第一章　方阵的行列式

§1.1　基本要求、重点、难点内容

1.1.1　基本要求

1. 了解行列式概念, 熟练掌握行列式性质;

2. 熟练掌握三阶、四阶行列式的计算法, 会计算简单的n阶行列式;

3. 掌握克拉默法则以及齐次线性方程组存在非零解的判别方法;

4. 掌握判别方阵可逆的充分必要条件, 了解伴随矩阵概念, 会利用伴随矩阵求方阵的逆阵.

1.1.2　重点内容

1. n阶行列式概念, 行列式性质;

2. 行列式计算方法;

3. 克拉默法则求解线性方程组.

1.1.3　难点内容

1. n阶行列式的计算;

2. 伴随矩阵及其相关性质.

§1.2　主要内容

1.2.1　行列式的概念

定义1.1. *设$A=(a_{ij})$是n阶方阵, 则定义A的行列式是一个数, 记为$|A|$或$\det(A)$, 数$|A|$由下列等式确定:*

当$n=1$时, $|A|=a_{11}$;

当$n>1$时, $|A|=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}\,|A\binom{1}{k}|$,

这里$A\binom{i}{j}$表示A中去掉第i行、第j列元素后所得的$(n-1)$阶余子阵.

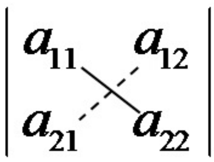
注 (1) n阶方阵A的行列式也称为n阶行列式, 且与矩阵类似, a_{ij}也可以称为n阶行列式$|A|$的第i行, 第j列元素.

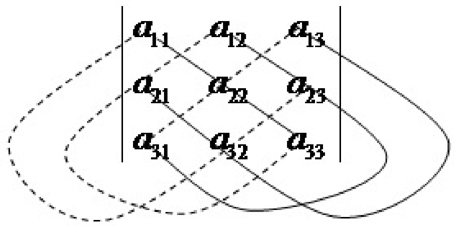
(2) 二阶、三阶行列式可按如下公式计算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

上述公式可以用下面的对角线法则来描述:





其中用实线连接的元素相乘后前面赋予"+"号, 用虚线连接的元素相乘后前面赋予"−"号.

定理1.2.1. 设$A=(a_{ij})$是n阶方阵, 则

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left| A \binom{i}{j} \right| \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.2.1}$$

(1.2.1)称为行列式按行展开式. 这里$\left|A\binom{i}{j}\right|$常称为元素$a_{ij}$的**余子式**, 记为$M_{ij}$. 称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素$a_{ij}$的**代数余子式**, 记为$A_{ij}$.

1.2.2 行列式的性质与计算

性质1.2.1. 方阵转置的行列式等于该方阵的行列式.

由性质2.2.1可以看出, 行列式的行和列的地位相同. 行所具有的性质对于列也成立. 反之亦然. 因此n阶行列式的计算也可按任意一列展开, 即

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ji} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{1.2.2}$$

推论1.2.1. 方阵中若有一行(列)的元素全为零, 则其行列式为零.

性质1.2.2. 方阵A作一次换法变换后得到B, 则$|B| = -|A|$.

推论1.2.2. 若方阵A中有两行(列)元素对应相等, 则$|A| = 0$.

定理1.2.2. 设$A=(a_{ij})$是n阶方阵, 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0 \quad (i\neq j;\ \ i,\ j=1,2,\cdots,n),$$

其中A_{jk}是元素a_{jk}的代数余子式.

推论1.2.3. 设$A=(a_{ij})$是n阶方阵, 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ |A|, & i=j.\end{cases} \tag{1.2.3}$$

性质1.2.3. 对方阵A作一次倍法变换, 即A的某一行(列)乘上数k得到B, 则$|B|=k\,|A|$.

推论1.2.4. 方阵A中若有两行(列)元素对应成比例, 则$|A|=0$.

性质1.2.4. 对方阵A作一次消法变换得到B, 则$|B|=|A|$.

性质1.2.5. 若n阶方阵A, B, C的第i行元素满足$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(1\leq j\leq n)$, 且其它行元素对应相同, 则$|C|=\ |A|+|B|$.

性质1.2.6. 方阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$.

性质1.2.7. 设A, B为n阶方阵, 则

$$|AB|=|A|\,|B|\,.$$

1.2.3 克拉默法则与伴随矩阵

定理1.2.3. (**克拉默法则**) 设A是n阶可逆阵, 则线性方程组$Ax=b$有唯一解

$$x_i=\frac{|A_i(b)|}{|A|}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{1.2.4}$$

其中$A_i(b)$表示用b替换A的第i列向量后所得的新矩阵.

推论1.2.5. 设A为n阶方阵. 若线性方程组$Ax=b$无解或至少存在两组解, 则$|A|=0$.

定理1.2.4. 设A为n阶方阵. 则齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$只有零解的充要条件是$|A|\neq 0$.

推论1.2.6. 设A为n阶方阵. 若齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$有非零解, 则$|A|=0$.

定义1.2. 设$A=(a_{ij})$是n阶方阵. 称

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

为A的**伴随矩阵**, 其中$A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|A\binom{i}{j}\right|$表示矩阵$A$中元素$a_{ij}$的代数余子式.

定理1.2.5. (**逆矩阵公式**) 设A是n阶可逆阵. 则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

1.2.4　一些常用结论

(1) n**阶上(下)三角行列式** 设A是主对角元为$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$的上、下三角矩阵, 则

$$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注 如果A为对角矩阵, 上式结论也成立.

(2) n阶反上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) n阶反下三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ & \iddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(4) n阶反对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(5) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j),$$

其中$n\geq 2$, 连乘积号是满足$1\leq j<i\leq n$的所有因子(x_i-x_j)的乘积.

(6) 设A, B分别为n阶和m阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix}A&C\\\mathbf{0}&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&\mathbf{0}\\D&B\end{vmatrix}=|A|\,|B|\,;$$

$$\begin{vmatrix}C&A\\B&\mathbf{0}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{0}&A\\B&D\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\,|A|\,|B|\,.$$

(7) 设A^*是n阶方阵A的伴随矩阵, 则$AA^*=A^*A=|A|\,I$.

(8) 设A^*是n阶方阵A的伴随矩阵, 则$|A^*|=|A|^{n-1}$.

§1.3 典型题析

计算行列式的值一般都是通过行列式的性质和行列式按行(列)展开定理来实现的, 利用行列式的性质设法将行列式恒等变化为便于计算的行列式(如上、下三角行列式, 或某行、某列元素都为零的行列式等等)直接得其值, 或利用行列式按行(或列)展开定理将行列式转化为较低阶的行列式进行计算. 但应该注意到, 这些方法使用的是否得当(性质的选择、性质使用的先后次序等)将直接影响计算过程的繁简程度. 常见的行列式的计算方法有化三角形法、分裂行列式法、降阶法、加边法、范德蒙行列式法、递推法、数学归纳法等.

1.3.1 化三角形法

利用行列式的性质将一个行列式化为三角形行列式, 再利用三角形行列式的结论直接得其值的方法称为“三角形法”.

例1.3.1. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&3&-2&3\end{vmatrix}$.

解 方法一 化三角形法.

$$D \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-5r_1\\ r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & -14 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3-3r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -24.$$

方法二 降阶法. 注意到在行列式D中,第三行(或第二列)中已经有一个元素为零,故可利用行列式的性质,使第三行(或第二列)出现尽可能多的零元素, 再将行列式按该行(列)展开, 使行列式降阶.

$$D \xlongequal[r_4+3r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二列}} (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+2c_3]{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 22 & 10 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二行}} (-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 22 & 10 \end{vmatrix} = -24$$

例1.3.2. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

解 (1) $D \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8.$

(2) $$D \xlongequal[c_3-c_4]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2-c_1]{\substack{c_4-c_1 \\ c_4-c_3}} xy \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

例1.3.3. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 经观察, 行列式各行元素的和都相等, 可将2至3列都加到第1列, 得

$$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3-c_1}} x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x \cdot (-1)^{\frac{4\times 3}{2}} x^3 = x^4.$$

例1.3.4. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解

(1) $$D_{n+1} \xlongequal[i=1,2\cdots,n]{c_{i+1}-a_ic_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1b_2\cdots b_n.$$

(2) 对D_n的列依次作列变换$c_{n-1}+c_n, c_{n-2}+c_{n-1}, \cdots, c_1+c_2$得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+2+\cdots+n & 2+3+\cdots+n & 3+4+\cdots+n & \cdots & (n-1)+n & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= (1+2+\cdots+n)(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^{n-1}\tfrac{(n+1)!}{2}.$$

(3) $$D_n \xlongequal[\cdots,c_2-c_1]{c_n-c_{n-1}} \begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0, & n \geq 3, \\ x_1-x_2, & n=2, \\ x_1+1, & n=1. \end{cases}$$

(4) $$D_{n+1} \xlongequal[\cdots,c_{n+1}+c_n]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3+c_2}} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n.$$

例1.3.5. 计算行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

解 该行列式的每一行的元素和相同, 因此将2至n列都加到第1列, 得

$$D_n \xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_i+1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i+1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i+1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i+1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= (\sum_{i=1}^n a_i+1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_j-a_jc_1} (\sum_{i=1}^n a_i+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i+1.$$

例1.3.6. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix} (x \neq a_i, i=1,2,\cdots,n).$$

解 该行列式除了主对角元外, 其他元素都等于x, 因此可将D_n的第一行元素乘以-1, 分别加到$2,3,\cdots,n$行对应的元素上,将原行列式化为箭形行列式, 即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x-a_1 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

各列分别提取因子$a_1-x, a_2-x, \cdots, a_n-x$, 得

$$D_n = \prod_{i=1}^n (a_i-x) \begin{vmatrix} a_1/(a_1-x) & x/(a_2-x) & \cdots & x/(a_n-x) \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x}+\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{x}{a_j-x} & \frac{x}{a_2-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\Big(\frac{a_1}{a_1-x}+\sum_{j=2}^{n}\frac{x}{a_j-x}\Big).$$

例1.3.7. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}(n>1).$$

解 分两种情形.

(1)$a_i\neq 0, i=2,3,\cdots,n$, 将$D_n$的第$i$列的$-c_i/a_i$倍加到$D_n$的第一列上, $i=2,3,\cdots,n$, 使D_n中第一列除第一个元素外全部为零, 即得上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}(b_ic_i/a_i) & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}=[a_1-\sum_{i=2}^{n}(b_ic_i/a_i)]a_2\cdots a_n.$$

(2)$a_i(i=2,3,\cdots,n)$中某些为零,不妨假设$a_n=0$, 此时将D_n按第n列展开, 得$D_n=(-1)^{n+1}b_n\triangle_{n-1}$, 易得$\triangle_{n-1}=(-1)^n a_2a_3\cdots a_{n-1}c_n$, 因此$D_n=-a_2\cdots a_{n-1}b_nc_n$. 其他$a_i=0(i\neq 1)$的情形可类似求得.

例1.3.8. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-1)b \\ a+b & a+2b & a+3b & \cdots & a \\ a+2b & a+3b & a+4b & \cdots & a+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & a & a+2b & \cdots & a+(n-2)b \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的性质, 得

$$D_n \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_2-r_1}]{\substack{r_n-r_{n-1} \\ r_{n-1}-r_{n-2}}} \begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & \cdots & a+(n-2)b & a+(n-1)b \\ b & b & b & \cdots & b & -(n-1)b \\ b & b & b & \cdots & -(n-1)b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & -(n-1)b & \cdots & b & b \\ b & -(n-1)b & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ c_n-c_1}]{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix} a & b & 2b & \cdots & (n-2)b & (n-1)b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & -nb \\ b & 0 & 0 & \cdots & -nb & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & -nb & \cdots & 0 & 0 \\ b & -nb & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1+\frac{1}{n}c_n}]{\substack{c_1+\frac{1}{n}c_2 \\ c_1+\frac{1}{n}c_3}} \begin{vmatrix} a+\frac{n-1}{2}b & b & 2b & \cdots & (n-2)b & (n-1)b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -nb \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -nb & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -nb & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -nb & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a+\frac{n-1}{2}b\right) \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -nb \\ 0 & \cdots & -nb & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -nb & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(nb)^{n-1}\left(a+\frac{n-1}{2}b\right).$$

1.3.2 分裂行列式法

根据行列式性质1.2.5, 可将行列式分解为若干易于计算的行列式之和, 这种方法称为"分裂行列式法". 有时亦可利用行列式的乘法法则将行列式拆成若干行列式的积, 然后再计算.

例1.3.9. 已知分块矩阵$A_{3\times 3}=(\alpha,\beta,\gamma)$的行列式$|A|=a$,求分块矩阵$(\alpha+\beta,\beta+2\gamma,\gamma+3\alpha)$的行列式值.

解 方法一 利用行列式的性质,有

$$
\begin{aligned}
&|\alpha+\beta,\beta+2\gamma,\gamma+3\alpha| \\
=&|\alpha,\beta+2\gamma,\gamma+3\alpha|+|\beta,\beta+2\gamma,\gamma+3\alpha| \\
=&|\alpha,\beta+2\gamma,\gamma|+|\beta,2\gamma,\gamma+3\alpha| \\
=&|\alpha,\beta,\gamma|+|\beta,2\gamma,3\alpha| \\
=&|\alpha,\beta,\gamma|+(-1)^2\,|3\alpha,\beta,2\alpha| \\
=&|\alpha,\beta,\gamma|+3\times 2\,|\alpha,\beta,\gamma| \\
=&7a.
\end{aligned}
$$

方法二 利用矩阵乘积的定义及行列式的性质, 有

$$
|\alpha+\beta,\beta+2\gamma,\gamma+3\alpha| = \left|(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\right|
$$

$$
=|\alpha,\beta,\gamma|\cdot\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=7a.
$$

例1.3.10. 计算n阶行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&\cdots&a_1+b_n\\a_2+b_1&a_2+b_2&\cdots&a_2+b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n+b_1&a_n+b_2&\cdots&a_n+b_n\end{vmatrix}.
$$

解 因为

$$
\begin{pmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&\cdots&a_1+b_n\\a_2+b_1&a_2+b_2&\cdots&a_2+b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n+b_1&a_n+b_2&\cdots&a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&1&0&\cdots&0\\a_2&1&0&\cdots&0\\a_3&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\b_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},
$$

所以

$$
D_n=\begin{vmatrix}a_1&1&0\cdots&0\\a_2&1&0\cdots&0\\a_3&1&0\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_n&1&0\cdots&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\b_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\\0&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{cases}0, & n>2,\\(a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2,\\a_1+b_1, & n=1.\end{cases}
$$

1.3.3 降阶法

降阶法, 即利用行列式展开定理, 将一个行列式化为阶数较低的行列式, 从而简化行列式计算的方法.

例1.3.11. 计算下列行列式.

$$(1)\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix};\qquad (2)\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

解 (1) 根据行列式的性质, 得

$$D \xlongequal{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-dr_2} \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ d & -1-cd & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1+ab & a \\ d & -1-cd \end{vmatrix}$$

$$= (1+ab)(1+cd)+ad.$$

(2) 将第2,3,4,5列都加到第1列后再按第1列展开(以下各步得到的第1个行列式均按此法处理),可得

$$D \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_5} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第1列}} \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} - a^5$$

$$
= \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-a)(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \end{vmatrix} - a^5
$$

$$
\xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ -a & -1 & 1-a \end{vmatrix} + a^4 - a^5
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-a)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1-a & a \end{vmatrix} + a^4 - a^5
$$

$$
= (1-a)^2 + a - a^3 + a^4 - a^5
$$

$$
= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5.
$$

1.3.4 加边法

加边法也称升阶法, 是在原行列式的基础上, 增加一行一列(即升一阶)且保持其值不变, 并易于计算. 它的理论依据是行列式按行(列)展开定理.

例1.3.12. 计算行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & a_3 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} (a_i \neq b_i, i = 1, 2, \cdots, n).
$$

解 该行列式的特点是, 除主对角线元素外, 第j列的元素都是b_j.

方法一 化三角形法.

$$
D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1-a_1 & a_2-b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1-a_1 & 0 & a_3-b_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}.
$$

$$\xlongequal[i=1,2\cdots,n]{c_i\div(a_i-b_i)}\prod_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\begin{vmatrix}\frac{a_1}{a_1-b_1}&\frac{b_2}{a_2-b_2}&\frac{b_3}{a_3-b_3}&\cdots&\frac{b_n}{a_n-b_n}\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&0&0&\cdots&0\\-1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}.$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1+c_j}\prod_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\begin{vmatrix}\frac{a_1}{a_1-b_1}+\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{b_j}{a_j-b_j}&\frac{b_2}{a_2-b_2}&\frac{b_3}{a_3-b_3}&\cdots&\frac{b_n}{a_n-b_n}\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}.$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_1-b_1}+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_j}{a_j-b_j}\right)\prod_{i=1}^{n}(a_i-b_i).$$

方法一　加边法. 观察到任意两行除主对角元不同以外, 其他元素对应相等. 由此将$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ “镶”到新行列式的第一行, 得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&b_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\0&a_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\0&b_1&a_2&b_3&\cdots&b_n\\0&b_1&b_2&a_3&\cdots&b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&b_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\0&b_1&b_2&b_3&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1&b_1&b_2&b_3&\cdots&b_n\\-1&a_1-b_1&0&0&\cdots&0\\-1&0&a_2-b_2&0&\cdots&0\\-1&0&0&a_3-b_3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&0&0&0&\cdots&0\\-1&0&0&0&\cdots&a_n-b_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,2,\cdots,n]{c_1+c_{j+1}\div(a_j-b_j)}\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j-b_j} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1-b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3-b_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

$$=\Big(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j-b_j}\Big)\prod_{i=1}^{n}(a_i-b_i).$$

例1.3.13. 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}(a_1a_2\cdots a_n\neq 0).$

解 观察到每行去掉a_i以后都是向量$(1,1,\cdots,1)$的倍数, 通过加边法得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{r_i-ir_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_1+\frac{i}{a_i}c_{i+1}}\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdot\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}).$$

例1.3.14. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2+1 & \cdots & x_3x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

解 采用加边法, 有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2+1 & \cdots & x_3x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\,3,\,\cdots,\,n+1]{r_i-x_{i-1}r_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\,3,\,\cdots,\,n+1]{c_1+x_{i-1}r_i} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

1.3.5 范德蒙行列式法

利用范德蒙行列式的结论进行计算的方法称为"范德蒙行列式法".

例1.3.15. 计算下列行列式:

(1) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 16 & 9 & 1 \\ 8 & 64 & 27 & -1 \end{vmatrix}$;

(2) $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$.

解 (1) 此为范德蒙行列式, 根据其行列式计算公式, 得

$$D=(4-2)(3-2)(-1-2)(3-4)(-1-4)(-1-3)=120.$$

(2) D_{n+1}经过初等行、列变换可以化为如下的范德蒙行列式:

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n+1}(i-j).$$

(3) D_n与范德蒙行列式非常接近,只要在第$n-1$行与第n行之间适当增加一行,再加上列便构成范德蒙行列式,根据此范德蒙行列式与D_n的关系计算D_n的值. 设

$$f_{n+1}(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}.$$

则

$$f_{n+1}(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

由于行列式D_n恰好是行列式$f_{n+1}(x)$中的元素x^{n-1}的余子式$M_{n,n+1}$,即

$$D_n=M_{n,n+1}=-A_{n,n+1},$$

由行列式的定义知, 范德蒙行列式$f_{n+1}(x)$中x^{n-1}的系数为$A_{n,n+1}$, 而由$f_{n+1}(x)$的表达式知, x^{n-1}的系数为

$$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j),$$

故

$$A_{n,n+1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j),$$

于是

$$D_n=-A_{n,n+1}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

1.3.6 递推法

利用行列式的性质, 把给定的n阶行列式D_n用同样结构的$n-1$阶(或更低阶的)行列式表示出来(即找出递推关系式), 然后根据递推关系式求出D_n的方法称为"递推法".

例1.3.16. 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$.

解 将D_n按第一列展开, 有

$$\begin{aligned} D_n &= x\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+ \\ &\quad + a_n\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= xD_{n-1}+a_n, \end{aligned}$$

由此得递推公式

$$D_n=xD_{n-1}+a_n,\quad D_1=x+a_1.$$

所以

$$\begin{aligned}
D_n &= xD_{n-1} + a_n \\
&= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = x^2D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^2(xD_{n-3} + a_{n-2}) + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^3D_{n-3} + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \\
&= \cdots \\
&= x^{n-2}D_2 + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^{n-2}(xD_1 + a_2) + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^{n-1}D_1 + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.
\end{aligned}$$

例1.3.17. 计算n阶三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} (ab \neq 0).$$

解 将D_n按第一行展开得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}, \tag{1.3.1}$$

其中$D_1 = a+b, D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2.$

式(1.3.1)可以改写为

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}),$$

因此$\{D_n - aD_{n-1}\}$是首项为b^2, 公比为b的等比数列. 故得

$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \tag{1.3.2}$$

同理对式(1.3.1)可以改写为

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}).$$

仿照上述推导可得

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \tag{1.3.3}$$

当$a\neq b$时,由(1.3.2), (1.3.3)两式可得

$$D_n=(a^{n+1}-b^{n+1})/(a-b).$$

当$a=b$时,有递推关系式

$$\begin{aligned}&D_n=aD_{n-1}+a^n,\quad D_{n-1}=aD_{n-2}+a^{n-1},\cdots,\\&D_2=aD_1+a^2,\quad D_1=a+a=2a,\end{aligned}$$

即得

$$D_n=a^{n-1}D_1+(n-1)a^n=(n+1)a^n.$$

例1.3.18. 证明行列式$D_n=\begin{vmatrix}2&-1&&&\\-1&2&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&2&-1\\&&&-1&2\end{vmatrix}=n+1.$

证 根据行列式的性质, 有

$$D_n\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_n+r_i}\begin{vmatrix}2&-1&0&\cdots&0&0&0&0\\-1&2&-1&\cdots&0&0&0&0\\0&-1&2&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&2&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&-1&2&-1\\1&0&0&\cdots&0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}n\text{行}}D_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&&&&\\2&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&-1&2&-1\end{vmatrix}=D_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$=D_{n-1}+1=\cdots=D_2+(n-2)=3+(n-2)=n+1.$$

1.3.7 数学归纳法

例1.3.19. 证明n阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \cos n\theta.$$

证 当n为1,2时,结论显然成立.

假设结论对所有小于等于k的自然数都成立,于是

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{k+1}$$

$$= 2\cos\theta \cdot D_k + (-1)^{k+1+k} \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\theta & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}_{k}$$

$$= 2\cos\theta \cdot D_k - D_{k-1} = 2\cos\theta\cos k\theta - \cos(k-1)\theta$$

$$= \cos(k+1)\theta.$$

即当$n = k+1$时结论也成立.

综上, 结论对一切自然数都成立.

1.3.8 杂例

例1.3.20. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解, 则λ应取何值? 若线性方程组常数项依次改为$2, 3, 2$, 则λ为何值时, 新的线性方程组有唯一解?

解 因为齐次线性方程组有非零解, 所以系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0,$$

故$\lambda=2$或-1.

若线性方程组常数项依次改为2, 3, 2, 即

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=3, \\ \lambda x_1+x_2+2x_3=2, \end{cases}$$

因为该非齐次线性方程组有唯一解, 所以系数行列式不为零. 故$\lambda\neq 2$且$\lambda\neq -1$.

例1.3.21. 设A为*3*阶方阵,且$|A|=-1/2$,求$|(3A)^{-1}-2A^*|$的值.

解 由$A^*=|A|\,A^{-1}=-\frac{1}{2}A^{-1}$得

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}+A^{-1}\right|=\left(\frac{4}{3}\right)^3\left|A^{-1}\right|=\left(\frac{4}{3}\right)^3|A|^{-1}=-128/27.$$

例1.3.22. 已知矩阵方程

$$AXA^{-1}=XA^{-1}+2I,$$

其中$|A|>0$, A的伴随矩阵$A^*=\mathrm{diag}(2,-2,-4)$,求矩阵$X$.

解 在$AXA^{-1}=XA^{-1}+2I$两端同时右乘A,得

$$AX=X+2A,$$

从而有$(A-I)X=2A$. 故

$$X=2(A-I)^{-1}A=2[A^{-1}(A-I)]^{-1}=2(I-A^{-1})^{-1}.$$

又A为三阶方阵, 且$AA^*=|A|\,I$, 两边取行列式得

$$|A|\cdot|A^*|=|A|^3,$$

即$|A|^2=|A^*|=16$, 再由$|A|>0$,可得$|A|$=4，所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\mathrm{diag}(1/2,-1/2,-1)$$

所以

$$X=2(I-A^{-1})^{-1}=2\mathrm{diag}(2,2/3,1/2)=\mathrm{diag}(4,4/3,1)$$

例1.3.23. 设$n(n>2)$阶方阵A的伴随矩阵为A^*. 证明:

(1) 若$|A|=0$,则$|A^*|=0$; (2) $|A^*|=|A|^{n-1}$;

(3) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$; (4) 若A可逆, 则有$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证 (1) (反证法)假设$|A^*|\neq 0$, 则A^*可逆, 即$A^*(A^*)^{-1}=I$, 所以

$$A=AA^*(A^*)^{-1}=|A|\,(A^*)^{-1}=0,$$

故$A=0$, 则$A^*=0$, 这与$|A^*|\neq 0$矛盾, 故当$|A|=0$时,有$|A^*|=0$.

(2)因为$AA^*=|A|\,I$, 所以

$$|A|\,|A^*|=|A|^n.$$

若$|A|\neq 0$, 则$|A^*|=|A|^{n-1}$;

若$|A|=0$, 由(1)知, $|A^*|=0$, 此时也成立$|A^*|=|A|^{n-1}$.

所以$|A^*|=|A|^{n-1}$.

(3)当$|A|\neq 0$时, A可逆, 则

$$(A^*)^*=(|A|\,A^{-1})^*=\left||A|\,A^{-1}\right|(|A|\,A^{-1})^{-1}=|A|^n\left|A^{-1}\right|\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A.$$

当$|A|=0$时, 只需证$(A^*)^*=0$. 首先证明$r(A^*)<n-1$.

当$A^*=\mathbf{0}$时, 有$r(A^*)=0<n-1$;

当$A^*\neq\mathbf{0}$时, 此说明A有$n-1$阶子矩阵可逆, 则$r(A)\leq n-1$(子矩阵秩小于等于原矩阵秩). 又$AA^*=|A|I=\mathbf{0}$知$r(A)+r(A^*)\leq n$, 所以$r(A^*)\leq 1<n-1$. 从而A^*的所有$n-1$阶子矩阵的行列式都为零, 否则$r(A^*)\leq n-1$, 于是$(A^*)^*=0$. 此时$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

所以$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

(4)因为A可逆, 所以$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$. 即$A^*=|A|\,A^{-1}$. 所以

$$(A^*)^{-1}=(|A|\,A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A,$$

又因为

$$(A^{-1})^*=\left|A^{-1}\right|(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A,$$

所以$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

§2.4 习题选解

习题2.1.1 按定义计算下列行列式:

(9) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$;

解 设行列式的值为D. 按第一行展开, 得

$$D = 3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

继续按第一行展开, 得

$$D = 3\cdot(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(-11) + (-2)\cdot 2\cdot(-11) = 77.$$

注 由教科书例2.2.12知, 有下列公式

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ D & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

其中A, B为方阵. 利用此公式可以简化行列式计算. 因此有

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-3-4)\times(-10-1) = 77.$$

(11) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 设行列式的值为D. 根据行列式展开定理, 按第n行展开得

$$D = n\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(n-1)! = (-1)^{n+1}n!.$$

习题2.1.2 证明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

证 设行列式的值为D. 将行列式先按第5行展开, 再按第4行展开得

$$\begin{aligned}D&=e_1\cdot(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}a_2&a_3&a_4&a_5\\b_2&b_3&b_4&b_5\\c_2&0&0&0\\d_2&0&0&0\end{vmatrix}+e_2\cdot(-1)^{5+2}\begin{vmatrix}a_1&a_3&a_4&a_5\\b_1&b_3&b_4&b_5\\c_1&0&0&0\\d_1&0&0&0\end{vmatrix}\\&=e_1\cdot d_2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a_3&a_4&a_5\\b_3&b_4&b_5\\0&0&0\end{vmatrix}-e_2\cdot d_1\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a_3&a_4&a_5\\b_3&b_4&b_5\\0&0&0\end{vmatrix}\\&=0.\end{aligned}$$

习题2.2.1 设$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=1$, 求$\begin{vmatrix}6a_{11}&-3a_{21}&-3a_{31}\\-2a_{12}&a_{22}&a_{32}\\-10a_{13}&5a_{23}&5a_{33}\end{vmatrix}$.

解 设所求行列式的值为D, 则

$$D\xlongequal[r_3\div 5]{r_1\div(-3)}-3\times 5\begin{vmatrix}-2a_{11}&a_{21}&a_{31}\\-2a_{12}&a_{22}&a_{32}\\-2a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}\xlongequal{c_1\div(-2)}-15\times(-2)\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{转置}]{\text{行列式}}30\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=30.$$

习题2.2.3 设4阶行列式的第1行元素依次为1, 2, 3, 4, 第2行元素的代数余子式依次为x, $2, x$, 1, 求x的值.

解 设A_{kj}表示a_{kj}对应的代数余子式, 则由$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0\quad(i\neq k;\quad i,\ k=1,2,\cdots,n)$, 得

$$1\times x+2\times 2+3\times x+4\times 1=0,$$

则$x=-2$.

习题2.2.5 已知4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&7&-1\\3&1&8&0\\-2&1&4&3\\5&1&2&5\end{vmatrix},$$

求$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$的值, 其中$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式.

解 因为$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=0 \quad (i\neq k;\ \ i,\ k=1,2,\cdots,n)$, 所以有

$$1\times A_{14}+1\times A_{24}+1\times A_{34}+1\times A_{44}=0,$$

则

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0.$$

习题2.2.7 已知n阶行列式D_n的元素为

(1) $a_{ij}=\begin{cases}-1, & i>j,\\ 1, & i\leq j;\end{cases}$ (2) $a_{ij}=\begin{cases}-1, & i>j,\\ j, & i\leq j.\end{cases}$

试分别计算当$n=2$, 3, 4时的行列式值, 并推测对任意大于1的自然数n, 相应的D_n的值.

解 (1)$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1-(-1)=2;$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2^2;$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2^3;$$

由此可推测$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=2^{n-1}.$

(2) $D_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-(-2)=4=2\cdot 2!;$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}\xlongequal{c_3\div 3}3\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[c_2+c_3]{c_1+c_3}3\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 3!;$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & 3 & 4\\ -1 & -1 & -1 & 4\end{vmatrix}\xlongequal{c_4\div 4}4\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+c_4]{\substack{c_1+c_4\\ c_2+c_4}}4\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=4\cdot 4!;$$

由此可推测$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -1 & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n \end{vmatrix} = n \cdot n!.$

习题2.2.8 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

解 设行列式值为D. 则

$$D \xlongequal{r_1 - a\times r_4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-ad \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-ad \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -b \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1-ad \\ c & 0 \end{vmatrix} = b[0-(1-ad)c] = (ad-1)bc.$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & 5 \\ 16 & 9 & 49 & 25 \\ 64 & -27 & 343 & 125 \end{vmatrix}$;

解 这是一个四阶范德蒙行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & 5 \\ 4^2 & (-3)^2 & 7^2 & 5^2 \\ 4^3 & (-3)^3 & 7^3 & 5^3 \end{vmatrix} = (-3-4)(7-4)(5-4)(7+3)(5+3)(5-7) = 3360.$$

(5) $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n$;

解 设所求行列式的值为D. 将行列式按第1列展开, 得

$$D = a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} + 1\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第1行}} a\times a^{n-1} + (-1)^{2n+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-2} = a^n - a^{n-2}.$$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$;

解 设所求行列式的值为D. 则

$$D \xlongequal[r_n+r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = 1\times2\times3\times\cdots\times n = n!.$$

(9) $D_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; $D_{2n} = \begin{vmatrix} a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \iddots & \cdots \\ 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d \end{vmatrix}$.

解 因为

$$D_6 \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第1列}} a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0\\ 0 & a & b & 0 & 0\\ 0 & c & d & 0 & 0\\ c & 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & d\end{vmatrix} + c\times(-1)^{6+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b\\ a & 0 & 0 & b & 0\\ 0 & a & b & 0 & 0\\ 0 & c & d & 0 & 0\\ c & 0 & 0 & d & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第5列}} a\times d\times(-1)^{5+5}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix} - c\times b\times(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}$$

$$=(ad-bc)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix} = (ad-bc)D_4.$$

同理可得

$$D_6=(ad-bc)D_4=(ad-bc)^2D_2=(ad-bc)^2\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=(ad-bc)^3;$$

且

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (ad-bc)D_{2n-2}=(ad-bc)^2D_{2n-4}=\cdots\\ &=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=(ad-bc)^n.\end{aligned}$$

习题2.2.9 计算下列行列式:

(1) $D_n=|a_{ij}|$, 其中$a_{ij}=|i-j|$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$;

解 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2\\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-5 & n-4 & n-3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 0 & 1 & 2\\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 & 0 & 1\\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}_n$

$$
\xlongequal[\cdots,r_2-r_1]{\substack{r_n-r_{n-1}\\ r_{n-1}-r_{n-2}}}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1
\end{vmatrix}_n
$$

$$
\xlongequal[\cdots,r_n-r_2]{\substack{r_3-r_2\\ r_4-r_2}}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\
0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 0
\end{vmatrix}_n
$$

$$
\xlongequal{c_n+c_1}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 0
\end{vmatrix}_n
$$

$$
\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}n\text{列}} (n-1)\times(-1)^{1+n}
\begin{vmatrix}
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\
0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 0 \\
0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2
\end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}1\text{列}} (-1)^{1+n}(n-1)\times(-1)^{1+1}
\begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & 2 & 2 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2
\end{vmatrix}_{n-2}
$$

$$
= (-1)^{1+n}(n-1)2^{n-2}.
$$

习题2.2.10 解下列方程:

$$(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-2)-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0.$$

解 设所求行列式的值为D.则

$$D \xlongequal[\cdots, r_n - r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-3)-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-2)-x \end{vmatrix}$$

$$= -x(1-x)(2-x)\cdots[(n-3)-x][(n-2)-x] = 0,$$

得方程的$n-1$个解

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad \cdots, \quad x_{n-1} = n-2.$$

习题2.2.11 试建立三对角行列式的递推关系式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{vmatrix}.$$

解 将D_n按第n行展开, 有

$$D_n = c_n \cdot (-1)^{n+(n-1)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ a_n \cdot (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= -c_n \cdot b_{n-1} \cdot (-1)^{(n-1)+(n-1)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-4} & b_{n-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-3} & a_{n-3} & b_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix} + a_n D_{n-1}$$

$$= -c_n b_{n-1} D_{n-2} + a_n D_{n-1}$$

$$= a_n D_{n-1} - c_n b_{n-1} D_{n-2};$$

且

$$D_1 = a_1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - b_1 c_1.$$

所以该三对角行列式的递推关系式为

$$\begin{cases} D_n = a_n D_{n-1} - c_n b_{n-1} D_{n-2} \ \ (n \geq 3), \\ D_1 = a_1, \ \ D_2 = a_1 a_2 - b_1 c_1. \end{cases}$$

习题2.3.3 讨论λ, μ取何值时, 下列齐次方程组有非零解, 并求出其中一组非零解.

(2) $\begin{cases}(\lambda+1)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=0;\end{cases}$

解 因为齐次方程组有非零解, 所以系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 1\\ \lambda+3 & \lambda+1 & 1\\ \lambda+3 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\div(\lambda+3)} (\lambda+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} (\lambda+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+3)=0,$$

所以$\lambda=0$或$\lambda=-3$.

当$\lambda=0$时, 方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$$

即为$x_1+x_2+x_3=0$, 可取其一组非零解为$\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=-1,\\ x_3=0.\end{cases}$

当$\lambda=-3$时, 方程组为$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2-2x_3=0,\end{cases}$ 可取其一组非零解为$\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=1,\\ x_3=1.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\mu x_2+x_3=0,\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0.\end{cases}$

解 因为齐次方程组有非零解, 所以系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3} \begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ 0 & \mu & 1\\ 0 & 2\mu & 1\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}\mu & 1\\ 2\mu & 1\end{vmatrix} = -(\lambda-1)\mu=0,$$

所以$\lambda=1$或$\mu=0$.

当$\lambda=1$时, 方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\mu x_2+x_3=0,\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0,\end{cases}$ 即为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+x_3=0,\end{cases}$ 可取其一组

非零解为$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -1. \end{cases}$

当$\mu = 0$时, 方程组为$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$ 可取其一组非零解为$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1-\lambda, \\ x_3 = -1. \end{cases}$

习题2.3.6 设$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求$(A^*)^{-1}$.

解 因为$AA^{-1} = I$, 所以$|A|\,|A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1$, 则$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$, 而

$$\left|A^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

所以$|A| = \frac{1}{2}$,因此

$$A^* = |A|\,A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A^*)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

而

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以

$$(A^*)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = 2\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题2.3.7 A为3阶方阵, 且$|A| = \frac{1}{2}$, 求$|(2A)^{-1} - 5A^*|$.

解 因为$(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|A|}A^* = A^*$, 所以

$$\left|(2A)^{-1} - 5A^*\right| = |-4A^*| = (-4)^3\,|A^*|.$$

而$A^*A=|A|\,I$, 故$|A^*|\cdot|A|=|A|^3$, 即$|A^*|=|A|^2=\frac{1}{4}$, 故

$$\left|(2A)^{-1}-5A^*\right|=-64\cdot\frac{1}{4}=-16.$$

习题2.3.9 设A是n $(n\geq 2)$阶方阵, A^*是A的伴随矩阵. 证明:

(1) $r(A^*)=n$的充要条件是$r(A)=n$;

(2) $r(A^*)=1$的充要条件是$r(A)=n-1$;

(3) $r(A^*)=0$的充要条件是$r(A)<n-1$.

证 (1)由于$|A^*|=|A|^{n-1}$, 因此$|A^*|\neq 0$的充分必要条件是$|A|\neq 0$. 而A可逆的充分必要条件是$r(A)=n$, 由此得$r(A^*)=n$的充要条件是$r(A)=n$.

(2)若A奇异, 则$|A|=0$, 于是$AA^*=|A|\,I=0$, 从而

$$r(A)+r(A^*)\leq n.$$

下证(2)成立. 若$r(A^*)=1$, 则$r(A)\leq n-1$. 若$r(A)<n-1$, 则A中所有$n-1$阶子矩阵的秩都小于$n-1$, 由矩阵可逆充分必要条件知, A的$n-1$阶子式都为零, 此时A^*为零矩阵, 与$r(A^*)=1$矛盾, 所以$r(A)=n-1$.

反之, 当$r(A)=n-1$时, 则A中存在$n-1$阶非零子式, 由此有$A^*\neq 0$, 则

$$1\leq r(A^*)\leq n-r(A)=1,$$

所以有$r(A^*)=1$.

(3)当$r(A^*)=0$时, 则A^*为零矩阵, 所以A中所有的$n-1$阶子式都为零, 则$r(A)<n-1$;

反之, 若$r(A)<n-1$, 则A中所有的$n-1$阶子式都为零, 此时A^*为零矩阵, 则$r(A^*)=0$.

总习题3 计算下列行列式:

(1) $D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$;

解 $D_n\,\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\underset{r_1\div\frac{1}{2}}{=\!=\!=}}\,-2\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=3,\cdots,n]{\substack{r_2-r_1\\ r_i-2r_1}} -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!.$$

(3) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$;

解 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1\div[x+(n-1)a]} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & a & \cdots & a & a \\ 1 & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & \cdots & x & a \\ 1 & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \cdots}} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

(5) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$;

解 $D_{n+1} \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_n-a_n\cdot c_{n+1}}]{\substack{c_1-a_1\cdot c_{n+1} \\ c_2-a_2\cdot c_{n+1}}} \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n).$

总习题5 λ取什么值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=0, \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=0, \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=0 \end{cases}$$

(1)只有零解? (2)有非零解?

解 系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-(\lambda+3)r_2]{r_1-2r_2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-2\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3-\lambda^2 & -\lambda^2-\lambda+3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-2\lambda \\ 3-\lambda^2 & -\lambda^2-\lambda+3 \end{vmatrix} \\ &= -[(3-\lambda)(-\lambda^2-\lambda+3)-(3-2\lambda)(3-\lambda^2)] \\ &= \lambda^2(\lambda-1). \end{aligned}$$

则

当$D\neq 0$即$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq 1$时齐次线性方程组只有零解;

当$D=0$即$\lambda=0$或$\lambda=1$时齐次线性方程组有非零解.

总习题8 (2)已知A的伴随阵$A^*=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ 8)$, 且$AXA^{-1}=XA^{-1}+3I$, 求$X$.

解 由$AXA^{-1}=XA^{-1}+3I$得

$$(AXA^{-1})A=(XA^{-1})A+3A,\quad 即\quad AX=X+3A,$$

所以

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}X+3I,$$

即

$$X=A^{-1}X+3I,\quad (I-A^{-1})X=3I,$$

所以

$$X=3(I-A^{-1})^{-1}=3\left(I-\frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1}.$$

而$|A^*|=|A|^3$, 则$|A|=\sqrt[3]{|A^*|}=\sqrt[3]{1\cdot1\cdot1\cdot8}=2$, 所以

$$I-\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&0&0&0\\0&\frac12&0&0\\0&0&\frac12&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}.$$

则

$$X=3\begin{pmatrix}\frac12&0&0&0\\0&\frac12&0&0\\0&0&\frac12&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}^{-1}=3\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-\frac13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

总习题14 设$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1\\3-x&5-3x^2&3x^3+5\\2x^2&3x^5-1&7x^8-1\end{vmatrix}$, 试证存在常数$c$ $(0<c<1)$, 使得$f'(c)=0$.

证 对$f(x)$进行化简, 得

$$f(x)\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\3-x&-3x^2+x+2&3x^3+x+2\\2x^2&3x^5-2x^2-1&7x^8-2x^2-1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-3x^2+x+2&3x^3+x+2\\3x^5-2x^2-1&7x^8-2x^2-1\end{vmatrix}.$$

由2阶行列式的定义知$f(x)$是x的10次多项式, 显然在闭区间[0, 1]上连续, 在开区间(0, 1)内可导, 且因为$f(0)=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0$, $f(1)=\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=0$, 所以$f(0)=f(1)$, 则由罗尔定理知存在常数$c\ (0<c<1)$, 使得$f'(c)=0$.

总习题15 证明: 如果一个$n\ (n\geq 2)$阶行列式的所有元素不是1就是-1, 则该行列式是偶数.

证 设$n\ (n\geq 2)$阶行列式为$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 其中$a_{ij}=1$或$-1$.

因为

$$D_n \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \cdots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

而由$a_{ij}=1$或-1易知$a_{1j}+a_{2j}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$只可能是2, -2或0这三数, 因此D_n的第一行的n个元素有公因子2, 则由行列式的性质知该行列式是偶数.

总习题16 证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}\ (n\geq 2).$$

证 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$
\xlongequal[\substack{\cdots\\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\
0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
0 & x-2 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\
0 & x-2 & x-3 & -3 & \cdots & -3 & -3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & x-2 & x-3 & x-4 & \cdots & 2-n & 2-n \\
0 & x-2 & x-3 & x-4 & \cdots & x-(n-1) & 1-n
\end{vmatrix}_n
$$

$$
=\begin{vmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
x-2 & -2 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\
x-2 & x-3 & -3 & -3 & \cdots & -3 & -3 \\
x-2 & x-3 & x-4 & -4 & \cdots & -4 & -4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x-2 & x-3 & x-4 & x-5 & \cdots & 2-n & 2-n \\
x-2 & x-3 & x-4 & x-5 & \cdots & x-(n-1) & 1-n
\end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
\xlongequal[\substack{\cdots\\ r_{n-1}-(n-1)r_1}]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}}
\begin{vmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x+1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x+2 & x+1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x+(n-2) & x+(n-1) & x+n & x+(n+1) & \cdots & 0 & 0 \\
x+(n-3) & x+(n-2) & x+(n-1) & x+n & \cdots & x & 0
\end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
=-1\cdot(-1)^{1+(n-1)}
\begin{vmatrix}
x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x+1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x+2 & x+1 & x & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
x+(n-2) & x+(n-1) & x+n & \cdots & x & 0 \\
x+(n-3) & x+(n-2) & x+(n-1) & \cdots & x+1 & x
\end{vmatrix}_{n-2}
$$

$$
=(-1)^{n+1}x^{n-2}.
$$