.1.4 紧列的距离空间

关于紧性的刻画, 可以从不同的角度给出几种定义: 序列紧 (Weierstrass 定理)、Borel 紧 (有限覆盖定理)、完全有界. 下面我们主要考虑序列紧 (列紧和自列紧).

定义 1.12 (列紧和自列紧). 设 A 是距离空间 X 中的一个子集, 如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛子列, 则称 A 是列紧的集合. 闭的列紧集称为自列紧集. 如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛子列, 则称距离空间 X 称为是列紧的.

注 1.13. 一个集合 A 是自列紧的, 要求收敛子列的极限必须在 A 中. 比如 $(0,1])$ 是列紧的，但不是自列紧的.

定理 1.14. 设 X 是一个距离空间,$A\subset X$ 是列紧集的, 则 A 是有界集.

Proof. 假设 A 是无界的, 那么可以从 A 中选取一个点列 y_n, 使得 $d(y_n,a)>n$, 其中 a 是 X 中的一个点. 由于这个点列的任何子列都是无界的, 那么其任何子列都不收敛, 与列紧集概念矛盾. □

注 1.15. 自列紧集是有界闭集, 但是在一般的距离空间中, 有界闭集不一定是列紧的 (?). 自列紧距离空间通过连续函数映射后有界且能够取到最大最小值.

命题 1.15.1. $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集是列紧集, 闭区间 $[a,b]$ 是列紧集.

定义 1.16 (**一致有界**)**.** $A \subset C[a,b]$, 若 $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in A$, $\exists K > 0$, 使得 $|x(t)| \leq K$, 则称 A 一致有界

定义 1.17 (**等度连续**)**.** $A \subset C[a,b]$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|t_1 - t_2| \leq \delta$, $\forall x \in A$ 有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon \tag{1.21}$$

则称 A 等度连续.

定理 1.18 (**Arzela 定理**)**.** *$C[a,b]$ 中的子集 A 是列紧的, 当且仅当 A 中的函数是一致有界和等度连续的.*

命题 1.18.1. *$A = \{x(t) \in C^1[a,b] \mid |x(t)| \leq M,\ |x^{'}(t)| \leq M_1\}$, 则 A 是 $C[a,b]$ 中的列紧集.*

Proof. 一致有界由条件给出, 只需要证明等度连续. 根据中值定理,$\forall x \in A$, $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$, $\exists \theta \in (0,1)$, $s.t.$

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq |x^{'}(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)(t_1 - t_2)| \leq M_2|t_2 - t_1| \tag{1.22}$$

所以 A 中的函数等度连续, 且一致有界. 所以列紧. □

1.2 线性空间上的范数

1.2.1 线性空间

定义 1.19 (**线性空间**)**.** 设 R 为一集合, 假设在 R 中规定了线性运算—元素的假发运算以及实数或复数与 R 中元素的乘法运算, 满足下面条件:

I. R 关于加法称为交换群. 就是说对于任意一对 $x, y \in R$, 都存在 $u \in R$, 记作 $u = x + y$, 称它是 x, y 的和. 这个运算适合

(1) $y + x = x + y$(加法交换律);

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$(加法结合律);

(3) R 中存在唯一的元素 0, 使得对于任何 $x \in R$ 成立着 $x + 0 = x$(存在零元素);

(4) 对于 R 中每一元素 x, 存在唯一的元素 $x^{'} \in R$, 满足 $x + x^{'} = 0$, 称 $x^{'}$ 为 x 的负元素, 记作 $-x$(存在负元素);

II. 对任何的 $x \in R$ 及任何实复数 a, 存在元素 $ax \in R$, 称 ax 是 a 和 x 的数积, 适合

(5) $1 \cdot x = x$;

(6) $a(bx) = (ab)x$,a, b 是实复数;

(7) $(a+b)x = ax+bx,\ a(x+y) = ax+ay$;

那么称 R 为**线性空间**或**向量空间**, 其中的元素也称为**向量**.

定义 1.20 (**线性相关和无关**)**.** 设 R 是实 (或复) 线性空间,$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 R 中的一组向量, 如果存在不全为零的 n 个实 (或复) 数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

就称向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是**线性相关**的. 一组向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 如果不是线性相关的, 则称为**线性无关**的.

定义 1.21 (**线性基**)**.** 设 A 是线性空间 R 中的一个线性无关向量组. 如果对于每一个非零向量 $x \in R$, 都是 A 中的向量的线性组合, 即有不全为零的 n 个实 (或复) 数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad x_k \in A$$

就称 A 为线性空间 R 的一组**线性基**.

定义 1.22 (**线性同构**)**.** 设 R', R'' 同是实或复的两个线性空间, 如果存在 R' 到 R'' 的一一对应 φ, 使得对任何一对 $x, y \in R'$ 及任何数 α, 成立着

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{1.23a}$$

$$\varphi(ax) = a\varphi(x) \tag{1.23b}$$

那么称 R' 和 R'' 是**线性同构**的, 而映射 φ 称为 R' 到 R'' 的**线性同构映照**. 因为线性同构映照 φ 的逆映照仍然是线性同构, 所以线性无关的向量经过线性同构映照后仍是线性无关向量组 (也许这就是引入线性同构的原因).

定义 1.23 (**线性子空间**)**.** 设 L 是线性子空间 R 的子集. 如果 L 对 R 中的线性运算是封闭的, 就是说, 当 $x, y \in L$ 时, 对任何数 α, 都有 $\alpha x \in L, x+y \in L$, 那么称 L 是 R 的**线性子空间**.

定义 1.24 (**平凡和真子空间**)**.** 线性空间 R 本身以及只含有零元素 $\{0\}$ 的空间都是 R 的线性子空间, 称它们为 R 的**平凡**的线性子空间. 除了 R 以外的其他的 R 的线性子空间称为 R 的**真子空间**.

下面举例一些常见的线性空间.

命题 1.24.1 (**函数空间**)**.** *设 Q 是一集,F 是 Q 上某些实 (或复) 函数所成的函数族. 在函数族中我们按照通常的方法规定函数的加法及函数与数的积如下: 对于 $q \in Q$, 令*

$$(f+g)(q) = f(q) + g(q), \quad f, g \in F \tag{1.24a}$$

$$(af)(q) = af(q), \quad f \in F, \alpha \text{是数} \tag{1.24b}$$

如果当 $f, g \in F, \alpha, \beta$ 是任意实或复数时

$$\alpha f + \beta g \in F \tag{1.25}$$

那么 F 成为一个线性空间.

命题 1.24.2 (**数列空间**). *设 s 是实 (或复) 数列全体, 规定加法及数积运算如下:*

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\},\ \alpha\{x_n\} = \{\alpha x_n\},\ \alpha\text{是数} \tag{1.26}$$

那么 s 成为一个实 (或复) 线性空间.

1.2.2 赋范线性空间

定义 1.25 (**赋范线性空间**). 设 R 是实或复数域 F 上的线性空间. 如果 R 上的实值函数 $p(\cdot)$ 满足下列条件:

(1) $p(x) \geq 0,\ x \in R$

(2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), x \in R, \alpha \in F$

(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), x \in R, y \in R$ 我们称 $p(x)$ 为 x 的**半范数**或**拟范数**. 如果半范数又满足如下条件

(4) 如果 $p(x) = 0$, 则 $x = 0$, 便称 $p(x)$ 为 x 的**范数**，通常也记作 $||x||$, 而且 R 按照这个范数 $||\cdot||$ 称作**赋范线性空间**, 简称作赋范线性空间.

1.2.3 凸集

凸集是泛函分析中常用的重要概念, 它起源于 Minkowski 所考察的有限维空间中的一种几何学.

定义 1.26 (**凸集定义**). 设 R 是一线性空间,A 是 R 的一个子集, 如果对 A 中任何两点 x, y, 连接他们的线段

$$\{\alpha x + (1-\alpha) y \mid 0 \leq \alpha \leq 1\} \tag{1.27}$$

都在 A 中, 那么称 A 是**凸集**. 线性空间 R 的每个线性子空间都是凸集.

定义 1.27 (**凸包**). 设 R 是一线性空间, 如果 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是一族凸集, 从定义容易看出 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 也是凸集, 因此如果 B 是 R 中的一个子集, 令 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 R 中包含 B 的凸集的全体, 那么 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 就是包含 B 的最小的凸集, 称为 B 的**凸包**, 通常记为 $covB$. 可以证明:B 的凸包是集

$$\left\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \mid x_v \in B, \alpha_v \geq 0, \sum_{v=1}^{n} \alpha_v = 1\right\} \tag{1.28}$$

定义 1.28 (**商空间**)**.** 设 R 是一线性空间,E 是 R 的一线性子空间, 现在在 R 中规定: 当 $x-y\in E$ 时为 $x\sim y$, 容易证明 $\sim$ 是 R 中的等价关系, 我们把商集 $R/\sim$ 记为 R/E, 并记 x 所在的等价类为 $\widetilde{x}$. 在 R/E 中规定线性运算如下:

$$\widetilde{x}+\widetilde{y}=\widetilde{(x+y)} \tag{1.29a}$$

$$\alpha\widetilde{x}=\widetilde{(\alpha x)},\quad \alpha\text{是数} \tag{1.29b}$$

这样的线性元算是有明确意义的. 例如我们讨论加法: 如果 $\widetilde{x}=\widetilde{x_1},\widetilde{y}=\widetilde{y_1}$, 那么 $x-x_1\in E,y-y_1\in E$, 因此 $x+y-(x_1+y_1)=(x-x_1)+(y-y_1)\in E$, 也就是

$$\widetilde{(x+y)}=\widetilde{(x_1+y_1)}$$

类似地可以讨论数乘. 容易看出 R/E 按这样规定的线性元算称为线性空间, 称 R/E 为 R 关于 E 的**商空间**.

1.3 L^p 空间

1.3.1 L^p 上的范数

在分析中最常用的一类赋范线性空间是 L^p. 设 (X,B,μ) 是一个测度空间,$E\in B,f(t)$ 是 E 上的实值 (或复值) 函数, 取定正数 p. 设 f 是 E 上的可测函数. 而且 $|f|^p$ 在 E 上可积的, 这种函数 f 的全体记作 $L^p(E,B,\mu)$, 简记为 $L^p(E,\mu)$, 简称 $L^p(E,\mu)$ 中的函数是 p 方可积函数. 有时也用 $L^p(E)$ 表示 E 上关于 Lebesgue 测度的 p 方可积函数空间. 当 $p=1$ 时,$L^1(E,\mu)$ 就是 E 上的可积函数全体, 也记作 $L(E,\mu)$. 特别地, 当 E 是区间 $[a,b]$ 时改记 $L^p([a,b])$ 为 $L^p[a,b]$. 对 $L^p(E,\mu)$ 中每个向量作出一个确定的数

$$||f||_p=\left(\int_E|f(t)|^pd\mu\right)^{1/p}\qquad(p\geq 1) \tag{1.30}$$

下面来证明上式是 $L^p(E,\mu)$ 的范数.

引理 1.29 (**Hölder 不等式**)**.** *设 $p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 如果 $f(x)\in L^p(E,\mu),g(x)\in L^q(E,\mu)$, 那么 $f(x)g(x)\in L(E,\mu)$, 并且有*

$$||fg||_1=\int_E|f(x)g(x)|d\mu\leq ||f||_p||g||_q=\left(\int_E|f(x)|^pd\mu\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^qd\mu\right)^{1/q} \tag{1.31}$$

当 $p=2$ 时, 就是

$$\left(\int_E|f(x)g(x)|d\mu\right)^2\leq\int_E|f(x)|^2d\mu\int_E|g(x)|^2d\mu \tag{1.32}$$

注 1.30. Hölder 不等式的证明需要用到如下不等式, 对于任意非负数 A,B, 成立着

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\leq\frac{A}{p}+\frac{B}{q} \tag{1.33}$$

然后再令 $A=\left|\frac{f(x)}{||f||_p}\right|^p$, $B=\left|\frac{g(x)}{||g||_q}\right|^q$

引理 1.31 (**Minkowski 不等式**). 设 $p \geq 1, f(x), g(x) \in L^p(E,\mu)$, 那么 $f(x)+g(x) \in L^p(E,\mu)$, 而且有

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p \tag{1.34}$$

定理 1.32. 当 $p \geq 1$ 时,$L^p(E,\mu)$ 按照范数

$$||f||_p = \left(\int_E |f(t)|^p d\mu\right)^{1/p} \quad (p \geq 1) \tag{1.35}$$

称为赋范线性空间.

1.3.2 平均收敛和依测度收敛

在 $L^p(E,\mu)$ 中, 设函数列 f_n 依范数 $||\cdot||_p$ 收敛于 f, 即

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \to 0, n \to \infty \tag{1.36}$$

这种收敛在经典分析中称为 $f_n(x)$ 在 E 上 p 方平均收敛于 $f(x)$.

定理 1.33. 设 $f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 及 $f(x)$ 是 $L^p(E,B,\mu)$ 中的函数. 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上 p 方平均收敛于 $f(x)$, 那么函数列 $\{f_n(x)\}$ 必然在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

Proof. 对于任何正数 σ 有

$$\begin{aligned}\int_E |f_n(x) - f(x)|^p d\mu &\geq \int_{E(|f_n - f| \geq \sigma)} |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \\ &\geq \int_{E(|f_n - f| \geq \sigma)} \sigma^p d\mu \geq \sigma^p \mu(E(|f_n - f| \geq \sigma))\end{aligned} \tag{1.37}$$

令 $n \to \infty$, 就有 $\mu(E(|f_n - f| \geq \sigma)) \to 0$. □

推论 1.34. 根据 *Riesz* 定理可知, 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上 p 方平均收敛于 $f(x)$, 那么必有子函数列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛到 $f(x)$. 但这个反命题不一定成立.

1.3.3 L^p 空间定义

定义 1.35 (L^p **空间**). 考虑抽象测度空间 $(X,\mathcal{F},\mu)$, 令 $f(x)$ 是 X 上的 $\mathcal{F}$ 可测函数,$p \geq 1$, 记

$$||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \quad (p \geq 1) \tag{1.38}$$

称 $||f||_p$ 为 f 的 L^p 范数. 令

$$L^p(X,\mathcal{F},\mu) = \{f \in \mathfrak{M}(X,\mathcal{F},\mu) \mid ||f||_p < \infty\} \tag{1.39}$$

称 $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$ 为 E 上的 L^p 空间. 简记作 $L^p(X)$.

1.3.4 空间 $L^{\infty}(E,\mu)$

定义 1.36 ($L^{\infty}(E,\mu)$)**.** 设 E 是测度空间 (Ω,B,μ) 上的一个可测集,$f(x)$ 是 E 上的可测函数. 如果 $f(x)$ 和 E 上的一个有界函数几乎处处相等, 换句话说, 如果有 E 中 (关于 μ) 的零集 E_0, 使得 $f(x)$ 在 $E-E_0$ 上有界, 那么我们称 $f(x)$ 是 E 上的**有界本性可测函数**.E 上的有界本性可测函数全体记为 $L^{\infty}(E,\mu)$. 显然, 由于有限个零集的和集也是零集, 所以任意有限个本性有界可测函数的线性组合是本性有界的, 因此 $L^{\infty}(E,\mu)$ 按通常的线性运算是一线性空间.

定义 1.37 (**本性最大模**)**.** 设 $f(x)$ 是 E 上的有界本性可测函数, 令

$$||f||_{\infty}=\inf_{\substack{\mu(E_0)=0\\E_0\subset E}}\left(\sup_{E-E_0}|f(x)|\right) \tag{1.40}$$

这里下确界是对于 E 中所有使得 $f(x)$ 在 $E-E_0$ 上成为有界函数的零集 E_0 而取的, 称为 f 的**本性最大模**, 有时也记作

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}|f(x)| \tag{1.41}$$

度量空间 $L^{\infty}(E,\mu)$ 的收敛是**几乎一致收敛**.

1.3.5 数列 l^p 空间

定义 1.38. 记满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty(p\geq 1) \tag{1.42}$$

的实或复数列 $x=\{x_k\}$ 全体为 l^p 空间. 在 l^p 中规定

$$||x||_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.43}$$

1.4 度量空间中的点集

1.4.1 内点和开集

定义 1.39 (**内点**)**.** 设 A 是度量空间 R 中的点集,$x_0\in A$. 如果 A 中含有 x_0 的一个 $a-$ 环境 $(a>0)$, 便称 x_0 是 A 的**内点**.

定义 1.40 (**开集**)**.** 设 A 是度量空间 R 中的点集, 如果 A 中每一点都是 A 的内点, 那么称 A 是度量空间 R 中的**开集**, 规定空集也是开集.

定理 1.41. *设 R 是度量空间, 那么*

(1) 空集和全空间都是开集;

(2) 任意个开集的和 (并) 集是开集;

(3) 有限个开集的通集 (交) 是开集.

注 1.42. 对于任意个开集的通集, 对于其中的点 x, 作每个开集的 a-环境, 这些 a-环境半径的最小值可能为零. 故任意个开集的通集可能不是开集, 比如集合族 $\{A_n \quad | \ x \in (1-\frac{1}{n},\ 2+\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$.

定义 1.43 (邻域). 设 R 是度量空间,$x_0 \in R$, 称 R 中包含 x_0 的任何开集 G 为 x_0 的一个**环境**, 也称作 x_0 的**邻域**.

定义 1.44 (核 K(A)). 设 A 是度量空间的点集.A 的内点全体所成的点集称为 A 的**核**, 记作 $K(A)$.

定理 1.45. *度量空间中的点集 A 的核 $K(A)$ 是开集. 且对于点集 A 中的任何开子集 G 都有 $G \subset K(A)$, 也即核 $K(A)$ 是包含在 A 中的最大的开集.*

定理 1.46. *A 称为开集的充要条件是 $A = K(A)$. 也即 A 中所有的点都是内点.*

引理 1.47. *设 R 是度量空间,$\{x_n\}$ 是 R 中的点列, 又设 $x_0 \in R$. 那么点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 的充要条件是对于 x_0 的任何环境 $O(x_0)$, 存在自然数 N, 使得 $n \geq N$ 时,$x_n \in O(x_0)$.*

1.4.2 极限点和闭集

定义 1.48 (极限点). 设 R 是度量空间，A 是 R 中的点集, 对于 $x_0 \in R$, 如果 x_0 的每个 a-环境中都含有 A 中无限个点, 那么称 x_0 是点集 A 的**极限点**.

定义 1.49 (孤立点). 和极限点概念相对立的是孤立点. 设 A 是度量空间的点集,$x_0 \in A$. 如果 x_0 有一个环境 $O(x_0)$, 在其中除 x_0 外不含有 A 的点, 就称 x_0 是 A 的**孤立点**. 如果度量空间 R 中每一点都是孤立点, 称 R 是**离散**的度量空间. 在离散空间中, 每个单点集 $\{x_0\}$ 都是开集因而一切子集都是开集.

定义 1.50 (导集和闭包). 设 A 是度量空间 R 的点集.A 的极限点全体所成的集称作 A 的**导集**, 记作 A'. 称 $\overline{A} = A \bigcup A'$ 是 A 的**闭包**.

(1) 如果 $A' \subset A$, 就称 A 是**闭集**;

(2) 如果 $A' \bigcap A = \emptyset$, 就称 A 是**孤立点集**;

(3) 如果 $A \subset A'$, 则称 A 是**自密集** (即 A 中每一点都是极限点);

(4) 如果 $A = A'$, 称 A 是**完全集** (也即 A 就是自己的闭包).

定理 1.51. *是度量空间的点集 A 为闭集的充要条件是:A 中任何一个收敛点列必收敛于 A 中的一点 (A 的极限点包含于 A 中).*

定理 1.52. *是度量空间 R 的点集 A 为闭集的充要条件是:A 的余集 $A^c = R - A$ 是一个开集.(全空间中开集的余集是闭集)*

定理 1.53. *度量空间中下列命题成立*

(1) 空集和全空间都是闭集;

(2) 任意个闭集的通集 (交) 集是闭集;

(3) 有限个闭集的和 (并) 集是闭集.

注 1.54. 无限个闭集的合集不一定是闭集, 比如 $A_n = [1, 3 - \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}$.

定理 1.55. *闭集减开集的差集是闭集, 而开集减闭集的差集是开集.*

定理 1.56. *集 A 的导集 A' 和闭包 $\overline{A}$ 都是闭集.*

定理 1.57. *在度量空间 R 中, 如果闭集 F 还有集 A, 那么 $F \supset \overline{A}$. 由 $A \subset F$ 可推出 $A' \subset F'$, 而 F 是闭集有 $F' \subset F$, 得证.*

定理 1.58. *A 称为闭集的充要条件是 $A = \overline{A}$.*

定义 1.59 (线性闭子空间). 设 A 是赋范线性空间 R 的子集, 记 $L(A)$(或 $\mathrm{span}\{A\}$) 为 A 中向量的线性组合全体所成的线性子空间, 称 $\overline{L(A)}$(或 $\overline{\mathrm{span}\{A\}}$) 是由 A 张成的**线性闭子空间**.

例 1.59.1. *设 R 是赋范线性空间,A 是 R 中的凸集, 那么 A 的闭包 $\overline{A}$ 也是凸集.*

定义 1.60 (境界点和外点). 设 A 是度量空间 R 中的点集, 称 $\overline{A} \bigcap \overline{(R - A)}$ 是 A 的**境界**, 记作 $\Gamma(A)$.A 的境界中的点称为 A 的**境界点**, 而 $\overline{R - A}$ 称为 A 的**外点**.

注 1.61. 好像在实变函数的某些教材里, 境界点也叫边界点. 比如设 $A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, 若 $\forall \varepsilon > 0, s.t. B_\varepsilon(x_0) \bigcap A \neq \emptyset, B_\varepsilon(x_0) \bigcap A^c \neq \emptyset$, 则称 x_0 为 A 的边界点。记 A 的所有边界点构成的集合为 ∂A.

1.4.3 点集间的距离

定义 1.62. 设 E 和 F 是度量空间 R 中的非空点集. 称

$$\inf_{x \in E, y \in F} \rho(x, y) \tag{1.44}$$

是 E 和 F 之间的距离, 记作 $\rho(E, F)$. 特别当 E 中只有一点 x_0 时, 称 $\{x_0\}$ 与 F 的距离是点 x_0 与 F 间的距离, 记为

$$\rho(x_0, F) = \inf_{y \in F} \rho(x_0, y) \tag{1.45}$$

例 1.62.1. *设 R 是 $C[a, b], F$ 是阶数不超过 n 的多项式 $P_n(t)$ 全体,$x(t) \in C[a, b]$, 那么*

$$\inf_{P_n(t) \in F} \rho(x, P_n) = \inf_{P_n(t) \in F} \max_{a \le t \le b} |x(t) - P_n(t)| \tag{1.46}$$

上式就是用 n 阶多项式一致逼近 $x(t)$ 的最佳值.

1.4.4 n 维欧几里德空间中的 Borel 集

我们用 R_0 表示 E^n 中形如

$$C(\{a_i\},\{b_i\}) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i < x_i \le b_i, i1, 2, \cdots, n\} \tag{1.47}$$

(其中 $-\infty < a_i \le b_i < +\infty$) 的半开半闭室全体所张成的环.

定义 1.63 (Borel 集). 称由 R_0 张成的 E^n 中最小的 σ-环 $(S(R_0))$ 中的集是 E^n 中的 Borel 集, 这种集的全体记作 B.

定理 1.64. *E^n 中的开集, 闭集都是 Borel 集, 而且 E^n 中开集全体 (或者闭集全体) 所张成的 σ-环就是 B.*

上述的 Borel 集的定义用到了环, 有点绕, 下面给出更加朴实的定义.

定义 1.65 (σ 代数). 令 $\mathcal{F}$ 是由集合 X 中一些子集所构成的集合组. 如果满足:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$，则 $A^c \in \mathcal{F}$

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 具体来讲是集合列中有限个或者可数个子集的并集依然在集合中.

那么称 $\mathcal{F}$ 是 X 的一个 σ 代数.σ 代数总是存在的，2^X 是最大的一个 σ 代数，$\{\emptyset, X\}$ 是最小的一个 σ 代数. 这两个 σ 代数称为平凡 σ 代数. 由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 故有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c \in \mathcal{F}$. 需要注意的是，集合的指数 n 不一定从 1 开始，$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$，$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$，那么显然有集合列的上极限和下极限也必属于 σ 代数, 即 $\underline{\lim}\, A_n \in \mathcal{F}, \overline{\lim}\, A_n \in \mathcal{F}$.$\mathcal{F}$ 对于有限并运算封闭. 那么意味着对有限的交运算也封闭咯?

定义 1.66 ($\mathcal{F}(\Sigma)$ 代数). 设 Σ 是由集合 X 中的一些子集构成的集合族, 考虑包含 Σ 的 σ 代数 $\mathcal{F}$ （即若 $A \in \Sigma$，则 $A \in \mathcal{F}$）. 记包含 Σ 的最小的 σ 代数为 $\mathcal{F}(\Sigma)$，称 $\mathcal{F}(\Sigma)$ 是由 Σ 生成的 σ 代数.

定义 1.67 (Borel 集). 由 $\mathbb{R}^n$ 中一切开集构成的开集族所生成的 σ 代数称为 $\mathbb{R}^n$ 的 Borelσ 代数，记作 $\mathcal{B}^n$.$\mathcal{B}^n$ 中的元素称为 Borel 集.

注 1.68. 由于开集的余集也在 Borel 集中，故闭集也是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集. 可数个闭集的并（F_σ）也是 Borel 集，显然 G_δ 也是 Borel 集. 任何一个 Borel 集的余集是 Borel 集.Borel 集合族的可列并、可列交、上极限与下极限构成的集合是 Borel 集.

1.5 连续映照

1.5.1 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数

我们回顾下 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数

定义 1.69 ($\mathbb{R}^n$ **上连续函数定义**)**.** 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数,$a \in \mathbb{R}^n$. 若对于任意 ε, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(a)$, 有 $f(x) - f(a) < \varepsilon$, 则称 f 在 a 连续,a 是函数 f 的连续点. 若 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上每点连续, 则称 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

注 1.70. 函数 f 在点 a 处连续的充要条件为：对于 $\mathbb{R}^n$ 中任何收敛于点 a 的点列 x_k, 有 $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

定理 1.71 ($\mathbb{R}^n$ **上实值函数连续性等价判定**)**.** *设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 则以下条件相互等价：*

(1) f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续;

(2) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x|f(x) < \lambda\}$ 与 $\{x|f(x) > \lambda\}$ 是开集;

(3) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x|f(x) \le \lambda\}$ 与 $\{x|f(x) \ge \lambda\}$ 是闭集;

Proof. 显然有 (2)$\Leftrightarrow$(3)(开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集). 只需要证 (1)$\Leftrightarrow$(2). 证明示意图见图 (1.1)

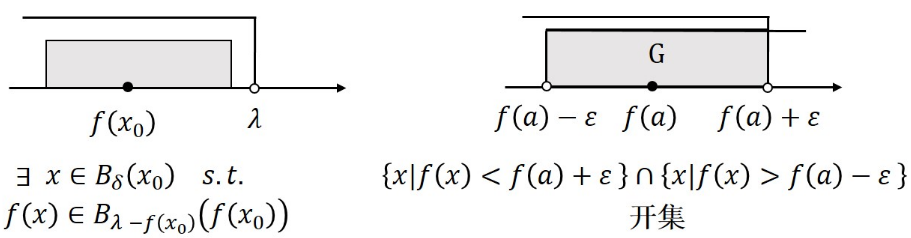

Figure 1.1: 连续函数等价判定证明示意图

必要性: 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续,$\lambda \in \mathbb{R}$. 任给 $x_0 \in \mathbb{R}^n, f(x_0) < \lambda$, 由连续性定义可知,$\exists\delta > 0, s.t. x \in B_\delta(x_0)$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \lambda - f(x_0)$, 即 $f(x) < \lambda$. 故 $\{x|f(x) < \lambda\}$ 的每一点都是内点 (内点定义), 从而它是开集. 同理 $\{x|f(x)\ \lambda\}$ 也是开集. 必要性得证.

充分性：设 $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x|f(x) < \lambda\}$ 与 $\{x|f(x) > \lambda\}$ 是开集. 任取 $a \in \mathbb{R}^n$, 现证 $f(x)$ 在 a 点处连续. 令 $f(a) = \beta.\forall\varepsilon > 0$, 因 $\{x|f(x) < \beta + \varepsilon\}\bigcap\{x|f(x) > \beta - \varepsilon\} = G$ 是开集, 显然 $a \in G$, 故有 $\delta > 0, s.t. B_\delta(a) \subset G$. 这说明当 $y \in B_\delta(a)$ 时有 $\beta - \varepsilon < f(y) < \varepsilon$, 即 $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$. 根据定义,$f$ 在 a 点连续. $\square$

定义 1.72 (E **上连续函数**)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n, f : E \to \mathbb{R}, a \in E$. 若 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $x \in E\bigcap B_\delta(a)$, 有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, 就称 f 在 a 点处连续,a 是 f 的连续点. 如果 f 在 E

上处处连续, 就称 f 在 E 上连续. 全体 E 上处处连续, 就称 f 在 E 上连续. 全体 E 上的连续函数记为 $C(E)$.

定理 1.73 (柯西收敛原理). *序列 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 收敛的充分必要条件是*

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x_k - x_l\| = 0 \tag{1.48}$$

设 $A \subset \mathbb{R}^n$,$\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集族, 若 $A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B$, 则称 $\mathcal{F}$ 是集 A 的一个覆盖; 当 $\mathcal{F}$ 是开集族时, 称 $\mathcal{F}$ 为集 A 的开覆盖; 当 $\mathcal{F}$ 是有限族时, 称 $\mathcal{F}$ 是集 A 的有限覆盖. 若 $\mathcal{F}'$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 中的子集族,$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'$, 当 $\mathcal{F}'$ 是集 A 的覆盖时, 称 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 的子覆盖.

定理 1.74 (有限覆盖定理). *若 $\mathcal{F}$ 是有界闭集 F 的开覆盖，则可以从 F 中取出有限子覆盖。*

定理 1.75 (闭区间套定理). *设 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集, 满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots F_k \supset$, 则 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.*

注 1.76. 闭区间套定理的证明用到了反证法. 若集合列交集为空, 则集合列余集的并就是 $\mathbb{R}^n$ 了，因为 $\mathbb{R}^n \supset F_1$，故集合列余集的并包含了 F_1, 然后根据有限覆盖定理可以推出矛盾.

定理 1.77 (Bolzano-Weierstrass). *$\mathbb{R}$ 中任意有界点集 A 至少有一个聚点，即 $A' \neq$. 等价表示为:$\mathbb{R}^n$ 中任意有界无限点集必有收敛子列.*

定义 1.78 (紧集). 设 $\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的任意一个开覆盖均包含有限子覆盖.

定理 1.79. *设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E 的任一个覆盖都包含子覆盖, 则 E 是有界闭集.*

1.5.2 度量空间上的连续映照和开映照

仿照 $\mathbb{R}^n$ 上的函数的连续, 我们也可以把这个概念推广到一般的度量空间中

定义 1.80. 设 R 和 K 是度量空间,f 是 $A \subset R$ 到 K 中的映照. 设 $x_0 \to A$. 假如对于 $f_(x_0)$ 的任何环境 $O(f(x_0))(\subset K)$, 必有 x_0 在 R 中的一个环境 $O(x_0)$, 使得 $f(O(x_0)\bigcap A) \subset O(f(x_0))$, 也就是说当 $x \in O(x_0)\bigcap A$ 时,$f(x) \in O(f(x_0))$, 就称映照 f 在点 x_0 连续.

假如映照 f 在 A 的每一点都连续, 就称 f 是 A 上的连续映照. 特别地, 当空间 K 是实数直线 E^1 或复平面时, 称 $f(x)$ 为连续函数.

定理 1.81 (度量空间上的连续映照等价判定). *设 f 是度量空间 R 的子集 A 到度量空间 K 中的映照, 那么下面三个条件等价:*

(1) 映照 $f(x)$ 在点 x_0 是连续的.

(2) 对于 $f(x_0)$ 的任一 ε-环境 $O(f(x_0),\varepsilon)$ 必有 x_0 在 R 中的 δ-环境使得 $f(O(x_0,\delta)\bigcap A) \subset O(f(x_0),\varepsilon)$.

(3) 对于 A 中任意收敛于 x_0 的 $\{x_n\}$, 成立着

$$\lim_{n\to\infty} = f(x_0) \tag{1.49}$$

也即对于连续函数极限和函数运算可以交换顺序.

定理 1.82. 设 R,K 是度量空间, 映照 $f: R \to K$. 那么映照 f 在 R 上连续的充要条件是: 像空间 K 中的任一开集 H 的原像 $G = \{x \mid f(x) \in H\}$(记为 $f^{-1}(H)$) 是 R 中的开集, 这个条件和*1.71*类似.

定义 1.83 (拓扑同构). 设 f 是度量空间 R 的子集 A 到度量空间 K 的子集 B 上的一一对应, 并且 f 以及它的逆映照 f^{-1} 都是连续的, 那么称 f 是 A 到 B 上的拓扑映照. 这时称 A 和 B 是**拓扑同构**或**同胚**.

注 1.84. 假如两个空间 R 和 K 是拓扑同构, 根据 f, f^{-1} 都连续, 不仅仅 R,K 之间点可以一一对应, 而且 R,K 中的开集全体之间也一一对应, 即 R,K 中所有领域也是一一对应的. 当我们只讨论连续性时, 由于连续性的概念只依赖于领域的概念. 因此只讨论仅与连续性有关的问题时, 我们可以把两个拓扑同构的空间看成是一个.

1.5.3 连续曲线

定义 1.85. 设 $y = f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 到度量空间 R 的一个连续映照, 那么称 $y = f(x)$ 为 R 中的连续曲线, 也称点集 $f([a, b])$ 是 R 中的连续曲线.

定理 1.86. 设 B 是度量空间 R 中的联络点集,f 是 B 上的连续映照, 那么 B 的像 $f(B)$ 也是联络点集. 连续曲线是联络点集, 且对于度量空间 R 的任意两点 x, y, 必有连续曲线通过它们, 则 R 必然是联络的.

1.6 稠密性

1.6.1 稠密性的概念

定义 1.87. 设 R 是度量空间,A 及 E 是 R 中的点集. 如果 E 中任何一点 x 的任何环境中都含有集 A 中的点, 就称 A 在 E 中稠密.

注 1.88. 举个例子, 闭区间 $[a, b]$ 有理数对于无理数来说是稠密的, 无理数对于有理数来说也是稠密的. 就好比是装满沙子的瓶子灌满水, 每一粒沙子周围都有水分子, 因此水在沙子中稠密, 再打个比方, 中国人以后占领了世界, 到处可见国人, 那么我们可以说华人对地球上其他人种是稠密的...

定理 1.89. 稠密的等价充要条件

(1) A 在 E 中稠密的充要条件是 $\overline{A} \supset E$

(2) A 在 E 中稠密的充要条件是对任一 $x \in E$, 有 A 中的点列 $\{x_n\}, x_n \to x(n \to \infty)$.

注 1.90. 稠密性的用处在于, 当我们要考察点集 E 是否具有某些性质时, 可以先对其中的稠密子集加以考察, 然后利用极限过程推导出整个 E 上相应的结论.

定理 1.91. *设 R 是度量空间,A,B,C 是 R 中的点集. 如果 B 在 A 中稠密,C 在 B 中稠密, 那么 C 在 A 中稠密.(利用 $\overline{C} \supset \overline{B} \supset \overline{A} \supset A$)*

在数学学分析已经证明了 Weierstrass 的逼近定理, 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 可以用多项式 $P_n(x)$ 一致逼近. 记 P 为多项式全体所成的线性空间, 我们把它堪称度量空间 $C[a,b]$ 的子集, 那么上述 Weierstrass 定理可以用度量空间的稠密性改述如下

定理 1.92. *P 在 $C[a,b]$ 中是稠密的.*

定理 1.93. *设 E 是 μ 可测集,$L^p(E,\mu)$ 中的有界可测函数全体 $B(E)$ 是 $L^p(E,\mu)(\infty > p \geq 1)$ 的稠密子集.*

Proof. 设 $f(x) \in L^p(E,\mu)$, 对每个自然数 n, 造函数

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq n \\ 0, & |f(x)| > n. \end{cases} \tag{1.50}$$

那么 $f_n(x)$ 是 $L^p(E,\mu)$ 中的有界可测函数, 而且

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p d\mu = \int_{E(|f|>n)} |f(x)|^p d\mu \tag{1.51}$$

由于 $|f|^p \in L(E,\mu)$, 由积分的绝对连续性可知, 对任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $e \subset E, \mu(e) < \delta$ 时有

$$\int_e |f|^p d\mu < \varepsilon^p \tag{1.52}$$

而又

$$n^p \mu(E(|f| > n)) \leq \int_{E(|f|>n)} |f(x)|^p d\mu \leq \int_E |f|^p d\mu < \infty \tag{1.53}$$

当 $n \to \infty$ 时,$n^p \to \infty$, 故 $\mu(E(|f| > n)) \to 0$. 所以有正数 N, 使得当 $n \geq N$ 时, 有 $\mu(E(|f| > n)) < \delta$, 根据积分绝对连续性有

$$||f_n - f||_p = \left(\int_{E(|f|>n)} |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{1.54}$$

所以 E 上的有界可测函数全体 $B(E)$ 在 $L^p(E,\mu)$ 上是稠密的. □

注 1.94. 上述定理的证明需要用到积分的绝对连续性. 在这里我们重复下这方面的知识.

定理 1.95 (积分的绝对连续性!). 设 $f(x) \in L(E)$, 则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得 E 中子集 A, 只要 $m(A) < \delta$ 时, 就有

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E |f(x)|dx < \varepsilon \tag{1.55}$$

Proof. 因为 $f(x) \in L(E)$, 故 $|f(x)| \in L(E)$. 对于任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在简单函数 $\varphi(x)$, 满足 $\forall x \in E$, 有

$$0 \leq \varphi(x) \leq |f(x)| \tag{1.56}$$

使得

$$\int_E (|f(x)| - \varphi(x))dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.57}$$

对于一个给定的简单函数, 根据其定义必有界, 不妨设 $0 \leq \varphi(x) \leq M$, 取 $\delta = \varepsilon/2M$, 则当 $A \subset E$, $m(A) < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned} \int_A |f(x)|dx &= \int_A (|f(x)| - \varphi(x))dx + \int_A \varphi(x)dx \\ &\leq \int_E (|f(x)| - \varphi(x))dx + \int_A \varphi(x)dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot m(A) \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{1.58}$$

本质上利用了非负可积函数积分可以用简单函数列积分无限逼近, 而有界简单函数在任意小的区间内积分随着区间的无限减小而趋近于零. □

定理 1.96 (可积函数与连续函数的关系). 假设 $f \in L(E)$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $\varphi(x)$ 使得

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon \tag{1.59}$$

Proof. 如下图 □

上述定理结论表明, 若 $f \in L(E)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 f 的分解:

$$f(x) = g(x) + [f(x) - g(x)] = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in E \tag{1.60}$$

其中 $f_1(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数,$|f_2(x)|$ 在 E 上的积分小于 ε.

推论 1.97. 设 $f \in L(E)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} \int_E |f(x) - g_k(x)|\, dx = 0 \tag{1.61}$$

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = f(x), \quad a.e.[E] \tag{1.62}$$

定理 1.98. 对于直线上任意 *Lebesgue* 可测集 E, 当 $1 \leq p < \infty$ 时,$L^p(E)$ 中的有界连续函数全体在 $L^p(E)$ 中是稠密的.

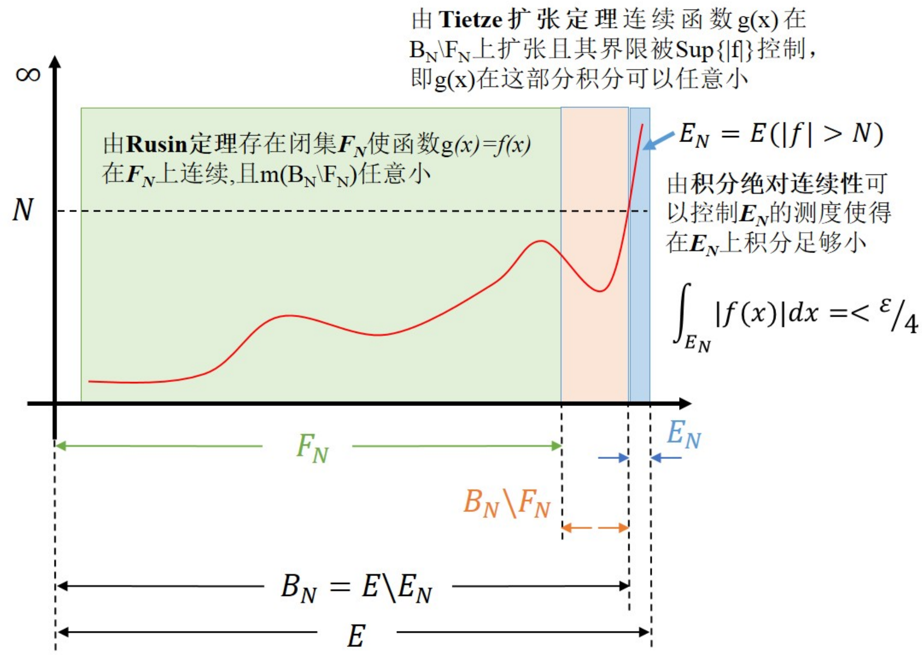

Figure 1.2: 可积函数与连续函数的关系

定理 1.99. 设 $[a,b]$ 是有限区间,$p \geq 1$, 那么 P 和 $[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

注 1.100. 其实有界连续函数全体在有界可测函数全体中是稠密的. 证明参考 (1.96), 关键利用到了 Rusin 定理.

既然说到了 Rusin 定理, 我们也就在这里温习下把可测函数与连续函数有着密切的关系. 这种关系揭示了可测函数的构造, 成为研究可测函数的有效手段.

定理 1.101 (**鲁金定理 Rusin**). 设 $f(x)$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数, 则对任意给定的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 F, 满足 $m(E \backslash F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数.

定理 1.102 (**Tietze 扩张定理**). 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空闭集, 函数 $f(x)$ 是 F 上的连续函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$, 使得 $g|_F = f$, 且

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)| \tag{1.63}$$

推论 1.103. 设 $f(x)$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 $f(x)$.

推论 1.104. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数. 则 $f(x)$ 可测的充分必要条件是, 存在 E 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$, 使得 $\{g_k\}$ 几乎处处收敛到 f.

Proof. 必要性性由上述推论直接得出, 下面证明充分性. 假设 f_k 在 E 上连续, 则有 $f_k \in \mathfrak{M}(E)$, 而又 $f_k \xrightarrow{a.e.} f$, 故有 $f \in \mathfrak{M}(E)$(可测集上几乎处处收敛的函数列的极限函数可测). □

具体的推导见实变函数的 Notes, 这儿就不放了.

1.6.2 可析 (可分) 点集

定义 1.105 (可析点集). 设 R 是度量空间,A 是 R 中的子集. 如果存在有限集或可列集 $\{x_k\} \subset R$ 在 A 中稠密, 就称 A 是**可析点集** (也就是存在 R 中的可数子集在 A 中稠密).

定义 1.106 (可析空间). 设 R 是度量空间, 当 R 是可析集时, 称 R 是**可析空间**.

例 1.106.1. *n 维欧几里德空间 E^n 按通常的距离是可析空间, 因为坐标为有理数的点全体是可列集, 并且在 E^n 中稠密.*

1.7 完备性

1.7.1 完备性的概念

定义 1.107 (基本 (Cauchy) 点列). 设 (R, ρ) 是度量空间,$\{x_n\}$ 是 R 中的点列. 如果对于任一正数 ε, 存在正数 $N(\varepsilon)$, 使得当自然数 $n, m \geq N(\varepsilon)$ 时

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

就称 $\{x_n\}$ 是 R 中的**基本点列**.

引理 1.108. *(1) 度量空间 R 中收敛点列必是基本点列. (2) 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 R 中基本点列, 如果 $\{x_n\}$ 有子点列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 R 中的点 x, 那么 $\{x_n\}$ 也收敛于 x.*

注 1.109. 上述引理的用处在于, 证明度量空间中的点列收敛时, 可以先证明其为基本点列, 然后再证明其中一个子列收敛即可. 在实数复数空间中, 基本点列必然收敛, 但是对于一般的度量空间, 基本点列却未必收敛. 例如 R_0 表示有理数全体, 距离由

$$\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|, r_1, r_2 \in R_0$$

来规定. 显然 (R, ρ) 是度量空间, 而有理数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} (n \in \mathbb{N})$ 就是 R_0 中基本点列, 但是它在 R_0 却不收敛, 其收敛于超约数 e. 其中欠缺的完备性.

定义 1.110. 如果度量空间 R 中每个基本点列都收敛, 称 R 是**完备 (度量) 空间**. 完备赋范线性空间又称为 Banach(**巴拿赫**)**空间**. 如果 R 是度量空间, 而 A 作为 R 的度量子空间是完备的, 则称 A 为 R 的**完备子空间**.

注 1.111. 一个不完备的度量空间可以有完备的子空间. 任何度量空间的完备子空间必是闭子集.

例 1.111.1. *n 维欧几里德空间 E^n 是完备的.*

1.7.2 某些完备的子空间

例 1.111.2. 按照如下定义距离的 $C[a,b]$ 是一个 *Banach* 空间.

$$||f|| = \sup_{a\le x\le b} |f(x)| \tag{1.64}$$

例 1.111.3 (反例). 按照如下定义距离的 $C[a,b]$ 不是一个 *Banach* 空间.

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt \tag{1.65}$$

一个很简单的例子就是

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & c+\frac{1}{n} \le x \le b, \\ \text{线性}, & c-\frac{1}{n} \le x \le c+\frac{1}{n}, \\ -1, & a \le x \le c-\frac{1}{n}. \end{cases} \tag{1.66}$$

其极限函数是阶跃函数, 不属于连续函数.

定理 1.112. 空间 $L^p(E,\mu)(p\ge 1)$ 是完备的, 也即是 *Banach* 空间.

注 1.113. $L^p(E,\mu)(p\ge 1)$ 的对象是可测集 E 上的可测函数 f, 范数为 $||f||_p$, 也即柯西可测集列的极限也是可测集.

引理 1.114. 空间 $l^p(p\ge 1)$ 是完备的, 也即是 *Banach* 空间.

1.7.3 完备空间的重要性质

引理 1.115 (闭球套定理). 设 R 是完备的度量空间, 又设 $S_v = \{x \mid \rho(x,x_v)\le \varepsilon_v\}$ 是 R 中的一闭球套:

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots \tag{1.67}$$

如果球的半径 $\varepsilon_n \to 0$, 则必有唯一点 $x \in \bigcap_{v=1}^{\infty} S_v$.

Proof. 显然球心所组成的点列 $\{x_v\}$ 为基本点列. 因为当 $\mu \ge v$ 时, 由于 $\mu \in S_\mu \subset S_v$ 得到

$$\rho(x_\mu, x_v) \le \varepsilon_v$$

对任一个正数 ε, 存在 N, 使得当 $v > N$ 时有

$$\rho(x_\mu, x_v) \le \varepsilon$$

故 $\{x_v\}$ 为基本点列. 由于**空间 $\mathbf{R}$ 是完备的**, 点列 $\{x_v\}$ 收敛于 R 中的一点 x. 零 $\mu\to\infty$ 有

$$\rho(x, x_v) \le \varepsilon_v$$

即 $x \in S_v(v\in\mathbb{N})$, 因此 $x \in \bigcap_{v=1}^{\infty} S_v$。

由距离满足正定和三角不等式, 可得出点 x 是唯一的. □

注 1.116. 闭球套定理是与度量空间的完备性等价的.

定理 1.117. 设 R 是完备的度量空间, 如果在 R 上的闭球套定理成立, 那么 R 必是完备的.

Proof. 其实由闭球套定理可以直接构造出一个收敛点列, 还有闭球套列. 由基本列 $\{x_n\}$ 的假设, 可以知道 $n,m > n_k$ 时, 有 $\rho(x_n,x_m) < \frac{1}{2^{k+1}}$. 然后作闭球套 $S(x_{n_k},\frac{1}{2^k})(k\in\mathbb{N})$, 当 $y \in S(x_{n_{k+1}},\frac{1}{2^{k+1}})$ 有

$$\rho(x_{n_k},y) \le \rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}},y) < \frac{1}{2^k} \tag{1.68}$$

因此闭球套构造完成, 闭球套满足 $S(x_{n_{k+1}},\frac{1}{2^{k+1}}) \subset S(x_{n_k},\frac{1}{2^k})$, 且球半径 $\frac{1}{2^k} \to 0$. 根据闭球套定理可知存在唯一点 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S(x_{n_k},\frac{1}{2^k})$, 且 $\rho(x,x_{n_k}) \to 0$, 而 x_n 为基本列 $\rho(x,x_n) \to 0$, 得证. □

定义 1.118 (疏朗集). 设 (X,d) 是距离空间,$E \subset X$. 如果 E 不在 X 的任何开集中稠密, 则称 E 是**疏朗集**.

注 1.119. 疏朗集 E 中没有内点. 假设 $x \in E$, 如果 x 是内点, 则存在 $S(x,r) \in E$, 则 E 在 $S(x,r)$ 中稠密.

注 1.120. Cantor 集是疏朗集, 没有内点.

定义 1.121 (第一和第二类纲集). 若集合 E 可以表示成为可数多个疏朗集的并, 即

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \tag{1.69}$$

其中 E_n 是疏朗集, 则称 E 是**第一纲集**, 不是第一纲集的集合称为**第二纲集**.

定理 1.122 (Baire 纲定理). 完备的距离空间是第二纲集.

1.7.4 度量空间的完备化

定义 1.123 (完备化空间). 设 R 是度量空间, 如果有完备的度量空间 R_1, 使 R 保距同构于 R_1 的稠密子空间, 则称 R_1 是 R 的**完备化空间**.

定理 1.124. 对于任一度量空间必存在完备化空间.

定理 1.125. 设 $\widetilde{R}, R'$ 是度量空间 R 的两个完备化空间, 那么必有 $\widetilde{R}$ 到 R' 的等距同构映照 φ, 使得对一切 $x \in R, \varphi(x) = x$, 因此, 度量空间的完备化空间在等距同构的意义下是唯一的.

定义 1.126 (同构). 在抽象代数中, 同构（英语：isomorphism）指的是一个保持结构的双射. 在更一般的范畴论语言中, 同构指的是一个态射, 且存在另一个态射, 使得两者的复合是一个恒等态射. 正式的表述是：同构是在数学对象之间定义的一类映射, 它能揭示出在这些对象的属性或者操作之间存在的关系. 若两个数学结构之间存在同构映射, 那么这两个结构叫做是同构的.

定义 1.127 (等距同构). 这里既然提到了等距同构, 那就多给一点信息. 在数学中**等距同构** (又叫**保距映射**) 是指在度量空间之间保持距离关系的同构. 等距同构经常用于将一个空间嵌入到另一空间的构造中. 例如, 测度空间 M 的完备化即涉及从 M 到 M' 的等距同构, 这里 M 是 M' 上柯西序列所构成的空间关于“距离为零”的等价关系的商集. 这样, 原空间 M 就等距同构到完备的度量空间的一个稠密子空间并且通常用这一空间来指代原空间 M. 其它的嵌入构造表明每一度量空间都等距同构到某一賦範向量空間的一个闭子集以及每一完备度量空间都等距同构到某一巴拿赫空间的一个闭子集. 一个希尔伯特空间上的等距、满射的线性算子被称为酉算子.

下面给出更加严格的定义: 设 X, Y 是两个度量空间, 其中的距离分别是 d_X, d_Y. 一个映射 $f : X \to Y$ 被称为**保距映射**, 如果对任意的 $a, b \in X$ 都有

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b) \tag{1.70}$$

保距映射一定是单射. 任意两个度量空间之间的等距同构都必然是一个拓扑嵌入. 等距同构是一一对应的保距映射, 有时也被称为全局等距同构. 还有一种定义是路径等距同构, 指保持所有曲线长度的映射 (不一定是一一对应的). 如果两个度量空间之间存在一个等距同构, 就称它们两个为等距同构的. 所有从一个度量空间到另一个的等距同构关于映射的复合运算组成一个群, 称为等距同构群. 所有度量空间到自身的恒等映射都是等距同构. 在欧几里得空间中，平移变换、旋转变换、反射变换以及它们的复合都是等距同构. 内积空间 C^n 上的线性等距同构是所有的酉变换.

1.8 不动点理论

1.8.1 压缩映射定义

定义 1.128 (压缩映射). 设 R 是度量空间,A 是 R 到它自身的一个映射. 如果存在数 $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$ 使得对一切 $x, y \in R$ 成立着

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y) \tag{1.71}$$

那么就称 A 是 R 上的一个**压缩映射**, 对于线性空间, 往往又称之为**压缩算子**.

定义 1.129 (不动点). 设 R 是一集合,A 是 R 到它自身的一个映射. 如果存在 $x^* \in R$, 使得 $Ax^* = x^*$, 那么称 x^* 为映照 A 的一个**不动点**.

定理 1.130 (Banach). *在完备的度量空间的压缩映射必然有唯一的不动点.*

Proof. 设 R 是完备的度量空间,A 是 R 到它自身的一个压缩映射. 证明分两步, 先证明存在不动点, 然后再证明其唯一性.

不动点的存在性:

在 R 中任取一点 x_0, 从 x_0 开始, 作一迭代程序: 令

$$x_1 = Ax_0,\ x_{n+1} = Ax_n,\ n \in \mathbb{N}$$

由上述迭代可知 $x_n = A^n x_0$. 这样得到了 R 中的点列 $\{x_n\}$. 只要证明了 $\{x_n\}$ 是 R 中的基本点列, 利用它在 R 中的**完备性**, 知道 R 中存在唯一的极限 $x^* : x_n \to x^*$. 因为**压缩映射的连续性**, 有 $Ax_n \to Ax^*$, 但是 $Ax_n = x_{n+1} \to x^*$, 又因为收敛点列 Ax_n 的极限是唯一的, 必然有 $Ax^* = x^*$, 那么 x^* 就是 A 的不动点了. 简单点说就是

$$x_n \to Ax^*,\ x_n \to x^*$$

由完备空间极限的存在性和唯一性可知 $Ax^* = x^*$

证明 $\{x_n\}$ 为基本点列:

由于 A 是压缩映射, 我们有

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \le \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \quad (n \ge 1) \tag{1.72}$$

利用递归可得

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \le \alpha^n \rho(x_1, x_0) \quad (n \ge 1) \tag{1.73}$$

故 $\forall p \in \mathbb{N}$, 由三角不等式和1.73可得

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &\le \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \\ &\le (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \cdots + \alpha^n)\rho(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \\ &< \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{1.74}$$

由于 $\alpha < 1$, 可知 $\{x_n\}$ 为 R 中的基本点列.

证明不动点的唯一性:

设 x' 也是不动点, 则必有

$$\rho(x^*, x') = \rho(Ax^*, Ax') \le \alpha\rho(x^*, x') \tag{1.75}$$

由于 $\alpha < 1$, 必有 $\rho(x^*, x') = 0$, 因此有 $x^* = x'$. □

注 1.131. 空间 R 的完备性保证了不动点的存在性和唯一性, 其实压缩映射也同样保证了不动点的唯一性.

例 1.131.1 (**逐次逼近法**)**.** *不动点定理证明过程提供了求不动点的方法: 迭代法. 就是说在完备的度量空间中, 从任取的初值 x_0 出发, 逐次作点列 $x_n = A^n x_0, n \in \mathbb{N}$, 它必然收敛到方程 $Ax = x$ 的解. 这种方法称为***逐次逼近法***. 在 (1.74) 中令 $p \to \infty$ 有*

$$\rho(x^*, x_n) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.76}$$

上式不仅告诉我们近似解 x_n 和准确解 x^* 的逼近程度, 而且告诉我们方程 $Ax=x$ 的解的可能坐落范围, 例如当 $n=0$

$$\rho(x^*,x_0)\le\frac{1}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0) \tag{1.77}$$

例 1.131.2 (**隐函数存在定理**). *设函数 $f(x,y)$ 在条形闭区域*

$$a\le x\le b,\quad -\infty<y<+\infty$$

上处处连续, 关于 y 的偏导数 $f_y'(x,y)$, 有常数 $m<M$ 使得在上述条形区域中

$$0<m\le f_y'\le M$$

那么方程 $f(x,y)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必有唯一的连续解 $y=\varphi(x)$.

1.8.2 压缩映射的应用

例 1.131.3 (**微分方程**). *考虑如下微分方程*

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(x,t)\\ x\mid_{t=0}=x_0.\end{cases} \tag{1.78}$$

其中 $f(x,t)$ 在平面上连续, 且对于变量 x 满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x_1,t)-f(x_2,t)|\le K|x_1-x_2| \tag{1.79}$$

则方程 (1.78) 在 $t=0$ 的某个邻域内有唯一解.

Proof. 方程 (1.78) 两边积分, 可以转化为积分方程

$$x(t)=x(0)+\int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau. \tag{1.80}$$

再令 $Ax=x_0+\int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau$. 下面证明 A 是一个从 $x(t)$ 到 Ax 的压缩映射,Ax 具有不动点.

第一步: 确立距离空间, 建立映射

取 $\delta>0$, 使得 $\delta K<1$. 在空间 $C[-\delta,\delta]$ 上考虑如下映射 (积分算子)

$$Ax=x_0+\int_0^t f(x(\tau),\tau)d\tau \tag{1.81}$$

则 A 是一个从空间 $C[-\delta,\delta]$ 到 $C[-\delta,\delta]$ 自身的映射.

第二步: 验证映射满足不动点理论

$$\begin{aligned}\rho(Ax,Ay)=&\max_{-\delta\le t\le\delta}\left|\int_0^t\left[f(x(\tau),\tau)-f(y(\tau),\tau)\right]d\tau\right|\\ &\le K\cdot\max_{-\delta\le t\le\delta}\int_0^t|x(\tau)-y(\tau)|d\tau\quad\text{(Lipschitz 条件)}\\ &\le K\delta\max_{-\delta\le t\le\delta}|x(t)-y(t)|\\ &=K\delta\cdot\rho(x,y).\end{aligned} \tag{1.82}$$

由于 $K\delta \in (0,1)$, 且 $C[-\delta,\delta]$ 是完备的. 由压缩映射定理, 方程 (1.78) 在 $[-\delta,\delta]$ 有唯一解. □

定理 1.132 (Volterra 积分方程). 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,$K(x,y)$ 是三角形 $\{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [a,x]\}$ 上的连续函数, 而且设 $|K(x,y)| \le M$, 那么对于任何常数 λ, 方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy \tag{1.83}$$

在 $[a,b]$ 上有唯一的连续函数解 $\phi(x)$.

Proof. 考察 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 上的映射:$\varphi \mapsto B\varphi$.

$$B\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy \tag{1.84}$$

对 $C[a,b]$ 中任意两个函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, 当 $x \in [a,b]$ 时有

$$\begin{aligned} |B\varphi_1(x) - B\varphi_2(x)| &= \left|\lambda \int_a^x K(x,y)(\varphi_1(y) - \varphi_2(y))\right| \\ &\le |\lambda| M(x-a)||\varphi_1 - \varphi_2|| \end{aligned} \tag{1.85}$$

其中

$$||\varphi_1 - \varphi_2|| = \max_{x\in[a,b]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \tag{1.86}$$

现在用归纳法证明: 当 $x \in [a,b]$ 时,

$$|B^n\varphi_1(x) - B^n\varphi_2(x)| \le |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!}||\varphi_1 - \varphi_2|| \tag{1.87}$$

对于 $n=1$ 已经证明了, 假设 (1.87) 对于 n 成立, 现在来推出对于 $n+1$,(1.87) 也成立. 事实上, 利用 (1.87) 可得

$$\begin{aligned} |B^{n+1}\varphi_1(x) - B^{n+1}\varphi_2(x)| &= \left|\lambda \int_a^x K(x,y)(B^n\varphi_1(y) - B^n\varphi_2(y))\right| \\ &\le \frac{|\lambda|^n M^{n+1}}{n!}\left|\lambda \int_a^x (y-a)^n \cdot dy\right| \cdot ||\varphi_1 - \varphi_2|| \\ &= \frac{|\lambda|^{n+1} M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot ||\varphi_1 - \varphi_2|| \end{aligned} \tag{1.88}$$

故 (1.87) 得证. 取充分大的自然数 n 使得

$$\alpha = |\lambda|^n M^n (b-a)^n / n! < 1 \tag{1.89}$$

那么

$$||B^n\varphi_1(x) - B^n\varphi_2(x)|| = \max_{x\in[a,b]} |B^n\varphi_1(x) - B^n\varphi_2(x)| \le \alpha||\varphi_1 - \varphi_2|| \tag{1.90}$$

故积分方程在 $[a,b]$ 上有唯一的连续函数解 $\phi(x)$. □

1.9 列紧集

1.9.1 列紧集的概念

在实数直线中, 根据 Weierstrass 定理, 任一有界点列必有收敛子列. 对于一般的度量空间却不一定. 我们很容易构造出 $C[0,1]$ 上的不收敛情况.(完备的空间应该是 $L[0,1]$). 因此需要引入列紧概念.

定义 1.133 (列紧集). 设 R 是度量空间,A 是 R 的集. 如果 A 中的任何点列必有在 R 中收敛的子列, 就成 A 是 (R 中的)**列紧集**. 如果 R 本身是列紧集, 就称 R 是**列紧空间**.

推论 1.134. 列紧集的性质

1^o 有限点集是列紧集

2^o 有限个列紧集的合集是列紧集

3^o 列紧集的任何子集是列紧的, 因此任意一族列紧集的交集都是列紧集

4^o 列紧集的闭包是列紧集

5^o 列紧集中的基本点列必然收敛, 列紧的度量空间是完备的.

定理 1.135. *n 维欧几里德空间 E^n 中的有界集必然是列紧集.*

1.9.2 列紧集和完全有界集

定义 1.136 (完全有界集). 设 A 是度量空间 R 中的点集,B 是 A 的子集. 如果正数 ε, 使得以 B 中各点为心, 以 ε 为半径的开球全体覆盖 A, 即

$$\bigcup_{x\in B} O(x,\varepsilon) \supset A \tag{1.91}$$

那么称 B 是 A 的 ε 网. 如果对任何的 $\varepsilon > 0$, 集 A 总有有限的 ε 网, 那么 A 是**完全有界集**.

定理 1.137. *设 A 是度量空间 R 中的完全有界集的充要条件是 A 中任何一个点列 $\{x_n\}$ 必有一个基本的子点列.*

定理 1.138 (Hausdorff). *(i) 度量空间中的列紧集必然是完全有界集;(ii) 在完备的度量空间中, 完全有界集必然是列紧集.*