程序设计与算法基础2

数据结构与算法

主讲教师： 刘峤

第6章 数组及广义表

第6章 内容提要

6.1 数组的定义

6.2 数组的顺序存储

6.3 矩阵的压缩存储

6.4 广义表（**自学**）

数组

- **数组的定义和特点**
  - **定义：数组是一种特殊的线性表**
    - **即：线性表中的数据元素本身也是一个线性表**
- **数组特点**
  - **数组结构固定**
  - **数据元素同构**

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

以行序为主序

以列序为主序

- 数组运算
  - **给定一组下标，存取相应的数据元素**
  - **给定一组下标，修改数据元素的值**

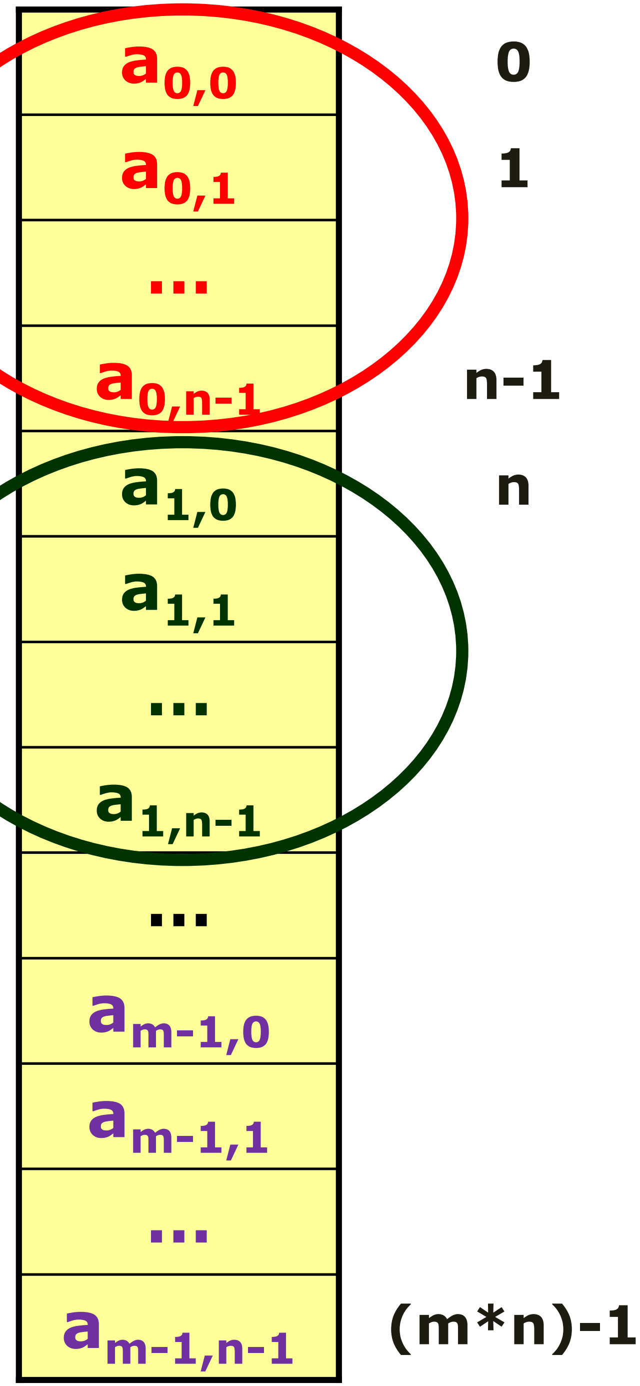
$$A_{m\times n}=((a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}),(a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}),\ldots,(a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}))$$

$$A_{m\times n}=\left[\begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}\right]$$

数组的顺序存储结构

- **次序约定**
  - 以行序为主序进行存储
  - 以列序为主序进行存储

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots & \cdots & a_{m-1,n-1} \end{bmatrix}$$



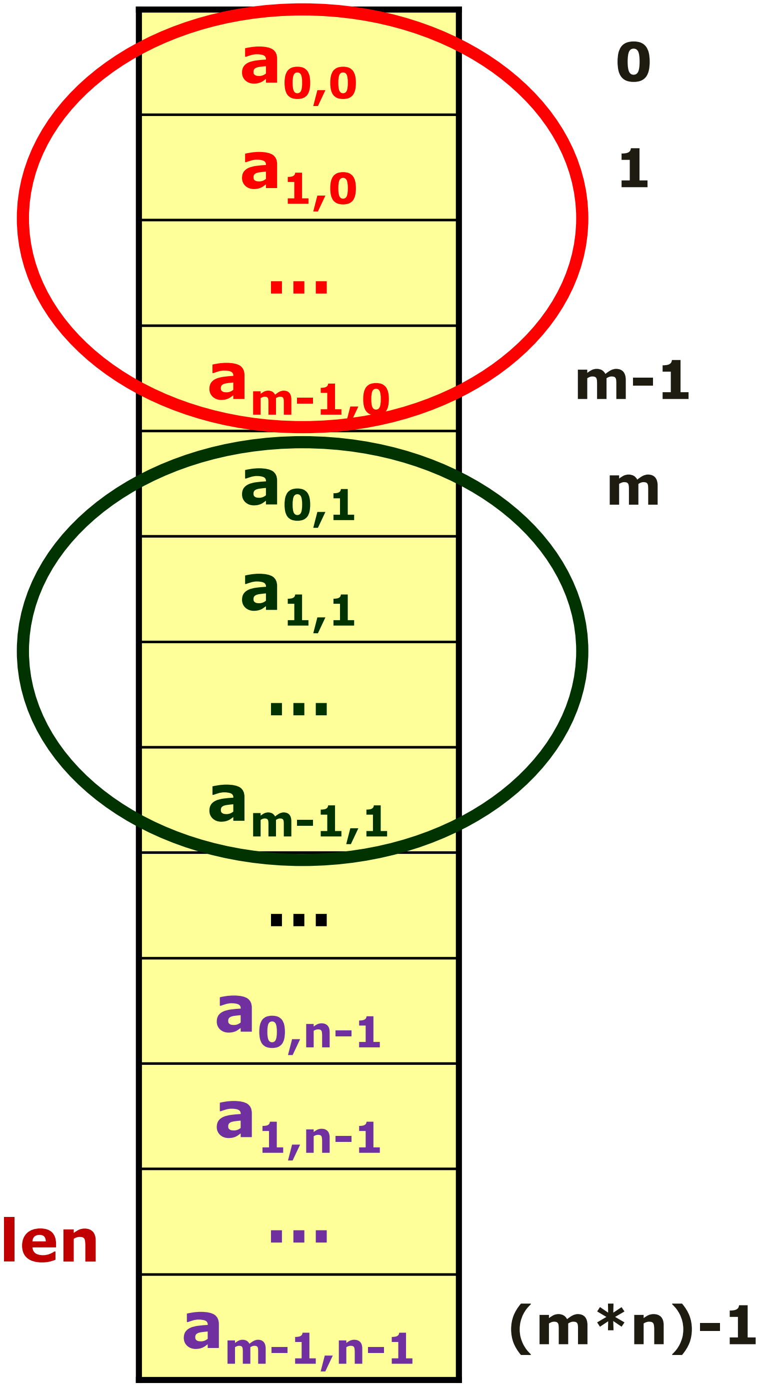
$$Loc(i, j) = Loc(0,0)+(i\times n+j)\times len$$

len = sizeof(A[0][0])

数组的顺序存储结构

- **次序约定**
  - 以行序为主序进行存储
  - 以列序为主序进行存储

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots & \cdots & a_{m-1,n-1} \end{bmatrix}$$



$Loc(i, j) = Loc(0,0)+(j\times m+i)\times len$

len= sizeof(A[0][0])

数组的顺序存储结构

- 示例：设数组A[20][30]的基地址为1000
  - 设：每个元素占2个存储单元
  - 若以行为主序顺序存储，计算元素A[5, 6]的存储地址

$$\mathbf{Loc(i, j) = Loc(0,0)+(i\times n+j)\times len}$$

$$\mathbf{= 1000+（5\times 30 + 6）\times 2 = 1312}$$

  - 若以列为主序顺序存储，计算元素A[7, 8]的存储地址

$$\mathbf{Loc(i, j) = Loc(0,0)+(j\times m+i)\times len}$$

$$\mathbf{= 1000+（8\times 20 + 7）\times 2 = 1334}$$

数组的顺序存储结构

- 推广：对于n维数组（按行主序存储），有：

$$\mathrm{Loc}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$= \mathrm{Loc}(0,\ldots,0) + (b_2 \times \ldots b_n \times a_1 +$$

$$b_3 \times \ldots b_n \times a_2 + \ldots + b_n \times a_{n-1} + a_n) \times len$$

$$= \mathrm{Loc}(0,\ldots,0)+(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \prod_{k=i+1}^{n} b_k + a_n) \times len$$

其中：b_i 为数组第 i 维的下标

矩阵的压缩存储

对称矩阵：$a_{ik} = a_{ki}$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

稀疏矩阵：除个别外多数元素为零

$$
\begin{bmatrix}
0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\
0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

三角矩阵：右上角或左下角元素为零

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

对角矩阵：除对角元素外其余元素为零

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & & a_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

矩阵的压缩存储：对称矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

按行主序存储：只需要存储下三角矩阵的元素值即可

a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	…	a_{n1}	…	a_{nn}

k = 0　1　2　3　4　……　n(n-1)/2　……　n(n+1)/2 - 1

怎样确定下标?

$$k = i(i-1)/2 + j - 1$$

矩阵的压缩存储：三角矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

按行主序存储：与对称矩阵类似

a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	…	a_{n1}	…	a_{nn}
k = 0	1	2	3	4	……	n(n-1)/2	……	n(n+1)/2 - 1

怎样确定下标？ $k = i(i-1)/2 + j - 1$

矩阵的压缩存储：对角矩阵

$$
a_{10}\quad
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & & a_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

按行主序存储

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	···	···	$a_{n,n-1}$	a_{nn}
k = 0	1	2	3	4	······	······	······	3n-2 - 1

怎样确定下标?

$$k = 2 \times i + j - 3$$

矩阵的压缩存储：稀疏矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 定义：非零元较零元少，且分布没有一定规律的矩阵
- 压缩存储：只存矩阵的行列维数以及非零元的行列下标和值
- 稀疏矩阵特点：矩阵由非零元素集合和矩阵维数唯一确定
  - **非零元素集合：** {(1,2,12), (1,3,9), (3,1,-3), (3,6,14), (4,3,24), (5,2,18), (6,1,15), (6,4,-7) }
  - **矩阵维数：** (6, 7)

矩阵的压缩存储：稀疏矩阵

- 采用顺序存储结构：三元组表

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列下标　nrow　ncol　val　非零元值

	nrow	ncol	val
0	6	7	8
1	矩阵维数		元素个数
2	1	3	9
3	3	1	-3
4	3	6	14
5	4	3	24
6	5	2	18
7	6	1	15
8	6	4	-7

ma

ma[0].i，ma[0].j，ma[0].v 分别存放矩阵行列维数和非零元个数

三元组表所需存储单元个数为

3(n+1)

其中n为矩阵中的非零元个数

矩阵的压缩存储：稀疏矩阵

- 采用顺序存储结构：三元组表

行列下标	nrow	ncol	val	非零元值
0	6	7	8	
1	1	2	12	
2	1	3	9	
3	3	1	-3	
4	3	6	14	
5	4	3	24	
6	5	2	18	
7	6	1	15	
8	6	4	-7	

ma

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
#define   MAXSIZE   20
typedef  struct {
    int  nrow, ncol;
    ElemType val;
}Triplet;
typedef struct{
    Triplet * T;
    int  m, n, ne;
}TMatrix;
```

矩阵的压缩存储示例：求稀疏矩阵的转置

$$A[m][n] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 问题：已知稀疏矩阵的三元组表，求转置矩阵的三元组表
- 分析：首先考虑一般情况　　**思考：如果是三元组表怎么办?**
  - 已知维度为m×n的矩阵A，求其转置矩阵B

```
for(row=0; row<m; ++row)
    for(col=0; col<n; ++col)
        B[col][row]=A[row][col];
```

算法复杂度?

T(n)=O(m×n)

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6\times 7}$$

$$B = A'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 15 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{7\times 6}$$

怎样实现?

	i	j	d
0	6	7	8
1	1	2	12
2	1	3	9
3	3	1	-3
4	3	6	14
5	4	3	24
6	5	2	18
7	6	1	15
8	6	4	-7

ma

	i	j	d
0	7	6	8
1	1	3	-3
2	1	6	15
3	2	1	12
4	2	5	18
5	3	1	9
6	3	4	24
7	4	6	-7
8	6	3	14

mb

矩阵的压缩存储示例：求稀疏矩阵的转置

- 编程思路
  - 将矩阵行、列维数互换
    - 处理ma的第一行
  - 将每个三元组中的 i 和 j 相互调换
  - 对三元组重新排序
    - 使mb中元素按行主序方式排列

	i	j	d
0	6	7	8
1	1	2	12
2	1	3	9
3	3	1	-3
4	3	6	14
5	4	3	24
6	5	2	18
7	6	1	15
8	6	4	-7

ma

矩阵的压缩存储示例：求稀疏矩阵的转置

- 方法一：按ma的列序实现矩阵转置
  - 根据mb的行主序：依次在ma中查找相应的三元组
    - 为找出ma每一列所有非零元素，需对其进行一次全局扫描
    - 由于ma按行主序存储，由此得到的mb也是按行主序存储
  - 算法复杂度：设 $\mathbf{ma}_{\mathbf{m\times n}}$ 中的非零元素个数为 **e**

$$\mathbf{T(n)=O(n \times e)}$$

  - 若 **e** 与 **m×n** 同数量级，则

$$T(n) = O(m \times n^2)$$

求稀疏矩阵的转置：常规方法

```
void transpose(TMatrix *ma, TMatrix *mb){
    mb->m = ma->n; mb->n = ma->m; mb->e = ma->e;
    int s, i, k = 0;
    for( s = 0; s < ma->n; ++s ){
        for( i = 0; i<(ma->e); ++i ){
            if(ma->T[i].ncol == s){
                mb->T[k].nrow = ma->T[i].ncol;
                mb->T[k].ncol = ma->T[i].nrow;
                mb->T[k].val = ma->T[i].val ;
                k++;
            }
        }
    }
}
```

思考：如何提高转置效率？

矩阵的压缩存储示例：求稀疏矩阵的转置

- 方法二：快速转置
  - 从ma中顺序读取元素，转置后放入mb中恰当位置
  - 关键：预先确定A中每一列第一个非零元在mb中位置
    - 转置前应首先求得矩阵A的每一列中非零元个数
  - 实现：设置两个辅助数组
    - num[c]：存放矩阵A的第c列中的非零元个数
    - offset[c]：A中第c列第一个非零元在mb中的位置

$$
\begin{cases}
\textbf{offset[1] = 1;} \\
\textbf{offset[c] = offset[c-1]+num[c-1];}
\end{cases}
$$

$$(2 \le c \le ma[0].n)$$

求稀疏矩阵的转置：快速转置

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

col	1	2	3	4	5	6	7
num[col]	2	2	2	1	0	1	0
offset[col]	1	3	5	7	8	8	9

- 从ma中顺序读取元素，转置后放入mb中恰当位置
  - num[col]：存放矩阵A的第col列中的非零元个数
  - offset[col]：指示A中第col列第一个非零元在mb中的位置
- 算法分析
  - **T(n) = O(ma.n + ma.e)**
  - 若 **ma.e** 与**m×n**同数量级：**T(n)=O(m×n)**

col	1	2	3	4	5	6	7
~~num[col]~~	~~2~~	~~2~~	~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
offset[col]	3	5	7	8	8	9	9

offset[col] ++

p

	i	j	d
0	6	7	8
1	1	2	12
2	1	3	9
3	3	1	-3
4	3	6	14
5	4	3	24
6	5	2	18
7	6	1	15
8	6	4	-7

ma

	i	j	d
0	7	6	8
1	1	3	-3
2	1	6	15
3	2	1	12
4	2	5	18
5	3	1	9
6	3	4	24
7	4	6	-7
8	6	3	14

mb

电子科技大学

UeSTC

1956