Chapter 3 作业.

1. 求解下列一元一次同余方程:

(1) $7x \equiv 1 \pmod{31}$

解: $\gcd(7,31)=1$ ∴有解, $a'=7$, $b'=1$, $m'=31$

求 $7 \pmod{31}$ 的逆元:

$$\left.\begin{aligned} 31 &= 4\times 7+3 \\ 7 &= 2\times 3+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 1 &= 7-2\times 3 \\ &= 9\times 7-2\times 31 \end{aligned} \Rightarrow x_0 = 9.$$

$\Rightarrow x = 9\times 1+31k\ (k=0)$

∴全部解为 $x \equiv 9 \pmod{31}$

(2) $17x \equiv 14 \pmod{21}$

解: $\gcd(17,21)=1$ ∴有解. $a'=17$, $b'=14$, $m'=21$

考虑 $17x \equiv 1 \pmod{21}$

求 $17 \pmod{21}$ 的逆元 $\Rightarrow x_0 = 5$

∴ $x = 5\times 14+21k\ (k=0) = 70$

∴全部解为 $x \equiv 70 \equiv 7 \pmod{21}$

(3) $128x \equiv 833 \pmod{1001}$

解: $1001 = 7\times 128+105$ $\Rightarrow \gcd(128,1001)=1$ ∴有解

$128 = 1\times 105+23$ $a'=128$, $b'=833$, $m'=1001$

$105 = 4\times 23+13$ 考虑 $128x \equiv 1 \pmod{1001}$

$23 = 1\times 13+10$ 求 $128 \pmod{1001}$ 的逆元

$13 = 1\times 10+3$ $\Rightarrow x_0 = 305$

$10 = 3\times 3+1$ ∴ $x = 305\times 833+1001k\ (k=0)$

$3 = 3\times 1$ $= 254065$

∴全部解为 $x \equiv 254065 \equiv 812 \pmod{1001}$

(4) $57x \equiv 87 \pmod{105}$

解：$\gcd(57,105)=3$，　$\therefore a'=19,\ b'=29,\ m'=35$

考虑 $19x \equiv 1 \pmod{35}$

求 $19 \pmod{35}$ 的逆元 $\Rightarrow x_0=24$

$\therefore x = 24\times 29 + 35k\ (k=0,1,2)$

即 $x \equiv 696、731、766 \pmod{105}$

即：$x \equiv 66、101、31 \pmod{105}$

2. 求解下列一元一次同余方程组：

(1) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 6 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$　解：取 $m=5\times 6\times 7\times 11=2310$

$M_1=462$；$M_2=385$；$M_3=330$；$M_4=210$

$M_1'=3$　$M_2'=1$　$M_3'=1$　$M_4'=1$

$\therefore x \equiv 462\times 3\times 2 + 385\times 1\times 1 + 330\times 1\times 3 + 210\times 1\times 0 \pmod{2310}$

$\equiv 1837 \pmod{2310}$.

(2) $\begin{cases} 8x \equiv 6 \pmod{10} & ① \\ 3x \equiv 10 \pmod{17} & ② \end{cases}$

解：对①：$\gcd(8,10)=2$，$a'=4$，$b'=3$，$m'=5$

考虑：$4x\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x_0=4 \Rightarrow x\equiv 2 \pmod{10}$

对②：$\gcd(3,17)=1$，$a'=3$，$b'=10$，$m'=17$

考虑：$3x \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow x_0=6 \Rightarrow x\equiv 6 \pmod{17}$

$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod{10} \\ x \equiv 6 \pmod{17} \end{cases}$　取 $m=10\times 17=170$

$M_1=17$　$M_2=10$

$M_1'=3$　$M_2'=12$

$\therefore x \equiv 17\times 3\times 2 + 10\times 12\times 6 \equiv \cancel{825}\ 822 \equiv 142 \pmod{170}$.

OURSTORYBEGINS

(3). $\begin{cases} x\equiv 6 \pmod{35} \\ x\equiv 11 \pmod{55} \\ x\equiv 2 \pmod{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\equiv 6 \pmod{5} \\ x\equiv 6 \pmod{7} \\ x\equiv 0 \pmod{11} \text{ ①} \\ x\equiv 11 \pmod{5} \\ x\equiv 2 \pmod{3} \\ x\equiv 2 \pmod{11} \text{ ②} \end{cases}$ ① ⇒ ①与②矛盾

∴无解.

3. 把同余方程化为同余方程组来解:

$$17x\equiv 229 \pmod{1540}$$

解: ∵ $1540=4\times5\times7\times11$

∴原方程化为 $\begin{cases} 17x\equiv 229 \pmod{4} \\ 17x\equiv 229 \pmod{5} \\ 17x\equiv 229 \pmod{7} \\ 17x\equiv 229 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\equiv 1 \pmod{4} \\ x\equiv 2 \pmod{5} \\ x\equiv 4 \pmod{7} \\ x\equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$

取 $m=4\times5\times7\times11=1540$.

$M_1=385$; $M_2=308$; $M_3=220$. $M_4=140$

$M_1'=1$ $M_2'=2$ $M_3'=5$ $M_4'=7$.

$\therefore x\equiv 385\times1\times1+308\times2\times2+220\times5\times4+140\times7\times7$

$\equiv 12877\equiv 557 \pmod{1540}$.