Departamento de Mecânica Computacional
Faculdade de Engenharia Mecânica
r. Mendeleyev, 200
13081-970 Campinas, SP
mail:pava@fem.unicamp.br

Cadernos de Elementos Finitos

IM 381 - FEM Unicamp

Renato Pavanello

Outubro de 2020

Laboratório de Otimização Topológica e Análise Multifísica
Departamento de Mecânica Computacional
Campinas-SP

Sumário

Capítulo 1

Aproximação por Elementos Finitos.

Trata-se neste capítulo, do aspecto numérico envolvido nas técnicas de aproximação que visam, a partir de uma discretização,determinar as soluções de sistemas contínuos.

Iremos abordar o problema inicialmente da aproximação do tipo nodal de um domínio Ω, para em seguida aplicar este tipo de aproximação em sub-domínios. A aproximação nodal em sub-domínios é chamada de aproximação por Elementos Finitos.

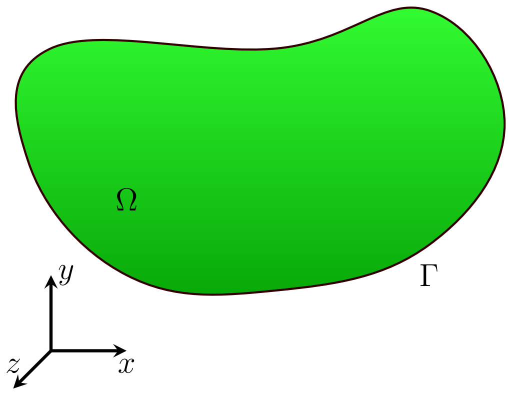

Figura 1.1: Domínio e Contorno genéricos.

O uso do conceito de sub-domínios, ou elementos, será estudado em um espaço de referência, o que introduz os conceitos de transformação geométrica de um elemento do espaço real para o espaço de referência, e a construção da Matriz Jacobiana da transformação.

Exemplos Práticos serão apresentados, para ilustrar a precisão das aproximações obtidas.

1.1 Técnicas de Aproximação

1.1.1 Aproximação Nodal

Em geral, nos modelos matemáticos de um sistema físico as grandezas do tipo temperaturas, deslocamentos, espessuras etc, são representadas por variáveis ou funções chamadas de exatas $u_{ex}(x)$.

Quando não é possível encontrarmos uma solução exata para o problema (casos ondes as condições de contorno são complicadas, a geometria é irregular , etc.), procura-se soluções aproximadas do tipo $u(x)$.

Para que a qualidade da aproximação seja boa, tem-se:

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) \tag{1.1}$$

onde $e(x)$ é definido como erro na aproximação e deve ser o menor possível.

Para a construção das funções aproximadas, procede-se da seguinte forma:

- Escolhe-se um conjunto finito de funções, dependente de n parâmetros a_i

$$u(x) \cong u(x, a_1, a_2, ..., a_n) \tag{1.2}$$

- Determina-se $a_1, a_2, ..., a_n$ satisfazendo:

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) \text{ com } e(x) \text{ suficientemente pequeno} \tag{1.3}$$

- Pode-se calcular $e(x) = 0$ em n pontos $x_1, x_2, ..., x_n$, determinando-se desta forma os parâmetros a_i.

Em geral escolhe-se estas funções aproximadas simples, para que as operações de diferenciação e integração sejam simplificadas, e que sejam facilmente utilizáveis em computadores.

Uma vez determinada a função aproximada, pode-se obter:

- uma solução aproximada de uma função difícil de ser avaliada, para qualquer ponto do domínio.
- uma solução aproximada de uma equação diferencial ou uma equação em derivadas parciais.

Exemplo 1.1.1 *Aproximação de u_x, grandeza física.*

Suponha que u_x seja um campo de temperaturas, que só pode ser medido em 3 pontos conforme mostrado na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: *Valores de temperaturas conhecidos*

x	$u_{ex}(x)$
0,0	20 $°C$
0,5	25 $°C$
1,0	22 $°C$

Deseja-se obter pontos em outras posições x_i, e também que a aproximação coincida com $u_{ex}(x)$, nos pontos medidos. Um procedimento que pode ser adotado é o seguinte:

- *Escolhendo-se uma aproximação quadrática, temos:*

$$u_{ex}(x) \cong u(x, a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \tag{1.4}$$

- *Substituindo os valores conhecidos dados na Tabela 1.1, tem-se:*

$$\begin{array}{c} a_1 + a_2\, 0 + a_3\, 0^2 = 20 \\ a_1 + a_2\, ,5 + a_3\, ,5^2 = 25 \\ a_1 + a_2\, 1 + a_3\, 1^2 = 22 \end{array} \tag{1.5}$$

- *Resolvendo-se o sistema linear associado as equações 1.5, obtém-se os seguintes valores para os parâmetros da aproximação:*

$$\begin{array}{c} a_1 = 20 \\ a_2 = 18 \\ a_3 = -16 \end{array} \tag{1.6}$$

- *Assim pode-se definir a função aproximada da seguinte forma:*

$$u(x) = 20 + 18x - 16x^2 \tag{1.7}$$

  que pode ser visualizada na Figura 1.2:

- *Pode-se então determinar, em qualquer ponto o valor da função, como por exemplo para $x = 0,7$:*

$$u(x) = 20 + 18 \,.\, 0,7 - 16 \,.\, 0,7^2 \; = 24,76 \tag{1.8}$$

Exemplo 1.1.2 *Aproximação de equações diferenciais.*

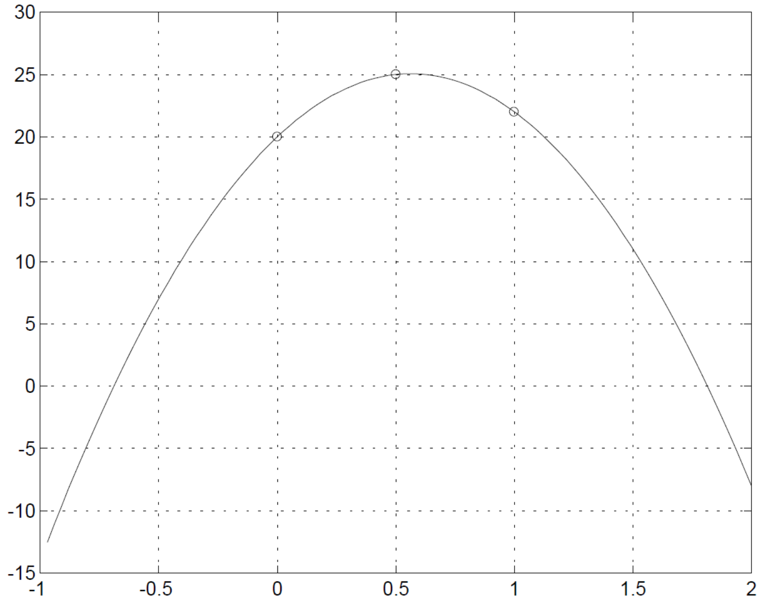

Figura 1.2: Ajuste de uma parábola

- *O Problema consiste em :*

$$P_1 \begin{cases} \textit{Achar } u_{ex} \textit{ tal que :} \\ \frac{d^2u_{ex}(x)}{dx^2} = f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u_{ex}(x) = 0 & \textit{para } x = 0 \ e \ x = 1 \\ f(x) = 1 & \textit{Termo fonte em} x = 0,25 \\ f(x) = 0,25 & \textit{Termo fonte em } x = 0,75 \end{cases} \tag{1.9}$$

- *Escolhendo uma aproximação que satifaça as condições de contorno temos:*

$$u_{ex}(x) \cong u(x) = a_1 sen(\pi x) + a_2 sen(2\pi x) \tag{1.10}$$

- *Considerando que a função aproximada deve satisfazer a equação diferencial nos pontos conhecidos, temos:*

$$(\frac{d^2u}{dx^2})_{x_i} = -a_1\pi^2 sen(\pi x_i) - a_2\, 4\,\pi^2\, sen(2\pi x_i) = f(x_i) \tag{1.11}$$

- *Assim, a partir dos pontos conhecidos $x = 0,25$ e $X = 0,75$, pode-se construir a forma discretizada da equação diferencial do problema P_1, na forma de um conjunto de duas equações algébricas, como se segue:*

$$\begin{aligned} -a_1\pi^2 sen(0,25\pi) - a_2\,4\,\pi^2\,sen(0,5\pi) = 1 \\ -a_1\pi^2 sen(0,75\pi) - a_2\,4\,\pi^2\,sen(1,5\pi) = 0,25 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Resolvendo-se o sistema de equações 1.12 , obtém-se os valores dos parâmetros da aproximação a_i, ou seja:

$$\begin{aligned} a_1 = \tfrac{5}{4\sqrt{2}}\tfrac{1}{\pi^2} \\ a_2 = \tfrac{3}{32}\tfrac{1}{\pi^2} \end{aligned} \tag{1.13}$$

- *E a solução do problema P_1 é dada em qualquer ponto por:*

$$u_{ex}(x) \cong u(x) = \frac{5}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\pi^2}sen(\pi x) + \frac{3}{32}\frac{1}{\pi^2}sen(2\pi x) \tag{1.14}$$

Observe que as funções aproximadas, são geralmente lineares em a_i, o que permite escrever a aproximação não Nodal como sendo:

$$u(x) = P_1(x)a_1 + P_2(x)a_2 + ... + P_n(x)a_n \tag{1.15}$$

ou ainda usando uma notação do tipo matricial:

$$u(x) = \{P_1(x)\ P_2(x)\ ...\ P_n(x)\} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{array} \right\} = \{P\}^T\{a\} \tag{1.16}$$

onde:

- $P_i(x)$ - São as funções interpoladoras, que devem ser Linearmente Independentes (LI), e independentes de a_i. São geralmente polinômios, funções trigonométricas, etc. Estas funções são também chamadas de funções de base.

- a_i - São os paraâmetros da aproximação ou parâmetros gerais.

Supondo que os parâmetros da aproximação, são os valores da função exata em n pontos dados, ou seja:

$$\begin{cases} u(x_1) = u_{ex}(x_1) = u_1 \\ u(x_2) = u_{ex}(x_2) = u_2 \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ u(x_n) = u_{ex}(x_n) = u_n \end{cases} \tag{1.17}$$

É importante observar que neste caso u_i são os parâmetros da aproximação, e que a função aproximada u_x coincide com a solução exata em x_i. Este tipo de aproximação é dita do tipo Nodal e escreve-se:

$$u(x) = N_1(x)\, u_1 + N_2(x)\, u_2 + \ldots + N_n(x)\, u_n \tag{1.18}$$

Passando a expressão 1.18 para a forma matricial, e escrevendo-se em notação mais compacta, tem-se:

$$u(x) = \{N_1(x)\ N_2(x)\ ...\ N_n(x)\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{Bmatrix} = \{N\}^T \{u\} \tag{1.19}$$

onde:

- u_i - Parâmetros nodais ou variáveis nodais.
- $N_i(x)$ - Funções de interpolação.

Levando-se em conta Eq. 1.17 e Eq.1.19, que definem a aproximação Nodal, observa-se as seguintes propriedades:

Prop. 1.1.1 *PR1- Como $u(x_i) = u_i$ as funções $N_i(x)$ verificam as seguintes condições:*

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ \\ 1 & se\ i = j \end{cases} \tag{1.20}$$

Prop. 1.1.2 *O erro da aproximação é nulo nos nós x_i, ou seja:*

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) = u(x_i) - u_{ex}(x_i) = u_i - u_i = 0 \tag{1.21}$$

Apresenta-se na sequência um exemplo de aproximação Nodal do tipo Lagrange para ilustrar este tipo de procedimento de aproximação.

Exemplo 1.1.3 *Aproximação nodal do tipo Lagrange em 4 Pontos:*

Considera-se neste caso, que os valores da função u_{ex} genérica, é conhecida em apenas 4 pontos. Usando-se uma aproximação Nodal dada por:

$$u(x) = N_1(x)\, u_1 \ + \ N_2(x)\, u_2 + \ N_3(x)\, u_3 + \ N_4(x)\, u_4 \tag{1.22}$$

Escolhendo-se polinômios de Lagrange de grau 3, tem-se:

$$N_i = \prod_{j=1\ j\neq i}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1.23}$$

Observa-se que os polinômios gerados pela expressão 1.23, satisfazem a propriedade **PR1**. *As funções correspondentes são dadas por:*

$$\begin{aligned}
N_1 &= \tfrac{x-x_2}{x_1-x2}\ \tfrac{x-x_3}{x_1-x3}\ \tfrac{x-x_4}{x_1-x4} \\
N_2 &= \tfrac{x-x_1}{x_2-x1}\ \tfrac{x-x_3}{x_2-x3}\ \tfrac{x-x_4}{x_2-x4} \\
N_3 &= \tfrac{x-x_1}{x_3-x1}\ \tfrac{x-x_2}{x_3-x2}\ \tfrac{x-x_4}{x_3-x4} \\
N_4 &= \tfrac{x-x_1}{x_4-x1}\ \tfrac{x-x_2}{x_4-x2}\ \tfrac{x-x_3}{x_4-x3}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Os pontos onde são conhecidos os valores da função exata $u_{ex}(x)$ são apresentados na tabela 1.2

Tabela 1.2: *Valores conhecidos*

x_1	x_2	x_3	x_4
1.0	2.0	5.0	7.0

Sendo assim, as funções de interpolação ficam definidas da seguinte forma:

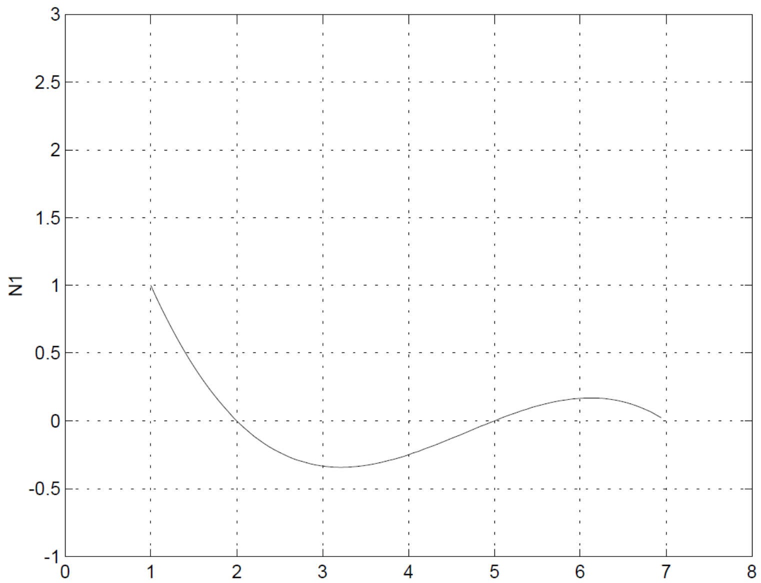

Figura 1.3: Função de interpolação N_1

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \tfrac{x-2}{-1}\,\tfrac{x-5}{-4}\,\tfrac{x-7}{-6} = -\tfrac{1}{24}(x-2)(x-5)(x-7)\\
N_2 &= \tfrac{x-1}{1}\,\tfrac{x-2}{-3}\,\tfrac{x-7}{-5} = \tfrac{1}{15}(x-1)(x-2)(x-7)\\
N_3 &= \tfrac{x-1}{4}\,\tfrac{x-2}{3}\,\tfrac{x-7}{-2} = -\tfrac{1}{24}(x-1)(x-2)((x-7)\\
N_4 &= \tfrac{x-1}{6}\,\tfrac{x-2}{5}\,\tfrac{x-5}{2} = \tfrac{1}{60}(x-1)(x-2)(x-5)
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

Estudando-se cada função de interpolação, nota-se que as mesmas tem um comportamento semelhante. Na figura 1.3 , apresenta-se a função N_1. Vê-se neste caso, que a propriedade **PR1** *é respeitada.*

A aproximação global pode ser obtida pela superposição das quatro funções N_i definidas na Eq. 1.25.

Nota 1.1.1 *Este problema pode ser facilmente generalizado, para funções de várias variáveis,*

$$u_{ex}(x, y, z) = u_{ex}(\boldsymbol{x}) \tag{1.26}$$

onde $\boldsymbol{x} = \{xyz\}$, é o vetor das coordenadas definindo um domínio R^3, tridimensional. Neste caso a aproximação pode ser escrita da seguinte forma:

$$u(x,y,z) = u(\boldsymbol{x}) = \{N_1(\boldsymbol{x})\ N_2(\boldsymbol{x})\ \cdots N_n(\boldsymbol{x})\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \tag{1.27}$$

sabendo-se que nos nós tem-se:

$$u(\boldsymbol{x}_i) = u_{ex}(\boldsymbol{x}_i = u_i \tag{1.28}$$

Uma aproximação conforme definido no exemplo 1.1.3 para todo o domínio, nem sempre é facilmente obtida. Nos casos onde o número de nós é elevado, a geometria do domínio é complexa, e ainda as funções $u(\boldsymbol{x})$ devem satisfazer as condições de contorno do problema, faz-se necessário definir novas estratégias para a obtenção de soluções aproximadas.

Uma opção para solucionar estes problemas, consiste em utilizar uma aproximação nodal por sub-domínios, considerando as seguintes particularidades:

- O domínio Ω é inicialmente discretizado em elementos, que correspondem aos sub-domínios Ω^e.
- Define-se uma aproximação Nodal em cada Ω^e, denominada de $u^e(\boldsymbol{x})$, que é função somente de variáveis nodais pertencentes a Ω^e e sua fronteira.
- As funções $u^e(\boldsymbol{x})$ de cada elemento são contínuas em Ω^e, e satisfazem a continuidade entre elementos vizinhos.

A aproximação que satisfaz as condições acima definidas, é denominada de aproximação por Elementos Finitos, e a seguinte nomenclatura é utilizada:

- Sub-domínios $\Omega^e \rightarrow$ Elementos
- Pontos onde $u^e(\boldsymbol{x}) = u_{ex}(\boldsymbol{x}) \rightarrow$ Pontos nodais
- Coordenadas x_i dos pontos nodais $\rightarrow$ coordenadas nodais
- Valores $u_i = u^e(x_i) = u_{ex}(x_i) \rightarrow$ variáveis nodais

No processo de aproximação por elementos finitos, duas etapas podem ser claramente definidas: definição analítica da geometria dos elementos e construção das funções de interpolação de cada elemento. No exemplo a seguir apresenta-se graficamente uma aproximação típica de elementos finitos.

Exemplo 1.1.4 *Aproximação em uma dimensão usando Elementos Finitos.*

Inicialmente define-se a geometria, dividindo-se o domínio Ω *em Subdomínios denominados de Elementos, conforme o esquema abaixo:*

$$\begin{aligned} &\Omega^1; x_1 \leq x \leq x_2 \\ &\Omega^2; x_2 \leq x \leq x_3 \\ &\Omega^3; x_3 \leq x \leq x_4 \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde x_1, x_2, x_3, x_4 *são as coordenadas nodais.*

Na sequência define-se as funções aproximadas que interpolem as soluções $u_e(x)$*. Adotando-se uma aproximação linear tem-se:*

$$\begin{aligned} &\Omega^1; u^1(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \\ &\Omega^2; u^2(x) = N_1 u_2 + N_2 u_3 \\ &\Omega^3; u^3(x) = N_1 u_3 + N_2 u_4 \end{aligned} \tag{1.30}$$

e a aproximação sobre todo o volume é definida por:

$$u(x) = u^1(x) + u^2(x) + u^3(x) \tag{1.31}$$

Na Figura 1.4 apresenta-se um esquema da aproximação global adotada:

1.2 Definição da geometria

1.2.1 Utilizando Elemento de Referência (Isoparamétrico)

Além da aproximação das incógnitas do problema, pode-se estabelecer aproximações para a geometria que são definidas a partir das coordenadas dos nós. Neste caso pode-se usar um sistema de coordenadas local baseado em um elemento de referência, chamado sistema isoparamétrico. As funções da transformação geométrica são idênticas às funções de interpolação (Touzot and Dhatt, 1984) (Zienkiewicz and Taylor, 2005).

Para simplificar a expressão analítica para elementos de forma complexa um elemento de referência é introduzido. Seja o elemento então definido em um espaço não dimensional abstrato com uma forma geométrica muito simples. A geometria do elemento de referência é então mapeada a partir da geometria do elemento real usando expressões de transformação geométricas. Para o caso de uma região triangular esta transformação é ilustrada na Figura 1.5.

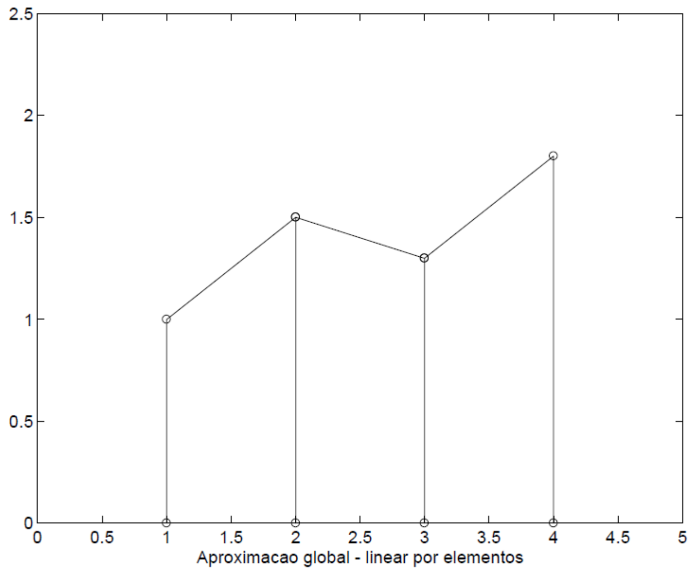

Figura 1.4: Aproximação linear por Elementos Finitos - 4 Elemetos

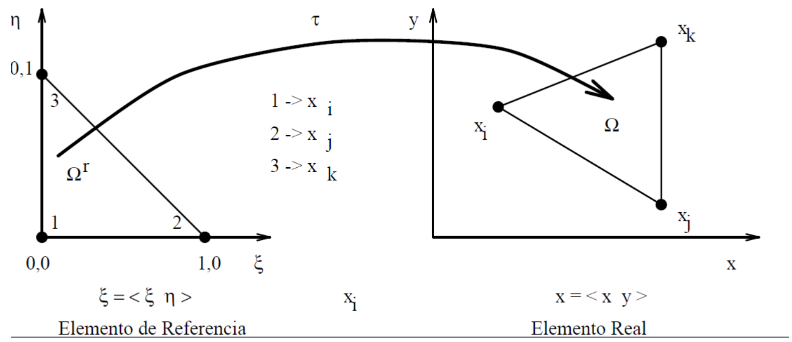

Figura 1.5: Exemplo de uma transformação entre elemento de referência e elemento real

A transformação τ^e define a coordenada de cada ponto do elemento real **x** em termos das coordenadas abstratas $\boldsymbol{\xi}$ do ponto correspondente do elemento de referência.

$$\tau^e : \boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x}^e = x^e(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.32}$$

A transformação τ^e depende da forma e localização do elemento real.Assim há uma transfomação τ^e diferente para cada elemento real:

$$\tau^e : \boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x}^e = x^e(\boldsymbol{\xi}, x_i, x_j, x_k) \tag{1.33}$$

Cada transformação τ^e é escolhida para ter as seguintes propriedades:

- O mapeamento deve ser feito um a um, ou seja, para qualquer ponto do elemento de referência, há um e somente um ponto do elemento real;
- Os nós geométricos do elemento de referência correspondem aos nós geométricos do elemento real;
- Qualquer porção do contorno do elemento de referência, definido pelos nós geométricos deste contorno, correspondem a uma porção do contorno do elemento real definido pelos nós correspondentes.

Note que um elemento de referência de um tipo particular mapeia todos os elementos de mesmo tipo usando diferentes transformações τ^e. No caso dos elementos triangulares de três nós usa-se uma transformação linear τ referente às coordenadas geométricas do elemento real, conforme ilustrado na Figura 1.6.

$$\tau : \boldsymbol{\xi} \to \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi} = [\bar{N}(\boldsymbol{\xi})]\boldsymbol{x_n} \tag{1.34}$$

Além disso, funções de transformação idênticas são usadas para todas as três coordenadas.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) &= [\bar{N}(\boldsymbol{\xi})]\boldsymbol{x_n} && (1.35) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) &= [\bar{N}(\boldsymbol{\xi})]\boldsymbol{y_n} && (1.36) \\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{\xi}) &= [\bar{N}(\boldsymbol{\xi})]\boldsymbol{z_n} && (1.37) \end{aligned}$$

Logo, para o triângulo de três nós (x_i, x_j, x_k),

$$x(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)x_i + \bar{N}_2(\xi, \eta)x_j + \bar{N}_3(\xi, \eta)x_k = \{\bar{N}\}^T \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} \tag{1.38}$$

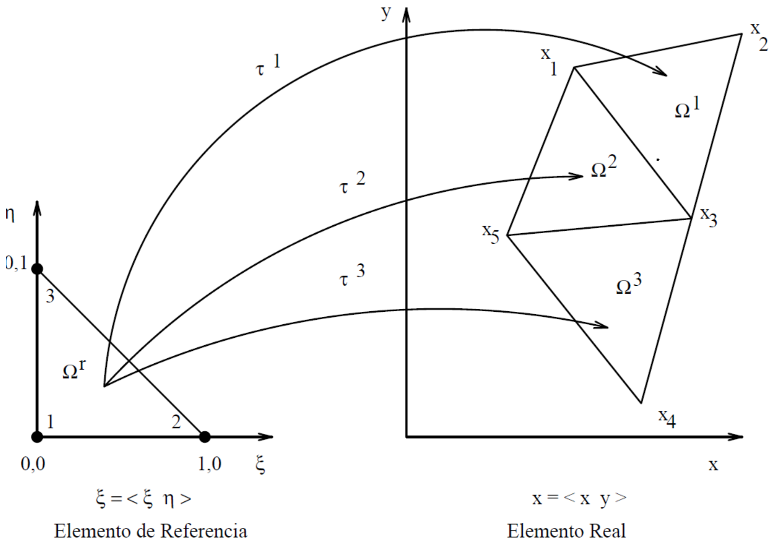

Figura 1.6: Descrição da transformação entre espaço real e espaço de referência

$$y(\xi,\eta) = \bar{N}_1(\xi,\eta)y_i + \bar{N}_2(\xi,\eta)y_j + \bar{N}_3(\xi,\eta)y_k = \{\bar{N}\}^T \left\{ \begin{array}{c} y_i \\ y_j \\ y_k \end{array} \right\} \tag{1.39}$$

As funções N_i, normalmente expressas como polinômios em $\boldsymbol{\xi}$, são chamadas funções de transformação geométricas. Considera-se (1.34) como uma aproximação nodal por sub-domínios para as funções $x(\xi)$ e $y(\xi)$.

Com a transformação geométrica τ é agora possível colocar a definição analítica de cada elemento real em termos das coordenadas **x** pela definição analítica simples de seus elementos de referência em função das coordenadas não dimensionais $\boldsymbol{\xi}$. Assim, para o elemento triangular de três nós, pode-se obter sua expressão analítica como se verá a seguir.

O elemento de referência é definido como:

$$\begin{aligned} \xi + \eta &\leq 1 & (1.40) \\ \xi &\leq 0 & (1.41) \\ \eta &\leq 0 & (1.42) \end{aligned}$$

Considere a transformação linear $\boldsymbol{\tau}$ abaixo:

$$x(\xi,\eta) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1-\xi-\eta & \xi & \eta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ x_j \\ x_k \end{array} \right\} \tag{1.43}$$

$$y(\xi,\eta) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1-\xi-\eta & \xi & \eta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} y_i \\ y_j \\ y_k \end{array} \right\} \tag{1.44}$$

Tal que satisfaça as seguintes propriedades:

- Os nós geométricos do elemento de referência com coordenadas $\langle 0,0 \rangle$, $\{1,0\}$, $\{0,1\}$ transformam-se nos nós geométricos do elemento real $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{x_j}$, $\boldsymbol{x_k}$. Por exemplo,

$$\boldsymbol{x(\xi=0,\eta=0)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{x_i} \\ \boldsymbol{x_j} \\ \boldsymbol{x_k} \end{array} \right\} = \boldsymbol{x_i} \tag{1.45}$$

- Cada contorno do elemento de referência transforma-se no contorno correspondente do elemento real. Por exemplo, o contorno passando através dos nós $\{1,0\}$ e $\{0,1\}$ que é descrito pela equação:

$$1-\xi-\eta=0 \tag{1.46}$$

transforma-se no contorno do elemento real passando através de $\boldsymbol{x_i}$ e $\boldsymbol{x_j}$, para os quais a equação paramétrica é:

$$x = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \xi & 1-\xi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ x_j \\ x_k \end{array} \right\} = \xi\ x_j + (1-\xi)\ x_k \tag{1.47}$$

$$y = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \xi & 1-\xi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} y_i \\ y_j \\ y_k \end{array} \right\} = \xi\ y_j + (1-\xi)\ y_k \tag{1.48}$$

Nota-se que a equação acima é linear em ξ e η, e depende apenas das coordenadas x_i e x_k dos nós pertencentes a este contorno.

Sendo a matriz Jacobiana de transformação não singular, a transformação deve uma a uma ser avaliada.

$$[J] = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{array} \right] \tag{1.49}$$

$$det(J) = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) \tag{1.50}$$

O determinante da matriz Jacobiana é igual ao dobro da área do triângulo. Este pode anular-se apenas quando os três nós estão na mesma linha.

1.3 Aproximação no Elemento de Referência. Espaços Isoparamétricos

FORMA ALGÉBRICA DA FUNÇÃO DE APROXIMAÇÃO U(X)

Escolhe-se um conjunto de nós interpolados de coordenadas $\boldsymbol{x}_i$ em um domínio Ω. Esses nós não precisam coincidir com os nós geométricos. Para cada elemento real usa-se uma aproximação nodal, como na eq.(1.27).

$$\boldsymbol{u} = \left\{ \begin{array}{c} u(x,y) \\ v(x,y) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\} = \{N(x)\}^T \{q\} \tag{1.51}$$

Agora, substituindo a aproximação no elemento real pela aproximação correspondente no elemento de referência tem-se

$$\boldsymbol{u(\xi)} = \{N(\xi)\}^T \boldsymbol{q} \tag{1.52}$$

onde $\{N(\xi)\}^T$ são as funções de interpolação para o elemento de referência.

Vale lembrar que nas funções $\{N(\xi)\}^T$, **x** e $\boldsymbol{\xi}$ são relacionados pela função de transformação definida na eq.(1.34).

Na expressão (1.51) as funções $N(\mathbf{x})$ dependem das coordenadas de cada elemento e então são diferentes para cada elemento. Por outro lado, na expressão (1.52) as funções $N(\xi)$ são independentes da geometria do elemento real. Um único conjunto de funções $N(\xi)$ pode então ser usado para todos os elementos que têm a mesma referência ou pertencem a mesma família de elementos. Uma família de elementos é caracterizado pela:

- sua forma;
- seus nós geométricos;
- seus nós de interpolação.

Para o caso de elemento triangular de três nós a interpolação no elemento de referência é dada por:

$$u(\xi,\eta) = \{N_1(\xi,\eta)\ N_2(\xi,\eta)\ N_3(\xi,\eta)\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \tag{1.53}$$

$$N_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta \tag{1.54}$$
$$N_1(\xi,\eta) = \xi \tag{1.55}$$
$$N_1(\xi,\eta) = \eta \tag{1.56}$$

A expressão $u(\xi,\eta)$ obtida pela interpolação no elemento de referência é idêntica à expressão **??** de u(x,y) obtida para o elemento real desde que os pontos (ξ,η) e (x,y) sejam relacionados pela seguinte transformação τ:

$$x(\xi,\eta) = \{\bar{N}_1\ \bar{N}_2\ \bar{N}_3\} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} \tag{1.57}$$

$$y(\xi,\eta) = \{\bar{N}_1\ \bar{N}_2\ \bar{N}_3\} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix} \tag{1.58}$$

onde $\bar{N}_1 \equiv N_1$, $\bar{N}_2 \equiv N_2$, $\bar{N}_3 \equiv N_3$. É fácil mostrar que $u(\xi_0,\eta_0) \equiv u(x_0,y_0)$ se o ponto (ξ_0,η_0) corresponde ao (x_0,y_0) na transformação τ.

1.4 Construção das Funções $N(\xi)$ e $\bar{N}(\xi)$

As transformações geométricas $\bar{N}(\xi)$ e as funções de interpolação $N(\xi)$ possuem propriedades idênticas. Eles podem algumas vezes ser construídos com polinômios. Tais polinômios são sempre polinômios de Lagrange ou de Hermite; contudo um método sistemático tem sido encontrado para todos os casos. Um número bem conhecido de fórmulas tem sido encontrado para os elementos clássicos.

Seguindo o procedimento descrito por Dhatt e Touzot (**?**), serão construídas as funções de interpolação para o elemento isoparamétrico triangular de três nós e de seis nós.

I. *Escolha da base polinomial*

Pode-se escrever $u(\xi)$, o elemento de referência, na forma de uma combinação linear de funções independentes conhecidas $P_1(\xi)$,$P_2(\xi)$, ... cuja maioria são monômios independentes. A escolha das funções $P_i(\xi)$ é uma das mais importantes operações no método de elementos finitos.

Considerando-se o caso de uma aproximação linear, tem-se:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = \{P_1(\boldsymbol{\xi})P_2(\boldsymbol{\xi}); P_3(\boldsymbol{\xi})\} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} \tag{1.59}$$

Com $\{P\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \xi & \eta \end{array} \right\}$

Já para o caso de uma aproximação quadrática, pode-se escrever:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = \left\{ \begin{array}{cccccc} P_1(\boldsymbol{\xi}) & P_2(\boldsymbol{\xi}) & P_3(\boldsymbol{\xi}) & P_4(\boldsymbol{\xi}) & P_5(\boldsymbol{\xi}) & P_6(\boldsymbol{\xi}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \right\} \tag{1.60}$$

Com $\{P\} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \end{array} \right\}$

Ou seja, usando-se uma aproximação linear para $u(\xi,\eta)$ e $v(\xi,\eta)$, no domínio elementar, tem-se:

$$u(\xi,\eta) \approx \tilde{u}(\xi,\eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta \tag{1.61}$$

$$v(\xi,\eta) \approx \tilde{v}(\xi,\eta) = \alpha_4 + \alpha_5\xi + \alpha_6\eta \tag{1.62}$$

onde $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são aproximações lineares para u e v.

Pode-se, portanto, reescrever esta expressão matricialmente, de tal forma que:

$$\boldsymbol{u} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u}(\xi,\eta) \\ \tilde{v}(\xi,\eta) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \right\} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\alpha} \tag{1.63}$$

Ou ainda, usando-se uma aproximação quadrática para $u(\xi, \eta)$ e $v(\xi, \eta)$, no domínio elementar, tem-se,

$$u(\xi,\eta) \approx \tilde{u}(\xi,\eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 \quad (1.64)$$
$$v(\xi,\eta) \approx \tilde{v}(\xi,\eta) = \alpha_7 + \alpha_8\xi + \alpha_9\eta + \alpha_{10}\xi^2 + \alpha_{11}\xi\eta + \alpha_{12}\eta^2 \quad (1.65)$$

onde $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são aproximações lineares para u e v.

Pode-se, portanto, reescrever esta expressão matricialmente, de tal forma que,

$$\boldsymbol{u} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u}(\xi,\eta) \\ \tilde{v}(\xi,\eta) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_1 0 \\ \alpha_1 1 \\ \alpha_1 2 \end{array} \right\}$$

$$= \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (1.66)$$

O conjunto de funções $P(\boldsymbol{\xi})$ constitui a base polinomial da interpolação. O número de termos na base deve ser igual ao número de graus de liberdade do elemento. Assim, como se verifica nas eqs.(1.59) e (1.60), o elemento linear possui três graus de liberdade (GDL), enquanto o quadrático possui seis graus de liberdade, em cada direção. Uma base polinomial completa é sempre preferível, todavia isto nem sempre é possível de ser obtida. Para construir as funções de transformação geométricas $\bar{N}$, seleciona-se expressões de mesma forma para x, y.

$$x(\boldsymbol{\xi}) = \{\bar{P}(\boldsymbol{\xi})\}^T \{a_x\} \quad (1.67)$$
$$y(\boldsymbol{\xi}) = \{\bar{P}(\boldsymbol{\xi})\}^T \{a_y\} \quad (1.68)$$

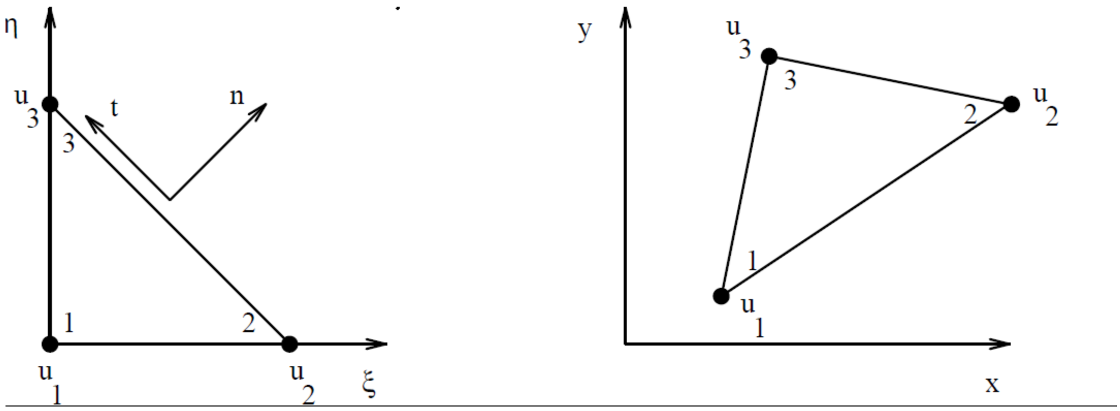

Figura 1.7: Elemento triangular linear

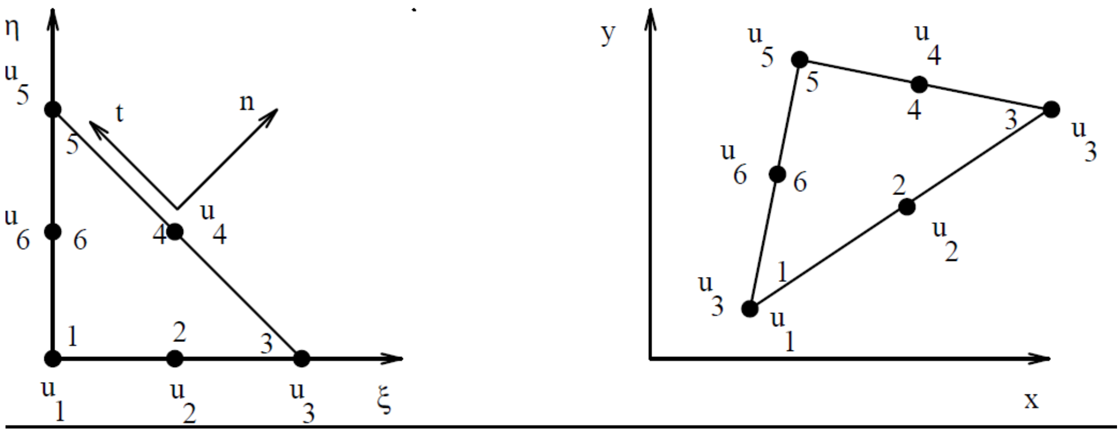

Figura 1.8: Elemento triangular quadrático

O número de funções $\bar{P}(\boldsymbol{\xi}$ e coeficientes a_x, a_y e $\boldsymbol{\alpha}_i$ é igual ao número de nós geométricos do elemento. Pode-se definir então que:

- Os coeficientes a e $\boldsymbol{\alpha}$ são chamados variáveis generalizadas do elemento para distingui-las das variáveis $\boldsymbol{q}$;
- A expressão $u(\xi) = \{P(\boldsymbol{\xi})\}^T\{a\}$ define um aproximação generalizada para ser distinta da aproximação nodal $u(\xi) = \{N(\xi)\}^T\{q\}$;

II. *Relação entre variáveis nodais e generalizadas*

Para cada nó de interpolação das coordenadas ξ_i, a função $u(\xi)$ avalia seu valor nodal $u_i = u(\xi)$:

PARA O TRIÂNGULO DE TRÊS NÓS:

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{array} \right\} = \boldsymbol{q} = \left[\begin{array}{ccc} \langle P_1(\boldsymbol{\xi}_1) & P_2(\boldsymbol{\xi}_1) & P_3(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \langle P_1(\boldsymbol{\xi}_2) & P_2(\boldsymbol{\xi}_2) & P_3(\boldsymbol{\xi}_2) \\ \langle P_1(\boldsymbol{\xi}_3) & P_2(\boldsymbol{\xi}_3) & P_3(\boldsymbol{\xi}_3) \end{array} \right] \{a\} \tag{1.69}$$

$$\boldsymbol{q} = [P_n]\{a\} \tag{1.70}$$

A relação expressa por eq.(1.69) pode ser escrita como

$$\boldsymbol{q} = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \xi_1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \right\} = \boldsymbol{P}_n \boldsymbol{\alpha} \tag{1.71}$$

Substituindo-se os valores nos nós i, j, k do triângulo de referência (fig.1.7), tem-se:

$$\begin{array}{rcl} u(0,0) & = & u1 = \alpha_1 \\ u(1,0) & = & u2 = \alpha_1 + \alpha_2 \xi \\ u(0,1) & = & u3 = \alpha_1 + \alpha_3 \eta \end{array} \tag{1.72}$$

$$
\begin{aligned}
v(0,0) &= v1 = \alpha_1 \\
v(1,0) &= v2 = \alpha_1 + \alpha_2\xi \\
v(0,1) &= v3 = \alpha_1 + \alpha_3\eta
\end{aligned}
\tag{1.73}
$$

Obtendo-se então que:

$$
\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \right\} = \boldsymbol{P}_{n_u}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.74}
$$

Tem-se então para u_i que,

$$
\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}_n^{-1}\boldsymbol{q} \tag{1.75}
$$

ou seja,

$$
\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} \tag{1.76}
$$

As expressões para v_i são obtidas de forma análoga.

PARA O TRIÂNGULO DE SEIS NÓS

$$
\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \\ \vec{u}_4 \\ \vec{u}_5 \\ \vec{u}_6 \end{array} \right\} = \boldsymbol{q} = &\begin{bmatrix}
P_1(\boldsymbol{\xi}_1) & P_2(\boldsymbol{\xi}_1) & P_3(\boldsymbol{\xi}_1) & P_4(\boldsymbol{\xi}_1) & P_5(\boldsymbol{\xi}_1) & P_6(\boldsymbol{\xi}_1) \\
P_1(\boldsymbol{\xi}_2) & P_2(\boldsymbol{\xi}_2) & P_3(\boldsymbol{\xi}_2) & P_4(\boldsymbol{\xi}_2) & P_5(\boldsymbol{\xi}_2) & P_6(\boldsymbol{\xi}_2) \\
P_1(\boldsymbol{\xi}_3) & P_2(\boldsymbol{\xi}_3) & P_3(\boldsymbol{\xi}_3) & P_4(\boldsymbol{\xi}_3) & P_5(\boldsymbol{\xi}_3) & P_6(\boldsymbol{\xi}_3) \\
P_1(\boldsymbol{\xi}_4) & P_2(\boldsymbol{\xi}_4) & P_3(\boldsymbol{\xi}_4) & P_4(\boldsymbol{\xi}_4) & P_5(\boldsymbol{\xi}_4) & P_6(\boldsymbol{\xi}_4) \\
P_1(\boldsymbol{\xi}_5) & P_2(\boldsymbol{\xi}_5) & P_3(\boldsymbol{\xi}_5) & P_4(\boldsymbol{\xi}_5) & P_5(\boldsymbol{\xi}_5) & P_6(\boldsymbol{\xi}_5) \\
P_1(\boldsymbol{\xi}_6) & P_2(\boldsymbol{\xi}_6) & P_3(\boldsymbol{\xi}_6) & P_4(\boldsymbol{\xi}_6) & P_5(\boldsymbol{\xi}_6) & P_6(\boldsymbol{\xi}_6)
\end{bmatrix} \{a\} \\
&= [P_n]\{a\}
\end{aligned}
\tag{1.77}
$$

Assim, para u_i pode-se reescrever a expressão acima como:

$$\vec{u}(\xi,\eta) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \right\} \tag{1.78}$$

Substituindo-se os valores nos nós i, j, k, l, m, n do triângulo de referência (fig.1.8), tem-se:

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= u1 = \alpha_1 \\
u(\frac{1}{2},0) &= u2 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\xi + \frac{1}{4}\alpha_4\xi^2 \\
u(1,0) &= u2 = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_4\xi^4 \\
u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= u2 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_4\xi^2 + \frac{1}{4}\alpha_5\xi\eta + \frac{1}{4}\alpha_6\eta^2 \\
u(0,1) &= u3 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6\eta^2\eta \\
u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= u2 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_6\eta^2
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Obtendo-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 1 & 1. & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.25 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \right\} = \boldsymbol{P}_{n_u}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.80}$$

Tem-se então para u_i,

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}_n^{-1}\boldsymbol{q} \tag{1.81}$$

ou seja,

$$
\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \right\} \tag{1.82}
$$

As expressões para v_i são obtidas de forma análoga.

III. *Expressão analítica para N e* $\bar{N}$

PARA O TRIÂNGULO DE TRÊS NÓS

Substituindo-se 1.59 em 1.69,

$$
\boldsymbol{u(\xi)} = \{P(\boldsymbol{\xi})\}^T [P_n]^{-1} \boldsymbol{q} \tag{1.83}
$$

ou

$$
\boldsymbol{u(\xi)} = \{N(\boldsymbol{\xi})\}^T \boldsymbol{q} \tag{1.84}
$$

onde

$$
N(\boldsymbol{\xi}) = \{P(\boldsymbol{\xi})\}^T [P_n]^{-1} \tag{1.85}
$$

Da mesma forma, tem-se

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x(\xi)} &= \{\bar{N}(\boldsymbol{\xi})\}^T \boldsymbol{x_i} && (1.86) \\
\boldsymbol{y(\xi)} &= \{\bar{N}(\boldsymbol{\xi})\}^T \boldsymbol{y_i} && (1.87)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\bar{N}(\boldsymbol{\xi}) = \{P(\boldsymbol{\xi})\}^T [P_n]^{-1} \tag{1.88}
$$

sendo

$$
\bar{N}(\boldsymbol{\xi}) = N(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.89}
$$

Para este elemento as funções de forma são definidas como sendo:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 1 - \xi - \eta & (1.90)\\
N_2 &= \xi & (1.91)\\
N_3 &= \eta & (1.92)
\end{aligned}
$$

e finalmente pode-se definir a matriz de funções de forma como:

$$\{N\}^T = \left\{ \begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \end{array} \right\} \tag{1.93}$$

Desta maneira a interpolação da geometria é escrita por:

$$
\begin{aligned}
x(\xi,\eta) = \bar{N}_1 x_1 + \bar{N}_2 x_2 + \bar{N}_3 x_3 &= \sum_{i=1}^{3} \bar{N}_i x_i & (1.94)\\
y(\xi,\eta) = \bar{N}_1 y_1 + \bar{N}_2 y_2 + \bar{N}_3 y_3 &= \sum_{i=1}^{3} \bar{N}_i y_i & (1.95)
\end{aligned}
$$

onde $x(\xi,\eta)$ e $y(\xi,\eta)$ são as coordenadas dos pontos em relação a um sistema local de referência, e x_n e y_n são as coordenadas cartesianas globais dos nós do elemento triangular linear.

E os deslocamentos, analogamente:

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\eta) &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i u_i & (1.96)\\
v(\xi,\eta) &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i v_i & (1.97)
\end{aligned}
$$

Para o triângulo de seis nós

Substituindo-se 1.60 em 1.77,

$$\boldsymbol{u(\xi)} = \{P(\boldsymbol{\xi})\}^T [P_n]^{-1} \boldsymbol{q} \tag{1.98}$$

ou

$$\boldsymbol{u(\xi)} = \{N(\boldsymbol{\xi})\}^T \boldsymbol{q} \tag{1.99}$$

onde

$$N(\boldsymbol{\xi}) = \{P(\boldsymbol{\xi})\}^T [P_n]^{-1} \tag{1.100}$$

Da mesma forma, tem-se

$$\boldsymbol{x(\xi)} = \{\bar{N}(\boldsymbol{\xi})\}^T \boldsymbol{x_i} \tag{1.101}$$
$$\boldsymbol{y(\xi)} = \{\bar{N}(\boldsymbol{\xi})\}^T \boldsymbol{y_i} \tag{1.102}$$

onde

$$\bar{N}(\boldsymbol{\xi}) = \{P(\boldsymbol{\xi})\}^T [P_n]^{-1} \tag{1.103}$$

sendo

$$\bar{N}(\boldsymbol{\xi}) = N(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.104}$$

Para este elemento as funções de interpolação são definidas como sendo:

$$N_1 = 1 - 3\eta + 2\eta^2 - 3\xi + 4\eta\xi + 2\xi^2 \tag{1.105}$$
$$N_2 = 4\xi - 4\eta\xi - 4\xi^2 \tag{1.106}$$
$$N_3 = -\xi + 2\xi^2 \tag{1.107}$$
$$N_4 = 4\eta\xi \tag{1.108}$$
$$N_5 = -\eta + 2\eta^2 \tag{1.109}$$
$$N_6 = 4\eta - 4\eta^2 - 4\eta\xi \tag{1.110}$$

e finalmente pode-se definir a matriz de funções de forma como:

$$\{N\}^T = \left\{ \begin{array}{cccccc} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{array} \right\} \tag{1.111}$$

Deste modo a interpolação da geometria é escrita por:

$$\begin{aligned} x(\xi,\eta) &= \bar{N}_1 x_1 + \bar{N}_2 x_2 + \bar{N}_3 x_3 + \bar{N}_4 x_4 + \bar{N}_5 x_5 + \bar{N}_6 x_6 \\ &= \sum_{i=1}^{6} \bar{N}_i x_i \end{aligned} \tag{1.112}$$
$$\begin{aligned} y(\xi,\eta) &= \bar{N}_1 y_1 + \bar{N}_2 y_2 + \bar{N}_3 y_3 + \bar{N}_4 y_4 + \bar{N}_5 y_5 + \bar{N}_6 y_6 \\ &= \sum_{i=1}^{6} \bar{N}_i y_i \end{aligned} \tag{1.113}$$

onde $x(\xi,\eta)$ e $y(\xi,\eta)$ são as coordenadas dos pontos em relação a um sistema local de referência, e x_n e y_n são as coordenadas cartesianas globais dos nós do elemento triangular linear.

E os deslocamentos, analogamente:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 + N_5u_5 + N_6u_6 \\ &= \sum_{i=1}^{6} N_i u_i \qquad (1.114) \\ v(\xi,\eta) &= N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 + N_5v_5 + N_6v_6 \\ &= \sum_{i=1}^{6} N_i v_i \qquad (1.115) \end{aligned}$$

1.4.1 Transformação dos Operadores Diferenciais

As equações que governam o problema físico são escritas no domínio real e involvem funções desconhecidas de $\mathbf{u}$ e suas derivadas: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Considerando que a aproximação no espaço do elemento real é sempre mais complicada, é mais conveniente trabalhar no espaço do elemento de referência.

$$\boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{u(\xi)} = \{N(\boldsymbol{\xi})\}^T \boldsymbol{q} \qquad (1.116)$$

juntamente com a transformação τ definida da seguinte forma:

$$\tau : \boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x(\xi)} = [\bar{N}(\boldsymbol{\xi})]\{(\boldsymbol{x_i})\} \qquad (1.117)$$

Ou ainda,

$$\tau^{-1} : \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi(x)} \qquad (1.118)$$

Desde que o inverso da transformação τ^{-1} é geralmente muito difícil de construir, exceto para os elementos mais simples, é mais conveniente avaliar todos os operadores no espaço do elemento de referência. Para expressões contendo derivadas referentes ao espaço real (x, y) é necessário obter as expressões equivalentes no espaço do elemento de referência (ξ, η). Tais expressões dependem da matriz Jacobiana de transformação.

Derivadas Primeira

Usando a regra da cadeia do cálculo, obtém-se as seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \tag{1.119}$$

ou

$$\{\partial_\xi\} = [\boldsymbol{J}]\{\partial_x\} \tag{1.120}$$

onde $[\boldsymbol{J}]$ é a matriz Jacobiana da transformação geométrica. Uma expressão similar é obtida trocando-se as derivadas do espaço real pelas do espaço de referência.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \tag{1.121}$$

ou

$$\{\partial_x\} = [\boldsymbol{j}]\{\partial_\xi\} \tag{1.122}$$

Sendo,

$$[\boldsymbol{j}] = [\boldsymbol{J}]^{-1} \tag{1.123}$$

Pode-se notar que, na prática, é a matriz $[\boldsymbol{J}]$ que é explicitamente definida, sendo a matriz $[\boldsymbol{j}]$ obtida numericamente a partir de $[\boldsymbol{J}]^{-1}$.Assim, para o caso bidimensional define-se que:

$$[\boldsymbol{J}] = \left[\begin{array}{cc} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{array} \right]; [\boldsymbol{J}]^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{J})} \left[\begin{array}{cc} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{array} \right] \tag{1.124}$$

Avaliação dos termos de $[\boldsymbol{J}]$

Os termos de $[\boldsymbol{J}]$ são obtidos diretamente da expressão (1.34) reescrita como a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{cc} x & y \end{array} \right\}^T = \{\bar{N}(\boldsymbol{\xi})\}^T \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{x_i} & \boldsymbol{y_i} \end{array} \right] \tag{1.125}$$

sendo $\boldsymbol{x_i}$ e $\boldsymbol{y_i}$ as coordenadas dos nós geométricos. Logo, a matriz Jacobiana será dada por:

$$[\boldsymbol{J}] = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} x & y \end{array} \right\}^T = \left[\begin{array}{c} \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{x}_i & \boldsymbol{y}_i \end{array} \right] \tag{1.126}$$

O Jacobiano é obtido como o produto de duas matrizes, uma contendo as derivadas das funções de transformação geométrica com respeito ao espaço do elemento de referência, e outra contendo as coordenadas reais dos nós geométricos do elemento. Assim, para o elemento triangular linear (três nós) tem-se:

$$\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\} = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{1.127}$$

e

$$\{\frac{\partial N}{\partial \eta}\} = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{1.128}$$

Logo,

$$[\boldsymbol{J}] = \left[\begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y1 \end{array} \right] \tag{1.129}$$

sendo

$$\det(\boldsymbol{J}) = 2A = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \tag{1.130}$$

Já para o elemento triangular quadrático (seis nós) tem-se:

$$\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\} = \left\{ \begin{array}{c} -3 + 4\eta + 4\xi \\ 4 - 4\eta - 8\xi \\ -1 + 4\xi \\ 4\eta \\ 0 \\ -4\eta \end{array} \right\} \tag{1.131}$$

e

$$\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\} = \left\{ \begin{array}{c} -3 + 4\eta + 4\xi \\ -4\xi \\ 0 \\ 4\xi \\ 0 \\ 4 - 8\eta - 4\xi \end{array} \right\} \tag{1.132}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{11} &= -3x_1 + 4x_2 - x_3 + \xi(4x_1 - 8x_2 + 4x_3) \\ &\quad +\eta(4x_1 - 4x_2 + 4x_4 - 4x_6) && (1.133) \\ \boldsymbol{J}_{12} &= -3y_1 + 4y_2 - y_3 + \xi(4y_1 - 8y_2 + 4y_3) \\ &\quad +\eta(4y_1 - 4y_2 + 4y_4 - 4y_6) && (1.134) \\ \boldsymbol{J}_{21} &= -3x_1 + \eta(4x_1 - 8x_6) + \xi(4x_1 - 4x_2 + 4x_4 - 4x_6) + 4x_6 && (1.135) \\ \boldsymbol{J}_{22} &= -3y_1 + \eta(4y_1 - 8y_6) + \xi(4y_1 - 4y_2 + 4y_4 - 4y_6) + 4y_6 && (1.136) \end{aligned}$$

Usando-se as definições (1.119) e (1.120), e as expressões dos Jacobianos dos elementos triangulares linear e quadrático, obtém-se uma relação entre as operações de derivação, definidas no espaço real ou de referência.

Transformação de uma Integral

A mudança de variáveis dada por (1.117) permite mudar o domínio de integração da função f no domínio real Ω para uma integração mais simples no espaço do elemento de referência Ω^r.

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) dx dy dz = \int_{\Omega^r} f(x(\boldsymbol{\xi})) \det(\boldsymbol{J}) d\xi d\eta d\zeta \tag{1.137}$$

sendo $det($boldmath $J)$ o determinante da matriz Jacobiana $[\boldsymbol{J}]$. O volume elementar é definido por um produto misto

$$dV = (d\vec{x} \times d\vec{y}).d\vec{z} \tag{1.138}$$

Em um sistema cartesiano pode-se escrever

$$d\vec{x} = dx.\vec{i};\ d\vec{y} = dy\vec{j}\ ; d\vec{z} = dz\vec{k} \tag{1.139}$$

onde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ são vetores unitários.

Isto conduz a:

$$dV = dx\ dy\ dz. \tag{1.140}$$

No espaço do elemento de referência

$$dV = (d\vec{\xi} \times d\vec{\eta}).d\vec{\zeta} \tag{1.141}$$

onde

$$d\vec{\xi} = (J_{11}\vec{i} + J_{21}\vec{j} + J_{31}\vec{k})d\xi \tag{1.142}$$

$$d\vec{\eta} = (J_{12}\vec{i} + J_{22}\vec{j} + J_{32}\vec{k})d\eta \tag{1.143}$$

$$d\vec{\zeta} = (J_{13}\vec{i} + J_{23}\vec{j} + J_{33}\vec{k})d\zeta \tag{1.144}$$

Portanto,

$$dV = \det(\boldsymbol{J})d\xi d\eta d\zeta \tag{1.145}$$

Após a obtensão da forma analítica, deve-se então resolver a integração numérica do domínio elementar usando-se, por exemplo, o esquema de pontos de Hammer. Pode-se também definir o elemento triangular de três nós por um referêncial local em coordenadas de área, avaliando as expressões através de manipulação simbólica, evitando-se assim a integração numérica.

Vale lembrar que uma formulação isoparamétrica é mais geral que uma formulação geométrica de referência local. Logo, tendo-se o procedimento geral dominado, não só os elementos triangulares lineares e quadráticos podem ser desenvolvidos sem muito custo, mas toda família de elementos quadrilineares.

Referências Bibliográficas

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 4 edition.

J.S., P. (1985). *Theory of Matrix Structural Analyses*. Dover Publications, New York.

Popov, E. P. (1998). *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice-Hall International.

Touzot, G. and Dhatt, G. (1984). *The Finite Element Method Displayed*. John Willey and Sons.

Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2005). *The Finite Element Method (Vol. 1-3)*. Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford, 6 edition.