# Chapter 1 作业.

1. 证明: 形如 $4k+1$ 的素数有无穷多个.

证: 首先证明形如 $4k+1$ 的整数必有一个形如 $4k+1$ 的素因子:

设 $n=4k+1$

1° 若 $n$ 是素数, 则结论成立;

2° 若 $n$ 是合数: 则 $n$ 一定是奇数, 因此 $n$ 的素因子为 $4k+1$ 和 $\overset{(4k+3)}{\underline{4k-1}}$ 的形式. 若 $n$ 没有 $4k+1$ 的因子, 则 $n$ 的素因子都是 $4k-1$ 的形式, 那么 $n$ 也一定是 $4k-1$ 的形式, 矛盾.

$\therefore$ $n$ 一定有一个形如 $4k+1$ 的素因子.

下证: 形如 $4k+1$ 的素数有无穷多个:

假设形如 $4k+1$ 的素数有有限个, 不妨设为 $q_1, q_2 \dots q_t$, 令

$M = 4(q_1q_2\cdots q_t)+1$, 由前证结论, $M$ 必有一个形如 $4k+1$ 的素因子 $q$. 又$\because$ 形如 $4k+1$ 的素数为有限多个, $\therefore$ $q$ 必为 $q_1 \dots q_t$ 中的一个.

于是有 $q|M \Rightarrow q|4(q_1q_2\cdots q_t)+1 \Rightarrow q|1 \Rightarrow q=1$, 又$\because$ $q$ 形如 $4k+1$ 矛盾

$\therefore$ 假设不成立 $\therefore$ 形如 $4k+1$ 的素数有无穷多个 $\therefore$ 得证.

2. 若 $5|n$ 且 $17|n$, 则 $85|n$.

证明: $\because 5|n \Rightarrow n=5q_1$, $\because 17|n \Rightarrow n=17q_2$

$\Rightarrow 5q_1=17q_2=17\cdot 5q_3=85q_3=n \Rightarrow 85|n$ $\therefore$ 得证.

3. (1) 若 $2|ab$, 则 $2|a$, $2|b$ 至少有一个成立.

证明: ~~反证法: 假设2均不能整除a和b, 即 $2\nmid a$ 且 $2\nmid b$, 则 $2\nmid ab$~~ 若 $2|a$, 则成立; 若 $2\nmid a$, 则 2 与 $a$ 互素, 又$\because 2|ab \Rightarrow 2|b$

(2) 若 $7|ab$, 则 $7|a$, $7|b$ 至少有一个成立:

证明: $\because$ 7 为素数: 若 $7|a$, 则成立

若 $7\nmid a$, 则 7 与 $a$ 互素, 又$\because 7|ab \Rightarrow 7|b$.

(3) 若 $14|ab$, 试问 $14|a$ or $14|b$ 必有一个成立吗?

不一定: 取 $a=2, b=7$, $14|ab$, 但 $14\nmid a$ 且 $14\nmid b$.

4. 证明：对任意整数 n 有：

(1) $6\mid n(n+1)(n+2)$。

证明：首先证 $2\mid n(n+1)(n+2)$：

若 n 为偶，$2\mid n$，$\Rightarrow 2\mid n(n+1)(n+2)$

若 n 为奇，则 n+1 为偶 $\Rightarrow 2\mid n+1 \Rightarrow 2\mid n(n+1)(n+2)$

再证：$3\mid n(n+1)(n+2)$：n 除以 3，余数可能为 0，1，2

1° $n=3a$，则 $3\mid n \Rightarrow 3\mid n(n+1)(n+2)$

2° $n=3a+1$，则 $n+2=3a+3=3(a+1) \Rightarrow 3\mid n+2 \Rightarrow 3\mid n(n+1)(n+2)$

3° $n=3a+2$，则 $n+1=3a+3=3(a+1) \Rightarrow 3\mid n+1 \Rightarrow 3\mid n(n+1)(n+2)$

又 ∵ 2、3 为素数 ∴ $2\times 3\mid n(n+1)(n+2)$，即 $6\mid n(n+1)(n+2)$

∴ 得证.

(2) $8\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$：

~~证明：由(1)：$2\mid n(n+1)(n+2)$，$3\mid n(n+1)(n+2)$~~

~~再证：$4\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$：n 除以 4，余数可能为 0，1，2~~

~~1° $n=4a$，则 $4\mid n \Rightarrow 4\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$~~

1° n 为偶：令 $n=2k\ (k\in N_+)$ ∴ $n(n+1)(n+2)(n+3)=2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)$

$=4k(k+1)(2k+1)(2k+3)$

又 ∵ $2\mid k(k+1) \Rightarrow k(k+1)=2m\ (m\in N_+)$ 上式 $=8m(2k+1)(2k+3)$

∴ $8\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

2° n 为奇. 令 $n=2k-1\ (k\in N_+)$ ∴ $n(n+1)(n+2)(n+3)=(2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)(2k+2)$

$=4k(k+1)(2k-1)(2k+1)$

同上，上式 $=8m(2k-1)(2k+1) \Rightarrow 8\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

综上，得证.

(3). $24\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1° n 为偶，由(2)：$n(n+1)(n+2)(n+3)$ 可写为 $4k(k+1)(2k+1)(2k+3)$

下证 $k(k+1)(2k+1)(2k+3)$ 能被 6 整除：① 已证 $2\mid k(k+1)$ ∴ $2\mid k(k+1)(2k+1)(2k+3)$

② k除以3，余数可能为 0，1，2.

1) $k=3a$，则 $3|k \Rightarrow 3|k(k+1)(2k+1)(2k+3)$

2) $k=3a+1$，则 $2k+1=6a+3=3(2a+1) \Rightarrow 3|2k+1 \Rightarrow 3|k(k+1)(2k+1)(2k+3)$

3) $k=3a+2$，则 $k+1=3(a+1) \Rightarrow 3|k+1$ ……

可证得 $3|k(k+1)(2k+1)(2k+3)$

又∵2、3为素数 $\Rightarrow 2\times3=6|k(k+1)(2k+1)(2k+3)$

令 $k(k+1)(2k+1)(2k+3)=6n$ ∴原式可写为 $24n$.

∴$24|n(n+1)(n+2)(n+3)$.

2° n为奇时，同理可证.

(4) 若 $2\nmid n$，则 $8|n^2-1$ 及 $24|n(n^2-1)$

证明：∵$2\nmid n$ ∴n为奇数 令 $n=2k-1(k\in N_+)$

∴$n^2-1=4k(k-1)$ 又∵$2|k(k-1)$ ∴$k(k-1)=2m \Rightarrow n^2-1=8m$

∴ $8|n^2-1$

$n(n^2-1)=4k(k-1)(2k-1)$，下证 $6|k(k-1)(2k-1)$

先证 $3|k(k-1)(2k-1)$：

1° $k=3a$，则 $3|k \Rightarrow 3|k(k-1)(2k-1)$

2° $k=3a+1$，则 $k-1=3a \Rightarrow 3|k-1 \Rightarrow 3|k(k-1)(2k-1)$

3° $k=3a+2$，则 $2k-1=6a+3=3(2a+1) \Rightarrow 3|2k+1 \Rightarrow 3|k(k-1)(2k-1)$

∴$3|k(k-1)(2k-1)$，又∵$2|k(k-1)(2k-1)$，且2，3为素数

∴$2\times3=6|k(k-1)(2k-1)$ 令 $k(k-1)(2k-1)=6m$

∴$n(n^2-1)=24m \Rightarrow 24|n(n^2-1)$ ∴得证.

(5) 若 $2\nmid n$，$3\nmid n$，则 $24|n^2+23$.

证明：∵$2\nmid n$，n为奇，设 $n=2k-1\ (n\in N_+)$ ∴$n^2+23=4k(k-1)+24$

又∵$2|k(k-1)$ ∴设 $k(k-1)=2m$ ∴$n^2+23=8(m+3)$ ∴$8|n^2+23$.

∵$3\nmid n$ ∴$n=3k\pm1$ $n^2+23=3(3k^2\pm2k+8)$ ∴$3|n^2+23$

又∵3，8互质 ∴$3\times8=24|n^2+23$

∴得证.

(6) $6|n^3-n$：

证明：$n^3-n=n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)$

易得 $2|n(n+1)(n-1)$，下证 $3|n(n+1)(n-1)$

1° $n=3a$，$3|n$，$\Rightarrow 3|n(n-1)(n+1)$

2° $n=3a+1$，$3|n-1 \Rightarrow 3|n(n-1)(n+1)$

3° $n=3a+2$，$3|n+1 \Rightarrow 3|n(n-1)(n+1)$ ∴综上可得 $3|n(n-1)(n+1)$

又∵2、3互质 ∴$2\times 3=6|n^3-n$ ∴得证.

(7) $30|n^5-n$：

证明：易得 $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$，已证得 $2|n(n-1)(n+1)(n^2+1)$、$3|n(n-1)(n+1)(n^2+1)$，下证 $5|n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

1° $n=5a$，易得，2° $n=5a+1$，则 $n-1=5a$ ∴$5|n-1$

3° $n=5a+2$，则 $n^2+1=5(5a^2+4a+1)$ ∴$5|n^2+1$

4° $n=5a+3$，则 $n^2+1=5(5a^2+6a+2)$ ∴$5|n^2+1$

5° $n=5a+4$，则 $n+1=5(a+1)$ ∴$5|n+1$ ∴证得 $5|n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

又∵2、3、5互质 ∴$2\times 3\times 5=30|n^5-n$ ∴得证.

(8) $42|n^7-n$：

证明：$n^7-n=n(n^6-1)=n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$

已证得 $2|n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$、$3|n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$

下证 $7|n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$：

1° $n=7a$，易证. 2° $n=7a+1$，易证 3° $n=7a+2$，$n^2+n+1=7(7a^2+5a+1)$

4° $n=7a+3$，$n^2-n+1=7(7a^2+5a+1)$，5° $n=7a+4$，$n^2+n+1=7(7a^2+9a+3)$

6° $n=7a+5$，$n^2-n+1=7(7a^2+9a+3)$，7° $n=7a+6$ 易证.

∴可证得 $7|n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$

又∵2、3、7互质 ∴$2\times 3\times 7=42|n^7-n$ ∴得证

(9) 证明对任意整数 $n$，$\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{3}n^3+\frac{7}{15}n$ 是整数.

证明：原式 $=\frac{3n^5+5n^3+7n}{15}$，要证其为整数，即证 $15\mid 3n^5+5n^3+7n$.

$3n^5+5n^3+7n=3(n^5-n)+5(n^3-n)+15n$

又∵已证得 $5\mid n^5-n \Rightarrow 15\mid 3(n^5-n)$

$3\mid n^3-n \Rightarrow 15\mid 5(n^3-n)$

∴ $15\mid 3n^5+5n^3+7n$. ∴得证.