

Caderno de Elementos Finitos

Renato Pavanello

Agosto de 2024

Campinas-SP

Lição No. 1

Análise Matricial de Estruturas

Os Objetivos desta seção são:

- Apresentar o conceito de discretização em um problema elementar de mecânica dos sólidos;
- Introduzir o Método dos deslocamentos e a representação local em matricial;
- Aplicar as equações de equilíbrio e de compatibilidade cinemática para escrever o sistema global.
- Caso de cargas distribuídas;
- Implementação Computacional;
- Análise de erros e convergência;
- Exercícios e Tarefas computacionais.

1.1 Conceito de Discretização - Barra de seção variável

Considere o problema de determinar os deslocamentos axiais de uma barra sujeita a uma carga axial concentrada escrito da seguinte forma:

Achar $u(x)$ e $\sigma(x)$ da barra de seção variável construída de material homogêneo, isotrópico modelada considerando comportamento linear elástico, mostrada na figura abaixo.

O modelo matemático associado pode ser escrito como:

Achar $u(x)$ tal que:

$$E \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = -p(x) \quad (1a)$$

sujeito a:

$$u(0) = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{du(L)}{dx} = \frac{F}{EA(L)} \quad (1c)$$

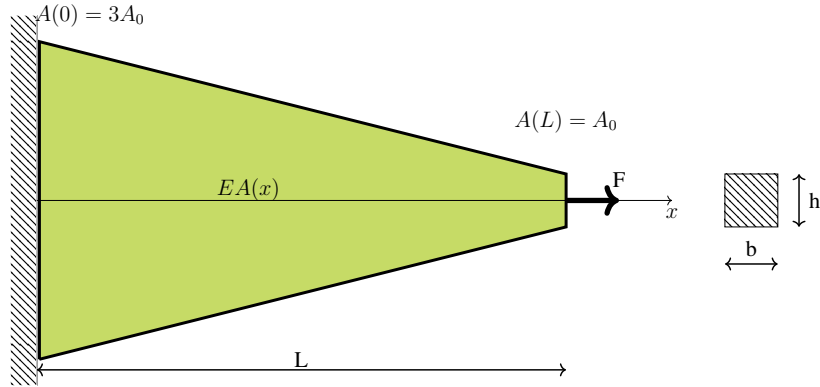


Figura 1: Barra com área variando linearmente.

A solução exata deste problema de valor de contorno é obtida fazendo-se inicialmente um ajuste para a equação da área:

$$A(x) = \beta_1 + \beta_2 x$$

com $A(0) = 3A_0$ e $A(L) = A_0$, o que permite escrever:

$$A(x) = A_0\left(3 - \frac{2x}{L}\right)$$

Considerando-se que a carga distribuída $p(x)$ seja nula, tem-se:

$$E \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = 0$$

Integrando-se uma vez obtém-se:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{C_1}{EA(x)} \quad (2)$$

Integrando-se novamente:

$$u(x) = \int \frac{C_1}{EA(x)} dx + C_2$$

$$u(x) = \int \frac{C_1}{EA_0\left(3 - \frac{2x}{L}\right)} dx + C_2$$

ou ainda:

$$u(x) = -\frac{C_1 L}{2A_0 E} \ln\left(3 - \frac{2x}{L}\right) + C_2 \quad (3)$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2 usa-se a condição de contorno de Dirichlet $u(0) = 0$ definida na Eq.(1b) na expressão do deslocamento definida na Eq.(3).

$$-\frac{C_1 L}{2A_0 E} \ln(3) + C_2 = 0$$

logo,

$$C_2 = \frac{C_1 L}{2A_0 E} \ln(3) \quad (4)$$

e aplicando-se a condição de Neumann $\frac{du(L)}{dx} = \frac{F}{EA(L)}$ definida na Eq.(1c) em conjunto com Eq.(2) tem-se.

$$\begin{aligned} \frac{du(L)}{dx} &= \frac{F}{EA(L)} = \frac{F}{EA_0} = \frac{C_1}{EA_0} \\ C_1 &= F \end{aligned} \quad (5)$$

Assim, a solução analítica em deslocamento é dada por:

$$\boxed{u(x) = -\frac{FL}{2A_0 E} \ln\left(1 - \frac{2x}{3L}\right)} \quad (6)$$

para $x = L$, tem-se

$$u(L) = -\frac{FL}{2A_0 E} \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad (7)$$

1.2 Conceito de Discretização - Barra de seção constante

Uma primeira opção mais simples para resolver o problema da barra de seção variável seria considerar a área constante e obter a seguinte simplificação:

$$A_m = \frac{A_0 + 3A_0}{2} = 2A_0$$

O modelo associado pode ser escrito como o seguinte problema de valor de contorno:

Achar $u(x)$ tal que:

$$EA_m \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -p(x) \quad (8a)$$

sujeito a:

$$u(0) = 0 \quad (8b)$$

$$\frac{du(L)}{dx} = \frac{F}{EA_m} \quad (8c)$$

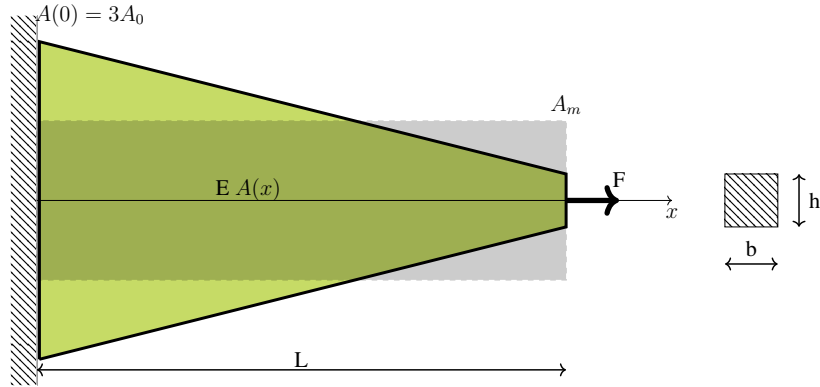


Figura 2: Barra de seção constante, adotando o valor médio A_m .

A solução analítica neste caso pode ser facilmente obtida e é dada por:

$$u(x) = \frac{F}{EA_m}x \quad (9)$$

então, a solução em $x = L$ é dada por:

$$u(x) = \frac{FL}{EA_m} \quad (10)$$

1.3 Conceito de Discretização - Subdividindo a Barra - Método Direto

Uma segunda opção de resolução deste problema, baseia-se na ideia de discretização. Neste caso, dividi-se o problema em vários sub-domínios mais simples, conforme mostrado na figura 3:

Neste caso, temos 3 elementos e 4 nós. A força F é aplicada no nó 4, e a condição de Dirichlet, $u(0) = 0$, é aplicada no nó 1. A solução discretizada é baseada na formulação local e em um esquema de montagem do sistema global. A solução geral é obtida pela superposição das soluções locais simples. Inicialmente, escreve-se a relação força deslocamento de uma barra de seção constante usando uma notação matricial. Assim, considere uma barra de comprimento L_e , área A e material com módulo de elasticidade E , conforme mostrado na Figura 4.

Se uma força é aplicada no nó 1 e a barra está restrita pelo nó 2, então teremos um deslocamento u_1 diferente de zero, e uma força de reação aplicada no nó 2. Caso existam forças aplicadas nos dois nós, teremos deslocamentos nos dois nós u_1 e u_2 . Pela lei constitutiva (Lei de Hooke), tem-se:

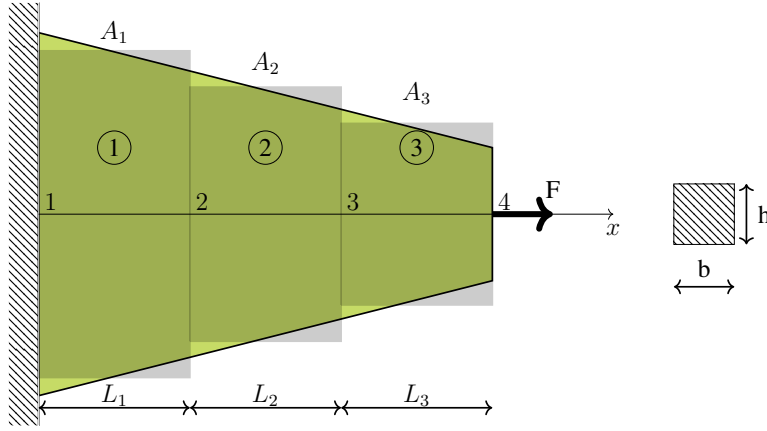


Figura 3: Barra discretizada.

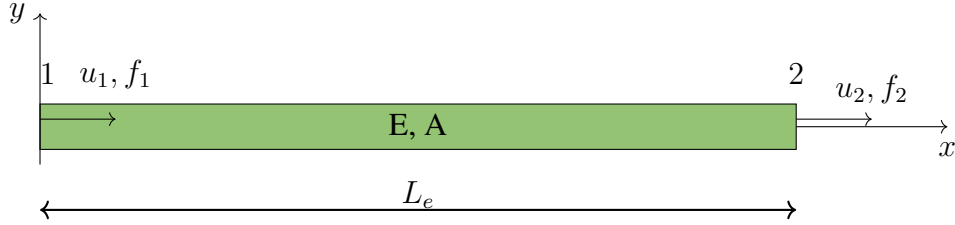


Figura 4: Elemento de barra - deslocamentos nodais u_1 e u_2 , forças nodais f_1 e f_2

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon = E \frac{(u_2 - u_1)}{L_e} \quad (11)$$

se $u_2 > u_1$ então a barra está em tração, e se $u_2 < u_1$ a barra estará em compressão. Aplicando-se as condições de equilíbrio na barra tem-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_1 + f_2 = 0 \quad (12)$$

Fazendo-se um corte em uma região qualquer do comprimento da barra, tem-se:

$$f_1 + \sigma_{xx}A = 0 \quad (13)$$

logo

$$f_1 = -f_2 = -\sigma_{xx}A = -AE \frac{u_2 - u_1}{L_e} \quad (14)$$

portanto,

$$f_1 = \frac{EA}{L_e}(u_1 - u_2) \quad (15)$$

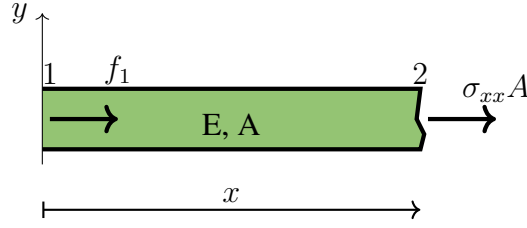


Figura 5: Elemento de barra - corte em x

por outro lado;

$$f_2 = \sigma_{xx} A = \frac{EA}{L_e}(u_2 - u_1) \quad (16)$$

Organizando matricialmente, tem-se :

$$\frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ou de forma compacta,

$$[\mathbf{k}_e]\{\mathbf{u}_e\} = \{\mathbf{f}_e\} \quad (18)$$

sendo $[\mathbf{k}_e]$ a matriz de rigidez de um elemento, $\{\mathbf{u}_e\}$ o vetor dos deslocamentos nodais de um elemento e $\{\mathbf{f}_e\}$ o vetor das forças nodais de um elemento. Sobre as grandezas da Equação 18 cabem as seguintes observações:

- A equação local de um elemento representa o comportamento de uma mola equivalente de rigidez k :

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

- A matriz de rigidez de um elemento é simétrica

$$[\mathbf{k}_e] = [\mathbf{k}_e]^T \quad (20)$$

- A matriz de rigidez do elemento de barra é positiva semi-definida

$$\{\mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{k}_e] \{\mathbf{u}_e\} \geq 0 \text{ para todo } \{\mathbf{u}_e\} \neq 0 \quad (21)$$

Exemplos:

$$\{\mathbf{u}_e\} = \{1 \ -1\}^T \Rightarrow \{\mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{k}_e] \{\mathbf{u}_e\} = \frac{4EA}{L_e} \quad (22)$$

$$\{\mathbf{u}_e\} = \{1 \ 1\}^T \Rightarrow \{\mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{k}_e] \{\mathbf{u}_e\} = 0 \quad \text{Modo r gado} \quad (23)$$

- Para os modos de corpo r gado $\{\mathbf{u}_e\} = \{1 \ 1\}^T$ a energia de deformação é nula:

$$U_0 = \int \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} = \int E \varepsilon_{xx} d\varepsilon_{xx} = \frac{E \varepsilon_{xx}^2}{2} \quad (24)$$

somando U_0 no volume do elemento V_e , e considerando $AdL = dv$ tem-se:

$$U = \int_{V_e} \frac{E}{2} \left(\frac{u_2 - u_1}{L_e} \right)^2 dv = \frac{EA}{2L_e} (u_2 - u_1)^2 \quad (25)$$

que é exatamente o valor de $\{\mathbf{u}_e\}^T [\mathbf{k}_e] \{\mathbf{u}_e\}$ que é sempre positivo independentemente se o modo está em traço ou compressão, e é nulo se o modo for de corpo r gado.

- A soma dos coeficientes de qualquer linha ou coluna da matriz de rigidez é nula (isso ocorre para a maioria das matrizes de rigidez dos elementos finitos).
- $[\mathbf{k}_e]$   singular. Suas linhas são linearmente dependentes.
- $\{\mathbf{f}_e\}$ são as forças internas que atuam nos nós de ligação.

1.4 Técnicas de Montagem do sistema global

Considera-se o conjunto de elementos abaixo:

Neste caso a discretização é arbitrária, tanto para a definição dos comprimentos dos elementos, como para a definição das áreas dos elementos. O modelo de elementos finitos equivalente mostrado na Figura 7.

Para cada um dos elementos a rigidez $k_i = \frac{E_i A_i}{L_i}$, então as matrizes são dadas por:

- elemento 1

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

- elemento 2

$$k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

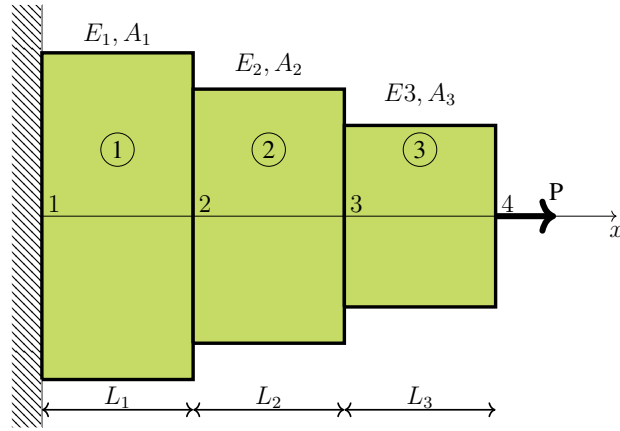


Figura 6: Barra discretizada e 3 elementos.

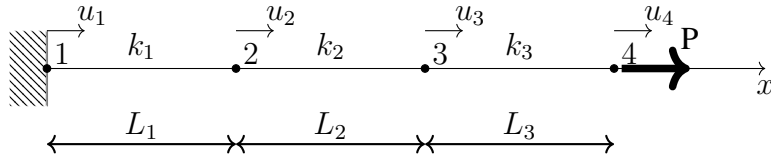


Figura 7: Graus de Liberdade da Barra discretizada.

- elemento 3

$$k_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Expandindo-se os elementos tem-se:

- elemento 1

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}_1 \quad (29)$$

- elemento 2

$$k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}_2 \quad (30)$$

- elemento 3

$$k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}_3 \quad (31)$$

Para cada nó, tem-se a seguinte relação de esforços:

$$\sum_{\text{elementos}} f_i = P_i \quad (32)$$

isso é a soma de todas as forças internas aplicadas aos nós f_i deve se equilibrar com as forças externas também aplicadas aos nós P_i . Portanto, para cada nó k , onde concorrem dois elementos i e j , e considerando que há uma carga externa aplicada, tem-se

$$f_k^i + f_k^j = P_k \quad (33)$$

Usando a condição de equilíbrio pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}_2 + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}_3 \quad (34)$$

Logo, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_1 + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_2 + \dots \\ \dots + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

Considerando a compatibilidade cinemática entre os elementos, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

O que permite escrever formalmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}] - \text{Matriz de Rigidez Global}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Aplicando-se a condição de contorno em deslocamento, sabe-se que $u_1 = 0$, logo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = ? \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} R_1 = ? \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Aplicar $u_1 = 0$ significa eliminar linha e coluna correspondentes, e R_1 é a reação de apoio do nó 1. Aplicando as condições de contorno tem-se:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Determina-se o vetor $\{\mathbf{u}\}$ resolvendo-se o sistema linear mostrado na Equação 39. O pós processamento é feito ao nível elementar usando-se a equação local para encontrar as reações de apoio e a definição de tensão dada por:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}(u_j - u_i) \quad (40)$$

1.5 Usando um método de penalidades para impor as condições de Dirichlet

Outra possibilidade para impor as condições de Dirichlet nulas ou não nulas, é usando um método de penalidades. Suponha que neste caso duas condições de contorno em deslocamento são aplicadas ao problema da barra:

$$u(0) = 0 \quad (41a)$$

$$u(L) = \bar{u} \quad (41b)$$

Assim, para uma malha de quatro elementos, considerando hipoteticamente a aplicação de forças ou reações de apoio nos 4 nós, o sistema a ser resolvido é dado por:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 = ? \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

O método da penalidade consiste em aplicar uma restrição na equação referente ao grau de liberdade que se pretende impor a um valor, alterando tanto a matriz de rigidez como no vetor de força, mantendo-se a estrutura e a esparsidade da matriz. Assim, a forma penalizada é dada por:

$$\begin{bmatrix} k_1 + \mathbf{k}_s & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + \mathbf{k}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_s * 0 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mathbf{k}_s * \bar{u} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Observa-se da Equação 43 que a diagonal das linha 1 e 4 foram penalizadas, e as forças correspondentes foram substituídas pelo valor de \mathbf{k}_s multiplicado pelo valor da condição de contorno imposta. O valor do termo penalizador deve ser grande o suficiente para garantir que a restrição desejada seja satisfeita. Usar valores excessivamente grandes para o número de penalidade, altera o valor do maior auto-valor da matriz do sistema, o que pode levar a problemas numéricos na resolução. Todavia, nesta metodologia, a estrutura da matriz de rigidez do sistema não é alterada, o que pode ser uma vantagem importante para a implementação. Além disso, pode-se aplicar condições de contorno não nulas nos problemas. Embora esta solução seja aproximada, é muito usada na prática. Observa-se neste caso, que o valor da Força no nó 4, foi desconsiderado. De fato, não faz sentido aplicar duas condições de contorno no mesmo nó, sendo possível no entanto, determinar as reações de apoio no pós-processamento.

1.6 Avaliação dos pontos internos

Inicialmente, o método de análise matricial de estruturas fornece a solução nos pontos nodais apenas. Considerando que a formulação do problema é baseada na expressão da solução de uma barra com cargas exclusivamente nos nós. Assim, o deslocamento no interior dos elementos pode ser interpolada usando-se a solução exata do seguinte problema, Achar $u(x)$ tal que:

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0 \quad (44a)$$

sujeito a:

$$u(0) = u_1 \quad (44b)$$

$$u(L) = u_2 \quad (44c)$$

sendo u_1 e u_2 os deslocamentos nodais do elemento mostrado na Figura 4. Para resolver o problema, integra-se uma vez a equação governante:

$$EA \frac{du(x)}{dx} = C_1 \quad (45)$$

Integrando-se novamente:

$$EAu(x) = C_1 x + C_2 \quad (46)$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2 usa-se as condições de contorno de Dirichlet definidas nas Equações (44b,44c) na expressão do deslocamento definida na Eq.(46).

$$EAu_1 = C_1 0 + C_2 = C_2 \quad (47)$$

e

$$EAu_2 = C_1 L + C_2 = C_1 L + EAu_1 \quad (48)$$

logo,

$$C_1 = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \quad (49)$$

Assim, a solução analítica em deslocamento é dada por:

$$EAu(x) = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1)x + EAu_1 \quad (50)$$

ou ainda,

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \left(\frac{x}{L}\right)u_2 \quad (51)$$

onde $N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$ e $N_2(x) = \frac{x}{L}$ são as funções de interpolação do elemento de barra. Estas funções, serão obtidas de forma sistemática usando a teoria de polinômios e a técnica de aproximações nodal, nas próximas lições. No momento, é possível usar estas funções lineares para interpolar os valores de deslocamento em pontos internos da barra, uma vez conhecidos os seus valores nodais. Na Figura 8, mostram-se as funções de interpolação que podem ser usadas exclusivamente no domínio do elemento, e cuja valor nodal é 1.

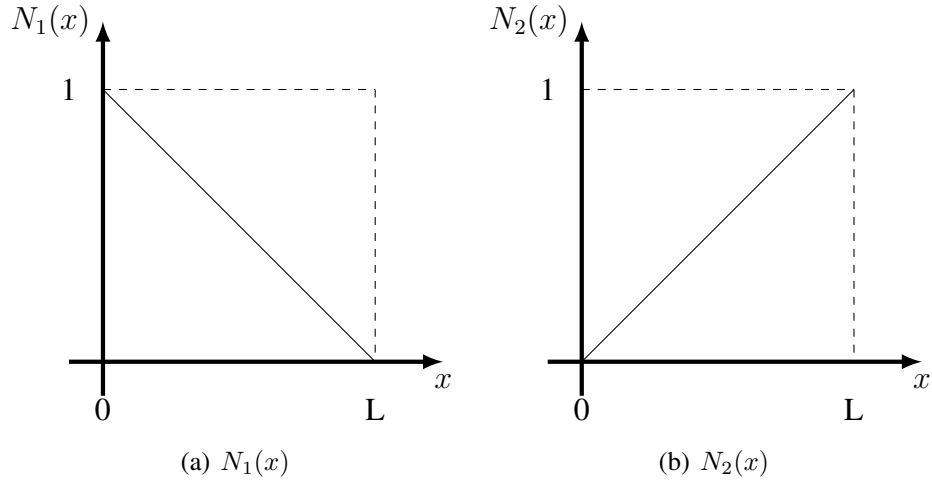


Figura 8: Funções de interpolação da barra

1.7 Barras sujeitas a cargas distribuídas e análise de erros

Nesta seção, vamos explorar o caso de barras de seção constante, com uma força pontual F aplicada em $x = L$ e engastada em $x = 0$, sujeita a uma carga uniformemente distribuída p_o , mostrado na Figura 9, é dado por

$$P0 \begin{cases} EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -p_o \\ \text{sujeito a :} \\ u(0) = 0 \\ EA \frac{du(L)}{dx} = F \end{cases} \quad (52)$$

Se E , A , L e p_o são constantes, com as condições de contorno dadas, a solução analítica do problema pode ser escrita por:

$$u(x) = \frac{Fx}{EA} + \frac{p_o}{2EA}(2L - x)x \quad (53)$$

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{du}{dx} = \frac{F}{EA} + \frac{p_o}{EA}(L - x) \quad (54)$$

$$N_x(x) = F + p_o(L - x) \quad (55)$$

$$\sigma_{xx}(x) = E\varepsilon_{xx} = \frac{F}{A} + \frac{p_o}{A}(L - x) \quad (56)$$

A solução considerando 1 elemento finito é mostrada na Figura 10, com R representando a reação de apoio, e aplicando a análise matricial, tem-se:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R + \frac{p_o L}{2} \\ F + \frac{p_o L}{2} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

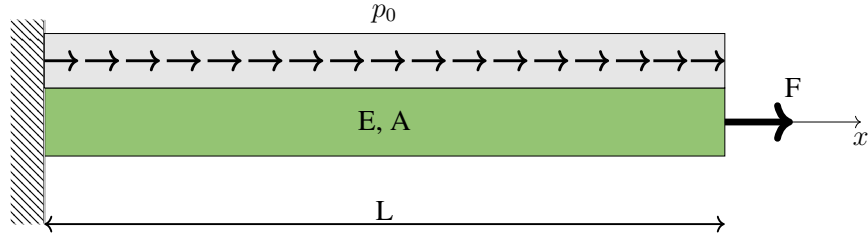


Figura 9: Barra com carga constante.

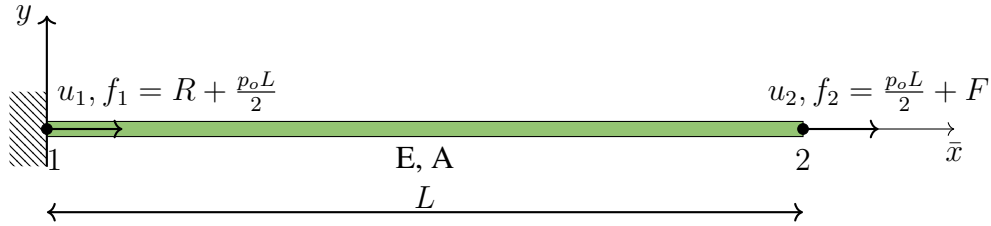


Figura 10: Malha com 1 Elemento de barra

resolvendo para u_2 , tem-se

$$\frac{EA}{L}u_2 = F + \frac{p_o L}{2} \quad (58)$$

$$u_2 = \frac{L}{EA}(F + \frac{p_o L}{2}) \quad (59)$$

substituindo na primeira linha da equação do elemento, tem-se;

$$-\frac{EA}{L}(\frac{L}{EA}(F + \frac{p_o L}{2})) = R + \frac{p_o L}{2} \quad (60)$$

ou seja:

$$R = -(F + p_o L) \quad (61)$$

Para achar a solução nos pontos internos usa-se a interpolação encontrada na seção anterior, dada por:

$$\bar{u}(x) = (1 - \frac{\bar{x}}{L})u_1 + (\frac{\bar{x}}{L})u_2 = \underbrace{(1 - \frac{\bar{x}}{L})0}_{=0} + (\frac{\bar{x}}{L})\frac{L}{EA}(F + \frac{p_o L}{2}) = (\frac{F}{EA} + \frac{p_o L}{2EA})\bar{x} \quad (62)$$

Assim, a resposta analítica é uma parábola, Eq. 53, e a numérica é uma reta, Eq. 62. Na Figura 11 mostra-se uma comparação das duas soluções.

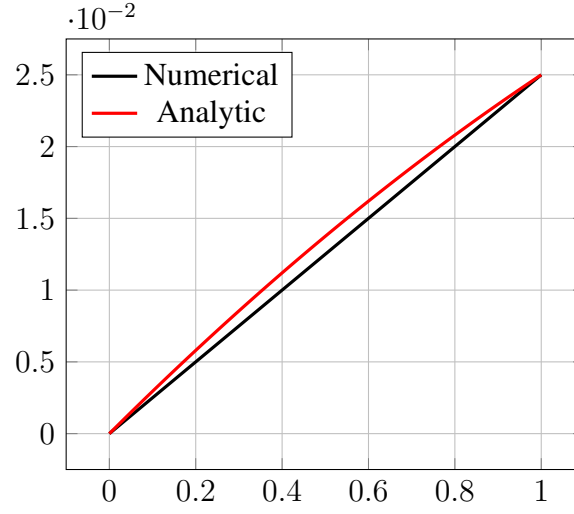


Figura 11: curva de erro.

As outras grandezas, podem ser calculadas no pós processamento do modelo numérico são:

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{d\bar{u}(x)}{dx} = \frac{F}{EA} + \frac{p_o L}{2EA} \quad (63)$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = E\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{F}{A} + \frac{p_o L}{2A} \quad (64)$$

Neste caso, a função de erro pode ser calculada da seguinte maneira:

$$e(x) = u(x) - \bar{u}(x) = \left(\frac{Fx}{EA} + \frac{p_o}{2EA}(2L - x)x\right) - \left(\frac{F}{EA} + \frac{p_o L}{2EA}\right)\bar{x} \quad (65)$$

ou seja,

$$e(x) = \frac{p_o}{2EA}(L - x)x \quad (66)$$

sabendo-se que $p_o = 100N/m$, $F = 200N$, $EA = 10^4$ e $L = 1$ pode-se determinar a área sob a curva de erro como sendo $8,33E - 4$ e o valor máximo da curva de erro igual a $1,25E - 3$. É interessante traçar a curva de erro, conforme a Figura 12.

Outra forma de avaliar o erro, que é a mais usual e robusta, é através do cálculo da norma L_2 do erro, dada por :

$$\|e(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^L e^2(x)dx} = \sqrt{\left(\int_0^L \left(\frac{p_o}{2EA}(Lx - x^2)\right)^2 dx\right)} = 9,13e - 4 \quad (67)$$

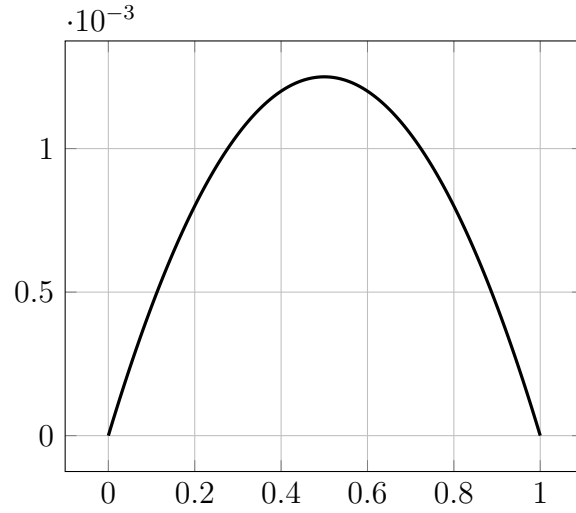


Figura 12: curva de erro.

Vamos considerar agora a solução com dois elementos, conforme mostrado na Figura

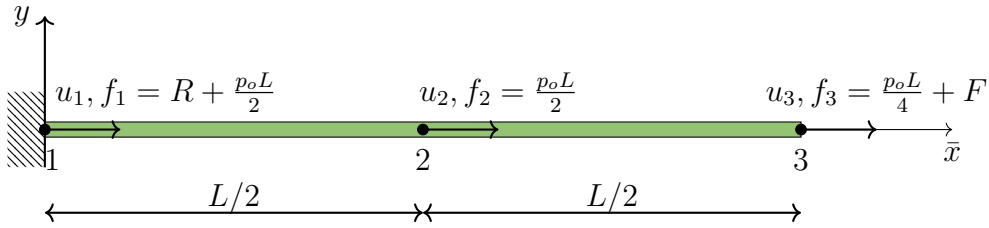


Figura 13: Malha com 2 Elementos de barra

Calculando as matrizes de rigidez dos elementos, tem-se:

$$[k_1] = [k_2] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Por tanto o sistema global pode ser escrito por :

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R + \frac{p_0L}{4} \\ \frac{p_0L}{4} + \frac{p_0L}{4} \\ F + \frac{p_0L}{4} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

Aplicando-s a condição de contorno e resolvendo-se o sistema da Eq. 69, encontram-se os deslocamentos nodais, e forças internas para cada nó. Comparando-se os resultados numéricos com os resultados analíticos, encontra-se um comportamento conforme mostrado na Figura 14.

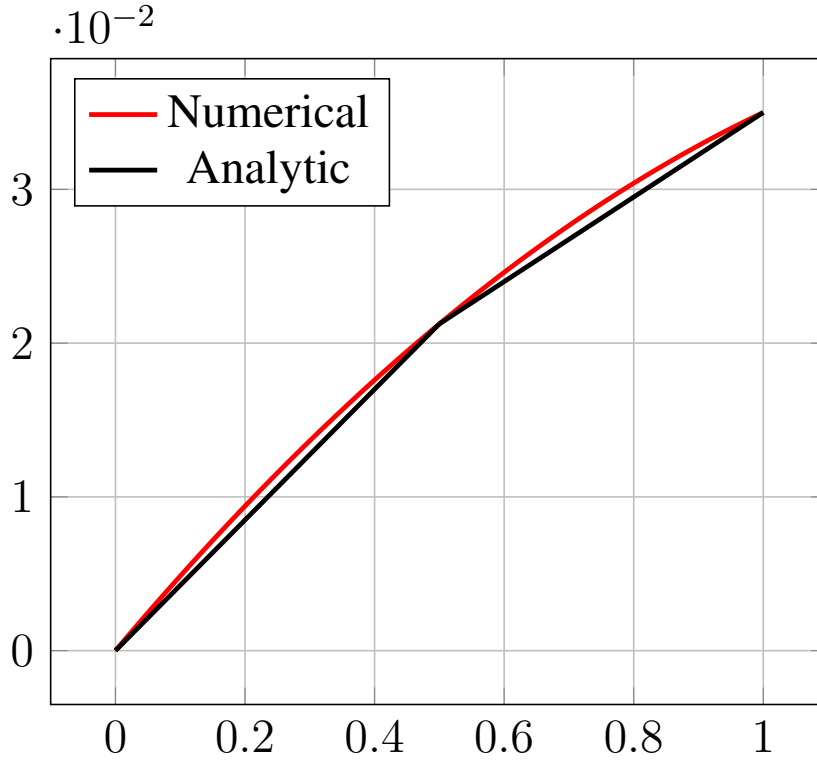


Figura 14: curva de erro.

1.8 Implementação Computacional

Uma implementação computacional simples do problema de barra 1D serve como ponto de partida para o entendimento do arranjo matricial adotado no método dos elementos finitos. O problema da barra de seção constante, com uma força pontual aplicada em $x = L$ e engastada em $x = 0$, sujeita a uma carga de volume constante p_o , mostrado na Figura 9, é dado por

$$P0 \begin{cases} EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -p_o \\ \text{sujeito a :} \\ u(0) = 0 \\ EA \frac{du(L)}{dx} = F \end{cases} \quad (70)$$

Se E , A , L e p_o são constantes, com as condições de contorno dadas, a solução analítica do problema pode ser escrita por:

$$u(x) = \frac{Fx}{EA} + \frac{p_o}{2EA}(2L - x)x \quad (71)$$

Então, um código básico pode ser desenvolvido, conforme listagem do Código

I.

Código I - Barra usando Elementos Finitos

```

1  %*****
2  %                               Barra carga Constante
3  %
4  %                               EA u'' = -po
5  %                               u(0)=0
6  %                               du(L)/dx=F/EA
7  %
8  % Solucao Analitica   u(x)=Fx/EA + (p0/2EA)(2L-x)x
9  % Forca de Reacao    R(0)= -(poL+F)
10 %
11 %   Malha de Elementos Finitos
12 %
13 %   1----2-----3----4 ...   node number
14 %       1       2       3       element number
15 %
16 %   R. Pavanello
17 %   www.fem.unicamp.br/~ltm
18 %   outubro 2021
19 %*****
20 close all
21 clear all
22 clc
23
24 %% Entrada de dados
25
26 L=1;           % comprimento total da Barra
27 E=100e9 ;      % modulo de elasticidade
28 A=(10e-3)^2;   % area
29 F=500;         % carga pontual na extremidade direita x=L
30 po=2000;       % carga distribuida constante
31 nel=3;         % numero de elementos
32
33 %% Gerando a malha
34
35 nnos=nel+1;    % numero de nos
36 he=L/nel;      % comprimento do elemento
37 xn=0:he:L;     % coordenadas nodais
38 inci=[1:nnos-1]' [2:nnos]'; % formacao dos elemntos
39

```

```

40 %% Montagem da matriz de Rigidez
41 Kg=zeros(nnos);
42 uh=zeros(nnos,1);
43 Fg=zeros(nnos,1);
44
45 ke=(E*A/he)*[ 1   -1 ; -1   1]; % Rigidez do elemento
46 fe=(po*he/2)*[1 ; 1];          % Carga nodal eqv. > po
47
48 for e = 1:nel
49     Kg(inci(e,:),inci(e,:))=Kg(inci(e,:),inci(e,:))+ke;
50     Fg(inci(e,:),1)=Fg(inci(e,:),1)+fe;
51 end
52 Fg(end,1)=Fg(end,1)+F; % carga Pontual no no da Direita
53 freedofs=2:nnos; % aplicar as condicoes de contorno
54 uh(freedofs,1)=Kg(freedofs,freedofs)\Fg(freedofs,1); %
    calculo da resposta
55
56 %% pos processamneto
57
58 % calculo das forcas internas
59 for e=1:nel
60     NxEl(e)=E*A/he *[-1 1] *uh(inci(e,:));
61 end
62
63 %% calculo da solucao analitica
64 x=0:he/5:L;
65 u=(F/(E*A))*x + (po/(2*E*A))*(2*L-x).*x;
66 Nx=F+po*(L-x);
67
68 %% graficos
69
70 % deslocamentos
71 figure(1);
72 subplot(2,1,1);plot(xn,uh(:,1),'-o',x,u,'r-x'); grid on;
73 legend('Numerical','Analytic');
74 xlabel('Posicion x [m]')
75 ylabel('Displacement u(x) [m]')
76
77 % Forca Normal
78 subplot(2,1,2); bar((xn(2:nel+1)+xn(1:nel))/2 , NxEl(1:nel)
    ,1); hold on;
79 subplot(2,1,2);plot(x,Nx,'r-x'); grid on;
80 axis([0,L,-1.5*abs(min(Nx)), 1.5*abs(max(Nx))]);

```

```

81 xlabel('Posicion x [m]')
82 ylabel(' Normal Load Nx [N] ')
83 legend('Numerical','Analytic');
84 hold off;

```

1.9 Exercícios e Tarefas Computacionais

I. Barra de seção constante - Solução analítica

O problema de uma barra de seção constante A , constituída de material com módulo de elasticidade E , de comprimento L submetida a um carregamento $q(x)$ pode ser definido com o sendo: Achar o campo de deslocamentos $u(x)$ tal que :

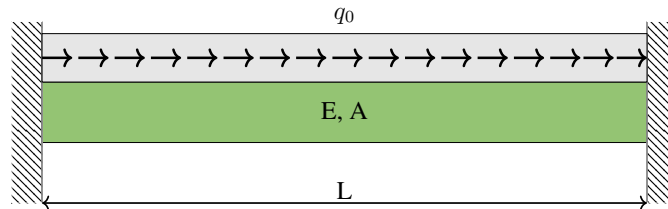


Figura 15: Barra com carga constante.

$$P0 \left\{ \begin{array}{l} EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -q(x) \\ \text{sujeito a :} \\ u(0) = ua \\ u(L) = ub \end{array} \right. \quad (72)$$

Se E , A , L e $q(x)$ são constantes, e $q(x) = q_0$, com as condições de contorno dadas por $ua = 0$ e $ub = 0$, então a solução analítica deste problema é dada por:

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left(-\frac{q_0 x^2}{2} + \frac{q_0 L}{2} x \right) \quad (73)$$

Uma implementação geral para soluções analíticas da barra com seção constante pode ser desenvolvida conforme listagem do Código II.

Código II - Solução Analítica de uma barra

```

1 % *****
2 %      Solucoes analiticas da barra
3 %      Condicoes de Dirichelet
4 %      ua e ub
5 %
6 %
7 % D.C. Cunha @ www.fem.unicamp.br/~ltm
8 % R. Pavanello@ www.fem.unicamp.br/~ltm
9 %
10 % *****
11 clear all; close all; clc;
12 % *****
13 % Data set
14 L = 2.0; % bar length [m]
15 nx = 100; % number of x-points
16 x = linspace(0,L,nx)'; % x coordinates
17 h = L/(nx-1); % intervals length
18 A = 0.01; % section area [m^2]
19 E = 210.E9; % Young modulus [Pa]
20 % function types:con,lin,par,sin,cos,exp
21 type = 'con';
22 q0 = 1E6; % Distributed Load [N/m]
23 ua = 0; % left displacement [m]
24 ub = 0; % right displacement [m]
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 % Load definitions
27 y = x/L; % normalized position vector
28 switch type
29     case 'con' % constant
30         p = q0*ones(length(y),1);
31     case 'lin' % linear
32         p = q0*y;
33     case 'par' % parabola
34         p = q0*y.*(1-y);
35     case 'sin' % sinus
36         p = q0*sin(pi*y);
37     case 'cos' % cosinus
38         p = q0*cos(pi*y);
39     case 'exp' % exponential
40         p = q0*exp(y);
41     otherwise % default = constant
42         warning(['tipo de carregamento >>> ',type,'<<<
nao implementado !!!'])

```

```

43     end
44     % get particular solution up and its derivative
        dup
45     switch type
46         case 'con' % constant
47             up = -q0*x.^2/(2*E*A);
48             dup = -q0*x/(E*A);
49         case 'lin' % linear
50             up = -q0*x.^3/(6*E*A*L);
51             dup = -q0*x.^2/(2*E*A*L);
52         case 'par' % parabola
53             up = (-q0*x.^3.*(2*L-x))./(12*E*A*L^2);
54             dup = (-q0*x.^2.*(3*L-2*x))./(6*E*A*L^2);
55         case 'sin' % sinus
56             up = q0*(L/pi)^2*sin(pi*x/L)/(E*A);
57             dup = q0*(L/pi)*cos(pi*x/L)/(E*A);
58         case 'cos' % cosinus
59             up = q0*(L/pi)^2*cos(pi*x/L)/(E*A);
60             dup = -q0*(L/pi)*sin(pi*x/L)/(E*A);
61         case 'exp' % exponential
62             up = -q0*L^2*exp(x/L)/(E*A);
63             dup = -q0*L*exp(x/L)/(E*A);
64         otherwise % default = constant
65     warning(['tipo de carregamento >>> ',type,'<<< nao
        implementado !!!'])
66     end
67     % get Constant Values for uh and its derivative
        duh
68     up0 = up(1);
69     upL = up(end);
70     c2 = ua - up0;
71     c1 = (ub - upL - c2)/L;
72     % get solution uana and its derivative duana
73     uana = up + c1*x+c2;
74     duana = dup + c1;
75     subplot(2,1,1), bar(x,p);
76     grid on;
77     title('Carregamento Distribuido')
78     xlabel('posicao [m]')
79     ylabel('carga [N/m]')
80     subplot(2,1,2), plot(x,uana,'r',x,duana,'g'); grid
        on;
81     title('Campo de deslocamento e sua derivada')

```

```

82     xlabel('posicao [m]')
83     ylabel('Deslocamentos [m]')
84     legend('u(x)', 'du(x)/dx')

```

II. Barra de seção constante - Método direto

- (1) Ache a solução analítica do problema da barra de seção constante com carga $q(x) = q_0$ constante, considerando $u(0) = u_a = 0$ e $u(L) = u_b = \bar{u}_b$ valor conhecido constante. Compare a sua solução com a obtida no código 1.8. A barra é feita de aço, a seção é circular com diâmetro 30 mm, e a carga constante de $1kN/m$. Verifique sua resposta para diferentes valores de \bar{u}_b , comparando com os resultados obtidos no Código 1.8.
- (2) Repita o item anterior para o caso de carga variando linearmente $q(x) = \frac{q_0 x}{L}$.
- (3) Usando o programa desenvolvido previamente em sala de aula, que resolve o problema da barra com carga constante pelo método dos Elementos Finitos, pede-se:
 - Para a barra de seção constante compare as soluções numéricas com as analíticas para diferentes discretizações ($nel = 5, 10, 20, 40$). Faça um gráfico comparando as soluções analíticas e numéricas. Faça um gráfico dos erros em porcentagem calculados em cada ponto. Calcule e informe a norma euclidiana dos erros obtidos. Repita o procedimento para cada discretização adotada e faça uma análise de convergência usando a escala logarítmica. Comente e justifique os resultados.
 - Repita o item anterior para a barra com carga distribuída linear.

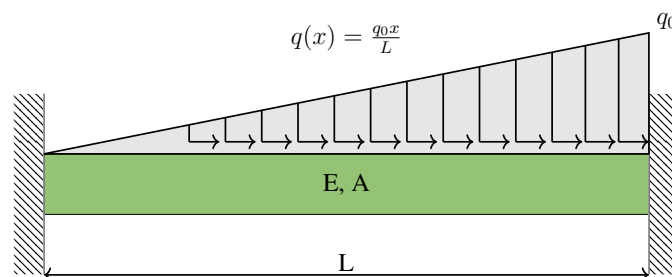


Figura 16: Barra com carga variando linearmente.

III. Barra de seção constante com carga variável

O problema de uma barra de seção constante A , constituída de material com módulo de elasticidade E , de comprimento L submetida a um carregamento $q(x) = \frac{q_0 x}{L}$ pode ser definido com o sendo: Achar o campo de deslocamentos $u(x)$ tal que :

$$P_0 \left\{ \begin{array}{l} EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{q_0 x}{L} \\ \text{sujeito a :} \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{array} \right. \quad (74)$$

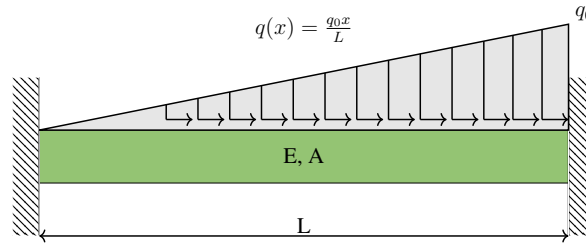


Figura 17: Barra com carga variando linearmente.

Se E, A, L são constantes, com as condições de contorno dadas por $u(0) = 0$ e $u(L) = 0$, então a solução analítica deste problema é dada por:

$$u(x) = \frac{q_0}{6EAL} (L^2 x - x^3) \quad (75)$$

Para este caso pede-se:

- (1) A barra é feita de aço com $E = 210GPa$, com seção circular de diâmetro 30 mm e a carga linear com $q_0 = 1kN/m$ e $L = 10m$. Calcule e faça um gráfico da solução analítica em deslocamento e em tensão. Lembrando que neste caso a tensão pode ser calculada por $\sigma_{xx} = \frac{N_x(x)}{A}$.
- (2) Usando a análise matricial de estruturas, desenvolva um código para o caso de carga variando linearmente. Compare as soluções numéricas obtidas com as analíticas para diferentes discretizações (5, 10, 20, 40 elementos). Faça um gráfico comparando as soluções analíticas e numéricas em deslocamentos e em tensão. Faça um gráfico dos erros em porcentagem calculados em cada nó. Calcule e informe a norma euclidiana dos erros obtidos. Repita o procedimento para cada discretização adotada. Comente os resultados.

IV. Barra de seção variável com condição de Neumann

O problema de uma barra de seção variável $A(x)$, constituída de material com módulo de elasticidade E , de comprimento L submetida a uma força pontual na extremidade $x = L$ pode ser definido com o sendo: Achar o campo de deslocamentos $u(x)$ tal que :

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} E \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = 0 \\ \text{sujeito a :} \\ u(0) = 0 \\ \frac{du(L)}{dx} = \frac{F}{EA(L)} \end{array} \right. \quad (76)$$

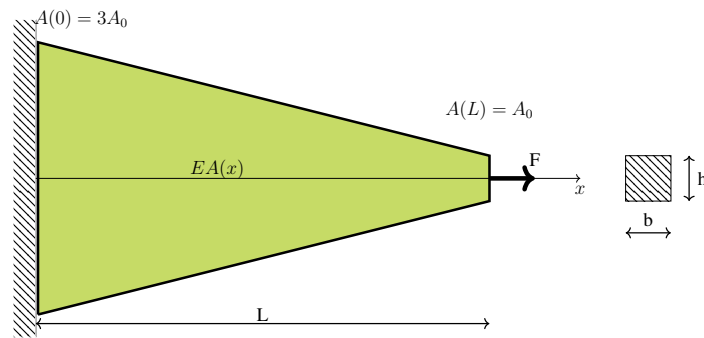


Figura 18: Barra com carga variando linearmente.

Para este caso pede-se:

- (1) Encontre a solução analítica do problema P_1
- (2) A barra é feita de aço com $E = 210GPa$, com seção retangular com $b = 30mm$ e $h = 40mm$ para o ponto $x = L$, o comprimento é $L = 10m$. Faça um gráfico da solução analítica em deslocamento e em tensão. Lembrando que neste caso a tensão pode ser calculada por $\sigma_{xx} = \frac{N_x(x)}{A}$.
- (3) Desenvolva um código usando a análise matricial de estruturas e considerando a área variando linearmente, com a condição de Neumann em $x = L$. Compare as soluções numéricas obtidas com as analíticas para diferentes discretizações (5, 10, 20, 40 elementos). Faça um gráfico comparando as soluções analíticas e numéricas em deslocamentos e em tensão. Faça um gráfico dos erros em porcentagem calculados em cada nó da malha. Calcule e informe a norma euclidiana dos erros obtidos. Repita o procedimento para cada discretização adotada. Comente os resultados.

Referências

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 4 edition.

Touzot, G. and Dhatt, G. (1984). *The Finite Element Method Displayed*. John Willey and Sons.