# 卡尔曼滤波

## 1. 概述

卡尔曼滤波是一种最优估计方法，通过对系统的噪声和不确定性进行建模，从测量数据中提取出最佳的状态估计，适用于线性系统和具有高斯噪声的系统。

（**线性系统**是指输出与输入之间的关系是线性的，满足叠加性和齐次性。

**高斯噪声**是指服从高斯分布的噪声，常用来描述过程噪声和测量噪声，具有明确的统计特性（如均值和标准差）。）

## 2. 基本思想

状态空间模型：卡尔曼滤波基于状态空间模型，包括系统的状态方程和观测方程。

**状态方程**描述系统状态的演变。

**观测方程**描述如何从测量中获得系统状态的观测值。

**噪声模型：**假设过程噪声和测量噪声都是高斯分布，且相互独立。

## 3. 卡尔曼滤波过程

卡尔曼滤波过程包括**预测**和**更新**两个阶段。

**3.1预测阶段**

**状态预测：**根据上一个时刻的状态估计和系统模型，预测当前时刻的状态。

用python代码来表示它的公式（np.dot() 函数计算矩阵和向量的乘积，以表示公式中的矩阵运算）

import numpy as np

# 定义变量

F\_k = np.array([[1, 1], [0, 1]]) # 状态转移矩阵

B\_k = np.array([[0.5], [1]]) # 控制输入矩阵

u\_k = np.array([[1]]) # 控制输入

Q\_k = np.array([[0.1, 0], [0, 0.1]]) # 过程噪声协方差

# 预测状态

x\_hat\_k\_minus\_1 = np.array([[2], [0]]) # 之前时刻的状态估计

**x\_hat\_k\_k\_minus\_1 = np.dot(F\_k, x\_hat\_k\_minus\_1) + np.dot(B\_k, u\_k)**

**当前状态估计（预测状态） = dot(状态转移矩阵，上一个状态值) + dot(控制输入矩阵，控制输入)**

# 预测误差协方差矩阵的更新

P\_k\_minus\_1 = np.array([[1, 0], [0, 1]]) # 之前时刻的误差协方差

**P\_k\_k\_minus\_1 = np.dot(np.dot(F\_k, P\_k\_minus\_1), F\_k.T) + Q\_k**

**误差协方差矩阵( P\_{k|k-1} ) = dot(dot(状态转移矩阵，前一时刻误差协方差)，状态转移矩阵倒置)+ 过程噪声协方差**

**3.2更新阶段**

# 定义变量

H\_k = np.array([[1, 0]]) # 观测矩阵

R\_k = np.array([[0.1]]) # 测量噪声协方差

z\_k = np.array([[2.1]]) # 测量值

I = np.eye(2) # 单位矩阵

# 预测阶段的结果（从上一个阶段）

x\_hat\_k\_k\_minus\_1 = np.array([[2], [1]]) # 预测状态

P\_k\_k\_minus\_1 = np.array([[2, 0.5], [0.5, 1]]) # 预测误差协方差

**卡尔曼增益：**计算卡尔曼增益，衡量预测和测量之间的信任度。

K\_k = np.dot(np.dot(P\_k\_k\_minus\_1, H\_k.T), np.linalg.inv(np.dot(np.dot(H\_k, P\_k\_k\_minus\_1), H\_k.T) + R\_k))

卡尔曼增益 = dot(dot(预测误差协方差，观测矩阵倒置)，逆矩阵)

np.dot(H\_k, P\_k\_k\_minus\_1): 首先计算矩阵 ( H\_k ) 和 ( P\_{k|k-1} ) 的乘积。这里 ( H\_k ) 是观测矩阵，( P\_{k|k-1} ) 是预测误差协方差矩阵。

np.dot(np.dot(H\_k, P\_k\_k\_minus\_1), H\_k.T): 接下来，将上一步的结果与 ( H\_k ) 的转置 ( H\_k^T ) 再次相乘。这样就得到了 ( H\_k P\_{k|k-1} H\_k^T )。

np.dot(np.dot(H\_k, P\_k\_k\_minus\_1), H\_k.T) + R\_k: 然后，将上述结果与测量噪声协方差矩阵 ( R\_k ) 相加。

np.linalg.inv(np.dot(np.dot(H\_k, P\_k\_k\_minus\_1), H\_k.T) + R\_k): 最后，计算上述矩阵的逆矩阵。

状态更新：结合测量值更新状态估计。

x\_hat\_k\_k = x\_hat\_k\_k\_minus\_1 + np.dot(K\_k, (z\_k - np.dot(H\_k, x\_hat\_k\_k\_minus\_1)))

当前状态 = 预测状态 + dot(卡尔曼增益，测量值 – dot(观测矩阵，预测状态))

协方差更新：更新误差协方差矩阵。

P\_k\_k = np.dot(I - np.dot(K\_k, H\_k), P\_k\_k\_minus\_1)

4. 特点

递归性：卡尔曼滤波递归地处理数据，适合实时应用。

最优性：在高斯噪声假设下，卡尔曼滤波提供最优估计。

线性性：基本卡尔曼滤波假设系统模型是线性的，但可以扩展到非线性系统（如扩展卡尔曼滤波）。