第一章　行列式

1.1 目的要求

1．会求 n 元排列的逆序数；

2．会用对角线法则计算 2 阶和 3 阶行列式；

3．深入领会行列式的定义；

4．掌握行列式的性质，并且会正确使用行列式的有关性质化简、计算行列式；

5．灵活掌握行列式按（列）展开；

6．理解代数余字式的定义及性质；

7．会用克拉默法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解.

1.2 重要公式和结论

1.2.1　n 阶行列式的定义

n 阶行列式　$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

其中 $p_1p_2\ldots p_n$ 是 n 个数 12…n 的一个排列，t 是此排列的逆序数，Σ 表示对所有 n 元排列求和，故共有 n！项.

1.2.2　行列式的性质

1．行列式和它的转置行列式相等；

2．行列式的两行（列）互换，行列式改变符号；

3．行列式中某行（列）的公因子可提到行列式的的外面，或若以一个数乘行列式等于用该数乘此行列式的任意一行（列）；

4．行列式中若有两行（列）成比例，则该行列式为零；

5．若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变.

1.2.3 行列式按行（列）展开

设 D 为 n 阶行列式，则有

$$\sum_{K=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{K=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

其中 A_{st} 是 a_{st} 的代数余子式.

1.2.4 克拉默法则

1．如果线性非齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有唯一解 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$ （ i=1，2，…，n），其中 D_i 是 D 中第 i 列元素（即 x_i 的系数）换成方程中右端常数项所构成的行列式.

2．如果线性齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组只有唯一零解．若齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$．

1.2.5 一些常用的行列式

1．上、下三角形行列式等于主对角线上的元素的积.

2．设 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=D_1D_2.$$

3．范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$.

1.2.6 计算行列式的常用方法

1．利用对角线法则计算行列式，它只适用于 2、3 阶行列式；

2．利用 n 阶行列式定义计算行列式；

3．利用行列式的性质化三角形法计算行列式；

4．利用行列式按某一行（列）展开定理计算行列式；

5．利用数学归纳法计算行列式；

6．利用递推公式计算行列式；

7．利用范德蒙行列式的结论计算特殊的行列式；

8．利用加边法计算行列式；

9．综合运用上述方法计算行列式.

1.3 例题分析

例 1.1 排列 14536287 的逆序数为（ ）

(A) 8　 (B) 7　　 (C)　10　　 (D)　9

解 在排列 14536287 中，1 排在首位，逆序数为 0；4、5、6、8 各数的前面没有比它们自身大的数，故这四个数的逆序数为 0；3 的前面比它大的数有 2 个（4、5），故逆序数为 2；2 的前面比它大的数有 4 个（4、5、3、6），故逆序数为 4；7 的前面比它大的数有 1 个（8），故逆序数为 1；于是这个排列的逆序数为　t=0+0+2+4+1=7，故正确答案为（B）.

例 1.2 下列排列中（　　）是偶排列.

(A)54312　　(B)51432　　(C) 45312　　(D) 654321

解 按照例 1 的方法计算知：排列 54312 的逆序数为 9；排列 51432 的逆序数为 7；排列 45312 的逆序数为 8；排列 654321 的逆序数为 15；故正确答案为（C）.

例 1.3 下列各项中，为某五阶行列式中带正号的项是（　　）.

(A) $a_{13}a_{44}a_{32}a_{41}a_{55}$ (B) $a_{21}a_{32}a_{41}a_{15}a_{54}$ (C) $a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$ (D) $a_{15}a_{31}a_{22}a_{44}a_{53}$

解 由行列式的定义知，每一项应取自不同行不同列的五个元素之积，因此(A)、(B)不是五阶行列式的项，但(C)应取负号，故正确答案为（D）.

例 1.4 行列式 $D_1=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}$, 若 $D_1=D_2$, 则 λ 的取值为（　　）

(A)　2, —1　　(B) 1, —1　　(C)0, 2　　(D)0,1

解 按三阶行列式的对角线法则得 $D_1=(\lambda+1)(\lambda-1)^2, D_2=0$. 若 $D_1=D_2$，则 $(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$，于是 $\lambda=1,-1$，故正确答案为（B）.

例 1.5 方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+\lambda x_3=1\end{cases}$ 有唯一解，则（　　）.

(A) $\lambda\neq-1$ 且 $\lambda\neq-2$ (B) $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ (C) $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq2$ (D) $\lambda\neq-1$ 且 $\lambda\neq2$

解 由克拉默法则知，当所给非齐次线性方程组的系数行列式不等于 0 时，该方程组有唯一解，于是令行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)(\lambda-1)^2\neq0$$

即 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$，故正确答案为（B）.

例 1.6 $D=\begin{vmatrix}2006 & 2008\\ 2004 & 2006\end{vmatrix}=$（ ）.

分析 对于 2、3 阶行列式的计算，元素的数值较小时，可以直接采用对角线法则进行计算；但元素的数值较大时，一般不宜直接采用对角线法则进行计算，而是用行列式的性质进行计算.

解 此题是一个 2 阶行列式，虽然可以直接用对角线法则计算，但因数值较大，计算较繁，因此要仔细观察分析，用行列式的性质求解.

$$D=\begin{vmatrix}2006 & 2008\\ 2004 & 2006\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}-2 & 2008\\ -2 & 2006\end{vmatrix}\overset{c_2+1003c_1}{=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=4,$$

故答案为 4.

例 1.7 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=$（ ）.

分析 如果行列式的各行（列）数的和相同时，一般首先采用的是将各列（行）加到第一列（行），提取第一列（行）的公因子**(简称列（行)加法)** .

解 这个行列式的特点是各列 4 个数的和为 10 ，于是，各行加到第一行，得

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 10 & 10 & 10\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & -2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=160.$$

例 1.8 设 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$，则 x^4 的系数为（ ），x^3 的系数为（ ）.

分析 此类确定系数的题目，首先是利用行列式的定义进行计算．如果用定义比较麻烦时，再考虑用行列式的计算方法进行计算.

解 从 $f(x)$ 的表达式和行列式的定义可知，当且仅当 $f(x)$ 的主对角线的 4 个元素的

积才能得出 x^4，其系数显然是 **2.** 当第一行取 $a_{13}(=1)$ 或 $a_{14}(=2)$，则含 a_{13} 或 a_{14} 的行列式的项中是不出现 x^3，含 $a_{11}(=2x)$ 的行列式的项中是不出现 x^3，于是含 x^3 的项只能是含 a_{12}，a_{21}，a_{33}，a_{44} 的积，故 x^3 的系数为 -1.

故答案为 2，-1.

例 1.9 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&2&2\\3&2&1&4&6\\2&2&2&1&1\\4&3&2&1&0\end{vmatrix}$，则（1）$A_{31}+A_{32}+A_{33}=$（　　），

（2）$A_{34}+A_{35}=$（　　），　　（3）$A_{51}+A_{52}+A_{53}+A_{54}+A_{55}=$（　　）.

分析 此类题目一般不宜算出表达式里每一项的值，而是注意观察要求的表达式的结构，充分利用按行（列）展开的计算方法来进行技巧计算.

解 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+2(A_{34}+A_{35})=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&2&2\\1&1&1&2&2\\2&2&2&1&1\\4&3&2&1&0\end{vmatrix}=0$（第 2，3 行相同）

即　$(A_{31}+A_{32}+A_{33})+2(A_{34}+A_{35})=0$.　同理　$2(A_{31}+A_{32}+A_{33})+(A_{34}+A_{35})=0$

于是 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=0$，$A_{34}+A_{35}=0$.

$$A_{51}+A_{52}+A_{53}+A_{54}+A_{55}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&2&2\\3&2&1&4&6\\2&2&2&1&1\\1&1&1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_4+r_2}{=\!=}\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&2&2\\3&2&1&4&6\\3&3&3&3&3\\1&1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

故答案为 0，0，0.

例 1.10 $D=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&\vdots&2&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&2005&\cdots&0&0&0\\2006&0&\cdots&0&0&0\\0&0&\cdots&0&0&2007\end{vmatrix}$.

分析 当行列式中有较多零元素时，一般可以采用行列式的定义或按行(列)展开来计算.

解 此行列式刚好只有 n 个非零元素 $a_{1n-1}, a_{2n-2}, \cdots, a_{n-11}, a_{nn}$，故非零项只有一项：

$$(-1)^t a_{1n-1}a_{2n-2}\cdots a_{n-11}a_{nn}，其中\ \ t=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

因此 $$D=(-1)^{\frac{(2007-1)(2007-2)}{2}}2007!=-2007!.$$

此题也可以按行(列)展开来计算.

例 1.11 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$$

解法 1 （行（列）加法）

因为这个行列式的每一行的 n 个元素的和都为 n+1, 所以将第 2,3,⋯, n 列都加到第一列上，得

$$D_n=\begin{vmatrix}n+1&1&1&\cdots&1\\n+1&2&1&\cdots&1\\n+1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n+1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}\underline{\underline{r_i-r_1,(i=2,3,\cdots n)}}$$

$$(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=n+1$$

解法 2 （加边法）

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\1&2&1&1&\cdots&1\\1&1&2&1&\cdots&1\\1&1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}\underline{\underline{c_i-c_1(i=2,3,\cdots,n+1)}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_{n+1}} \begin{vmatrix} n+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n+1.$$

解法 3 （利用行列式的性质）

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - r_1 (i=2,3,\cdots,n)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n+1.$$

例 1.12 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

解 当 n=2 时，$D_2 = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(y_2-y_1)$

当 n⩾3 时，$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \cdots & (x_2-x_1)y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n-x_1)y_1 & (x_n-x_1)y_2 & \cdots & (x_n-x_1)y_n \end{vmatrix} = 0$.

例 1.13 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

其中 $x_i \neq 0 (i \neq 1,2,\cdots,n)$.

解 因 $D_1 = |a_1 + x_1| = a_1 + x_1 = x_1(1+\frac{a_1}{x_1})$，

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 \\ -x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 (1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2})，$$

归纳推得 $D_n = x_1 x_2 \cdots x_n (1+\frac{a_1}{x_1}+\cdots+\frac{a_n}{x_n})$.

用数学归纳法证明上式，假设当 k=n-1 时结论成立，即

$$D_{n-1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} (1+\frac{a_1}{x_1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}).$$

则当 k=n 时，将 D_n 按第 n 列展开，得

$$D_n = x_n D_{n-1} + (-1)^{1+n} a_n (-x_1)(-x_2)\cdots(-x_{n-2})(-x_{n-1})$$

$$= x_n D_{n-1} + (-1)^{1+n}(-1)^{n-1} a_n x_1 x_2 \cdots x_{n-2} x_{n-1}$$

$$= x_n D_{n-1} + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} x_{n-1} x_n \frac{a_n}{x_n} = x_1 x_2 \cdots x_n (1+\frac{a_1}{x_1}+\cdots+\frac{a_n}{x_n})$$

即当 k=n 时结论也成立，故对一切自然数结论都成立.

例 1.14 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

解 （利用范德蒙行列式计算）

$$D_n = D_n^T = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!.$$

例 1.15 计算 $D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}$.

解 按第一列把D_n分成两个行列式的和

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\alpha D_{n-1}+\begin{vmatrix}\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta\end{vmatrix}=\alpha D_{n-1}+\beta^n \qquad (1)$$

$$D_n=\begin{vmatrix}\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\beta D_{n-1}+\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha\end{vmatrix}=\beta D_{n-1}+\alpha^n \qquad (2)$$

(a) 当$\alpha\neq\beta$时，由（1）（2）得 $\alpha D_{n-1}+\beta^n=\beta D_{n-1}+\alpha^n$，则$D_{n-1}=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$.

于是 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

(b) 当$\alpha=\beta$时，由（1）得 $D_n=\alpha D_{n-1}+\alpha^n=\cdots=(n+1)\alpha^n$.

例 1.16 设 $a>b>c>0$，证明：$\dfrac{1}{ab+bc+ca}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}<0$.

证明 将行列式的第 1 行×$(a+b+c)$，第 2 行×(-1)，然后加到第 3 行，得

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ ab+bc+ca & ab+bc+ca & ab+bc+ca \end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)(c-a)(c-b)(b-a)$$

于是，不等式的左边$=(c-a)(c-b)(b-a)$.由于 $a>b>c>0$,从而 $(c-a)<0$，$(c-b)<0,(b-a)<0$，因此，当$a>b>c>0$时,

$$\frac{1}{ab+bc+ca}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}<0.$$

例 1.17 设 $f(x),g(x),h(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导，试证：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得$H'(\xi)=0$.其中 $H(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$.

证明 由题设知 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导，又由行列式的性质可知 $H(a)=H(b)=0$，于是由洛尔中值定理可知，至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$H'(\xi)=0$.

1.4 独立作业

1.4.1 基础训练

1．设$D=|a_{ij}|$为n阶行列式,则$a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1n}a_{n1}$在行列式中的符号为(　　).

(A) 正　　(B) 负　　(C) $(-1)^{n-1}$　　(D) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

2．行列式D_n为 0 的充分条件是（　　）.

(A) 零元素的个数大于 n;　　　(B) D_n 中各行元素的和为零；

(C) 次对角线上元素全为零;　　　(D) 主对角线上元素全为零.

3．行列式 D_n 不为零，利用行列式的性质对 D_n 进行变换后，行列式的值（　）.

(A) 保持不变；　　　(B) 可以变成任何值；

(C) 保持不为零；　　　(D)保持相同的正负号.

4．方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ 的根为　　（　）.

(A) 1，2，-2　　(B)1，2，3　　(C)1，-1，2　　(D)0，1，2

5．如果 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4$，则 $D_1 = \begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{13} - a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{23} - a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{33} - a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} =$（　）.

(A)-12　　(B)12　　(C)48　　(D)-48

6．行列式 $\begin{vmatrix} 4251 & 6251 \\ 7092 & 9092 \end{vmatrix} =$（　）.

7．$\begin{vmatrix} \log a^b & 1 \\ 1 & \log b^a \end{vmatrix} =$ (　).

8．行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ d & b & c \end{vmatrix}$，则 $A_{11} + A_{21} + A_{31} =$（　）.

9．函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 3 \\ x & -x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中, x^3 的系数为（　）.

10．$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 \end{vmatrix} =$ (　).

11. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$,

12. $D=\begin{vmatrix} 0 & y & 0 & x \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$

13. $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$,

14. $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$,

16. $\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 & x_2+y_4 \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 & x_3+y_4 \\ x_4+y_1 & x_4+y_2 & x_4+y_3 & x_4+y_4 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$,（其中 $a_i \neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$）

18. $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ $(x_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$

19. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix}$,

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$

21. $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$.

22．当μ取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+4x_2+(\mu-1)x_3=0\\(\mu-3)x_1+x_2-2x_3=0\\-x_1+(1-\mu)x_2-x_3=0\end{cases}$有非零解？

23．证明$\begin{vmatrix}2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=\dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$

(其中$\sin\alpha\neq 0$).

1.4.2　提高练习

1．设A为 n 阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，则$\left||A|A^*\right|$为（　　　）

(A) $|A|^2$　　　(B) $|A|^{2n-1}$　　　(C) $|A|^{2n}$　　　(D) $|A|^n$

2．设A为 n 阶方阵，B为 m 阶方阵，$\begin{vmatrix}0 & B\\ A & 0\end{vmatrix}=$ (　　).

(A) $-|A||B|$　　　(B) $|A||B|$　　　(C) $(-1)^{mn}|A||B|$　　　(D) $(-1)^{m+n}|A||B|$

3．若$g(x)=\begin{vmatrix}x & -x & -1 & x\\ 2 & 2 & 3 & x\\ -7 & 10 & 4 & 3\\ 1 & -7 & 1 & x\end{vmatrix}$，则$x^2$的系数为（　　　）.

(A) 29　　　(B) 38　　　(C) —22　　　(D) 34

4．$g(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$，则方程$g(x)=0$的根的个数为（　　）.

(A)1　　　(B)2　　　(C)3　　　(D)4

5．当 $a \neq$（　　）时，方程组 $\begin{cases} ax+z=0 \\ 2x+ax+z=0 \\ ax-2y+z=0 \end{cases}$ 只有零解.

(A)-1　　　　(B) 0　　　　(C) -2　　　　(D) 2

6．排列 $r_1r_2r_3\cdots r_n$ 可经过（　　）次对换后变为排列 $r_nr_{n-1}r_{n-2}\cdots r_1$.

7．四阶行列式中带负号且含有因子 a_{12} 和 a_{21} 的项为（　　）.

8．设 x, y 为实数，则当 $x=$（　　），$y=$(　　)时，$\begin{vmatrix} x & -y & 0 \\ y & x & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$.

9．设 A 为 4 阶方阵，B 为 5 阶方阵，且 $|A|=2, |B|=-2,$ 则 $\left|-|B|A\right|=($　　$),$

$\left|-|A|B\right|=$（　　）.

10．设 A, B 为 n 阶方阵，且 $|A|=3, |B|=-2,$ 则 $\left|3A^*B^{-1}\right|=($　　$).$

11．设 A 为 3 阶正交矩阵，$|A|>0$，若 $|3A+B|=7$，则 $\left|E+\frac{1}{2}AB^T\right|=$（　　）.

12．设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，则 $\left|E+2A^{-1}\right|=$（　　　）.

13．解方程组 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ 1 & b_2 & b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_n & b_n^2 & \cdots & b_n^n \end{vmatrix}=0$，其中 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ 为各不相同的常数.

14．证明：$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx}a_{i1}(x) & \frac{d}{dx}a_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}a_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$

15．设 $g(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$，求 $g'(x)$.

16．设 $g(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-3 & 3x^2-5 & 1-3x^2 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$，试证：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $g'(\xi)=0$.

17．证明：奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

18．设 x,y,z 是互异的实数，证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}=0 \text{ 的充要条件是 } x+y+z=0.$$

19．设 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 的值，其中 $A_{4i}\,(i=1,2,3,4)$ 是 $|A|$ 的代数余子式.

20．利用克莱默法则求解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ x_1-2x_2+2x_3=3 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$.

21．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ x & \sin x & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$.

第一章　参考答案

1.4 独立作业

1.4.1　基础训练

1．(C)　　2．(B)　　3．(C)　　4．(A)　　5．(B)

6．解 $\begin{vmatrix} 4251 & 6251 \\ 7092 & 9092 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4251 & 2000 \\ 7092 & 2000 \end{vmatrix} = 2000 \times \begin{vmatrix} 4251 & 1 \\ 7092 & 1 \end{vmatrix} = 5682000.$

7．0 ，　　8． 解 $A_{11} + A_{21} + A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{vmatrix} = 0$，故答案为 0

9．解 因为在此行列式的展开式中，含有 x^3 的只有主对角线上的元素的积，故答案为 -2

10．解 由范德蒙行列式得行列式的值为 288

11．解 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

12．解 $D = \begin{vmatrix} 0 & y & 0 & x \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix} = -y \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & y \\ y & x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ y & 0 & x \end{vmatrix}$

$$= y^2 \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = -(x^2 - y^2)^2$$

13．解 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 20$$

14．解 $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 0 & y-x & -z(y-x) \\ 0 & z-x & -y(z-x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & -y \end{vmatrix}$

$$= (x-y)(y-z)(z-x)$$

15．解 $\begin{vmatrix}5&3&0&0&0\\2&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0&0&0\\2&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&3&0&0&0\\0&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}2&3&0&0&0\\0&2&3&0&0\\0&0&2&3&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&3&0&0&0\\0&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}=2^5+3\begin{vmatrix}5&3&0&0\\2&5&3&0\\0&2&5&3\\0&0&2&5\end{vmatrix}=\cdots=665$

16．解 $\begin{vmatrix}x_1+y_1&x_1+y_2&x_1+y_3&x_1+y_4\\x_2+y_1&x_2+y_2&x_2+y_3&x_2+y_4\\x_3+y_1&x_3+y_2&x_3+y_3&x_3+y_4\\x_4+y_1&x_4+y_2&x_4+y_3&x_4+y_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+y_1&y_2-y_1&y_3-y_1&y_4-y_1\\x_2+y_1&y_2-y_1&y_3-y_1&y_4-y_1\\x_3+y_1&y_2-y_1&y_3-y_1&y_4-y_1\\x_4+y_1&y_2-y_1&y_3-y_1&y_4-y_1\end{vmatrix}$

=0

17. 解 $D_n=\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3&\cdots&b_{n-1}&b_n\\-a_1&a_2&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}&a_n\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}b_n\times\begin{vmatrix}-a_1&0&0&\cdots&0\\0&-a_2&0&\cdots&0\\0&0&-a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}\end{vmatrix}$

$+a_n\times\begin{vmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_{n-2}&b_{n-1}\\-a_1&a_2&\cdots&0&0\\0&-a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\frac{b_n}{a_n}+a_nD_{n-1}=\cdots=a_1a_2\cdots a_n(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i})$

18．解 由第 i（$i=1,2,\cdots,n$）列的 $-\frac{1}{x_i}$ 倍加到第一列上去.

$$D=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&x_1&0&\cdots&0\\1&0&x_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}&1&1&\cdots&1\\0&x_1&0&\cdots&0\\0&0&x_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix}=-x_1x_2\cdots x_n(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i})$$

19．解 $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1 & -x_1 & -x_1 & -x_1 \\ 1 & x_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+x_1+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_1}{x_4} & -x_1 & -x_1 & -x_1 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3$$

20．解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$

21．解 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ n+1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ n+1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$

$$= (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n+1$$

22．解 由齐次线性方程组有非零解的条件可知 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & \mu-1 \\ \mu-3 & 1 & -2 \\ -1 & 1-\mu & -1 \end{vmatrix} = 0$

解之得 μ =0,2,3. 于是当 μ =0，2，3 时，齐次方程组 $\begin{cases} 2x_1+4x_2+(\mu-1)x_3=0 \\ (\mu-3)x_1+x_2-2x_3=0 \\ -x_1+(1-\mu)x_2-x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

23．证明 (1)当 $n=1$ 时，结论显然成立, (2)假设当 $n \le k$ 时,结论成立, (3)当 $n=k+1$ 时

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}_{k+1}$$

$$=2\cos\alpha D_k+(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}_k$$

$$=\frac{2\cos\alpha\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}-D_{k-1}=\frac{2\cos\alpha\sin k\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin(k+2)\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin[(k+1)+1]\alpha}{\sin\alpha}$$

故结论成立.

1.4.2 提高练习

1．B， 2．C， 3．D， 4．B， 5．D, 6． $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ， 7． $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$

8．0, 0, 9．32, 64， 10． $-\dfrac{3^{2n-1}}{2}$， 11． $\dfrac{7}{27}$， 12．6

13．提示：用范德蒙行列式将行列式展开求解，答案为 $x=b_i$，（$i=1,2,\cdots,n$），

14．(用行列式的定义和导数的运算法则)

证明 $$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}=\frac{d}{dx}(\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1}(x)a_{1p_2}(x)\cdots a_{1p_n}(x))=$$

$$(\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1}(x)a_{1p_2}(x)\cdots\frac{d}{dx}(a_{1p_i}(x))\cdots a_{1p_n}(x))=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{d}{dx}a_{i1}(x) & \frac{d}{dx}a_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}a_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

15．利用(14)的结论进行计算便可得结果，答案为 $6x^2$.

16．（用罗尔中值定理证）**证明** （1）显然 $g(x)$ 是多项式，故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$

内可导，且 $g(0)=g(1)=0$ ，从而由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g'(\xi)=0$.

17．用行列式的性质 3 的推论（同济四版）

18．证明 $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^3&y^3&z^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\x&y-x&z-x\\x^3&y^3-x^3&z^3-x^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y-x&z-x\\y^3-x^3&z^3-x^3\end{vmatrix}$

$$=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1&1\\y^2+xy+x^2&z^2+xz+x^2\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z-y)(x+y+z)=0$$

由于 x,y,z 是互异的实数，故要使上式成立，当且仅当 $x+y+z=0$.

19．解 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}=6$，　　20． $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$

21．解 (用罗必塔法则求解)

$$\lim_{x\to0}\frac{\begin{vmatrix}x^3&x^2&1\\3&2&1\\x&\sin x&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\\sin x&\cos x&1\\0&1&1\end{vmatrix}}=\lim_{x\to0}\frac{\begin{vmatrix}x^3&x^2&1\\3&2&1\\1&\cos x&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3x^2&2x&0\\3&2&1\\x&\sin x&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\\cos x&-\sin x&0\\0&1&1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0&0&1\\3&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&0\\3&2&1\\0&0&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}}=1$$