Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica
IM381 – Elementos Finitos I

Tarefa Computacional V

Elementos Isoparamétricos QUAD4 com Integração de Gauss

Leonardo Silveira Leite RA: 291646

Campinas - SP
2 de dezembro de 2024

1 RESUMO

O estudo aborda uma viga 2D em estado plano de tensões, utilizando elementos finitos QUAD4 com integração de Gauss. A viga, fixa em uma extremidade e livre na outra, é submetida a um carregamento de flexão, e seu comportamento é analisado em termos de deslocamentos e tensões para malhas com 81, 196 e 400 elementos. A geometria curva foi escolhida para avaliar a eficiência dos elementos em estruturas deformáveis. São apresentados resultados de deslocamentos máximos, e tensões de Von Mises para cada refinamento, evidenciando uma forte correlação entre a precisão dos resultados e o refinamento da malha.

2 INTRODUÇÃO

Desenvolver um código para resolver o problema de estado plano de tensões, usando elementos QUAD4, com integração de Gauss. Aplicar no problema de uma viga 2D curta engastada ($x = 0$) e livre ($x = L$), com a geometria da sua escolha. Aplique um carregamento de flexão, e compare os resultados dos deslocamentos e tensões obtidos para três refinamentos de malha diferentes. Comente seus resultados, e explique as suas escolhas de geometria e carga.

3 RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO

A geometria considerada está representada na Figura 1. Trata-se de uma viga curva com 90 graus de curvatura, fixada em $x = 0$ e livre em $x = L$, viga apresenta um formato anular parcial, definido por um raio interno $R_{int.}$ e um raio externo $R_{ext.}$, e está submetida a uma carga de flexão concentrada F.

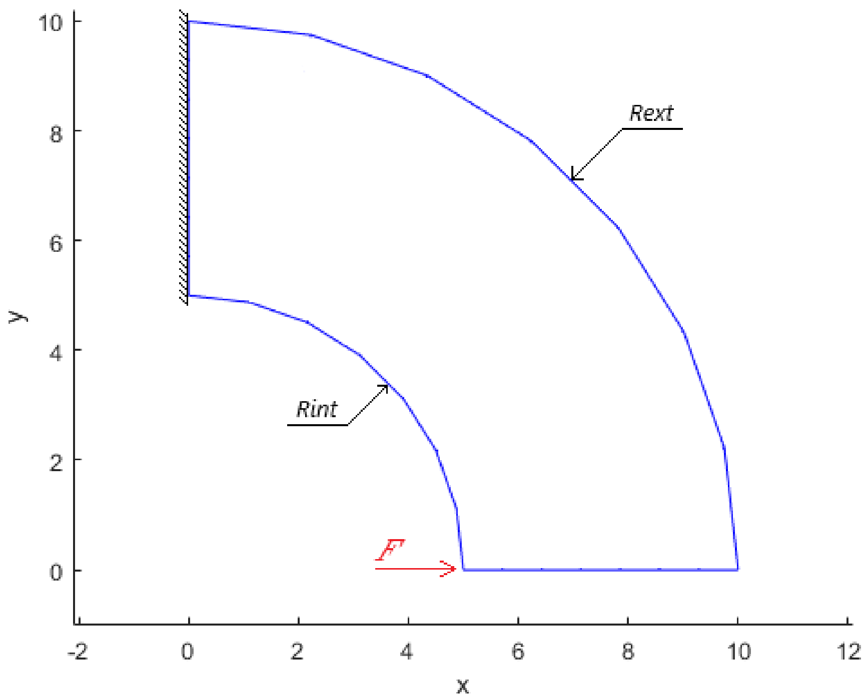
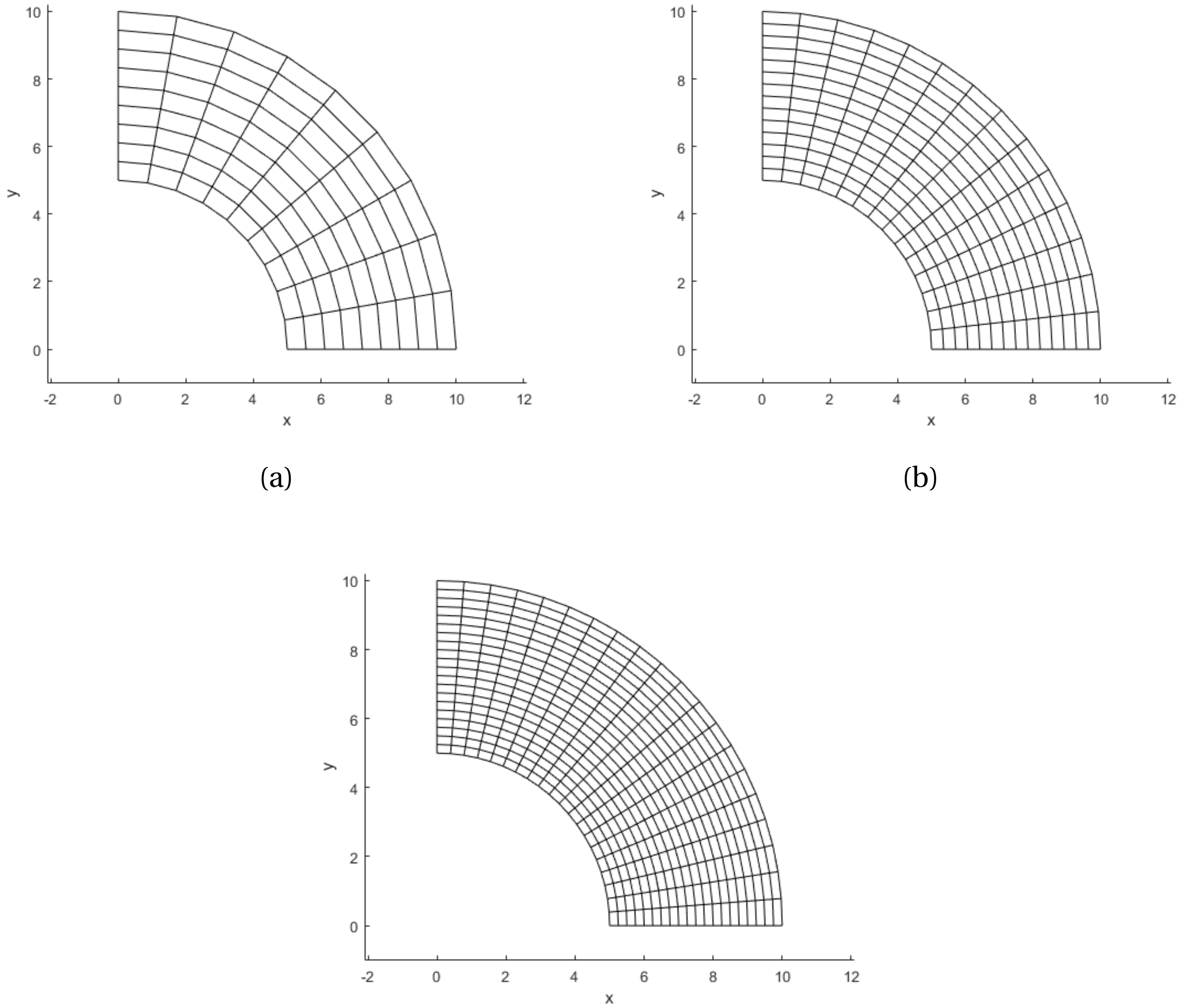


Figura 1 – Geometria curva sujeita à carga de flexão.

As discretizações correspondentes a 81, 196 e 400 elementos, do tipo QUAD4, são apresentadas na Figura 2.



(a) (b)

(c)

Figura 2 – Discretizações correspondentes a 81(a), 196(b) e 400(c) elementos.

Define-se inicialmente os parâmetros de integração de Gauss para o caso de um quadrado com dois pontos de Gauss:

$$npg = 2, \quad \text{Pesos: } w_i = 1, \quad \text{Abscissas: } \xi_i = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

A matriz de constituição D é dada por:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

A integração de Gauss para o elemento de integração é dada por:

$$\text{Para } i = 1, \ldots, \text{npg}, \quad j = 1, \ldots, \text{npg}$$

A cada ponto de integração, tem-se os pesos w_i e w_j e as abscissas ξ_i e η_j, e os nós do elemento são: n_1, n_2, n_3, e n_4.

As coordenadas dos nós são:

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad (x_4, y_4)$$

As derivadas das funções de forma em relação às abscissas ξ e η são:

$$\frac{dN_1}{d\xi} = \frac{-1}{4}(1-\eta), \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{4}(1-\eta), \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \frac{1}{4}(1+\eta), \quad \frac{dN_4}{d\xi} = \frac{-1}{4}(1+\eta)$$

$$\frac{dN_1}{d\eta} = \frac{-1}{4}(1-\xi), \quad \frac{dN_2}{d\eta} = \frac{-1}{4}(1+\xi), \quad \frac{dN_3}{d\eta} = \frac{1}{4}(1+\xi), \quad \frac{dN_4}{d\eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)$$

A matriz Jacobiana J é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} & \frac{dN_3}{d\xi} & \frac{dN_4}{d\xi} \\ \frac{dN_1}{d\eta} & \frac{dN_2}{d\eta} & \frac{dN_3}{d\eta} & \frac{dN_4}{d\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

A derivada das funções de forma em relação às coordenadas x e y são:

$$\frac{dN_1}{dx} = J^{-1}_{1,1} N_1(\xi) + J^{-1}_{1,2} N_1(\eta), \quad \frac{dN_2}{dx} = J^{-1}_{1,1} N_2(\xi) + J^{-1}_{1,2} N_2(\eta), \quad \ldots$$

$$\frac{dN_1}{dy} = J^{-1}_{2,1} N_1(\xi) + J^{-1}_{2,2} N_1(\eta), \quad \frac{dN_2}{dy} = J^{-1}_{2,1} N_2(\xi) + J^{-1}_{2,2} N_2(\eta), \quad \ldots$$

A matriz B é formada por:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & \frac{dN_3}{dx} & 0 & \frac{dN_4}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dy} & 0 & \frac{dN_2}{dy} & 0 & \frac{dN_3}{dy} & 0 & \frac{dN_4}{dy} \\ \frac{dN_1}{dy} & \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dy} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_3}{dy} & \frac{dN_3}{dx} & \frac{dN_4}{dy} & \frac{dN_4}{dx} \end{bmatrix} \tag{3}$$

A contribuição de rigidez do elemento é:

$$k_e = k_e + w_i w_j B^T D B \det(J) \tag{4}$$

Portanto, O estado de plano de tensão é apresentado por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

E a deformação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & \frac{dN_3}{dx} & 0 & \frac{dN_4}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dy} & 0 & \frac{dN_2}{dy} & 0 & \frac{dN_3}{dy} & 0 & \frac{dN_4}{dy} \\ \frac{dN_1}{dy} & \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dy} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_3}{dy} & \frac{dN_3}{dx} & \frac{dN_4}{dy} & \frac{dN_4}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

As Figuras 3, 4 e 5 apresentam os resultados de deslocamento máximos em x e y, e o mapa de cor da tensão na geometria submetida à carga de flexão concentrada F.

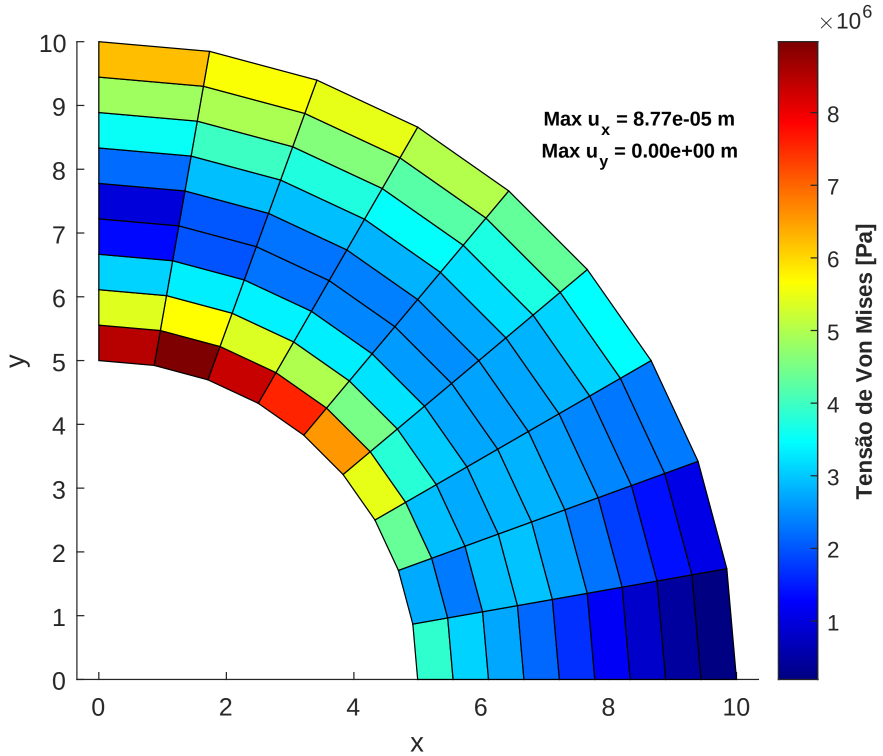


Figura 3 – Deslocamento e tensão equivalente da geometria com 81 elementos.

Para detalhes de deslocamento nos nós, conferir os *prints* das tabelas no código MATLAB em anexo.

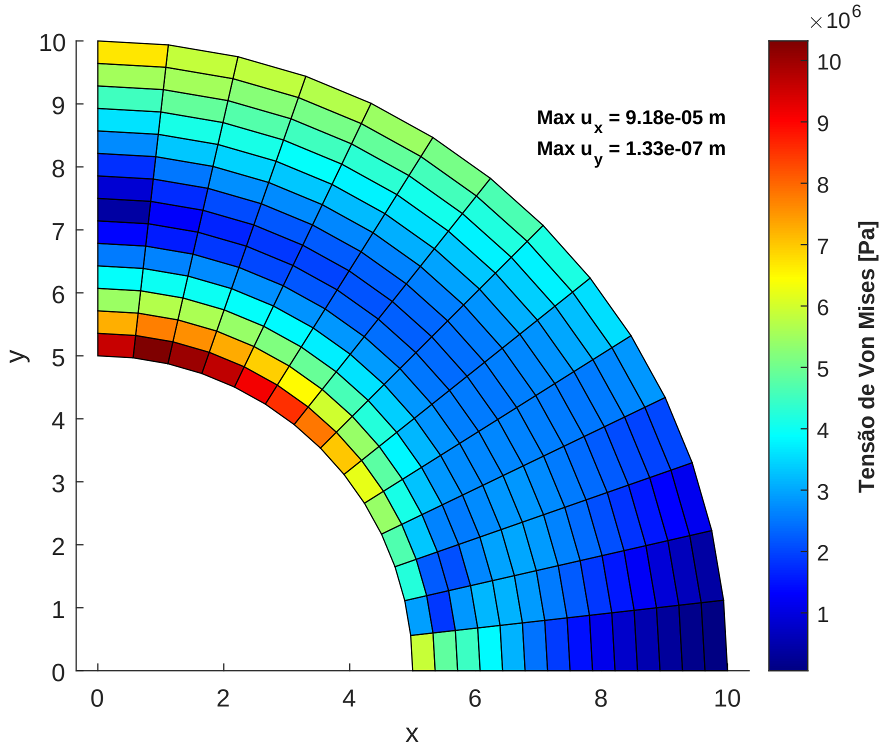


Figura 4 – Deslocamento e tensão equivalente da geometria com 196 elementos.

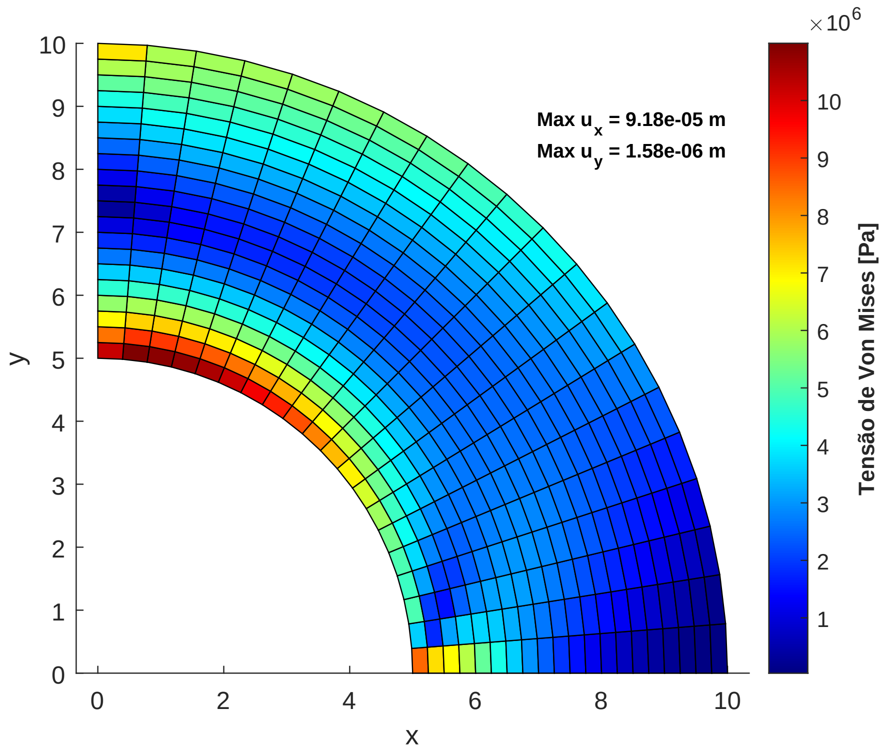


Figura 5 – Deslocamento e tensão equivalente da geometria com 400 elementos.

Comentários: A escolha da geometria foi feita com o intuito de explorar a eficácia de elementos isoparamétricos em estruturas que apresentam curvaturas, onde a deformação do elemento e a visualização das tensões se tornam mais nítidas. A aplicação da carga no primeiro nó foi determinada para simular forças externas em uma tubulação, o que pode resultar em uma perda de carga significativa. Esta abordagem permite analisar como as forças externas podem afetar a distribuição de tensões ao longo da viga e como diferentes refinamentos de malha influenciam a precisão dos resultados de deslocamento e tensões. A Tabela 1 apresenta os deslocamentos máximos em x e y, e a tensão Von Mises de todos as malhas abordadas.

	81 elementos	196 elementos	400 elementos
Deslocamento máximo em x	$8,7705x10^{-5}m$	$9,1849x10^{-5}m$	$9.1845x10^{-5}m$
Deslocamento máximo em y	0	$1,3304x10^{-7}m$	$1,5831x10^{-6}m$
Tensão Von Mises	$6,2087x10^{6}Pa$	$6,6803x10^{6}Pa$	$7,1024x10^{6}Pa$

Tabela 1 – Deslocamentos máximos em x e y, e tensão de Von Mises nas malhas estudadas.

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. [S.l.]: Wiley, 1989.

KWON, Y. W.; BANG, H. *The Finite Element Method Using MATLAB Second Edition*. [S.l.]: CRC Press LLC, 2000.

PAVANELLO, R. *Caderno de Elementos Finitos*. [S.l.], 2020.