



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica
IM381 – Elementos Finitos I



Tarefa Computacional III

Modelo Dinâmico de uma Árvore

Leonardo Silveira Leite

RA: 291646

Campinas - SP
25 de novembro de 2024

1 RESUMO

O estudo trata da modelagem dinâmica de uma árvore usando o método dos elementos finitos. A árvore é representada por uma estrutura fractal, onde cada ramo cresce e se divide em dois, formando um ângulo específico. Os parâmetros geométricos e materiais necessários incluem o diâmetro da base, ângulo de ramificação, fator de redução de área, densidade, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. A partir desses dados, foram criados modelos de árvores com quatro e oito níveis de ramificação, e suas dez primeiras frequências modais foram calculadas utilizando autovalores. Os resultados para as frequências modais são apresentados, permitindo a análise dos modos de vibração das malhas.

2 INTRODUÇÃO

Supondo que o comprimento de um galho está relacionado ao seu diâmetro - diâmetro na base permanece constante para cada galho, cuja seção é circular - por meio de uma lei de potência simples, $D = L^\beta$. O diâmetro de um ramo pode ser encontrado se conhecermos o diâmetro de seu ramo pai por meio de um fator de redução de área λ . Para uma árvore fractal, um ramo axial cresce e então se ramifica em dois segmentos laterais, cada um se distanciando do eixo do ramo original por um ângulo α . Nesta tarefa computacional usa-se os parâmetros dados na Tabela 1 e ilustrados na Figura 1. (PAVANELLO, 2020).

Diâmetro da base [cm]	α [graus]	β	λ	$\rho [\frac{Kg}{m^3}]$	E [GPa]	ν
18	20	1.5	0.5	805	11.3	0.38

Tabela 1 – Dados geométricos.

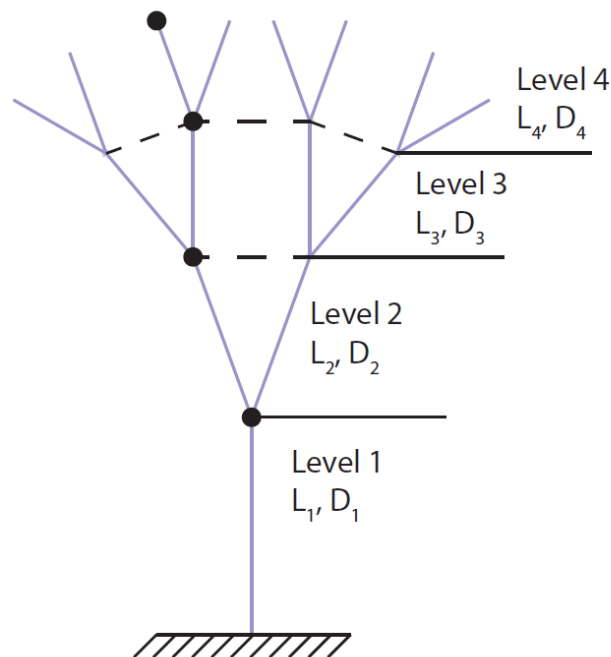


Figura 1 – Modelo geométrico de uma árvore.

3 RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO

Com os dados apresentados acima, os comprimentos e diâmetros dos galhos dos modelos de árvores de 4 e 8 níveis são dados pela Tabela 2.

Nível	Diâmetro [cm]	Comprimento [m]
1	18	6.8683
2	12,7279	5.4514
3	9	4.3267
4	6,3639	3.4341
5	4,5	2.7257
6	3,1820	2.1634
7	2,245	1.7171
8	1,591	1.3628

Tabela 2 – Diâmetros e comprimentos dos galhos presentes nos modelos de árvore.

Com as informações dimensionais dos níveis das árvores, as malhas de quatro e oito níveis estão representadas nas Figuras 2 e 3, respectivamente.

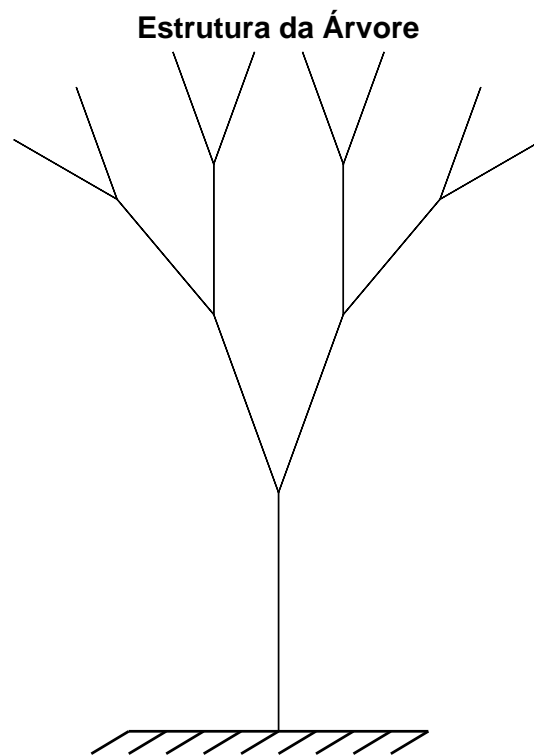


Figura 2 – Malha da árvore de quatro níveis.

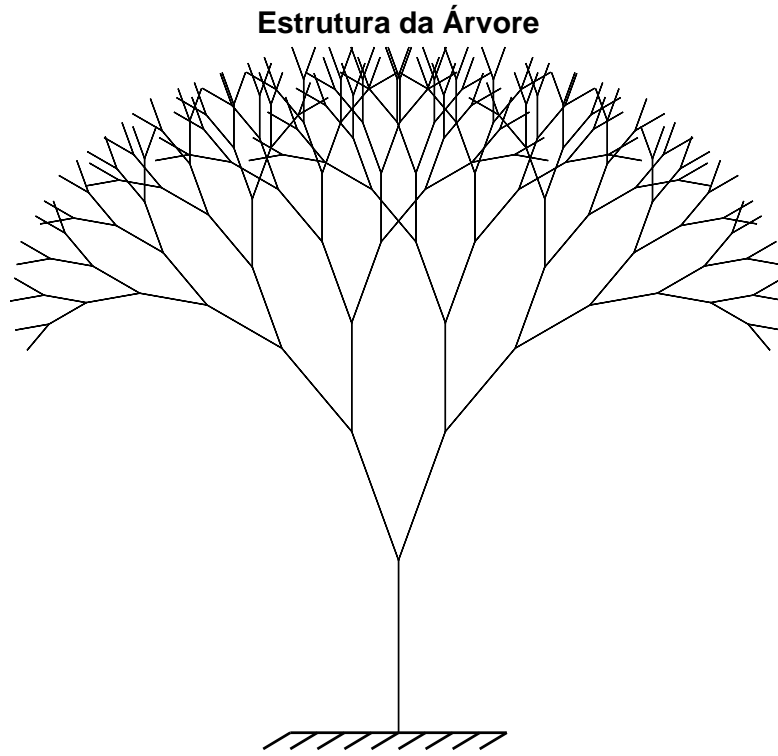


Figura 3 – Malha da árvore de oito níveis.

Além disso, é possível determinar o cálculo das frequências naturais e de seus modos correspondentes, através do cálculo dos autovetores e autovalores.

Para obter a matriz de rigidez para esta configuração de esforços, basta superpor as matrizes obtidas para cada caso específico de carregamento: axial e de flexão. A superposição leva ao seguinte resultado (PAVANELLO, 2020):

$$[K_{e.por}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{h} & 0 & 0 & -\frac{EA}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{h^3} & \frac{6EI_{zz}}{h^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{h^3} & \frac{6EI_{zz}}{h^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{h^2} & \frac{4EI_{zz}}{h} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{h^2} & \frac{2EI_{zz}}{h} \\ -\frac{EA}{h} & 0 & 0 & \frac{EA}{h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{h^3} & -\frac{6EI_{zz}}{h^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{h^3} & -\frac{6EI_{zz}}{h^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{h^2} & \frac{2EI_{zz}}{h} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{h^2} & \frac{4EI_{zz}}{h} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Os elementos de barra de 2 nós e de viga plana devem ser combinados para formar um elemento de viga-coluna plana com seis graus de liberdade no sistema local. Portanto, a matriz de massa é dada por:

$$[M_{e.por}] = \frac{\rho Ah}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho Ah}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22h & 0 & 54 & -13h \\ 0 & 22h & 4h^2 & 0 & 13h & -3h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13h & 0 & 156 & -22h \\ 0 & -13h & -3h^2 & 0 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ao multiplicar as matrizes de rigidez axial e de viga, assim como a matriz de massa axial e rotacional, pela matriz transposta de transformação e, em seguida, pela própria matriz de transformação, obtém-se as matrizes de rigidez e massa do elemento. Portanto:

$$\begin{aligned} [K_e] &= T' \cdot K_{e,\text{por}} \cdot T \\ [M_e] &= T' \cdot M_{e,\text{por}} \cdot T \end{aligned} \quad (3)$$

Sendo a matriz de transformação:

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Com isso, calcula-se computacionalmente os autovalores, representado por suas matrizes de rigidez e massa, considerando apenas os graus de liberdade livres. Os resultados são os autovetores, que representam os modos de vibração, e os autovalores, que correspondem às frequências naturais do sistema. Essas frequências modais são apresentadas nas Tabelas 3 e 4.

Modo	Frequência [Hz]
1	21,832
2	36,207
3	48,504
4	67,165
5	80,006
6	82,267
7	98,111
8	118,292
9	134,358
10	142,289

Tabela 3 – Frequências nos dez primeiros modos para a malha de quatro níveis.

Modo	Frequência [Hz]
1	9,870
2	12,556
3	16,548
4	16,592
5	22,861
6	22,984
7	23,049
8	23,068
9	32,677
10	32,743

Tabela 4 – Frequências nos dez primeiros modos para a malha de oito níveis.

Posteriormente, na Figura 4, são ilustrados os comportamentos das frequências modais na malha de quatro níveis. Enquanto na Figura 5, são apresentados os comportamentos das frequências modais na malha de oito níveis.

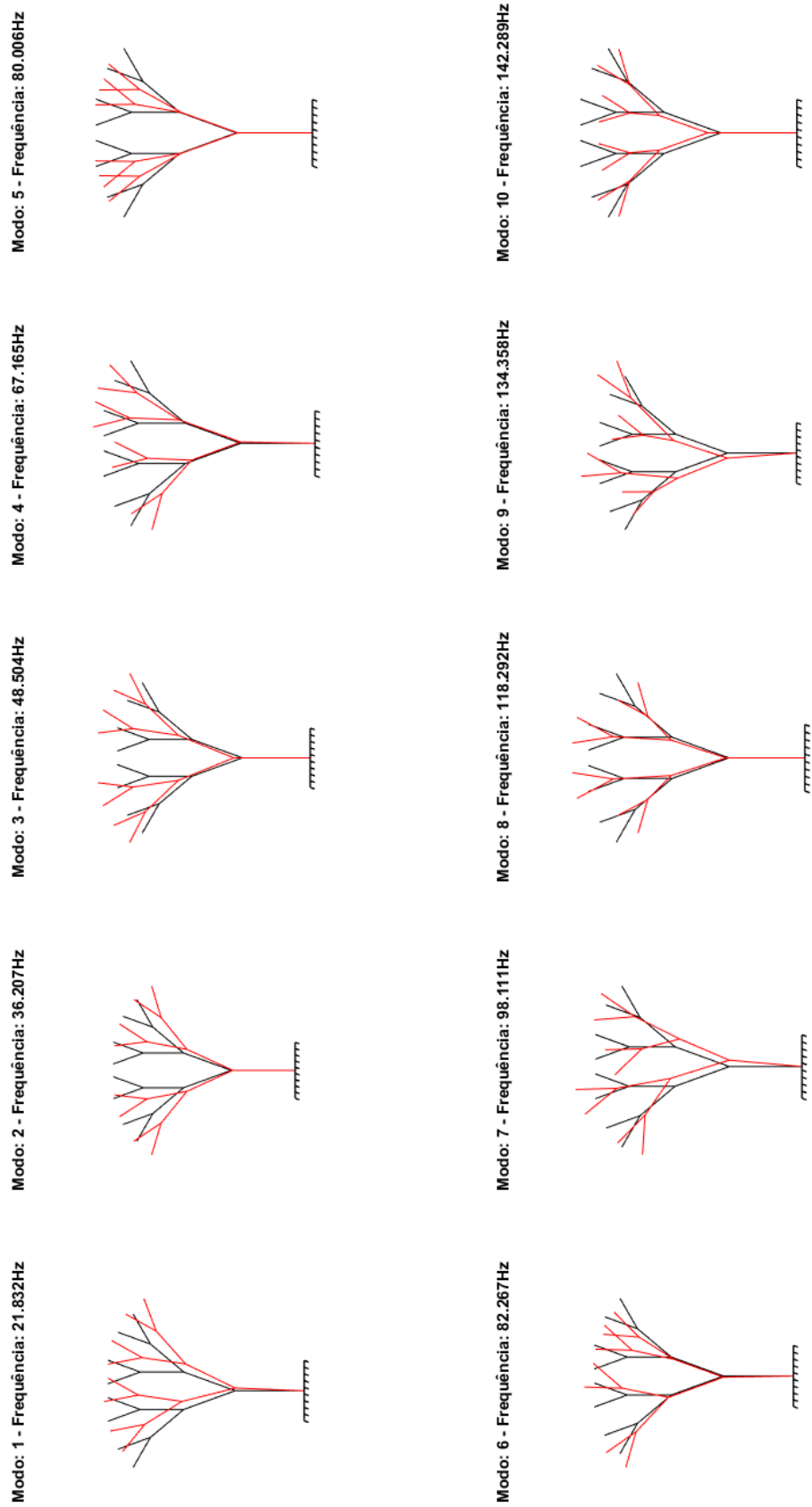
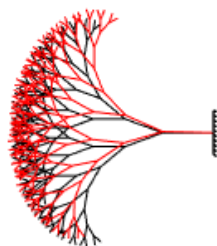
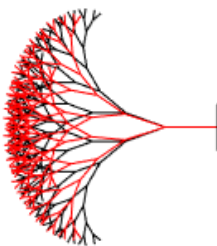


Figura 4 – Comportamento da malha de quatro níveis.

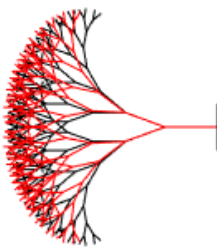
Modo: 1 - Frequência: 9.870Hz



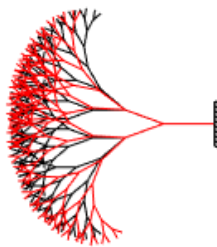
Modo: 2 - Frequência: 12.556Hz



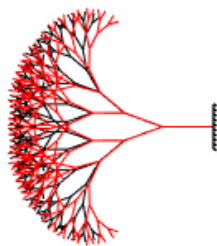
Modo: 3 - Frequência: 16.548Hz



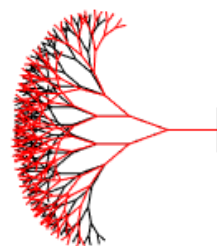
Modo: 4 - Frequência: 16.592Hz



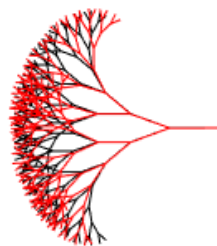
Modo: 5 - Frequência: 22.861Hz



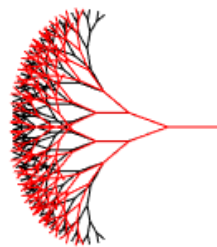
Modo: 6 - Frequência: 22.984Hz



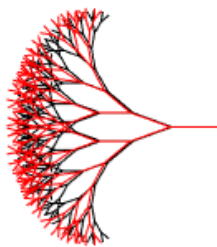
Modo: 7 - Frequência: 23.049Hz



Modo: 8 - Frequência: 23.068Hz



Modo: 9 - Frequência: 32.677Hz



Modo: 10 - Frequência: 32.743Hz

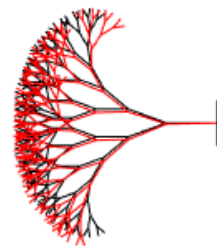


Figura 5 – Comportamento da malha de oito níveis.

Ao plotar esses modos de vibração em um gráfico, tem-se na Figura 6 os modos de vibração da malha de quatro níveis, e na Figura 7, os modos de vibração da malha de oito níveis.

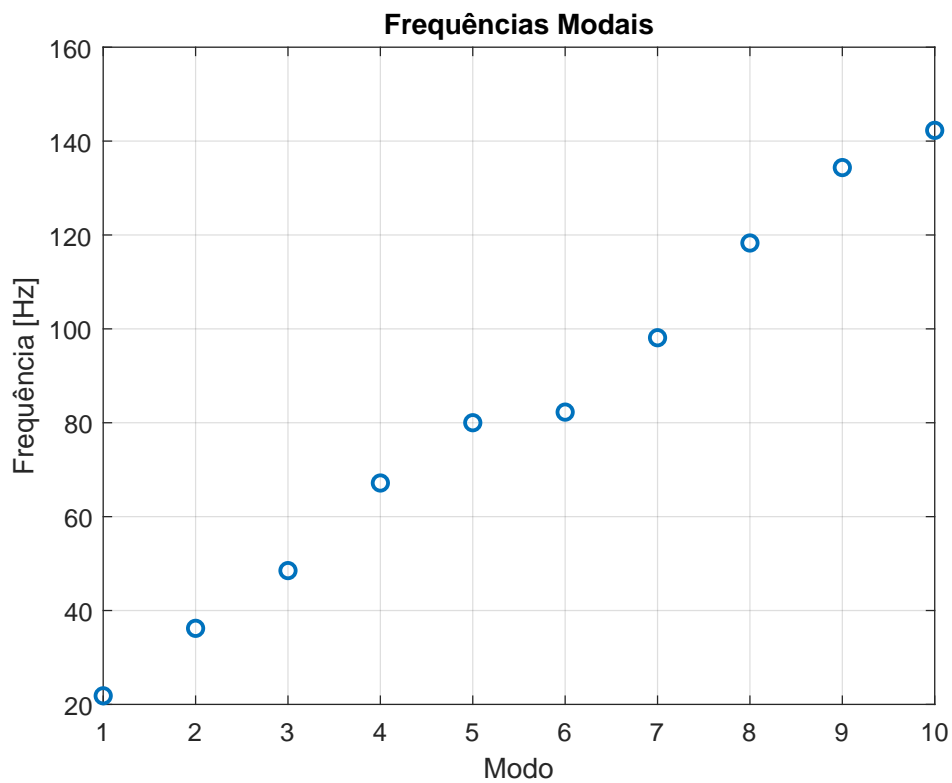


Figura 6 – Modos de vibração da malha de quatro níveis.

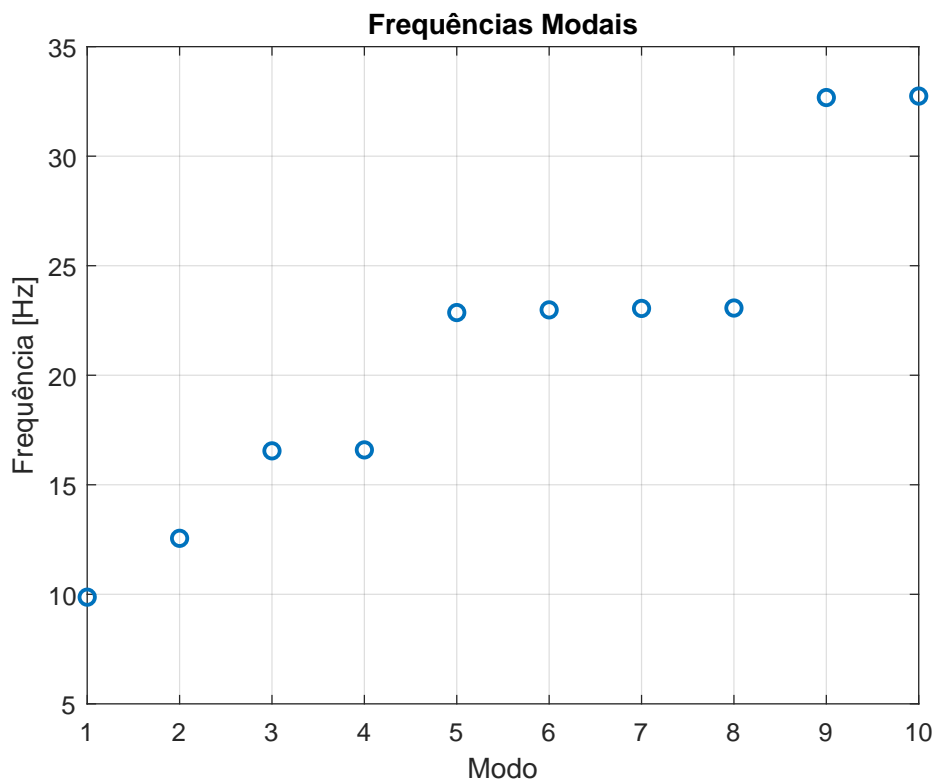


Figura 7 – Modos de vibração da malha de oito níveis.

4 CONCLUSÃO

A análise dinâmica de uma árvore, utilizando o método dos elementos finitos, revelou como as propriedades geométricas e materiais influenciam diretamente o comportamento vibracional da estrutura. Ao comparar os modelos de quatro e oito níveis de ramificação, observou-se que um maior número de níveis resulta em frequências modais mais complexas e com valores menores, o que indica maior flexibilidade estrutural nas árvores com mais subdivisões.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. [S.l.]: Wiley, 1989.

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY. *Frequency Response of Trees*. [S.l.], 2010. 2.093 Term Project, Department of Civil and Environmental Engineering.

PAVANELLO, R. *Caderno de Elementos Finitos*. [S.l.], 2020.