第一讲 矩阵和行列式

讲座要点

借助于一二章的知识, 阐述线性代数的学习方法和解题技巧.

(1) 伴随矩阵A^*;

(2) 行列式计算;

(3) 矩阵等式;

(4) 初等变换与初等矩阵;

(5) 矩阵的标准形;

(6) 典型例题选讲

知识点1: 伴随矩阵A^*

(1) 伴随矩阵的定义: $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n} \Rightarrow A^*=\left(A_{ij}\right)^T$

(2) 基本关系式: $A^*A=AA^*=|A|I$

(3) 衍生关系式: $|A^*|=|A|^{n-1}$ $\quad\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$

$(kA)^*=k^{n-1}A^*$ $\quad\left(A^*\right)^T=\left(A^T\right)^*$ $\quad\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$

(4) 秩:

$$R\left(A^*\right)=\begin{cases} n, & R(A)=n, \\ 1, & R(A)=n-1, \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$$

【例 1】 设 A 是 3 阶方阵，A 的行列式$|A|=\frac{1}{2}$，求行列式$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$的值.

【解】

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$$

$$=\frac{|A|\cdot\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|}{|A|}=\frac{\left|A(3A)^{-1}-2AA^*\right|}{1/2}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{3}I-2|A|I\right|}{1/2}=\frac{\left|-\frac{2}{3}I\right|}{1/2}=-\frac{16}{27}$$

【例 1】 设 A 是 3 阶方阵，A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|$ 的值.

填空题的解法： 令 $A=\begin{pmatrix}1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (3A)^{-1}-2A^{*}=\begin{pmatrix}2/3 & & \\ & 1/3 & \\ & & 1/3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4/3 & & \\ & -2/3 & \\ & & -2/3\end{pmatrix}\Rightarrow \left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=-\frac{16}{27}$$

【例 2】设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 满足 $A^*=A^T$，如果 a_{11}, a_{12}, a_{13} 是 3 个相等的正数，则 a_{11} 为(　　)

$\boxed{\text{(A)}\ \sqrt{3}/3}$　　(B) 3　　(C) $1/3$　　(D) $\sqrt{3}$

【分析】

$$\left.\begin{array}{l} AA^*=|A|I \\ A^*=A^T \end{array}\right\} \Rightarrow AA^T=|A|I \Rightarrow |A|^2=|A|^3 \Rightarrow |A|=0 \ \ or \ \ 1$$

$$\left.\begin{array}{l} |A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ A^*=A^T \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A_{11}=a_{11}, A_{12}=a_{12}, A_{13}=a_{13} \end{array}\right\} \Rightarrow |A|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2$$

$$=3a_{11}^2=1$$

$$\Rightarrow a_{11}=\sqrt{3}/3$$

【例 3】 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}.$$

(1) 计算并化简 PQ． (2) 证明： Q 可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$．

【分析】

$$PQ=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^*\alpha+|A|b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \end{pmatrix}$$

【例 3】设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数

$$P=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}.$$

(2) 证明： Q 可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$.

$$PQ=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \end{pmatrix} \Rightarrow |P|\cdot|Q|=|A|^2\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right)$$

$$|P|=\begin{vmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix}=|A|\neq 0 \quad \left.\begin{array}{r} \Rightarrow |Q|=|A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \\ |A|\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Q可逆$\Leftrightarrow |Q|\neq 0 \Leftrightarrow -\alpha^T A^{-1}\alpha+b\neq 0 \quad \Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$

【例 4】设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则

$$\left|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}\right|=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】

$$\left.\begin{aligned}\boxed{|A|\bullet\left|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}\right|\bullet|B|}&=\left|A\left(A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}\right)B\right|\\&=\big||B|I-|A|I\big|\\&=|-5I|=\boxed{(-5)^{n}}\\|A|=2,\quad |B|&=-3\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left|A^{-1}B^{*}-A^{*}B^{-1}\right|=\frac{(-5)^{n}}{-6}$$

【例 5】 设 A,B 均为 2 阶矩阵，若 $\boxed{|A|=2,|B|=3}$，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{(B)} \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}}$ (C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

【分析】$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} I_4 = (-1)^{2\times 2} |A| \cdot |B| I = |A| \cdot |B| I$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = |A| \cdot |B| \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = |A| \cdot |B| \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & |A| B^* \\ |B| A^* & O \end{pmatrix}$$

$$AA^* = |A| I \Rightarrow A^* = |A| A^{-1}$$

$$BB^* = |B| I \Rightarrow B^* = |B| B^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$$

知识点2：行列式计算

看到行列式的计算或者证明, 迅速做出如下观察:

(1) 3阶, 4阶数字型: 化为三角形直接计算;

(2) 两条平行线: 直接按第一行(列)展开, 直接求得;

(3) 三条平行线: 直接按第一行(列)或者最后一行(列)展开, 得到递推关系式, 解递推关系式或者用归纳法求得;

(4) “爪”型行列式:用中间的一条爪运用倍加不变的性质消去另外某条“爪”;

(5) 计算某行(列)元的(代数)余子式的线性组合, 就是构造一个新的行列式;

知识点2：行列式计算

(6) 抽象行列式 $|A| = |\alpha,\beta,\gamma|$的计算: 用行列式的性质或者将$A$的列取成特殊的向量进行计算;

(7) 范德蒙行列式? 分块三角或者分块斜三角则用Laplace定理计算.

(8) 各行(列)元之和有公因子? 逐列(行)相加提取公因子.

(9) 每一列有一个共同的字母?

将第一行的倍数加到下面的各行, 使得行列式中出现大量的零元; 加边法

(10) 相邻的两行非常“接近相同”:

让相邻的行相减, 先变出大量相同的元.

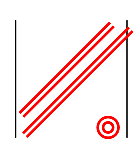
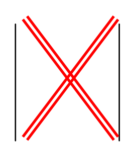
(2) 两条平行线: 直接按第一行(列)展开, 直接求得;

【例 1】 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ $\boxed{= a^n + (-1)^{n+1} b^n}$

【分析】 0元多, “双线型”

直接按第一行 (列) 展开，或者按最后一行（列）展开

按第一列展开!

(3) 三条平行线: 直接按第一行(列)或者最后一行(列)展开, 得递推关系式.

【例2】

计算 $D_n = \begin{vmatrix} 4 & 3 & & & & \\ 2 & 5 & 3 & & O & \\ & 2 & 5 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 3 & \\ & O & & 2 & 5 & \boxed{3} \\ & & & & 2 & \boxed{5} \end{vmatrix}$.

【分析】

0元较多的“三线型”行列式, 按最后一行展开:

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow D_n - 2D_{n-1} = 3\left(D_{n-1} - 2D_{n-2}\right) = \cdots = 3^{n-2}\left(D_2 - 2D_1\right) = 2\cdot 3^{n-1} \\ &\Rightarrow D_n - 3D_{n-1} = 2\left(D_{n-1} - 3D_{n-2}\right) = \cdots = 2^{n-2}\left(D_2 - 3D_1\right) = 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$D_n = 2\cdot 3^n - 2^n \left(n \geq 3\right)$$

直接验证可知 $n=1,2$ 时结论也成立.

(4) “爪” 型(箭型) 行列式:

以中间的 “爪” 用倍加不变性消去另外某条 “爪”；

(5) 计算某行元的余子式的线性组合: 构造新的行列式;

【例 3】设 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，计算 $A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn}$:

【分析】 令 $F_n = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

两个行列式虽然不相同(最后一行不同),

但是第n行同一个 位置上元的代数余子式相同,

因此只需对F_n 计算 $A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn}$

【例 3】设 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，计算 $A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}$：

$$F_n=\begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

只需对F_n计算 $1A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}$

$$\left.\begin{aligned} &F_n \xlongequal{\text{按最后一行展开}} a_1A_{n1}+a_2A_{n2}+\cdots+a_nA_{nn} \\ &\text{令}(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(1,2,\ldots,n) \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$1A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}=\begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

【例 3】设 $D_n=\begin{vmatrix}1 & O & & 1\\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$，计算 $A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}$：

$$1A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}=\begin{vmatrix}1 & O & & 1\\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{依次加到第}n\text{行}]{\text{倒数第}i\text{行}\times(-i)(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1 & O & & 1\\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O\\ 1-2-\cdots n & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left|2-\frac{n(n+1)}{2}\right|$$

【例 4】已知 $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9$，则 $A_{21} + A_{22} = (\qquad)$

(A) 3.　(B) 6.　(C) 9.　(D) 12.

【分析】 按第2行展开得:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2A_{21} + 2A_{22} + A_{23} + A_{24} = 9 \\ A_{21} + A_{22} + 2A_{23} + 2A_{24} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A_{21} + A_{22} = 6$$

【例 4】已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9$，则 $A_{21}+A_{22}=($ $\quad$ $)$

(A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 12.

【特殊值法】 令 $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow A_{21}+A_{22}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$9=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\cdots=-3a_4$$

$$\Rightarrow a_4=-3$$

$$=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6$$

(6) 抽象行列式的计算:

用行列式的性质计算;

或者将A的列取成特殊的向量进行计算;

【例 5】已知 α_1,α_2 为 2 维列向量，矩阵 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)$，

$B=(\alpha_1,\alpha_2)$. 若行列式 $|A|=6$，则 $|B|=$________.

【分析】 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ 6=|A|=|B|\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3|B|\quad \boxed{\Rightarrow |B|=-2}$$

【例 6】设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，如果 $|A|=1$，那么

$|B|=$ ________.

【分析】$B=(\boxed{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3},\underline{\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3},\underline{\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3})$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$$

范德蒙行列式

$$\Rightarrow |B|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(3-2)=2$$

【例 7】已知 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1),\boldsymbol{B}=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$

都是 4 阶矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， β_1,β_2 都是 4 维列向

量. 若 $|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$ ________.

【分析】

令 $A=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |A-2B|=\begin{vmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\-2&0&1\end{vmatrix}=-3(1-8)=21$$

【例 7】已知 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1),\boldsymbol{B}=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$

都是 4 阶矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， β_1,β_2 都是 4 维列向

量. 若 $|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$__________.

【标准方法】 利用行列式性质直接计算：

$$A-2B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)-2(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$$

$$=(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,\beta_1-2\beta_2)$$

$$\Rightarrow |A-2B|=|(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,\beta_1)|$$

$$+|(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,-2\beta_2)|$$

【例 7】已知 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$, $\boldsymbol{B}=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$

都是 4 阶矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， β_1,β_2 都是 4 维列向

量. 若 $|\boldsymbol{A}|=1$, $|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$ __________.

$$\Rightarrow |A-2B| = \left|(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,\beta_1)\right|$$

$$+\left|(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,-2\beta_2)\right|$$

$$=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right|+\left|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\right|$$

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1),\ \boldsymbol{B}=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$$

$|\boldsymbol{A}|=1,\ |\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$ ____________.

$$=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right|+\left|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&0&1\\1&-2&0\end{vmatrix}=-(-7)-2\bullet(-7)=21$$

(7) 范德蒙行列式?

分块三角或者分块斜三角? 用Laplace定理计算;

【例 1】计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

【分析】

令 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$\Rightarrow a_3=(-1)^{4+5}D_4$

$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\left[x^4-(a+b+c+d)x^3+\cdots\right]$

【例 2】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{m}$ 阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵, 且

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = \boldsymbol{a}, \left|\boldsymbol{B}\right| = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \text{ 则 } \left|\boldsymbol{C}\right| = \underline{\qquad\qquad}.$$

$$(-1)^{mn}ab$$

(8) 各行元各行(列)元之和有公因子?

逐列(行)相加提取公因子;

【例 2】计算 $D_4=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

【解】

$$D_4=(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}=(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & -x & z-y & y-z \\ 0 & z-x & -y & x-z \\ 0 & y-x & x-y & -z \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-y & y-z \\ z-x & -y & x-z \\ y-x & x-y & -z \end{vmatrix}=(x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-x-y & y-x-z \\ z-x & z-x-y & 0 \\ y-x & 0 & y-x-z \end{vmatrix}$$

【例 2】计算 $D_4=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-x-y & y-x-z \\ z-x & z-x-y & 0 \\ y-x & 0 & y-x-z \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ z-x & 1 & 0 \\ y-x & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)\begin{vmatrix} -y & 1 & 0 \\ z-x & 1 & 0 \\ y-x & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)(x-y-z)$$

(9) 每一列有一个共同的字母?

将第一行的倍数加到下面的各行, 使得行列式中出现大量的零元;

加边法

【例1】计算 $D_n = \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix}$

【分析】将第一行的－1倍依此加到第2行, 第3行, …, 第n行, 得到一个爪形行列式:

$$= \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k} & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

【例1】计算 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - 2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - 3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - n \end{vmatrix}$

【加边法】

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & D_n & \\ 0 & & & \end{vmatrix}_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}_{n+1}$$

【例2】计算 $D_n = \begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$, $x_1x_2\cdots x_n \neq 0$

【加边法】

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_1a_2 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2/x_i\right) & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & x_n \end{vmatrix} \boxed{= \prod_{j=1}^{n} x_j \left[1+\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2/x_i\right)\right]}$$

(10) 相邻的两行非常“接近相同”：

让相邻的行相减，先变出大量相同的元.

【例 1】 设 $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=|i-j|$, $i,j=1,\ldots,n$，计算行列式 $|A|$.

$$
|A|=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\
1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\
2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1\\
n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\
1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\
2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\
1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\
1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1\\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0\\
1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
|A| = \begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\
1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\
2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\
n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0
\end{vmatrix}
= \cdots =
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{n+1}(n-1)\begin{vmatrix}
1 & & & & \\
1 & 2 & & & \\
1 & 2 & 2 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
1 & 2 & 2 & \cdots & 2
\end{vmatrix}
= (-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}
$$

知识点3 (矩阵等式)

(1) 常见矩阵等式变形的方法

在矩阵等式两端同时:

左(右)乘一个矩阵;　　求逆(需先判断可逆性)

取转置　　取行列式(等式两端必需是方阵)

(2) 矩阵方程型: 已知矩阵方程, 求解某矩阵X .

基本原则: 先化简, 后计算

(3) 已知满足某矩阵等式, 证明某矩阵可逆, 进而求逆.

【例 1】 设 $A,B,AB-I$ 都是 n 阶可逆矩阵，则

$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}$ 等于(　　)

(A) $BAB-I$　　(B) $ABA-I$

(C) $ABA-A$　　(D) $BAB-B$

【分析】 令 $A=2I, B=3I$，则

$$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}=\left[\left(2I-\frac{1}{3}I\right)^{-1}-\frac{1}{2}I\right]^{-1}=10I$$

(A) $17I$　　(B) $11I$　　(C) $10I$　　(D) $15I$

选【C】

【标准做法】

$$\boxed{A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]}=\left(A^{-1}\right)^{-1}\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-I$$

$$=\left[\left(A-B^{-1}\right)A^{-1}\right]^{-1}-I$$

$$\boxed{=\left(I-(AB)^{-1}\right)^{-1}-I}$$

左乘 $I-(AB)^{-1}$：

$$\left(I-(AB)^{-1}\right)A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I-\left(I-(AB)^{-1}\right)=(AB)^{-1}$$

左乘AB：$\Rightarrow AB\left(I-(AB)^{-1}\right)A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I$

$$\Rightarrow \boxed{(ABA-A)}\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I$$

选【C】

【例 2】 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $B=I+AB$，$C=A+CA$，则 $B-C$ 为(　　　)

(A) I　　(B) $-I$　　(C) A.　　(D) $-A$.

【分析】 令$A=2I$

$$\left.\begin{aligned} B=I+AB &\Rightarrow B=I+2B \Rightarrow B=-I \\ C=A+CA &\Rightarrow C=2I+2C \Rightarrow C=-2I \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{B-C=I}$$

【标准方法】

$$\left.\begin{aligned} B=I+AB &\Rightarrow B=(I-A)^{-1} \\ C=A+CA &\Rightarrow C=(I-A)^{-1}A \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$B-C=(I-A)^{-1}-(I-A)^{-1}A=(I-A)^{-1}(I-A)=I$$

(2) 矩阵方程型: 已知矩阵方程, 求解某矩阵X.

基本原则: **先化简, 后计算**

【例 1】设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, 求矩阵 B.

【分析】 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I \Rightarrow AB = B + 3A$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |A|B = A^*B + 3|A|I \\ \left.\begin{array}{l} |A^*| = 8 \\ |A^*| = |A|^{n-1} = |A|^3 \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2B = A^*B + 6I$$

$$\Rightarrow B = 6\left(2I - A^*\right)^{-1}$$

(3) 已知某矩阵等式, 证明某矩阵可逆, 进而求逆.

【例 1】设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$,

(1) 证明 $A-I$ 是可逆矩阵；(2) 证明 $AB=BA$.

【分析】 是对矩阵等式进行变形，凑出

$$(\text{矩阵1}) \cdot (\text{矩阵2}) = kI,\ k \neq 0$$

$A+B=AB \Rightarrow$ $\Rightarrow (\text{矩阵 1})^{-1} = \dfrac{1}{k}(\text{矩阵 2}).$

$$O = A(B-I)-B$$

$$=(A-I)(\ B-I\ )+\boxed{(-1)}I$$

$$\Rightarrow (A-I)(B-I)=I \quad \Rightarrow (A-I) \text{可逆且} (A-I)^{-1}=B-I$$

【例 1】设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，

(1) 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 是可逆矩阵；(2) 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

$\Rightarrow (A-I)$ 可逆且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$

(2) $$(A-I)^{-1}=B-I$$

$$\Rightarrow (A-I)(B-I)=(B-I)(A-I)$$

$$\Rightarrow AB-A-B+I=BA-A-B+I$$

$$\Rightarrow AB=BA$$

【例 2】设 A 为 3 阶非零矩阵，若 $A^3=O$，则(   ).

(A) $I-A$ 不可逆，$I+A$ 不可逆.

(B) $I-A$ 不可逆，$I+A$ 可逆.

(C) $I-A$ 可逆，$I+A$ 可逆.

(D) $I-A$ 可逆，$I+A$ 不可逆.

【分析】

$$O=A^3=(A+I)(A^2-A+I)+(-1)I$$

$$\Rightarrow (A+I)(A^2-A+I)=I \quad \Rightarrow A+I \text{ 可逆}$$

$$O=A^3=(-A+I)(-A^2-A-I)+1\quad I$$

$$\Rightarrow (I-A)(-A^2-A-I)=-I \quad \Rightarrow A-I \text{ 可逆}$$

知识点4 (初等矩阵)

对矩阵A做一次初等行变换,

相当于 左乘对应的初等矩阵

对矩阵A做一次初等列变换,

相当于 右乘对应的初等矩阵

初等矩阵的逆, 转置, 伴随矩阵仍为初等矩阵

【例 1】设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) $C=P^{-1}AP$； $\boxed{\text{(B) } C=PAP^{-1};}$ (C) $C=P^{\mathrm{T}}AP$； (D) $C=PAP^{\mathrm{T}}$.

【分析】 P 对应的行变换： 第2行加到第1行；

P 对应的列变换： 第1列加到第2列；

P^{-1} 对应的列变换： 第1列的－1倍加到第2列；

将A的第2行加到第1行得B $\Rightarrow B=PA$

将B的第1列的－1倍加到第2列 $\Rightarrow C=BP^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} B=PA \\ C=BP^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{C=PAP^{-1}}$$

【例2】
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其中A可逆, 则B^{-1}等于 (　　)

(A) $A^{-1}P_1P_2$　(B) $P_1A^{-1}P_2$　(C) $\boxed{P_1P_2A^{-1}}$　(D) $P_2A^{-1}P_1$.

【分析】B是A经由列变换得到的：1, 4列互换, 再2,3列互换;

或者：　2,3列互换, 再1, 4列互换.

P_1: 1, 4列互换　P_2: 2, 3列互换 $\Rightarrow B = AP_1P_2 \text{ or } AP_2P_1$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow B^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1} \text{ or } P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} \\ P_1^{-1} = P_1,\ P_2^{-1} = P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B^{-1} = P_2P_1A^{-1} \text{ or } P_1P_2A^{-1}}$$

【例 3】设 A 为 $n(n\geq 2)$阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，A^*, B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则(　　)

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*；

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*；

$\boxed{\text{(C) 交换 } A^* \text{ 的第 1 列与第 2 列得 } -B^*\text{；}}$

(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

【分析】

令 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$ 表1, 2行互换对应的初等矩阵

交换A的第1行与第2行得矩阵$B \Rightarrow B=PA$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B^* = |B|B^{-1} = -|A|A^{-1}P^{-1} = -A^*P \\ P\text{ 对应的列变换：1, 2列互换} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

【例4】

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，若 $B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$，

则 $B^{-1}=$ ______.

【分析】

$$B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q}$$

$$\Rightarrow B=PAQ \Rightarrow B^{-1}=Q^{-1}A^{-1}P^{-1}=QA^{-1}P=\begin{pmatrix} b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=P, Q^{-1}=Q$$

知识点5 (矩阵的标准形)

基本结论 $R(A_{m\times n})=k$，则存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$ 与可逆矩阵 $Q_{n\times n}$

使得 $A=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，将 $\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$ 称为矩阵 A 的标准形.

(1) $R(A_{m\times n})=k \Rightarrow \exists\, B_{m\times k}, C_{k\times n}$, $s.t.\ A=BC$

且 $R(B_{m\times k})=R(C_{k\times n})=k$

(2) $R(A_{m\times n})=m \Rightarrow \exists B_{n\times m}$, $s.t.\ AB=I_m$

(3) $A_{m\times n}B_{n\times P}=O \Rightarrow R(A)+R(B)\le n$

【例1】 (矩阵的满秩分解) 设 $R(A_{m\times n})=k$，则存在秩为 k 的 $m\times k$ 矩阵 B 与秩为 k 的 $k\times n$ 矩阵 C 使得 $A=BC$.

【分析】

$$\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}_{m\times k} (I_k, O)_{k\times n}$$

$R(A_{m\times n})=k \Rightarrow$ 存在m阶可逆矩阵P与n阶可逆矩阵Q使得:

$$A = P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q = \underbrace{P\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}_{m\times k}}_{B} \underbrace{(I_k, O)_{k\times n} Q}_{C}$$

$\boxed{P\text{可逆}}$

$$R(B) = R\left[P\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}\right] = R\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix} = k$$

同理 $R(C)=k$

【例1】 (矩阵的满秩分解) 设 $R(A_{m\times n})=k$，则存在秩为 k 的 $m\times k$ 矩阵 B 与秩为 k 的 $k\times n$ 矩阵 C 使得 $A=BC$.

【特殊情形】

秩1矩阵可以写成非零列矩阵与非零行矩阵之乘积.

【例2】

任一秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵一定可以写成 r 个秩 1 矩阵的和.

【分析】 $$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = E_{11} + E_{22} + \cdots E_{rr}$$

$E_{ii}\left(i=1,\cdots,r\right)$： i行i列元为1, 其它元为0的$m\times n$矩阵

A的秩为$r \Rightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = P\left(E_{11} + E_{22} + \cdots E_{rr}\right)Q$$

$$= PE_{11}Q + PE_{22}Q + \cdots PE_{rr}Q$$

P, Q可逆 $\Rightarrow R\left(PE_{ii}Q\right) = R\left(E_{ii}\right) = 1\left(i=1,\cdots,r\right)$

【例3】

$$R\left(A_{m\times n}\right)=m \Rightarrow \text{存在}\, n\times m \,\text{矩阵}\, C \,\text{使得}\, AC=I_m .$$

【分析】

$$\left(I_m,\ O\right)_{m\times n}\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=I_m$$

$$R\left(A_{m\times n}\right)=m \Rightarrow \text{存在}\, m \,\text{阶可逆矩阵}\, P \,\text{和}\, n \,\text{阶可逆矩阵}\, Q \,\text{使得}$$

$$PAQ=\left(I_m,\ O\right)_{m\times n} \Rightarrow PAQ\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=\left(I_m,\ O\right)_{m\times n}\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=I_m$$

$$\Rightarrow AQ\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=P^{-1} \Rightarrow A\underbrace{Q\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}P}_{C_{n\times m}}=I_m$$

【例4】 $A_{m\times n}B_{n\times p}=O\Rightarrow R(A)+R(B)\le n.$

【分析】 设 $\boxed{R(A)=k}(\le n)$

$\Rightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$$

$$\Rightarrow O=AB=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}QB\Rightarrow O=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}QB$$

$\boxed{\text{左乘}P^{-1}}$

令 $QB=\begin{pmatrix} C_{k\times p} \\ D_{(n-k)\times p} \end{pmatrix}$ $\quad\Rightarrow O=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}\Rightarrow C=O$

$\boxed{Q\text{可逆}}$

$$\Rightarrow QB=\begin{pmatrix} O \\ D_{(n-k)\times p} \end{pmatrix}\Rightarrow n-k\ge R(QB)=R(B)\ \boxed{\Rightarrow R(A)+R(B)\le n}$$

典型例题选讲

【例 1】 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩为 1，则 a,b 应满足________.

$$\boxed{a+2b=0\text{且}a\neq b}$$

【分析】

$$\left.\begin{array}{l} R\left(A^*\right)=\begin{cases} 3, & R(A)=3, \\ 0, & R(A)<2. \end{cases} \\ R\left(A^*\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow R(A)=2 \Rightarrow |A|=0$$

$$0=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$$

$a+2b=0$ or $a=b$ $\qquad$ $a=b$ 时, $R(A)\leq 1$, $R\left(A^*\right)=0$ 不合题意!

【例2】设 A, B 都是 n 阶非零矩阵且 $AB=O$，则 A 与 B 的秩(　　).

(A) 必有一个等于零;

(B) 都小于 n;

(C) 一个小于 n, 一个等于 n;

(D) 都等于 n.

【分析】

$$\left.\begin{array}{r}\text{若 } R(A)=n \Rightarrow A\text{可逆} \\ AB=O\end{array}\right\} \Rightarrow B=O \quad \text{与题设矛盾!}$$

左乘A^{-1}

$$\Rightarrow R(A)<n$$

同理, $R(B)<n$

【例 3】若 n 阶方阵 A 中的元均为整数,

证明：A^{-1} 的元均为整数 $\Leftrightarrow |A| = \pm 1$.

【引理】n 阶方阵 A 中的元均为整数 $\Rightarrow |A|$ 是整数.

$n = 1,2$ 时结论显然成立.

设对$n-1$阶矩阵引理为真．对n阶矩阵A：

$$\left.\begin{array}{l} |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ \text{由归纳假设}, A\text{的余子式都是整数} \\ \Rightarrow A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n} \text{ 都是整数} \end{array}\right\} \Rightarrow |A|\text{是整数}.$$

由数学归纳法知, 引理恒为真.

【例 3】若 n 阶方阵 A 中的元均为整数，

证明：A^{-1} 的元均为整数 $\Leftrightarrow \left|\boldsymbol{A}\right| = \pm\mathbf{1}$.

【引理】n 阶方阵 A 中的元均为整数 $\Rightarrow \left|\boldsymbol{A}\right|$ 是整数.

"$\Rightarrow$" 若 A^{-1} 的元均为整数，在 $AA^{-1}=I$ 两端同取行列式，有

$\left|A\right| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1$. 根据引理，$\left|A\right|$ 与 $\left|A^{-1}\right|$ 都是整数，因此 $\left|\boldsymbol{A}\right| = \pm\mathbf{1}$.

"$\Leftarrow$" 设 $\left|\boldsymbol{A}\right| = \pm\mathbf{1}$，那么由 $AA^{*}=\left|A\right|I=\pm I$ 知 $A^{-1}=\pm A^{*}$.

A^{*} 中的元是 A 中元的代数余子式，即元为整数的 $n-1$ 阶余子式带上符号，都是整数，因此 A^{-1} 中的元都是整数.

【例 4】设 α 为 3 维列向量. 若 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha =$ ___3___.

【分析】 令 $A = \alpha\alpha^T$

$$\Rightarrow A^2 = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = (\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T = (\alpha^T\alpha)A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^2 = 3A$$

【法2】 令 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 阶行列式游戏

在行列式游戏 Tic-Tac-Tic 中，游戏者 1 在一个空的 3×3矩阵中填入一个 1，游戏者 0 在某一个空位置中填入一个 0，游戏如此继续，直到3×3矩阵填入了 5 个 1 和 4 个 0.

若此行列式值为 0，则游戏者 0 获胜，否则游戏者 1 获胜. 有没有一种策略保证某一个游戏者一定获胜?

锁具计数问题

（1994年全国数学建模竞赛题的一部分）

某厂生产一种弹子锁具, 每个锁具的钥匙有 5 个槽, 每个槽的高度从 {1,2,3,4, 5,6} 6 个数 (单位略) 中任取一数. 由于工艺及其它原因, 制造锁具时对 5个槽的高度还有两个限制: 至少有 3 个不同的数; 相邻两槽高度之差不能为 5. 满足以上条件制造 出来的所有互不相同的锁具称为一批. 问: 每一批锁具有多少个?

谢 谢！