力学·运动学

1.2 参照物与参考系

1.2.1 参照物与参考系的基本概念

参照物：被选取、且能用来描述物体运动状态的物体

参考系：固定在参照物之上的数学坐标系

1.2.2 数学知识复习——矢量及其运算法则

(1) 矢量的相关定义

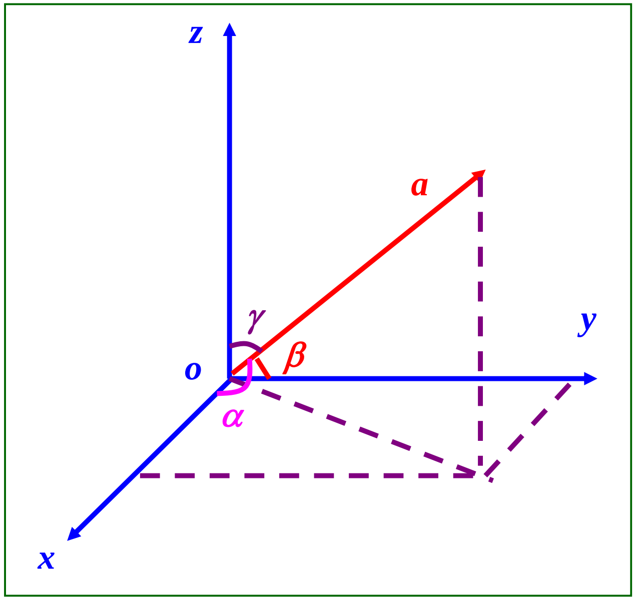
矢量：有大小、方向，且满足确定加法、乘法运算的物理量 (物理学)

矢量的直角坐标表示 $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$

矢量的摸 $|\vec{a}| \equiv \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (直角坐标系表示)

矢量的方向 $\vec{e}_a = (\cos\alpha)\vec{e}_x + (\cos\beta)\vec{e}_y + (\cos\gamma)\vec{e}_z$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



矢量加法运算 满足平行四边形法则

矢量减法运算 $\vec{a}-\vec{b}\equiv\vec{a}+(-\vec{b})$

矢量数乘运算 $k\vec{a}\equiv k|\vec{a}|\vec{e}_a$

矢量标积运算 $\vec{a}\cdot\vec{b}\equiv|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

矢量矢积运算 $\vec{a}\times\vec{b}\equiv|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

(2) 矢量运算法则

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律)

$(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{d})$ (结合律)

加法运算，四边形法则

$$\left.\begin{array}{ll}
\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} & \text{(标积交换律)}\\
\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} & \text{(标积分配律)}\\
\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} & \text{(矢积分配律)}\\
\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) & \text{(标量三重积)}\\
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) & \text{(矢量三重积)}
\end{array}\right\}\text{乘法运算法则}$$

(3) 矢量微分运算法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f(t)\vec{a}\right]=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\vec{a}+f(t)\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

(4) 矢量积分运算法则

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\vec{e}_i\right)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{t_1}^{t_2}a_i\,\mathrm{d}t\right)\vec{e}_i$$

$$\int\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int a_x\mathrm{d}x+\int a_y\mathrm{d}y+\int a_z\mathrm{d}z$$

1.2.3 典型参考系

(1) 直角坐标系

定义：由三条共点(原点)且两两互相垂直的射线构成的坐标系

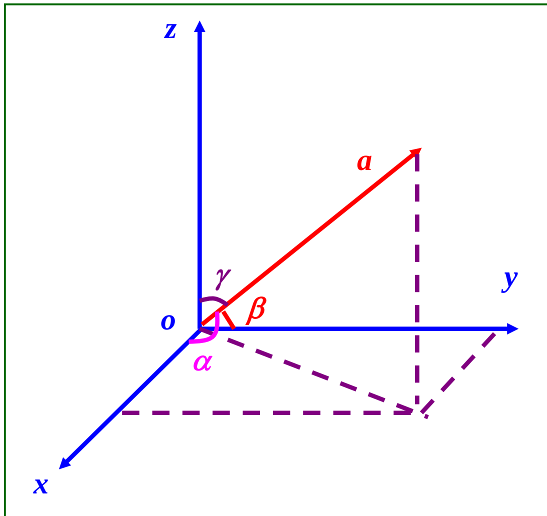
矢量表示 $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$

矢量的摸 $|\vec{a}| \equiv \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

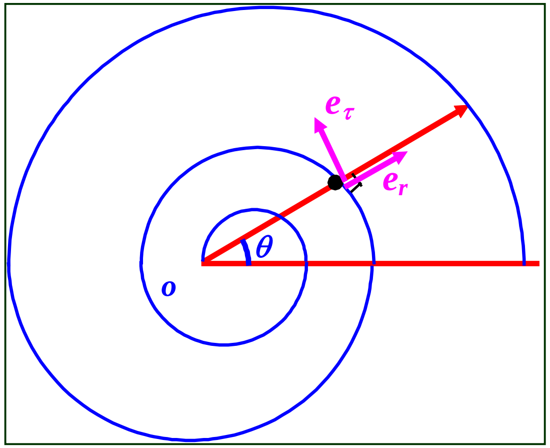
矢量方向 $\vec{e}_a = (\cos\alpha)\vec{e}_x + (\cos\beta)\vec{e}_y + (\cos\gamma)\vec{e}_z$

矢量求导 $$\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = 0$$



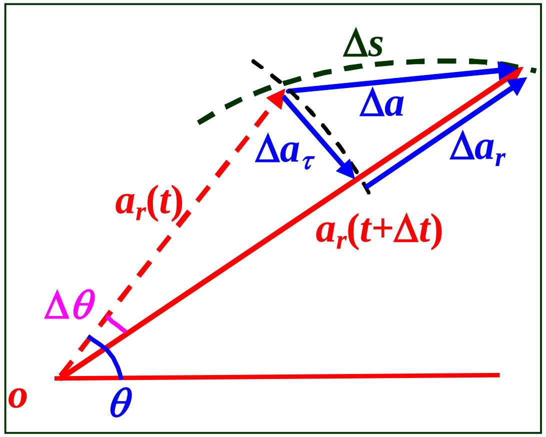
(3) 极坐标系



定义：由共点于原点o的固定直线、射线构成的坐标系，称射线为极轴

矢量表示：$\vec{a} = a_r \vec{e}_r$

矢量求导：$\dfrac{\mathrm{d}(a_r \vec{e}_r)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}a_r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + a_r \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau$



1.3 运动叠加原理与机械运动分类

1.3.1 运动叠加原理

A 同时参与多个矢量运动的物体，将按矢量合成法则运动

B 物体的任意矢量运动，总可按平行四边形法则分解为多方向矢量运动

C 物体同时参与多个矢量运动，其任意分矢量运动互相独立

1.3.2 机械运动的分类

(1) 运动叠加原理对运动描述的启示

- 物体任意复杂的运动，原则上总可以分解为几种典型运动的叠加
- 物体参与任意多种的机械运动，总可以通过合成的方法求出其轨迹
- 物体任一方向的矢量运动，不影响其它方向的矢量运动

(2) 机械运动的分类

机械运动

- 质点运动
- 刚体转动
- 简谐振动
- 简谐波动

1.5.2 描述运动的线参量

(1) 位置矢量与运动方程

位置矢量：时刻t，由坐标原点指向质点的有向线段

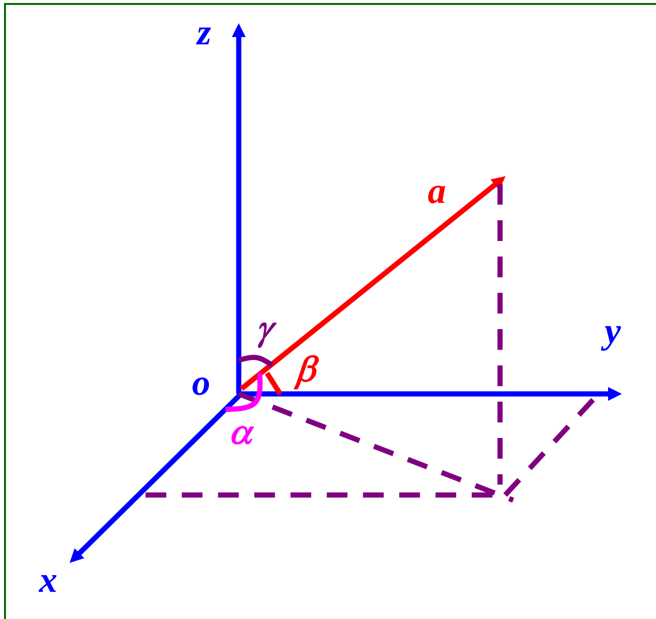
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

位置矢量特征：相对性——参考系，瞬时性——时刻 t，矢量性

运动方程：位置矢量的时间函数

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

轨道方程：质点在空间运动时的轨迹方程

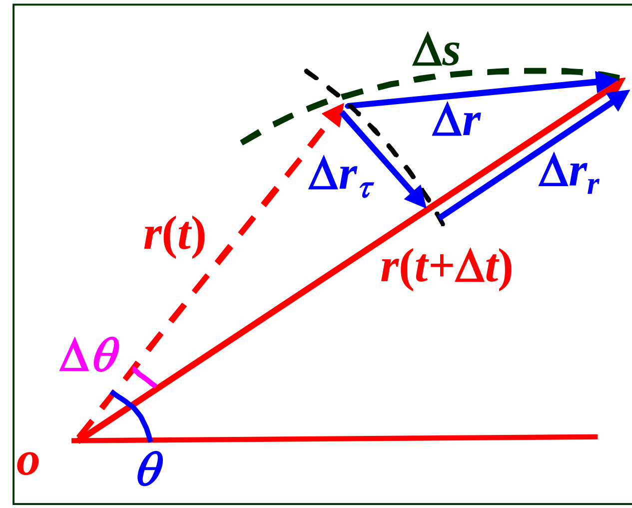


(2) 位移与路程

位移：在时间t内，由初始位矢指向末位矢的有向线段

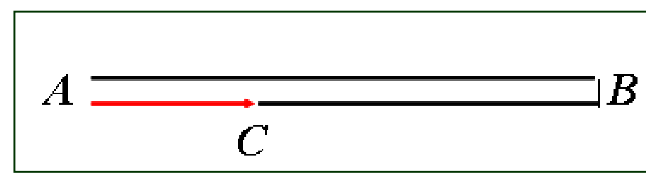
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$



路程：在时间 t 内，物体运动轨迹的长度

注意：路程与位移的区别、联系(略)



(3) 速度与速率

平均速度

$$\overline{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{e}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{e}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{e}_z = \overline{v}_x\vec{e}_x + \overline{v}_y\vec{e}_y + \overline{v}_z\vec{e}_z$$

(瞬时)速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{e}_x+\dfrac{dy}{dt}\vec{e}_y+\dfrac{dz}{dt}\vec{e}_z=v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z$

平均速率 $\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

即时(瞬时)速率 $v\equiv|\vec{v}|=\dfrac{ds}{dt}$

注意

- 即时速度不一定等于平均速度，只有在匀速直线运动情形下两者相等
- 平均速率不一定等于即时速率
- 即时速率与即时速度的大小相等

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=|\vec{v}|$$

(4) 平均加速度与加速度

平均加速度 $\bar{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{e}_x + \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{e}_y + \dfrac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{e}_z = \bar{a}_x\vec{e}_x + \bar{a}_y\vec{e}_y + \bar{a}_z\vec{e}_z$

加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \dfrac{dv_y}{dt}\vec{e}_y + \dfrac{dv_z}{dt}\vec{e}_z = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$

例1.5.3 给出极坐标系下速度、加速度表示

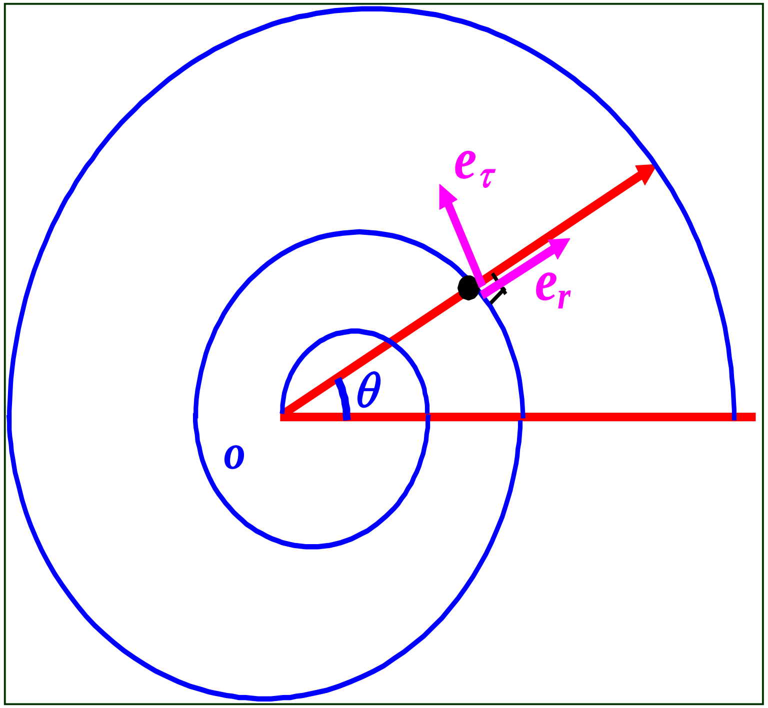
解：在极坐标系中，质点运动的速度

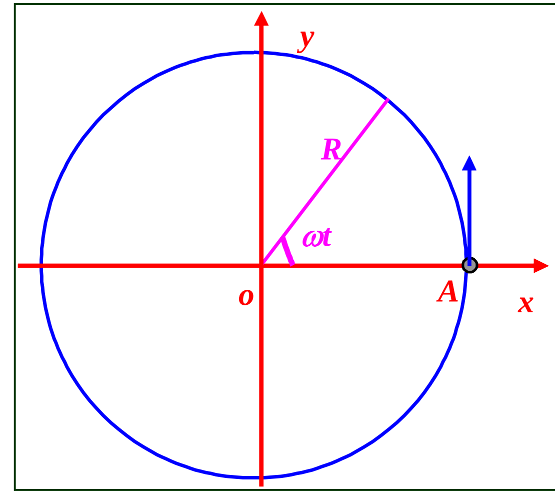
$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

因 $$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\tau = \omega\vec{e}_\tau$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\tau \equiv v_r\vec{e}_r + v_\tau\vec{e}_\tau$$

径向速度，切向速度





例1.5.4：质点从如图所示位置 A 开始做匀速圆周运动

求解：(1) 描述质点的运动状态

(2) 证明速度方向沿圆周切向，加速度指向圆心

解：(1) 运动学方程 $\vec r(t) = R\cos(\omega t)\vec e_x + R\sin(\omega t)\vec e_y$

轨迹方程 $x^2 + y^2 = R^2$

速度 $\vec v(t) = -R\omega\sin\omega t\vec e_x + R\omega\cos\omega t\vec e_y$

加速度 $\vec a(t) = -R\omega^2\cos\omega t\vec e_x - R\omega^2\sin\omega t\vec e_x = -\omega^2\vec r$

(2) 速度方向 $\vec v\cdot\vec r = 0$ **方向沿圆周切向**

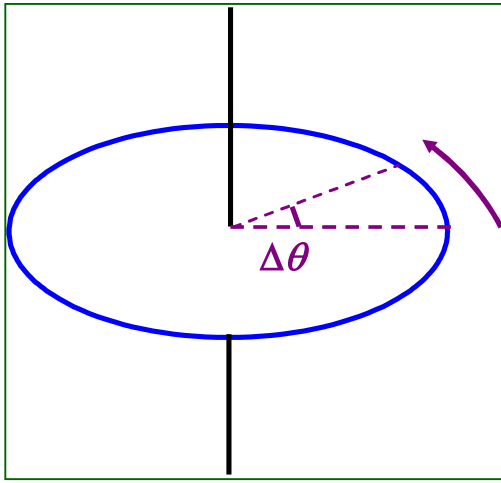
加速度方向 $\vec a(t) = -\omega\vec r$ **方向指向圆心**

1.5.3 描述运动的角参量

(1) 描述刚体运动的角参量

角位移： 物体时间t内绕转轴转过的角度 θ，规定逆时针方向角位移为正

$$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$



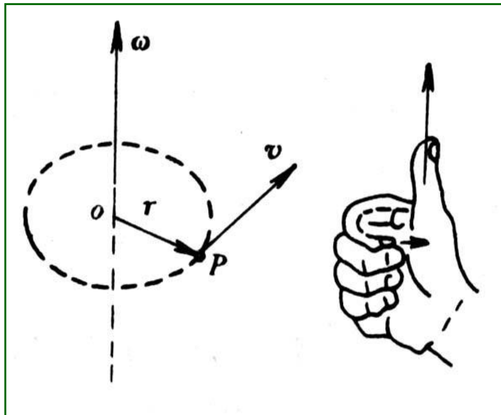
角速度： 时刻 t，角位移随时间的变化率 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度： 时刻 t，角速度随时间的变化率 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

思考题：上述角参量中，是矢量的参量有哪些？

(2) 线参量与角参量的定量关系

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \qquad a_\tau = r\beta$$



力学·质点动力学

2.2 力对物体的瞬时动力学效应——牛顿三定律

2.2.1 牛顿三定律

(1) 牛顿第一定律

物体将保持其相对静止或匀速运动状态，直到外力迫使它改变这种状态

- 惯性：物体保持其相对静止或匀速运动状态的内禀属性
- 惯性状态：物体保持相对静止或匀速直线运动的状态
- 惯性系：满足牛顿第一定律的参考系
- 惯性是保持物体运动状态原因，力是改变物体运动状态原因

(2) 牛顿第二定律

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \text{或} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

- 牛顿第二定律的瞬时性、矢量性、独立性
- 给出了惯性质量与力的量度方法
- 牛顿第二定律定量给出了力、惯性质量、加速度间的关系

瞬时性、矢量性、独立性

$$\begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ F_x = ma_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ F_z = ma_z = m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

(3) 牛顿第三定律

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

- 作用力和反作用力分别作用于不同物体上，各自产生效应
- 作用力和反作用力性质相同，大小相等，方向相反，在同一直线上
- 作用力与反作用力同时存在，同时消失

(4) 牛顿三定律间的关系

- 牛顿第一定律提出惯性、惯性系概念
- 牛顿第二定律给出惯性量度及F、m、a之间的定量关系
- 牛顿第三定律指出受力分析的原则
- 三大定律共同构成牛顿力学体系的基础

2.3 力对物体的时间累积效应——动量定理

2.3.1 描述时间累积效应的动力学参量

冲量 力对时间的累积矢量，称为冲量

积分形式 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$ 微分形式 $\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\mathrm{d}t$

动量 $\vec{p}=m\vec{v}$ （动量、冲量的理解与矢量的理解相类似）

2.3.2 单质点的动量定理

质点所受合外力的冲量等于质点动量的改变量

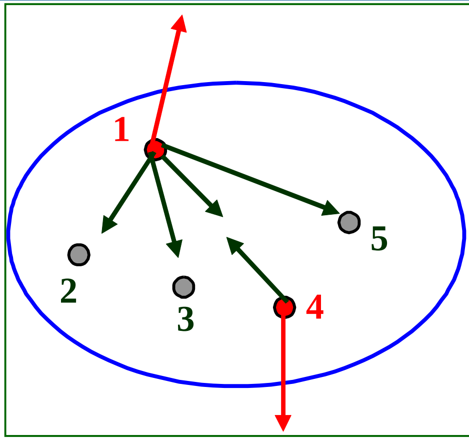
$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1 \qquad \vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}(m\vec{v})$$

推导 $F=ma=\dfrac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}\Rightarrow I=\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=p_2-p_1$

动量定理建立在牛顿第二定律基础上

单质点的动量守恒定理 $mv_1=mv_2$

2.3.3 质点系的动量定理



(1) 相关概念

质点系： 由多个质点构成的物体系

内力： 物体系内部质点间的相互作用力

外力： 物体系所受的来自于物体系以外的作用力，称为外力

(2) 质点系的动量定理

质点系的动量改变量等于其所受合外力冲量的矢量和 $\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} F_i \cdot \mathrm{d}t = p - p_0$

质点系的动量守恒定理 $\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i0}}$

2.4　力对物体的空间效应——能量守恒定律

2.4.1　功与功率

(1) 功和功率

功：力和力方向下位移的乘积，称为力对物体所作的功

记　　微分形式　　$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\left|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right|\cos\theta$

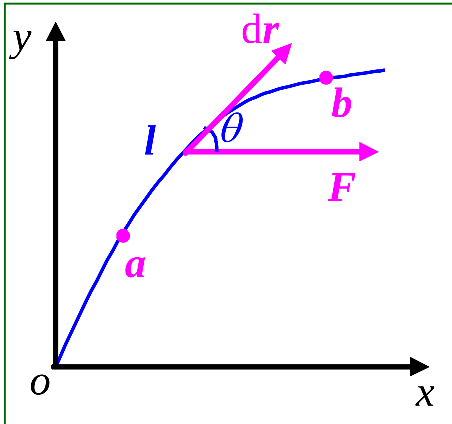
积分形式　　$A = \int_a^b F\cos\theta\left|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| = \int_a^b F\cos\theta\,\mathrm{d}s$

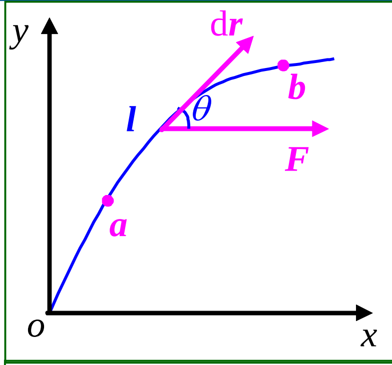
理解： A　$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F(\left|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right|\cos\theta) = (F\cos\theta)\left|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right|$

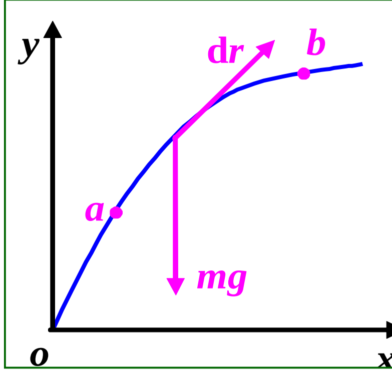
B 功是标量，有正负之分

C 功是相对量

D 功是过程量，不是状态量







E 功的独立性原理

$$A=\int_{x_a}^{x_b}F_x\mathrm{d}x+\int_{y_a}^{y_b}F_y\mathrm{d}y+\int_{z_a}^{z_b}F_z\mathrm{d}z$$

功率 力在单位时间所作的功

$$p=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

(2) 几种常见保守力的作功

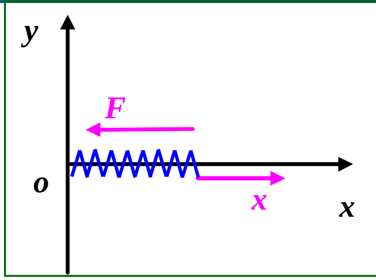
例2.4.1：重力沿任意路径所作的功

解：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{e}_x+\mathrm{d}y\vec{e}_y+\mathrm{d}z\vec{e}_z\\&\vec{F}=-mg\vec{e}_z\end{aligned}\right\}\Longrightarrow A=\int_{x_a}^{x_b}F_x\mathrm{d}x+\int_{y_a}^{y_b}F_y\mathrm{d}y+\int_{z_a}^{z_b}F_z\mathrm{d}z$$

定义重力势能 $E_p=mgz$

则 $A=-mg(z_b-z_a)=-(E_b-E_a)$



例2.4.2：弹力作功

解 $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e}_x \qquad F = -kx\vec{e}_x$

$$A = \int_{x_a}^{x_b} F_x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}k(x_b^{\ 2} - x_a^{\ 2}) = -(E_b - E_a)$$

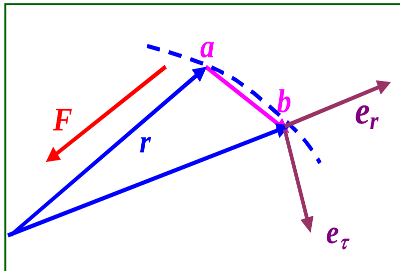
定义弹性势能 $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$

例2.4.3：万有引力作功

解 $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r + (\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{e}_\tau)\vec{e}_\tau$

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

$$A = \int_{r_a}^{r_b} F_r \mathrm{d}r = -GMm\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = -(E_b - E_a)$$



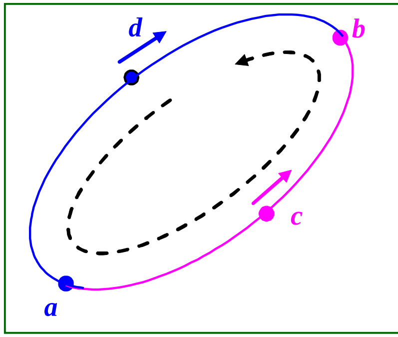
定义引力势能 $E_p = -G\dfrac{Mm}{r}$

2.4.2 单质点的势能与势能定理

保守力：力对物体所作的功与中间过程无关，称之为保守力

非保守力：做功与中间过程有关的力称为非保守力

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{acb} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{bda} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{acb} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{adb} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$



保守力：满足条件

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad \text{或} \qquad \nabla\times\vec{F} = 0$$

矢量微分算符
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = 0$$

势能：由于物体的某种相对位置而具有的能量，称为势能

- 只有在保守力场中，才可以引入势能函数
- 势能存在于质点系的两个或多个质点之间
- 势能只有相对意义，而势能差具有绝对意义
- **势能定理**：保守力所做的功，等于质点势能增量的负值

$$A_{ab} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

- 保守力与势能间的关系

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_p = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad \Rightarrow \vec{F} = -\nabla E_p$$

2.4.3 单质点的动能与动能定理

动能：由于物体运动而具有的能量，称为动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

说明：动能与参考系的选择有关，且恒为正

单质点动能定理：合外力对单质点所作的功等于质点动能的增量

微分形式 $\mathrm{d}A = \mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)$

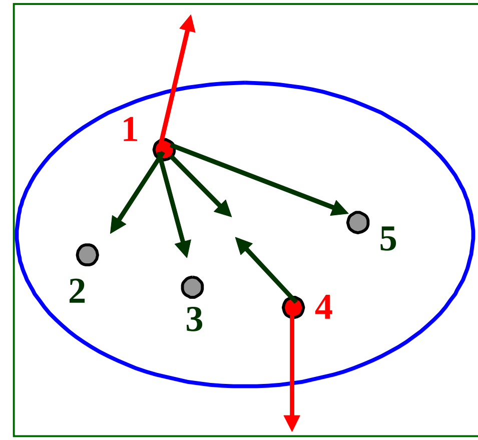
积分形式 $A = \frac{1}{2}mv_t^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

推导：微分形式 $\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}A = m\mathrm{d}\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}A = \mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)$$

2.4.4 质点系的功能原理



(1) 质点系的势能定理

$$E_p = \sum_i \sum_{j>i} E_{pij}$$

质点系势能定理：多质点体系的势能应该等于两两质点间势能之和

(2) 质点系的动能定理

质点系所受的所有合外力及所有内力所作的功，等于物体系动能的增量

微分形式 $$\sum_i \mathrm{d}A_i = \sum_i \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

积分形式 $$\sum_i A_i = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_{it}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2\right)$$

A 适用条件：惯性系，所有质点相对于同一参考系

B 动能定理中的合外力，包含所有外力——保守力和非保守力

C 质点系的动能守恒定理：当 $\sum_i A_i = 0$ 时，质点系动能守恒

(3) 质点系的功能原理

考虑质点系动能定理 $\sum_i A_i = A_{外} + A_{内} = E_k - E_{k0}$

同时令 $A_{内} = A_{保内} + A_{非保内}$ $A_{保} = -(E_p - E_{p0})$

联立上述三个方程，得： $A_{外} + A_{非保内} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$

定义机械能：物体系动能与势能的总和称为机械能： $E = E_k + E_p$

功能原理：外力与非保守内力对物体系所作的功，等于系统机械能的增量

$$A_{外} + A_{非保内} = E - E_0$$

A 成立条件：惯性系

B 功能原理中，只计及非保守内力和合外力作功

(4) 机械能守恒与能量守恒定律

当外力与非保守内力做功的代数和为零时，物体系机械能守恒

$$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$$

力学・刚体力学

3.1 力矩的瞬时效应——刚体转动定理

3.1.1 描述刚体力学的物理参量

(1) 描述刚体转动的角参量

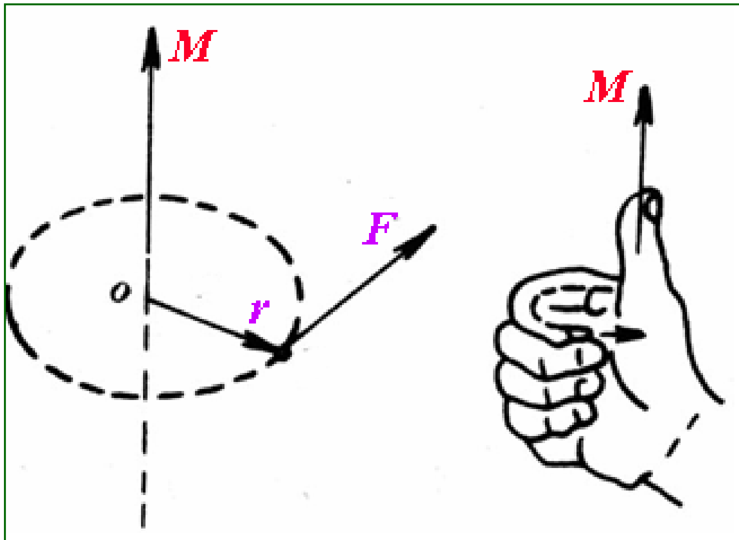
角参量 (角位移、角速度、角加速度)；线参量与角参量的关系 (参第 1 章)

(2) 改变刚体转动状态的参量——力矩

力臂：力与转轴的距离

力矩：力与力臂的矢积

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{或} \quad \vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

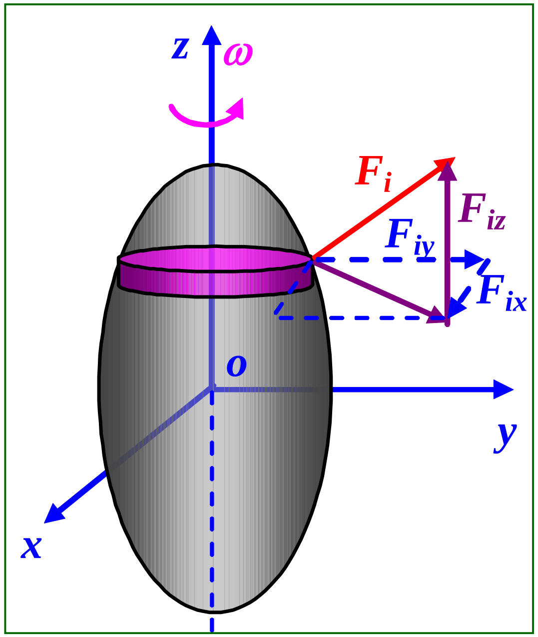


(3) 保持刚体转动状态的参量——转动惯量

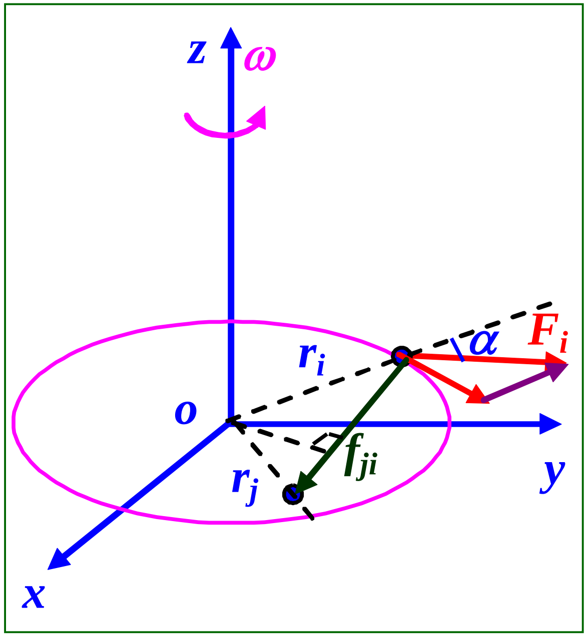
参下节内容

3.1.2 绕固定转轴转动的刚体转动定理

(1) 物理模型



绕定轴转动刚体受力分析



切向分力影响刚体转动状态

对固定转轴刚体，只有分解到 *xoy* 平面的切向的分力，才影响转动状态

(2) 绕定轴转动的刚体转动定理

设位矢 r_i 的质点受到质点 j 内力 f_{ji}，受到合外力为 F_i，由牛顿第二定律

$$\left.\begin{aligned} &F_i \sin\alpha_i + \sum_j f_{ji} \sin\phi_i = \mathrm{d}m_i a_{\tau i} \\ &\text{刚体绕固定}z\text{轴转动} \quad a_{\tau i} = r_i \beta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow F_i \sin\alpha_i + \sum_j f_{ji} \sin\phi_i = \mathrm{d}m_i r_i \beta_i$$

将上式两边同时乘以 r_i 并利用矢量矢积的定义有

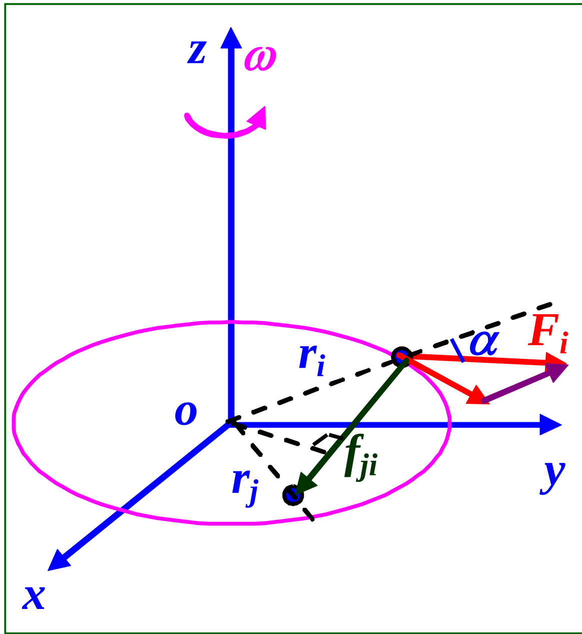
$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_j \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \mathrm{d}m_i r_i^2 \vec{\beta}$$

考虑刚体中所有质点、力矩的定义以及内力

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = -\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}$$

上式成为 $$\sum_i M_i = \sum_i \mathrm{d}m_i r_i^2 \beta$$

当微元趋于无限小时 $$M = \beta \int_V r^2 \mathrm{d}m$$



定义转动惯量 $I = \int_V r^2 \mathrm{d}m$

绕定轴转动的转动定理 $M = I\beta$

A 转动惯量的物理意义：保持刚体原有转动状态惯性的量度

B 绕定轴转动的转动定律适用条件：惯性系

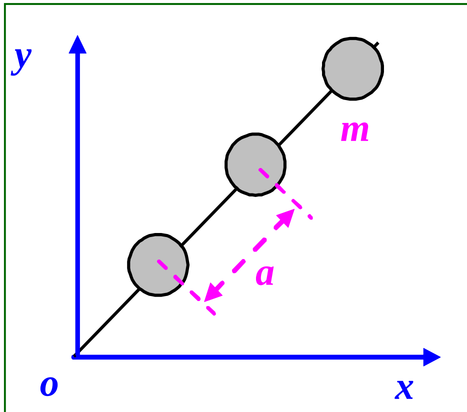
3.1.3 刚体转动惯量的计算

例3.1.1 质量相等的三小球等间距分布在x-y平面角平分线上并绕 y 轴转动

求：系统的转动惯量

解：由 $I = \sum_i m_i r_i^2$

$$I = m\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3a\right)^2\right] = 7ma^2$$



3.2 力矩的时间累积效应——角动量定理

3.2.1 描述力矩时间累积效应的物理参量

(1) 冲量矩

力矩在时间上的累积矢量，称为冲量矩

记 $\mathrm{d}\vec{J} = \vec{M}\mathrm{d}t$ 或 $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t$

讨论：冲量矩的讨论完全类似于冲量的讨论，(略，自己补充)

(2) 角动量定理与角动量

$$\mathrm{d}\vec{J} = \vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}(I\vec{\omega}) \quad \Rightarrow \vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = I_2\vec{\omega}_2 - I_1\vec{\omega}_1$$

其中，I_1、ω_1 和 I_2、ω_2 分别表示始末状态的转动惯量与角速度

定义刚体绕定轴转动的角动量 $\vec{L} = I\vec{\omega}$

于是 $\mathrm{d}\vec{J} = \mathrm{d}\vec{L}$ $\vec{J} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

讨论：关于角动量与角动量定理

(1) 角动量的其它表述形式

因： $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\longrightarrow$ $\vec{\omega} = \dfrac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

于是 $\mathrm{d}\vec{J} = \mathrm{d}(m\vec{r} \times \vec{v}) = \mathrm{d}\vec{L}$

即角动量可以定义为:

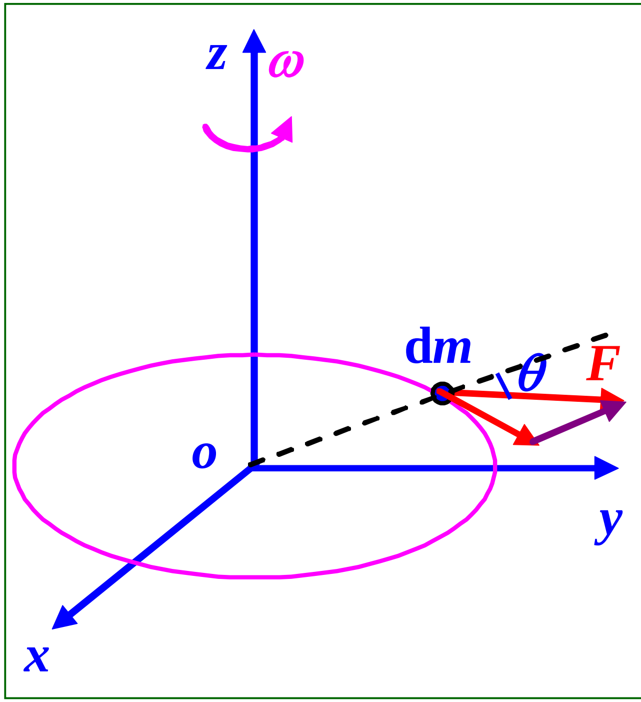
$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$ (角动量的普遍定义式)

3.3 力矩的空间累积效应——刚体的机械能守恒定律

3.3.1 描述刚体空间累积效应的物理参量

(1) 力矩的功

设 $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\tau \vec{e}_\tau$　　$\mathrm{d}\vec{r} = r\mathrm{d}\theta \vec{e}_\tau$



质点在合外力作用下所作的功

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = |F| r \sin\theta \mathrm{d}\theta = \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$$　微分形式

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$$　积分形式

(2) 刚体的势能与势能定理

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

势能定理：保守力对刚体所作的功，等于刚体势能增量的负值

$$A_{ab} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

结论：刚体的势能等于刚体质心的质点的势能

案例：重力势能 $E_p = \int_V \rho g h \mathrm{d}V = \int mgh \frac{\mathrm{d}m}{m} = mg \frac{\int h \mathrm{d}m}{m} = mgh_c$

(3) 刚体的动能与动能定理

定义刚体的转动动能 $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$

$$\mathrm{d}A = \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} \Rightarrow \mathrm{d}A = I\vec{\beta} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} = I \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \omega \mathrm{d}t \Rightarrow$$

转动的动能定理

$$\mathrm{d}A = I\vec{\omega} \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \mathrm{d}(\frac{1}{2} I\omega^2)$$

微分形式 $\mathrm{d}A = \mathrm{d}E_k$

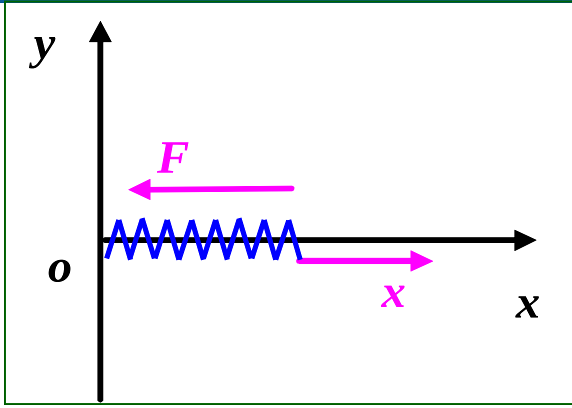
$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\vec{\omega} \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

积分形式 $A = E_k - E_{k0}$

力学·振动力学

4.1 简谐振动的动力学方程与运动学方程

4.1.1 典型简谐振动的动力学方程



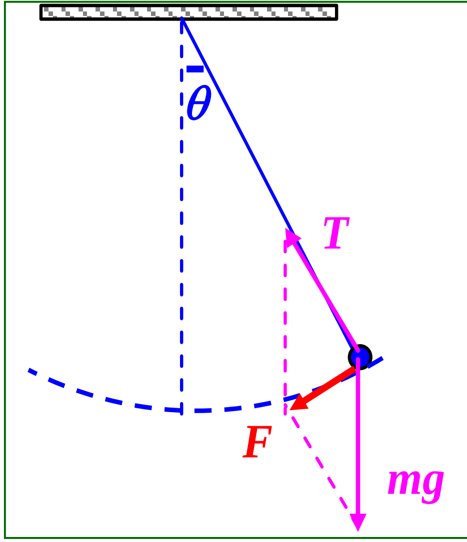
(1) 弹簧谐振子

谐振子模型 $F(t) = -kx(t)$

牛顿第二定律 $F(t) = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= -kx(t) \\ F(t) &= m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \\ &\omega^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}\right.$$

(2) 单摆

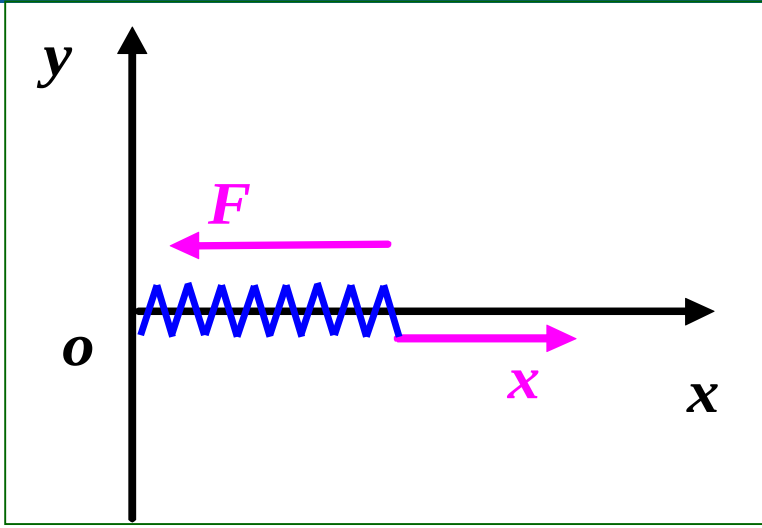


回复力方程 $F = -mg\theta(t)$

牛顿第二定律 $F(t) = m\left(l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} F &= -mg\theta(t) \\ F(t) &= m\left(l\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta \\ &\omega^2 = \frac{g}{l} \end{aligned}\right.$$

4.1.2 简谐振动的运动学方程



(1) 运动学方程

简谐振动动力学方程的一般形式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

动力学方程的解——运动学方程

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

简谐振动的速度、加速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

简谐振动总能量

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

(2) 描述简谐振动的解析参量

全振动 谐振子从某振动状态开始，发生周而复始的一次变化

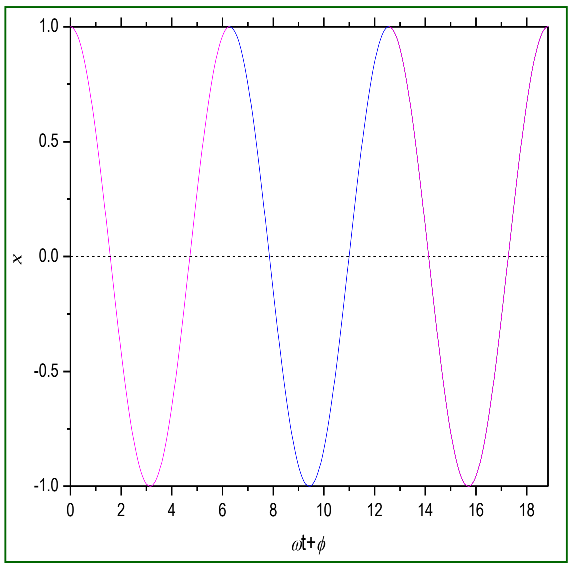
周期(T) 谐振子完成一次全振动所需时间 $A\cos[\omega(t+T)+\phi]=A\cos(\omega t+\phi)$

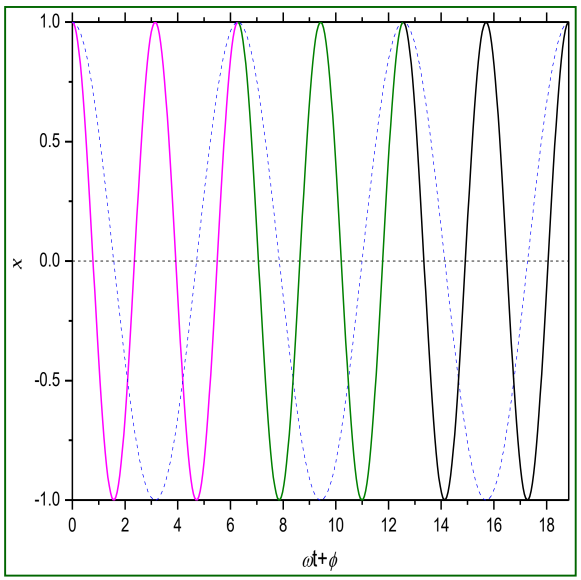
频率(f) 单位时间内谐振子完成全振动的次数 $\nu=\dfrac{1}{T}$

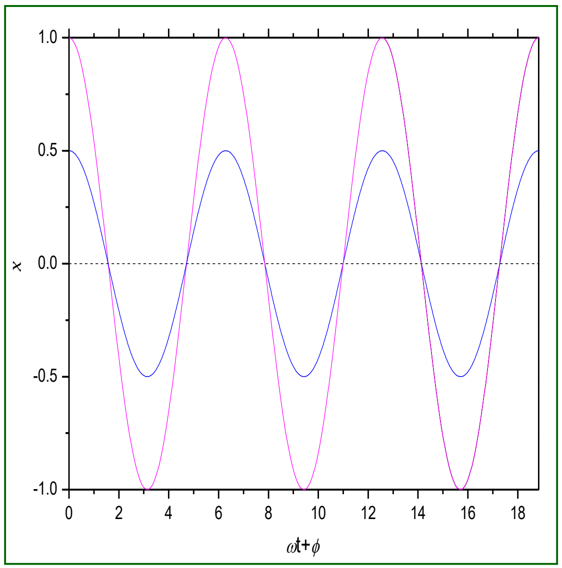
角频率(ω) 谐振子在 2π 秒内所作的全振动的次数 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\nu$

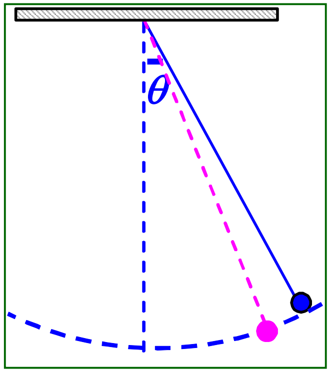
振幅 (A) 谐振子距离平衡位置最大位移的绝对值

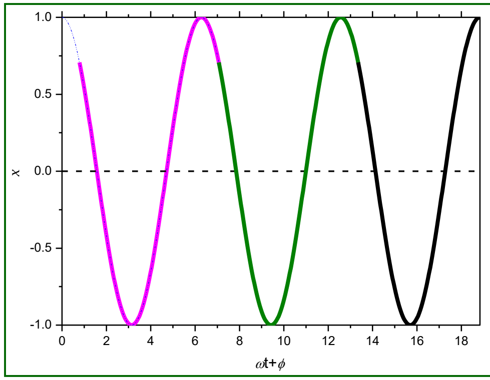
振幅还表示了振动系统的总能量 $E\propto A^2$，($E=kA^2/2$)











初相位 (ϕ) 振子的初始振动状态

相位 ($\omega t+\phi$) 振子 t 时刻的振动状态

课堂讨论：相位参量的双值问题及求解

运动学方程 $x = A\cos(\omega t+\phi)$

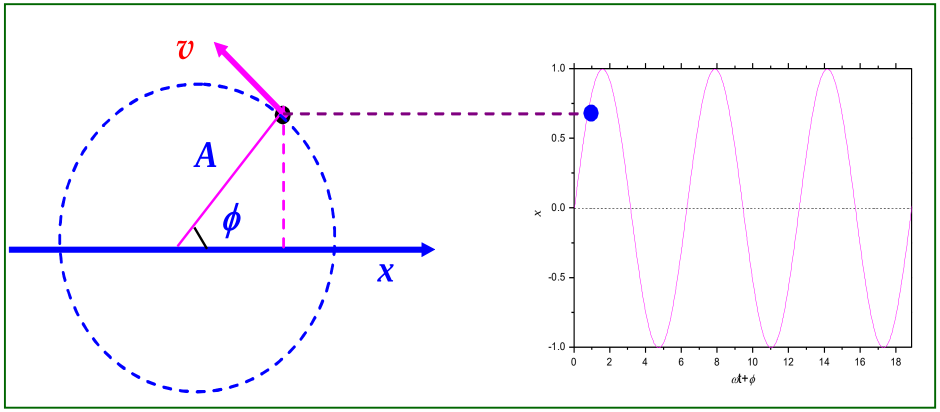
速度方程 $v = \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$

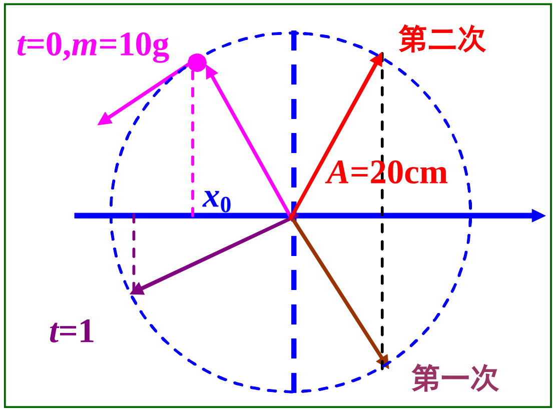
$$\Rightarrow \omega t+\phi = \arctan\left[-\frac{v(t)}{\omega x(t)}\right]$$

结论：时刻 t，相位参数的双值问题可以通过运动学方程和速度方程判定

(3) 简谐振动的几何描述——旋转矢量法

A 物理模型





B 旋转矢量方法：用矢量作匀速圆周运动的图形来表示简谐振动

4.2 简谐振动的能量

(1) 简谐振动的瞬时机械能

谐振子势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)$

谐振子动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi)$

$\Rightarrow$

谐振子机械能 $E = E_p + E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$

(2) 简谐振动的能量平均值

弹簧振子在一个周期内的平均动能、平均势能

$$\overline{E}_p = \frac{1}{T}\int_0^T E_p\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E}_k = \frac{1}{T}\int_0^T E_k\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\Rightarrow \overline{E} = \overline{E}_p + \overline{E}_k = \frac{1}{2}kA^2$$

结论： 谐振子的瞬时能量守恒、且等于一个周期的平均总能量

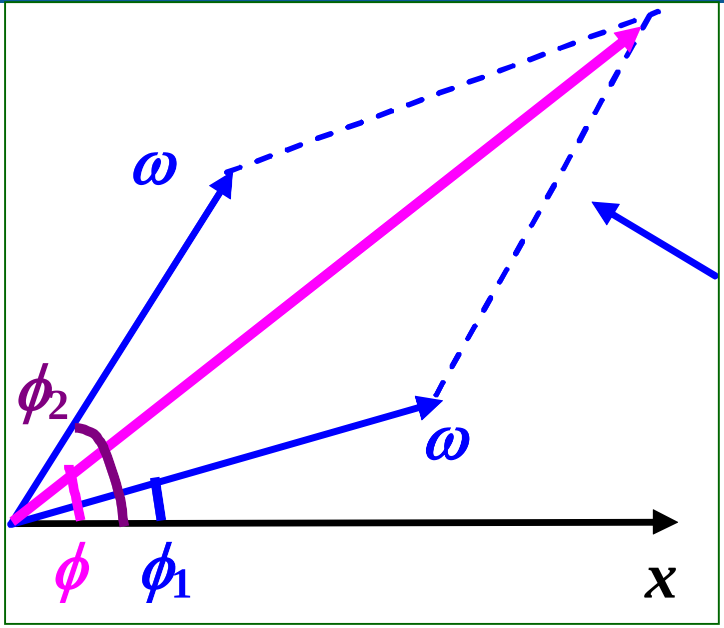
平均动能、平均势能等于总平均能量的一半

4.4.2 振动的合成

(1) 同偏振方向、同频率的简谐振动合成

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t+\phi_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t+\phi_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\phi) \\ A &= \sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+2A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)} \\ \phi &= \arctan\frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \end{aligned}\right.$$

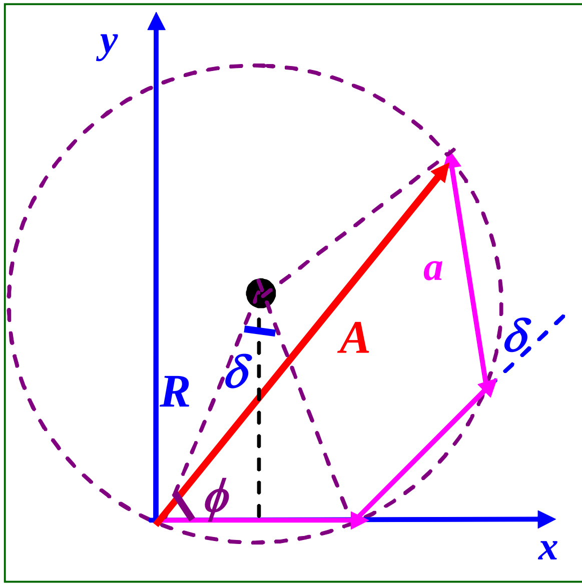


- 合振动仍为简谐振动；合振幅与分振动振幅及其初相有关
- 当 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 2k\pi$ 时 (同相)， $A_{max} = A_1 + A_2$
- 当 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (2k+1)\pi$ 时 (反相)， $A_{min} = |A_1 - A_2|$

例4.4.3 n 个同偏振、同振幅、同频率，相位依次相差 δ 的简谐振动

求 它们的合振动

解： n 个简谐振动的振动方程可写为



$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \delta)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = a\cos[\omega t + (n-1)\delta]$$

如图几何法表示

$$\phi = \frac{1}{2}(\pi - \delta) - \frac{1}{2}(\pi - n\delta) = \frac{n-1}{2}\delta$$

$$a = 2R\sin\frac{\delta}{2} \qquad A = 2R\sin\frac{n\delta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = a\frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cdot \cos\left[\omega t + \frac{(n-1)\delta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta = 2k\pi & k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots \\ \delta = \dfrac{2k'\pi}{n} & k' \neq nk, k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots \end{cases}$$

$$A_{\max} = \lim_{\delta \to 0} a\frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} = na$$

$$A_{\min} = \lim_{n \to \infty} a\frac{\sin(k'\pi)}{\sin(k'\pi/n)} = 0$$

即当各分振动构成一个封闭的多边形时，合振幅为零

力学·波动学基础

5.1 机械波概述

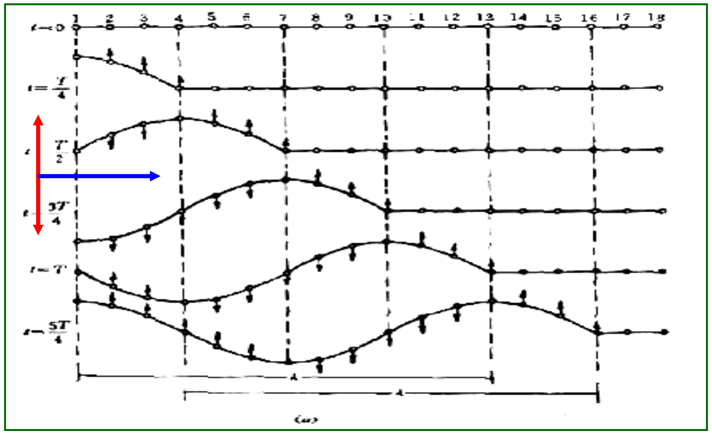
(1) 相关概念

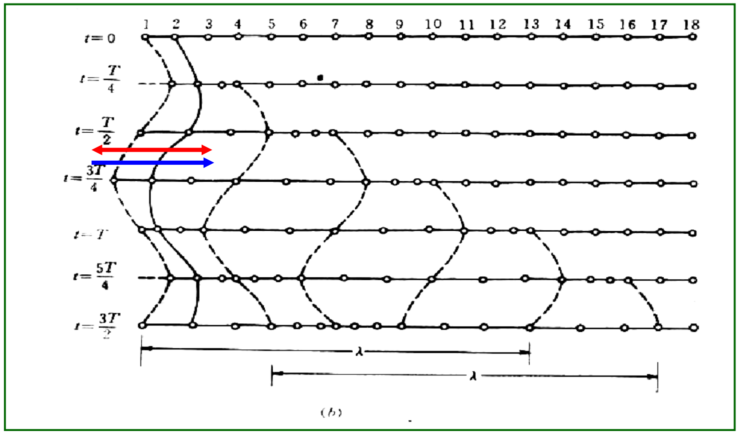
机械波：机械振动在介质中的传播过程称为机械波

形成条件：存在波源；存在传播波的弹性介质

纵波：振动方向与波的传播方向相同的波

横波：振动方向与波的传播方向互相垂直的波

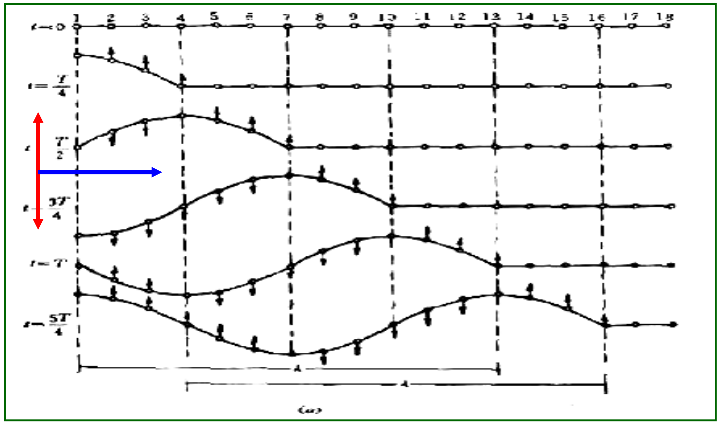


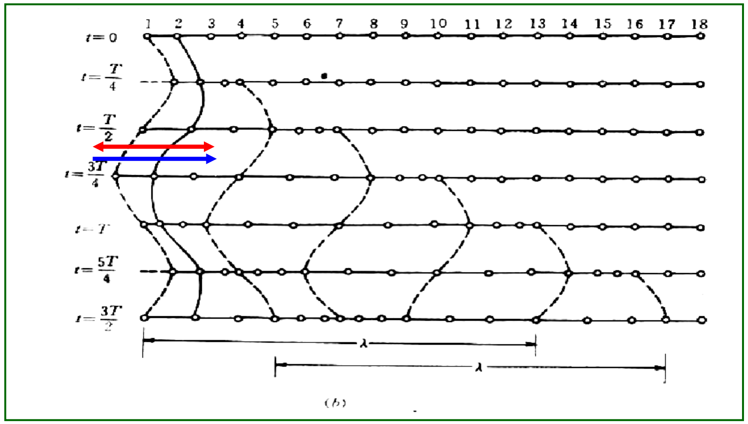


传输条件：纵波可在固、液、气等媒质中传播，横波只在固态媒质中传播

(2) 机械波产生的物理机制

波是振动质点带动邻近质点振动，由近及远向外传递振动的结果



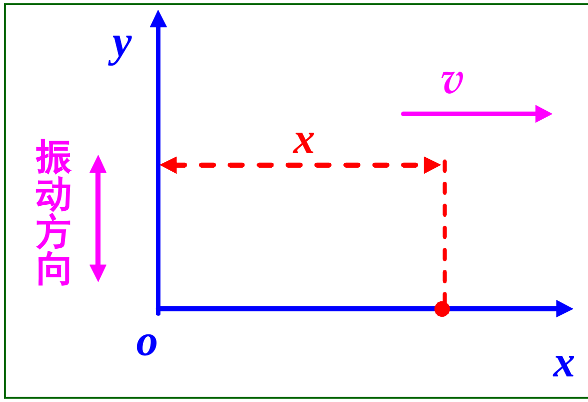


结论：介质中任何一点的频率都等于振源的频率

(3) 机械波模型

- 振源与观察者保持相对静止
- 弹性介质无阻尼或能量吸收——波在传递过程中振幅不变

(4) 机械波的运动学方程



目标： 给出距振源任意距离 x 处质点的振动方程

推导： 设 t 时刻 $x=0$ 处的质元振动方程为

$$u(0,t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

t 时刻 x 处的质元振动相位 $\quad \phi' = \omega(t - \frac{x}{v}) + \phi$

t 时刻 x 处的质元振动频率应当等于振源的频率

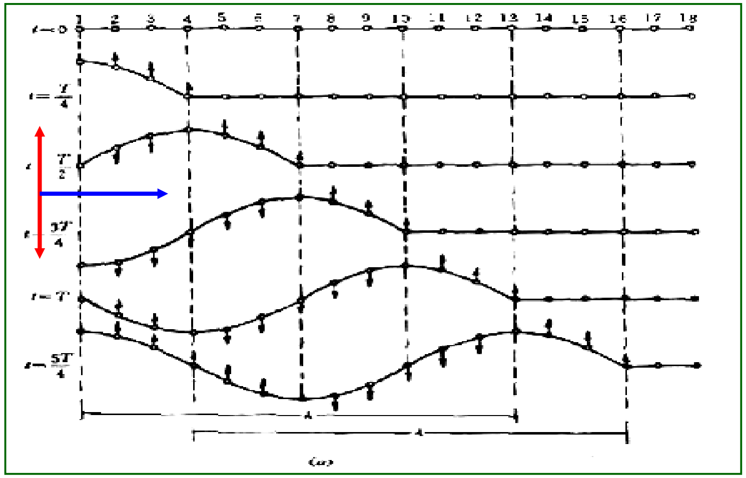
$$u(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi\right] = A\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}x + \phi\right]$$

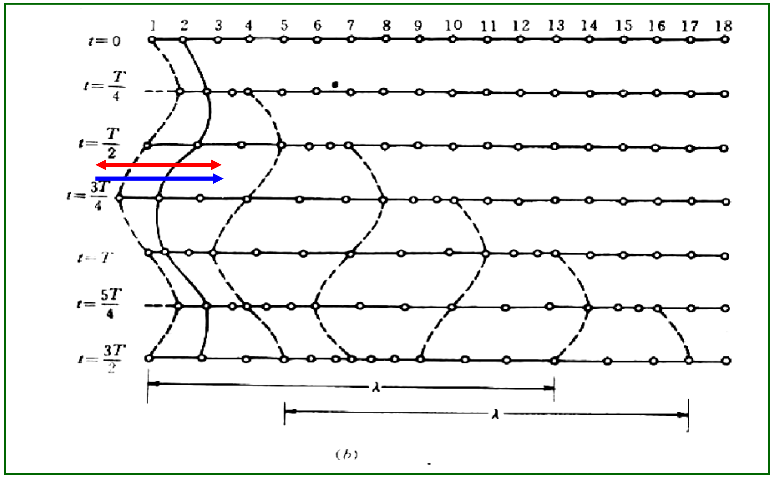
$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \vec{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda}\vec{k}_0 \quad \text{波矢}$$

$$u(x,t) = A\cos[\omega t - kx + \phi]$$

讨论 $u(x,t) = A\cos[\omega t - kx + \phi]$

- 描述一个机械波，需要确定 A，ω，k，ϕ
- 波函数给出任意时刻 t，媒质各质点的振动状态 (相位或振动状态)
- 波函数给出了任意时间段 $\Delta t = t_2 - t_1$ 媒质各质点振动状态差





(5) 描述机械波的解析参量

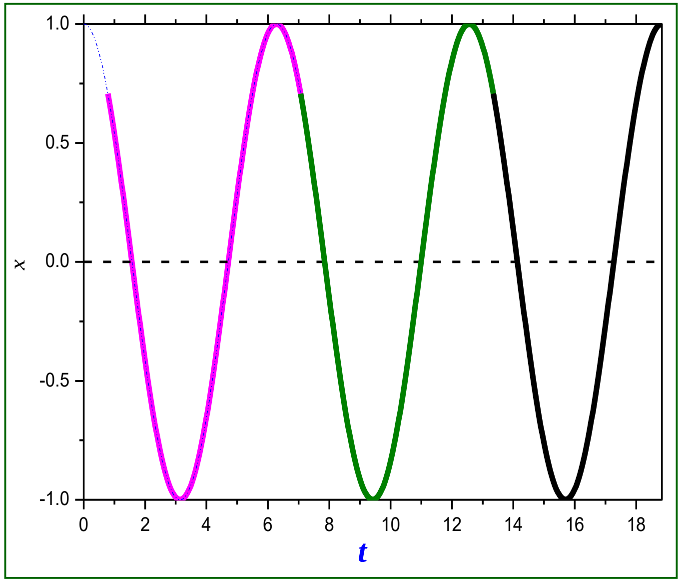
波长 (λ)：沿波传播直线上两个相邻同相点 (相位差为2π) 之间的距离

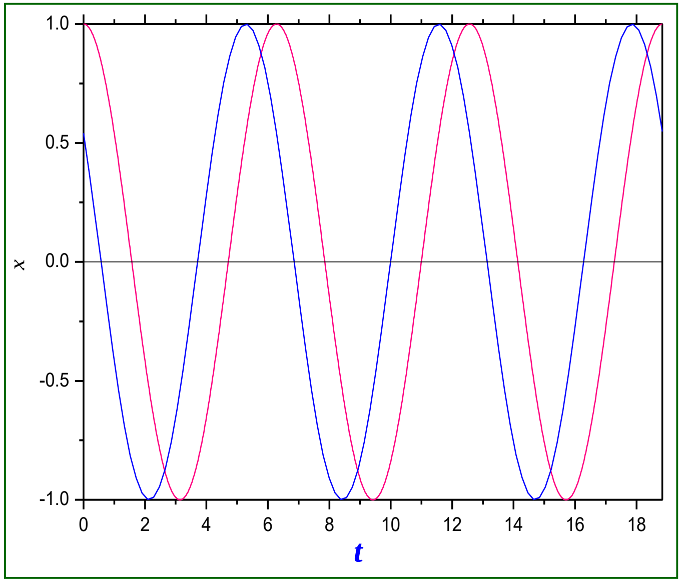
波数 ($\tilde{\nu}$)：波长的倒数称为波数或单位长度所包含的完整波的数目

频率(ν)：单位时间内给定的完整波的个数

周期(T)：传递一个完整波所需的时间或频率的倒数

波速(v)：单位时间波向外传播完整波数对应的距离





波长、频率、相位之间的普适关系 $$v = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$$

(6) 描述机械波的几何参量

波线： 波向外传播的方向构成的曲线

波线上任意一点的切线方向与该点波的传播方向相同

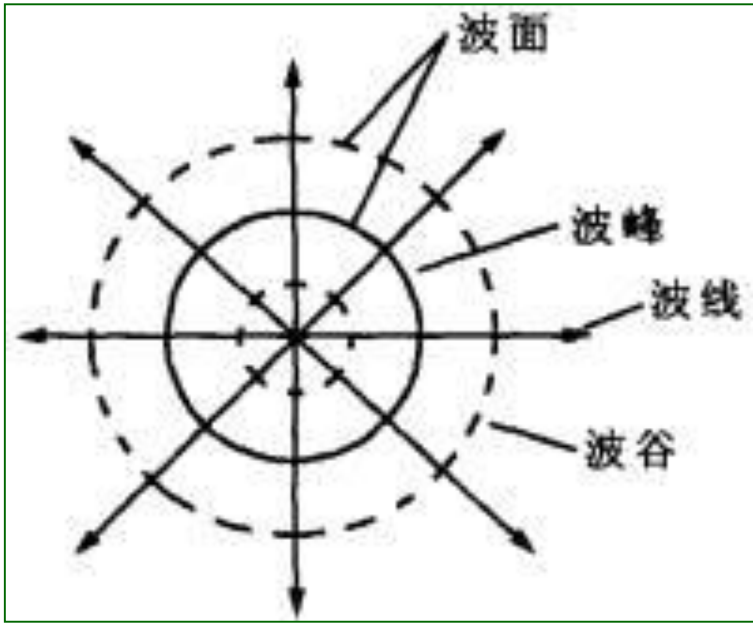
波矢： 表示波线任意点方向，且具有一定模值的矢量 $\vec{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda}\vec{k}_0$

波面： 介质中振动相位相同的点构成的曲面

波前： 某时刻介质中刚开始振动的点构成的曲面

A 波线与波面、波前一定垂直。

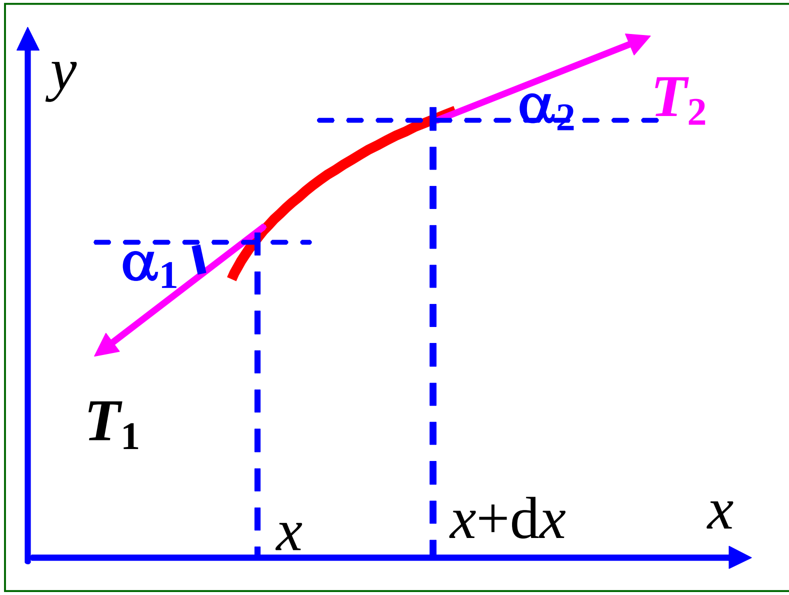
B 波向外传播过程可以看作为波前以波速向前推进的过程



5.2 波动动力学方程

5.2.1 典型波动的动力学方程

(1) 轻质、柔弦的横波方程



由牛顿定律 $$T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 = \rho \mathrm{d}s \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T_2 \cos\alpha_2 - T_1 \cos\alpha_1 = 0$$

微振动时 $$\cos\alpha_1 \approx \cos\alpha_2 \approx 1$$

$$\sin\alpha_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x \qquad \sin\alpha_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \\ a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}} \end{cases}$$

5.2.2 波动动力学方程求解

在无界空间中，动力学方程的解为

$$u(x,t)=A\cos(\omega t-\frac{\omega}{v}x+\phi)=A\cos\omega(t-\frac{x}{v}+\frac{\phi}{\omega})$$

验证

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}&=-\omega^2 A\cos\omega(t-\frac{x}{v}+\frac{\phi}{\omega})\\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}&=-\frac{\omega^2}{v^2}A\cos\omega(t-\frac{x}{v}+\frac{\phi}{\omega})\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

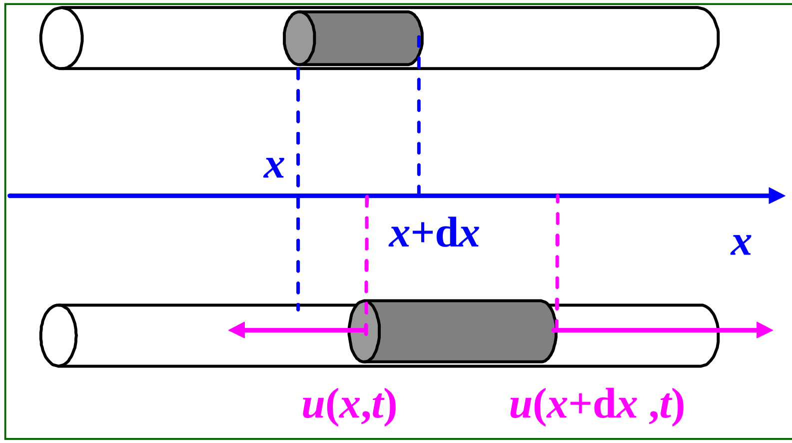
对比 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

$$\Longrightarrow a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}\Leftrightarrow v$$

波动方程空间二次导数前的系数就是波的传播速度

绳的微振动横波	$a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$	T：绳的张力
杆的纵向微振动波	$a=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$	Y：杨氏弹性模量
杆的横向微振动波	$a=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$	G：切变弹性摸量
声音在空气中传播	$a=\sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$	B：体变模量

5.3 机械波的能量、能量密度和能流密度



(1) 机械波的动能

设简谐波 $u(x,t)=A\cos(\omega t-\frac{\omega}{v}x)$

微元动能 $\Delta E_k=\frac{1}{2}\Delta m v^2=\frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$

$$=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

(2) 机械波的势能

弹性模量 Y $\quad \frac{F}{s}=Y\frac{\Delta u}{\Delta x}\Rightarrow F=\frac{Ys}{\Delta x}\Delta u$

类比弹簧 $\quad F=kx \qquad E_p=\frac{1}{2}kx^2$

$$\Longrightarrow E_p=\frac{1}{2}\frac{Ys}{\Delta x}(\Delta u)^2=\frac{Y(\Delta V)}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$\Delta E_p=\frac{1}{2}(\text{弹性模量})(\text{应变})^2\cdot\Delta V=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$$

(3) 机械波的能量

$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p=\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

平均动能、势能能量密度 $\quad \bar{\varepsilon}_k=\bar{\varepsilon}_p=\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}$

讨论：机械波的能量传输特性

A 关于能量守恒

- 机械波能量、能量密度是时间的函数，不是守恒量；
- 机械波在一个周期内的平均动能、势能和总能量守恒；
- 机械波能够向外传输；

B 关于能量传输特性

- 机械波能量密度传输速度仍为 v，但频率是机械波频率的 2 倍；
- 介质微元的动能、势能和能量密度同步传输；

(5) 简谐波的能流密度 (波的强度)

能流： 单位时间通过介质中与传播速度垂直的某一面积的能量

$$P = \varepsilon \vec{v} \cdot \vec{s}$$

平均能流： 单位时间通过介质中与传播速度垂直的单位面积的能量

$$\overline{P} = \overline{\varepsilon} \vec{v} \cdot \vec{s}$$

能流密度 (坡印亭矢量) $\vec{I} = \varepsilon \vec{v}$

平均能流密度矢量 $\vec{\overline{I}} = \overline{\varepsilon} \vec{v}$

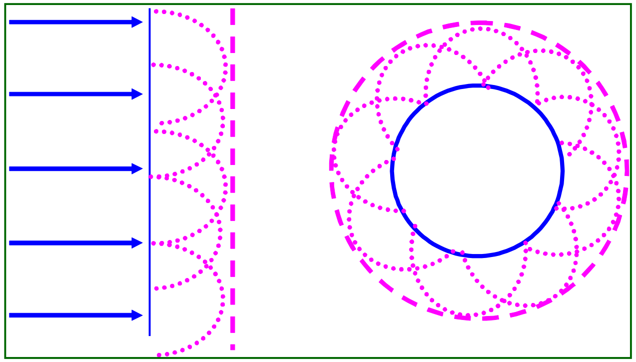
对平面简谐波 $\vec{I} = \dfrac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}$

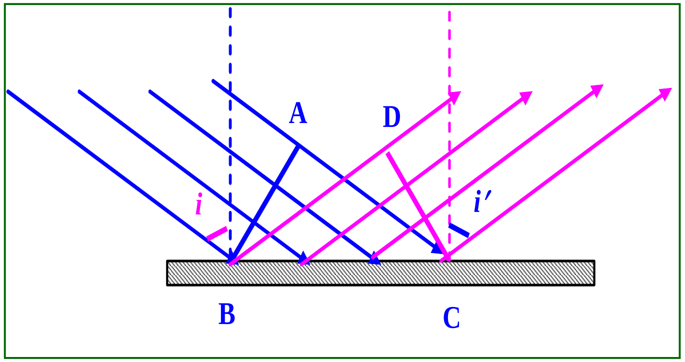
5.5 波的干涉、驻波

5.5.1 惠更斯原理、波的反射与折射

(1) 惠更斯原理

- 任一时刻波前上各点都可作为子波的波源，向前发出子波；
- 后一时刻各子波的包迹，就是该时刻新波的波前；





(2) 波的反射与折射

详见后面光学部分

5.5.2 波的叠加原理、波的干涉

(1) 波的叠加原理

- 各列波相遇后它们各自原有的特点独立继续传播；
- 在各列波相遇的区域里，质点的振动为各列波在该点引起振动的叠加

(2) 波的干涉

A 相关概念

相干波：满足相差恒定、振动频率相同、振动方向相同的波

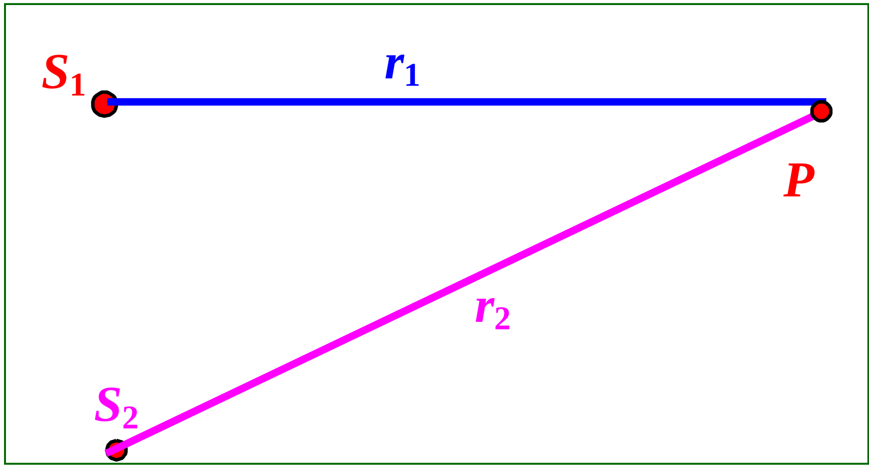
波的干涉：相干波在其公共区域内叠加形成波强度稳定的空间强弱分布

B 波强度稳定的空间分布

设两列相干波源的振动分别为

$$\left.\begin{aligned} u_1(0,t) &= A_1\cos(\omega t+\phi_1) \\ u_2(0,t) &= A_2\cos(\omega t+\phi_2) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} u_1(r_1,t) &= A_1\cos(\omega t-\frac{2\pi r_1}{\lambda}+\phi_1) \\ u_2(r_2,t) &= A_2\cos(\omega t-\frac{2\pi r_2}{\lambda}+\phi_2) \end{aligned}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} & u(r_p,t) = u_1(r_1,t)+u_2(r_2,t) = A\cos(\omega t+\phi) \\ & A = \sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos\Delta\phi} \\ & \Delta\phi = (\phi_2-\phi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1) \end{aligned}\right.$$



讨论：I 波强度

$$I = I_1+I_2+2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\phi$$

II 相长干涉

$$\begin{cases} \Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1) - \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2k\pi & k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \\ A = A_1 + A_2 \end{cases}$$

III 相消干涉

$$\begin{cases} \Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1) - \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2k+1)\pi & k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \\ A = \left|A_1 - A_2\right| \end{cases}$$

IV 波程差与波的干涉

$$\left.\begin{aligned} \Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \\ \phi_1 = \phi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = -\frac{2\pi}{\lambda}\delta \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \delta = r_2 - r_1 = k\lambda & k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots & A = A_1 + A_2 & \text{相长干涉} \\ \delta = r_2 - r_1 = (k + \dfrac{1}{2})\lambda & k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots & A = \left|A_1 - A_2\right| & \text{相消干涉} \end{cases}$$

5.5.4 半波损失

(1) 驻波节点的半波损失

课堂讨论：将驻波节点考虑为反射点，讨论波的反射存在半波损失

(2) 一般界面反射的相位突变问题

波阻抗 Z： $Z \equiv \rho v$ ， ρ 介质密度， v 波速

波密媒质：具有较大波阻抗的介质

波疏媒质：具有较小波阻抗的介质

界面反射系数 $\eta \equiv \dfrac{|Z_1 - Z_2|}{Z_1 + Z_2}$

波由波疏媒质垂直和掠入射波密媒质，存在半波损失；而一般情形较复杂