Chapter 4 作业.

1. 如果在群 G 中，对于任意元素 a, b 有 $(ab)^2 = a^2b^2$，则 G 为交换群.

证明：$\because (ab)^2 = a^2b^2$，即 $abab = aabb$，即 $a^{-1}ababb^{-1} = a^{-1}aabb^{-1}$

即：$ba = ab$ $\therefore$ G 为交换群

$\therefore$ 得证.

2. 设 G 是一个非空的有限集合，其中定义了一个乘法 ab，适合条件：

(1) $a(bc) = (ab)c$;

(2) $ab = ac \Rightarrow b = c$

(3) $ac = bc \Rightarrow a = b$;

证明：G 在这个乘法下成一群.

证：(I) 存在单位元：

<1> 存在 $a_t \in G$. s.t $a_1 \cdot a_t = a_1$

<2> 证明 $a_1 a_t = a_t a_1$：

$\because$ $a_1\boxed{(a_t a_1)}a_t = (a_1 a_t)^2 = a_1^2$

$a_1\boxed{(a_1 a_t)}a_t = a_1 a_1 \cdot a_t = a_1(a_1 a_t) = a_1^2$

$\Rightarrow a_t a_1 = a_1 a_t$

<3> 证明 a_t 是单位元：

对于 $\forall a_k \in G$，$a_1(a_t a_k) = (a_1 a_t)a_k = a_1 a_k$

$\Rightarrow a_t a_k = a_k$

同理：$\cancel{a_k = a_t a_k}$ $a_k a_t = a_k$. $\therefore$ 得证

(II) 证明 G 内所有元素都有逆元：即证 $\forall a \in G$，存在 $b \in G$，s.t $ab = ba = e$.

<1> 对 $\forall a \in G$. $\exists b \in G$, s.t. $ab = e$.

<2> 证明 $ab = ba = e$.

$\because a(ab)b = aeb = ab = e$

$a(ba)b = (ab)(ab) = e$ $\Rightarrow ab = ba = e$.

$\therefore$ 得证.

3. 设G是一群，a,b∈G，若 $a^{-1}ba=b^r$，（r为正整数），证明 $a^{-i}ba^{i}=b^{r^i}$

证：数学归纳法：

① K=1时，$a^{-1}ba=b^r$

② 假设 k=n时成立，即 $a^{-n}ba^{n}=b^{r^n}$.

下证 k=n+1时也成立.

又∵ $a^{-1}b^{k}a=(b^r)^k=b^{kr}$

∴ $a^{-(n+1)}ba^{n+1}=a^{-1}\cdot(a^{-n}ba^{n})\cdot a=a^{-1}b^{r^n}\cdot a$

$=b^{r}\cdot b^{r^n}=b^{r(n+1)}$ 成立

∴得证.

4. 举一个群同态基本定理的实例：

解：设 $G=(\mathbb{Z},+)$，$G'=\{\mathbb{Z}_5^*, \times(\bmod 5)\}$，$(e'=1)$

1, 2, 3, 4

$f(x)=2^x(\bmod 5)$.

则 $N=(4\mathbb{Z},+)$ 是G的一个正规子群. $G/N=\{[0],[1],[2],[3],(+(\bmod 4))\}$.

则 核

$G/N \xrightarrow{f(x)} G'$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow 2 & \downarrow 2 & \downarrow 2 & \downarrow 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}$$

G/N 在上，G' 在下。

$\Rightarrow G/N \cong G'$

5. 举例：循环乘法群（找出所有生成元）、非循环乘法群.

解：(1) 循环乘法群：$\{\mathbb{Z}_7^*, \times(\bmod 7)\}$.

生成元：3：

$$\begin{array}{cccccc} 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

5：

$$\begin{array}{cccccc} 5^1 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5 & 5^6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

∴ $G=\langle 3\rangle$, $G=\langle 5\rangle$.

(2) 非循环乘法群：$\{Q, \times\}$.

6. 循环群的商群也是循环群：

证明：设 $G=\langle a\rangle$ 是循环群，H 是其正规子群，则 G/H 是商群.

对 $\forall g\in G$，有 $g=a^i\ (i\in Z)$ $\therefore (aH)^i=a^iH=gH\ (i\in Z)$

又 $\because G/H=\{gH\mid g\in G\}$ $\therefore \langle aH\rangle=G/H$.

$\therefore G/H$ 是循环群，生成元是 aH.

7. $\{Z_{19}^*, \times(\bmod 19)\}$，求每个元素的阶，并找出所有的子群.

解：$o(1)=1$，$o(2)=18$，$o(3)=18$ $o(4)=9$ $o(5)=9$

$o(6)=9$ $o(7)=3$ $o(8)=6$ $o(9)=9$ $o(10)=18$

$o(11)=3$ $o(12)=6$ $o(13)=18$ $o(14)=18$ $o(15)=18$

$o(16)=9$ $o(17)=9$ $o(18)=6$.

又 $\because \varphi(19)=18$，$2\in Z_{19}^*$，且 $o(2)=\varphi(19)$ $\therefore$ 2是一个生成元

$\therefore \{Z_{19}^*, \times(\bmod 19)\}$ 是18阶的循环群. 18的正因子1,2,3,6,9,18

有6个不同的

$\therefore$ 1阶子群：$G_1=\{1\}$.

2阶子群：$G_2=\{1, 2^9=18\}$

3阶子群：$G_3=\{1, 2^6=7, 2^{12}=11\}$.

6阶子群：$G_4=\{1, 2^3=8, 2^6=7, 2^9=18, 2^{12}=11, 2^{15}=9\}$

9阶子群 $G_5=\{1, 2^2=4, 2^4=16, 2^6=7, 2^8=9, 2^{10}=17, 2^{12}=11,$

$2^{14}=6, 2^{16}=5\}$.

18阶子群：$G_6=G=\{Z_{19}^*, \times(\bmod 19)\}$.