微积分疑难讲座

（一） 函数的极限

【总结】求极限的方法：

(1)直接用四则运算法则；

(2)恒等变形后用四则法则：$\begin{cases} \dfrac{0}{0}\text{型：消去致零因子} \\ \dfrac{\infty}{\infty}\text{型：抓大头} \\ \infty-\infty\text{型：合并为乘积或商} \\ \text{无限项：化无限为有限法} \end{cases}$

(3)利用无穷小的性质；

(4)复合函数的极限运算法则(变量代换法)；

(5)利用极限存在的充要条件求极限(如分段函数)；

(6)利用夹逼准则和单调有界准则；

(7)重要极限法；

(8)等价无穷小代换法；

【思考每种方法的理论依据、条件及适用范围】

【例 1】统计资料显示，到 2010 年末，某市垃圾堆积已达 100 万吨. 据预测，从 2011 年起该市还将以 5 万(吨/年)的速度产生新垃圾. 如果该市每年处理上一年堆积垃圾的 20%，长此以往，该市垃圾能否全部处理完成？

【例 2】设某物体作变速直线运动，已知速度 $v(t)=t^2$，求物体在时间间隔 $[0,1]$ 内所经过的路程.

【例 3】设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$，其中 $a\cdot c\neq 0$，则必有(　　)

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$　　(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

【例 4】求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$.

【例 5】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【例 6】求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

【例 7】求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{a^3-x^3}+x\right)$.

【例 8】求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$.

【例 9】求极限$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)\right]$.

【例 10】设 $a_n > 0$ 且 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots (n \in \mathbf{N})$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = +\infty$ ，求证：

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = 1$.

【例 11】若 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

【例 12】设 $x_0 > 0$， $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n} (n = 0, 1, 2, \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

（二） 函数的连续性

【例 1】设 $f(x) = \dfrac{x}{a + \mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$，则常数 a， b 满足______.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义，且 $\mathrm{e}^{x} f(x)$ 与 $\mathrm{e}^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都是单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义，并满足 $f(2x) = f(x)$，若 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 连续，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为常数.

【例 4】求函数 $f(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的间断点并判别其类型.

【例 5】设 a_1、a_2、a_3 为正数，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$，证明方程 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$ 在 $\left(\lambda_1,\lambda_2\right)$ 和 $\left(\lambda_2,\lambda_3\right)$ 内分别存在根.

【例 6】设 $f(x)\in C\left[a,b\right]$，$f(a)=f(b)$，求证：$\exists\alpha,\beta\in\left[a,b\right]$，且 $\beta-\alpha=\dfrac{1}{2}\left(b-a\right)$，使得 $f(\alpha)=f(\beta)$.

【例 7】设 $f(x)\in C\left[a,b\right]$，且 $\forall x\in\left[a,b\right]$，$\exists y\in\left[a,b\right]$，使 $\left|f(y)\right|\le\dfrac{1}{2}\left|f(x)\right|$，证明：$\exists\xi\in\left[a,b\right]$，使 $f(\xi)=0$.