



Departamento de Mecânica Computacional
Faculdade de Engenharia Mecânica
r. Mendeleyev, 200
13081-970 Campinas, SP
mail:pava@fem.unicamp.br

Cadernos de Elementos Finitos

IM 381 - FEM Unicamp

Renato Pavanello

Outubro de 2020

Laboratório de Otimização Topológica e Análise Multifísica
Departamento de Mecânica Computacional
Campinas-SP

Sumário

1	Elementos Finitos para estruturas Unidimensionais de Barra	3
1.1	Formulação das Equações Diferenciais que Governam o Problema de Equilíbrio Estático	3
1.1.1	Modelo cinemático para a Barra	4
1.1.2	Modelo de Material, Escolha da Lei Constitutiva	5
1.1.3	Equações de Equilíbrio da Barra	6
1.1.4	Condições de Contorno para o Caso da Barra	8
1.1.5	Resumo das Equações da Barra em Movimentos Axiais	8
1.2	Aproximação por Elementos Finitos: Barra	9
1.2.1	Método dos Resíduos Ponderados, Discretização e Aproximação nodal	9
1.2.2	Aplicação do Método dos Resíduos Ponderados	10
1.2.3	Escolha das funções de ponderação : Método Galerkin	11
1.2.4	Aplicação do Método dos Elementos Finitos	11
1.2.5	Matriz de Rigidez e Vetor de Força Nodal Equivalente para o Elemento Barra	14
1.3	Exercícios e Tarefas Computacionais	15

Capítulo 1

Elementos Finitos para estruturas Unidimensionais de Barra

Este capítulo envolve a obtenção das equações clássicas de análise de barras elásticas, a aproximação de Elementos Finitos e aplicações. A metodologia adotada pode ser dividida em três etapas:

- Formulação das equações diferenciais que governam o problema de equilíbrio estático
- Construção das formas integrais do problema através do Método dos Resíduos Ponderados do tipo Galerkin, e aplicação do Método dos Elementos Finitos
- Implementações e exercícios de fixação

1.1 Formulação das Equações Diferenciais que Governam o Problema de Equilíbrio Estático

A partir da aplicação dos conceitos gerais da Mecânica dos Sólidos deformáveis, procura-se sintetizar as equações básicas de forma a obter as equações diferenciais que governam os movimentos de estruturas simples (Popov, 1998).

Aborda-se inicialmente os problemas de equilíbrio estático de barras unidimensionais submetidas a forças axiais, procurando-se deixar claro em que medida este equacionamento é um caso particular da teoria geral da elasticidade.

A sistemática básica a ser utilizada é a seguinte:

- Definição do Modelo geométrico a partir das hipóteses cinemáticas básicas.
- Escolha de um modelo constitutivo, baseado nas características dos materiais.

- Aplicação das equações de equilíbrio para obtenção das equações diferenciais que governam o problema.
- Discussão das condições de contorno do problema.

No caso da barra a formulação do problema de equilíbrio estático pode ser ilustrado conforme mostrado na Figura 1.6.

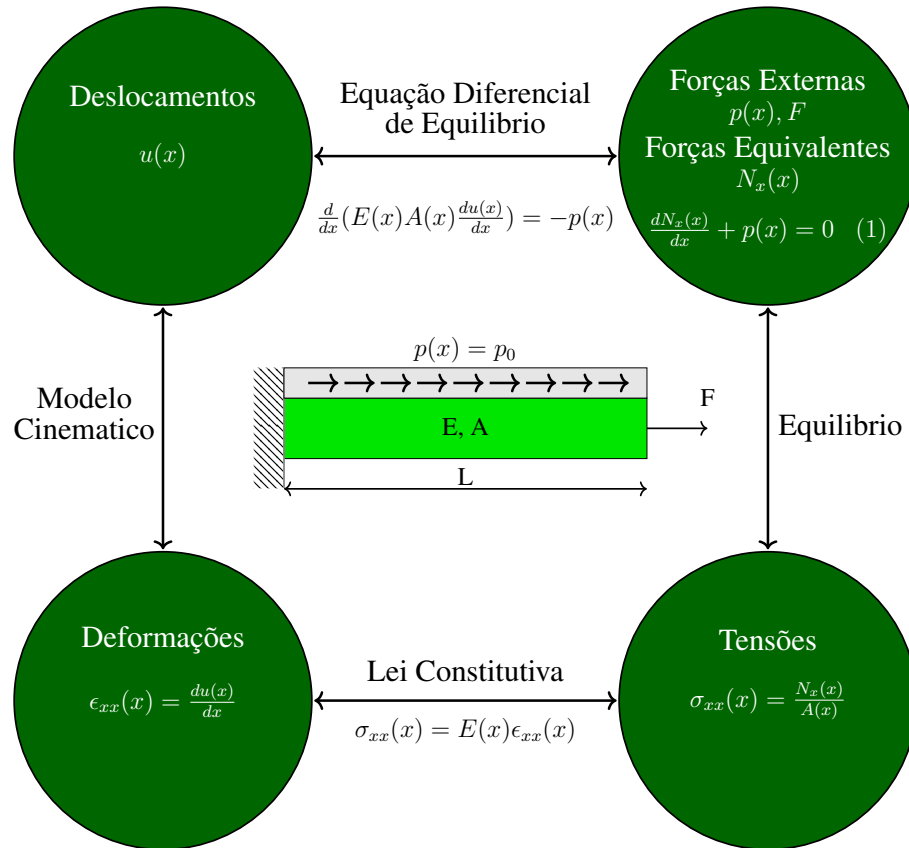


Figura 1.1: Diagrama da formulação de Barra.

A sequência metodológica apresentada pode ser facilmente estendida para problemas mais complexos de placas e cascas, elasticidade bi e tridimensional, com não linearidade geométrica ou de material, além de problemas de vibrações e dinâmica.

1.1.1 Modelo cinemático para a Barra

Considera-se a barra da figura 1.2, sujeita ao carregamento externo F , e com comprimento L , e de seção transversal de área A .

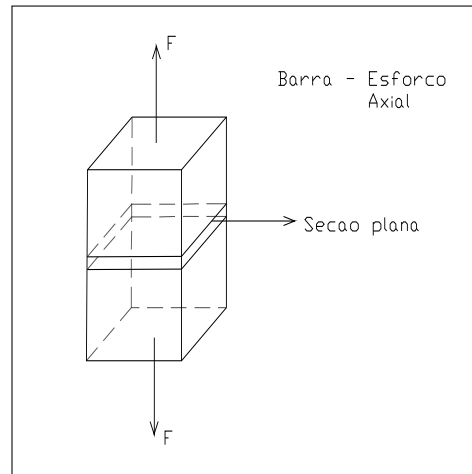


Figura 1.2: Barra submetida a Tração / Compressão

A hipótese cinemática básica consiste em supor que, após a aplicação da carga, todas as seções que eram inicialmente retas, permanecem retas. Assim a deformação na direção do eixo longitudinal da barra é dado por:

- Elemento diferencial da Barra Indeformada é Δx .
- Após a aplicação da carga o novo comprimento é dado por:

$$\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \quad (1.1)$$

- E a deformação de uma fibra, a qual é constante para toda a seção, é dada pela relação entre a posição deformada e a indeformada, ou seja:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{[\Delta x + (\frac{\partial u}{\partial x}) \Delta x] - \Delta x}{\Delta x} \quad (1.2)$$

ou seja para toda a seção, tem-se:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.3)$$

1.1.2 Modelo de Material, Escolha da Lei Constitutiva

Esta etapa consiste em, à partir do tipo de material da barra, definir-se uma lei de comportamento, que relacione as tensões internas e as deformações da estrutura. Considera-

se em um primeiro tempo, que o material da barra é homogêneo, isotrópico e tem comportamento linear elástico. Nestas condições uma lei constitutiva que pode ser adotada é a Lei de Hooke, que para o caso unidimensional pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (1.4)$$

onde

- σ_{xx} são as tensões na direção longitudinal da barra
- E é o módulo de elasticidade do material
- ε_{xx} é a deformação na direção longitudinal da barra

1.1.3 Equações de Equilíbrio da Barra

Aqui o objetivo é definir as equações diferenciais de equilíbrio à partir das Leis de Newton.

Considera-se inicialmente a barra submetida a força F de tração mostrada na Figura 1.3, e assume-se que a seção reta permanece plana após a deformação (hipótese cinemática), e que a distribuição de esforços internos σ_{xx} , também é constante. Logo, aplicando a condição de equilíbrio para a direção x tem-se:

$$F = \int_A \sigma_{xx} dA = \sigma_{xx} \int_A dA = \sigma_{xx} A \quad (1.5)$$

Onde σ_{xx} é a tensão normal de tração ou compressão e A é a área da seção transversal da barra.

Substituindo as expressões 1.3 e 1.4 na expressão 1.5 tem-se a primeira equação de equilíbrio dada por:

$$F = \sigma_{xx} A = E\varepsilon_{xx} A = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.6)$$

A segunda equação de equilíbrio do sistema, que é de certa forma mais geral que a equação 1.6, considera o fato que a barra esteja submetida a uma carga distribuída de valor $p(x)$, conforme mostrado na figura 1.4.

Nesta configuração a aplicação da condição de equilíbrio na direção x é dada por:

$$-F_x + p(x)dx + F_x + dF_x = 0 \quad (1.7)$$

o que conduz imediatamente a:

$$p(x) = -\frac{dF_x}{dx} \quad (1.8)$$

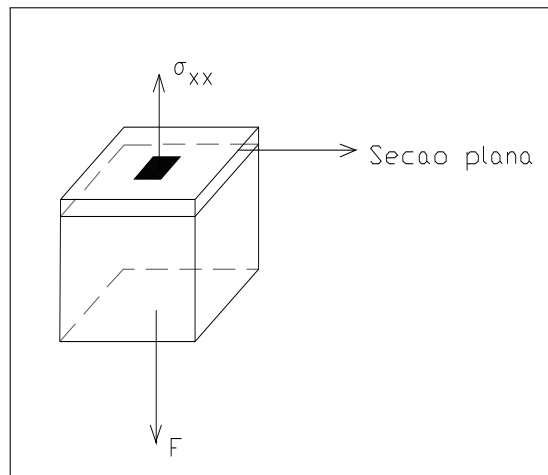


Figura 1.3: Barra em corte - Equilíbrio entre tensões internas e Forças externas concentradas

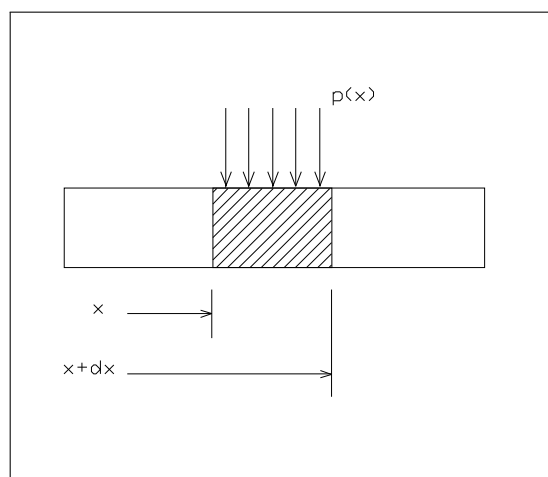


Figura 1.4: Barra sujeita a carga distribuída

substituindo a Eq. 1.6 na Eq. 1.8 tem-se finalmente:

$$p(x) = -\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) \quad (1.9)$$

ou ainda na forma padrão da equação diferencial de uma barra, dada por:

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + p(x) = 0 \quad (1.10)$$

A equação 1.10 governa o problema analisado, e é válida em todo o domínio da barra.

1.1.4 Condições de Contorno para o Caso da Barra

A fim de se completar o conjunto de equações que governam o problema de equilíbrio estático de uma barra deformável, deve-se indicar as condições de contorno possíveis para o problema.

Dois tipos de condições de contorno clássicas podem ser usados:

- Condições de contorno essenciais, definidas como:

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1$$

que corresponde a condição de apoio restrito ou de deslocamentos impostos.

- Condições de contorno Naturais, definidas como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F}{EA} \quad \text{em } \Gamma_2$$

onde $F = 0$ para extremidades livres, e $F = \bar{F}$ nos pontos onde há carga pontual aplicada. Esta condição garante a continuidade das tensões internas com as trações externas nas fronteiras. As cargas distribuídas $p(\bar{x})$ encontram-se incluídas na formulação do domínio, equação 1.10.

1.1.5 Resumo das Equações da Barra em Movimentos Axiais

O problema acima descrito na sua forma diferencial pode ser enunciado da seguinte forma:

Achar u que satisfaça:

$$\left\{ \begin{array}{ll} EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) = 0 & \text{no domínio } \Omega \\ \text{sujeito a:} & \\ u = \bar{u} & \text{em } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F}{EA} & \text{em } \Gamma_2 \end{array} \right.$$

O problema diferencial deve então ser passado para a forma integral usando-se o Método dos Resíduos Ponderados para posterior aproximação por Elementos Finitos, e consequente obtenção das equações de análise matricial.

1.2 Aproximação por Elementos Finitos: Barra

1.2.1 Método dos Resíduos Ponderados, Discretização e Aproximação nodal

O procedimento para se chegar às formas integrais que governam os problemas de equilíbrio estático e dinâmico baseado nas equações diferenciais permite uniformizar a formulação de problemas da mecânica em geral, de maneira a tornar-se possível posteriormente a ampliação deste escopo a assuntos relacionados a Elasticidade, Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Com este objetivo, a partir da metodologia adotada na seção anterior, estabelecem-se as equações diferenciais e as condições de contorno que governam os problemas que podem ser escritos de uma forma abstrata da seguinte maneira:

$$L(u) - f = 0 \quad \text{no domínio} \quad \Omega$$

$$C(u) - g = 0 \quad \text{na fronteira} \quad \Gamma$$

onde L e C são operadores diferenciais, u são as variáveis do problema, f e g são funções conhecidas.

O Método dos Resíduos Ponderados permitirá a transformação destes problemas em formas integrais (Zienkiewicz and Morgan, 1983) (Zienkiewicz, 1971), as quais assumem a seguinte forma genérica inicial:

$$\int_{\Omega} W(L(u) - f) d\Omega = 0$$

onde W são funções de ponderação. A aplicação do Método Galerkin e de técnicas de integração por partes permitem escrever o problema em sua forma Fraca (?) (Cook et al., 2002), a qual pode ser usada para a aproximação de Elementos Finitos (Cook et al., 2002) (?) (?) :

$$u \cong \tilde{u} = [N]\{\bar{u}\}$$

onde \tilde{u} são as soluções aproximadas, $[N]$ é a matriz das funções de forma e $\{\bar{u}\}$ são as variáveis nodais descritas num sistema de coordenadas elementar, definidas por uma dada discretização. A partir desta aproximação, constroem-se as matrizes de rigidez e os vetores de força nodal equivalente no sistema de coordenadas elementar.

Finalmente, chega-se às equações de análise matricial dos elementos estruturais pela superposição das matrizes elementares calculadas, levando-se em consideração os esforços aos quais podem estar submetidos tais elementos, e, faz-se a montagem do sistema global passando-se os elementos estruturais do referencial local para o global (J.S., 1985) (?), de maneira a generalizar a sua aplicação em problemas planos e espaciais e permitir a posterior implementação computacional.

1.2.2 Aplicação do Método dos Resíduos Ponderados

Para a resolução da equação diferencial 1.10, utiliza-se a teoria do Método dos Resíduos Ponderados que induz à obtenção de uma aproximação de tal equação. Nesta aproximação deve-se minimizar o erro, ou resíduo R , que é uma função em $\Omega = [\Gamma_1, \Gamma_2]$ e pode ser escrita da seguinte forma:

$$R_\Omega = L(u) - f$$

onde

- L é um operador diferencial linear
- f independe de u

Para a minimização deste resíduo, requiere-se que um número apropriado de integrais do erro em Ω , ponderado de diferentes maneiras (neste caso será usada a ponderação do tipo Galerkin), seja zero. Ou seja:

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = 0 \quad l = 1, 2, 3, \dots, M \quad (1.11)$$

onde $W_l (l = 1, 2, 3, \dots, M)$ são um conjunto de funções de ponderação.

Para o caso da barra, a equação 1.11 fica:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) + p(x) \right) W_l d\Omega = 0 \quad (1.12)$$

onde $K = EA$

Resolvendo-se esta integral por partes, com base no Teorema de Green, obtém-se a Forma Fraca de 1.12:

$$\int_{\Omega} k \left(\frac{dW_l}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx - \int_{\Omega} W_l p(x) dx - \int_{\Gamma_1} k \frac{du}{dx} W_l d\Gamma - \int_{\Gamma_2} k \frac{du}{dx} W_l d\Gamma = 0$$

Esta equação pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} k \left(\frac{dW_l}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx - \int_{\Omega} W_l p(x) dx - \left[k \frac{du}{dx} W_l \right]_{\Gamma_1} - \left[k \frac{du}{dx} W_l \right]_{\Gamma_2} = 0 \quad (1.13)$$

que corresponde a forma integral do problema, obtida pelo Método dos Resíduos Ponderados. O próximo passo é então a escolha das funções de ponderação, que, como proposto para este projeto, será baseada no Método Galerkin.

1.2.3 Escolha das funções de ponderação : Método Galerkin

A escolha das funções de ponderação será baseada, como previamente proposto, no Método Galerkin, no qual estas são escolhidas como sendo as funções de forma N_l ($l = 1, 2, 3, \dots, M$), que são parâmetros utilizados na aproximação e que serão obtidas posteriormente na aplicação do Método dos Elementos Finitos. Dessa forma, tem-se:

$$W_l = N_l \quad l = 1, 2, 3, \dots, M$$

E a equação 1.13 fica da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} k \frac{dN_l}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_{\Omega} N_l p(x) dx + \left[k \frac{du}{dx} N_l \right]_{\Gamma_1} + \left[k \frac{du}{dx} N_l \right]_{\Gamma_2} \quad (1.14)$$

Uma vez escolhido o tipo de ponderação, deve-se aplicar o Método dos Elementos Finitos.

1.2.4 Aplicação do Método dos Elementos Finitos

Discretização

De uma forma geral, a aplicação do Método dos Elementos Finitos corresponde a subdividir, ou seja discretizar, um domínio qualquer Ω , onde uma função é definida, em vários subdomínios Ω^e e construir uma aproximação em cada subdomínio. Neste caso, as integrais definidas existentes nas equações de aproximação podem ser obtidas simplesmente somando-se as contribuições em cada subdomínio:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} W_l R_{\Omega^e} d\Omega^e$$

onde

- E corresponde ao número total de subdivisões

A principal vantagem deste procedimento está no fato de tornar possível a aproximação a curvas relativamente complexas de maneira mais fácil ao subdividi-la em curvas simples.

A análise do elemento estrutural barra como vem sendo desenvolvida neste texto é um caso do Método dos Elementos Finitos no qual apenas um subdomínio é utilizado. Portanto, o domínio $\Omega = [\Gamma_1, \Gamma_2]$ considerado até então corresponde a apenas um elemento, e a fronteira do problema, Γ_1 e Γ_2 , corresponde às extremidades da barra.

Aproximação: Escolha das Funções de Forma

A aplicação do M.E.F. induz a obtenção de uma aproximação \tilde{u} , válida no domínio $\Omega = 0 \leq \bar{x} \leq L$ do elemento, que possui a seguinte forma:

$$u \cong \tilde{u} = \sum_{m=1}^M u_m N_m$$

onde

- $u_m (m = 1, 2, 3, \dots, M)$ são parâmetros utilizados na aproximação
- $N_m (m = 1, 2, 3, \dots, M)$ são funções de forma

Os parâmetros u_m e as funções de forma devem garantir uma aproximação de maneira que $\tilde{u} \rightarrow u$ quando $M \rightarrow \infty$. Para um valor finito de M , a equação 1.14 pode ser representada matricialmente por:

$$\tilde{u} = [N]\{u\}$$

A escolha das funções de forma segue uma maneira geral desenvolvida quando é aplicado o Método dos Elementos Finitos. Esta escolha é baseada no suporte geométrico adotado, que para o caso da barra é mostrado na figura 1.5

No caso da barra, a variável primária da equação diferencial 1.10 que resume seu problema de equilíbrio estático, corresponde ao deslocamento nodal u , o qual, à partir das condições de contorno do problema, baseadas no suporte geométrico adotado, pode ser aproximado da seguinte maneira:

$$\underline{u(\bar{x}) \cong \tilde{u}(\bar{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{x}}$$

que também pode ser escrito:

$$u(\bar{x}) \cong \tilde{u}(\bar{x}) = \{ \underline{1 \quad \bar{x}} \} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

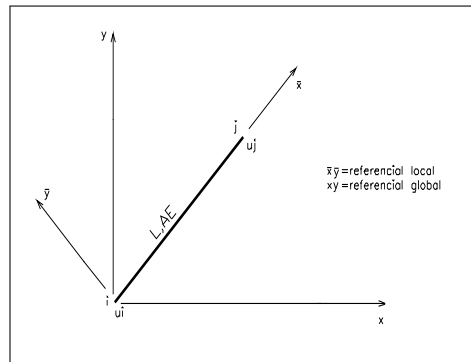


Figura 1.5: Suporte Geométrico do Elemento de Barra Submetida a Forças Axiais

onde \bar{x} representa um referencial local do elemento, mostrado na figura 1.5.

Esta aproximação pode ser avaliada em $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = L$, pontos que correspondem aos nós da barra, e, conseqüentemente à fronteira do problema. Tem-se portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(0) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 = u_i \\ \tilde{u}(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L = u_j \end{array} \right.$$

Este sistema de equações pode ser representado:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i \\ u_j \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right\}$$

o que leva à:

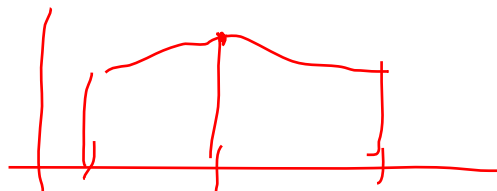
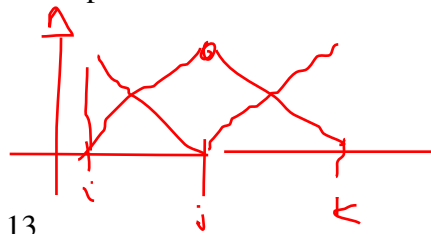
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ u_j \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \\ \bar{x} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{l} u_i \\ u_j \end{array} \right]$$

Substituindo a equação acima na equação 1.15, chega-se à:

$$\tilde{u}(\bar{x}) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\bar{x}}{L} \\ \frac{\bar{x}}{L} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ u_j \end{array} \right\}$$

Tem-se então que as funções de forma correspondem à:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_i = 1 - \frac{\bar{x}}{L} \\ N_j = \frac{\bar{x}}{L} \end{array} \right.$$



1.2.5 Matriz de Rigidez e Vetor de Força Nodal Equivalente para o Elemento Barra

Inserindo-se a aproximação \tilde{u} , e considerando-se a análise no referencial local do elemento (ver figura 1.5), chega-se a um sistema de equações lineares que leva a equação 1.14 à seguinte forma:

$$k \sum_{m,l=1}^2 \int_0^L \frac{dN_m}{d\bar{x}} \frac{dN_l}{d\bar{x}} d\bar{x} u_m = \int_0^L N_l p(\bar{x}) d\bar{x} + \left[k \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} N_l \right]_{\bar{x}=0} + \left[k \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} N_l \right]_{\bar{x}=L} \quad (1.16)$$

Levando-se em consideração a notação indicial, matricialmente a equação 1.16 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$k \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\bar{x}} \frac{dN_1}{d\bar{x}} & \frac{dN_2}{d\bar{x}} \frac{dN_1}{d\bar{x}} \\ \frac{dN_1}{d\bar{x}} \frac{dN_2}{d\bar{x}} & \frac{dN_2}{d\bar{x}} \frac{dN_2}{d\bar{x}} \end{bmatrix} d\bar{x} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} p(\bar{x}) N_1 \\ p(\bar{x}) N_2 \end{Bmatrix} d\bar{x} + k \begin{Bmatrix} \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} \big|_{\bar{x}=0} N_1 \\ \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} \big|_{\bar{x}=0} N_2 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} \big|_{\bar{x}=L} N_1 \\ \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} \big|_{\bar{x}=L} N_2 \end{Bmatrix}$$

ou:

$$[K]\{u\} = \{R_T\} + \{R_B\} \quad (1.17)$$

é possível, para o caso de elementos estruturais, associar-se à equação 1.17 uma analogia física. No caso da barra, $[K]$ corresponde a matriz de rigidez deste elemento, u são os deslocamentos nodais, e $R = \{R_T\} + \{R_B\}$ representa o vetor de carregamento, todos representados num sistema de coordenadas local

Sabendo-se os valores das funções de forma, calculadas na seção anterior, tem-se:

$$\frac{dN_1}{d\bar{x}} = -\frac{1}{L} \quad \text{e} \quad \frac{dN_2}{d\bar{x}} = \frac{1}{L}$$

e cada termo da matriz de rigidez $[K]$ pode ser calculado da seguinte maneira:

$$K_{11} = k \int_0^L \left[\left(-\frac{1}{L} \right) \left(-\frac{1}{L} \right) \right] d\bar{x} = k \frac{1}{L^2} [\bar{x}]_0^L = \frac{k}{L}$$

Seguindo um raciocínio análogo para o cálculo dos outros elementos de $[K]$, e sabendo que $k = EA$, chega-se a seguinte matriz de rigidez:

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Já em relação ao lado direito da equação 1.17, tem-se que o seu primeiro termo denota:

$$R_T = \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} p(\bar{x})N_1 \\ p(\bar{x})N_2 \end{array} \right\} d\bar{x}$$

o que corresponde a contribuição de um carregamento $p(x)$, o qual tendo sua distribuição ao longo de \bar{x} conhecida permite a avaliação das integrais acima. Por exemplo, se esta distribuição for constante e de valor Q tem-se:

$$\int_0^L \left\{ \begin{array}{c} QN_1 \\ QN_2 \end{array} \right\} d\bar{x} = \left\{ \begin{array}{c} Q \int_0^L (1 - \frac{\bar{x}}{L}) d\bar{x} \\ Q \int_0^L \frac{\bar{x}}{L} d\bar{x} \end{array} \right\}$$

e ao resolver estas integrais obtém-se:

$$R_T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{QL}{2} \\ \frac{QL}{2} \end{array} \right\}$$

o que mostra que este tipo de carregamento equivale a aplicação de metade de sua carga total QL em cada nó da barra.

O segundo termo da direita da equação 1.17 denota essencialmente condições de contorno do problema, pois seus termos são avaliados em Γ_1 e Γ_2 . Em Γ_1 , que corresponde a $\bar{x} = 0$, as funções de forma N_1 e N_2 assumem valores 1 e 0 respectivamente, e, em Γ_2 , que corresponde a $\bar{x} = L$, ocorre o inverso, o que leva a:

$$R_B = k \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} |_{\bar{x}=0} \\ 0 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} |_{\bar{x}=L} \end{array} \right\} = k \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} |_{\bar{x}=0} \\ \frac{d\tilde{u}}{d\bar{x}} |_{\bar{x}=L} \end{array} \right\}$$

Esta equação representa condições de contorno naturais definidas através de valores prescritos de derivadas de deslocamento. O termo $k(d\tilde{u}/d\bar{x}) = AE\varepsilon = A\sigma$ denota força, e portanto:

$$R_B = \left\{ \begin{array}{c} \bar{F} \\ \bar{F} \end{array} \right\}$$

corresponde as forças aplicadas nos nós da barra.

é importante lembrar que, caso o vetor de deslocamento u tenha algum valor pré-definido, como por exemplo $u_1 = 0$, ocorre que o valor F_1 assume inicialmente valor nulo, e, após os cálculos, esta força passa a representar a reação no ponto Γ_1 . Isto quer dizer que as condições de contorno naturais num ponto não influenciarão o resultado final se, neste mesmo ponto, existir uma condição de contorno essencial pré-definida.

1.3 Exercícios e Tarefas Computacionais

I. Barra bi-engastada

Considere o problema de uma barra bi-engastada sujeita a um carregamento distribuído constante de valor $q_0 = 2000N/m$. A barra tem comprimento total de 3 m, seção transversal com área $.001m^2$ e material com módulo de elasticidade de $2.1 \cdot 10^{11}$. Para este caso, pede-se:

- Escreva a equação diferencial e as condições de contorno que representem os deslocamentos axiais da barra.
- Usando o método de Galerkin, escreva a forma fraca do problema.
- Escreva as funções de forma de um elemento linear de 2 nós.
- Usando o elemento linear de 2 nós, escreva a matriz de Rigidez do problema.
- Escreva o vetor de carga nodal equivalente.
- Usando uma discretização com 3 elementos, monte a matriz global do sistema, e o vetor de carga. Adotar $L_1 = 0.5$, $L_2 = 1.0$ e $L_3 = 1.5$
- Aplique as condições de contorno e determine os deslocamentos da estrutura.
- Usando a aproximação de elementos finitos, trace um gráfico dos deslocamentos $u(x)$ em função de x .
- Determine a relação deformação x deslocamento (Matriz $[B]$).

$$\epsilon(x) = [B]\{u\} \quad (1.18)$$

- Trace um gráfico do campo de deformações $\epsilon(x)$ obtidas, em função de x .
- Determine a energia do elemento cujo comprimento é $L_3 = 1.5$, usando a fórmula clássica:

$$U = \frac{1}{2}\{u\}^T[K]\{u\} \quad (1.19)$$

II. Barra de seção variável

Considere inicialmente uma barra de seção variável, fixa nas duas extremidades e submetida a uma carga distribuída constante de intensidade p_0 ao longo de seu comprimento, conforme ilustrado na Figura 1.6.

Pede-se:

- (1) Achar a solução analítica para o deslocamento axial, deformação e tensão da barra.
- (2) Indicar a forma forte do problema, usando O método dos resíduos ponderados.

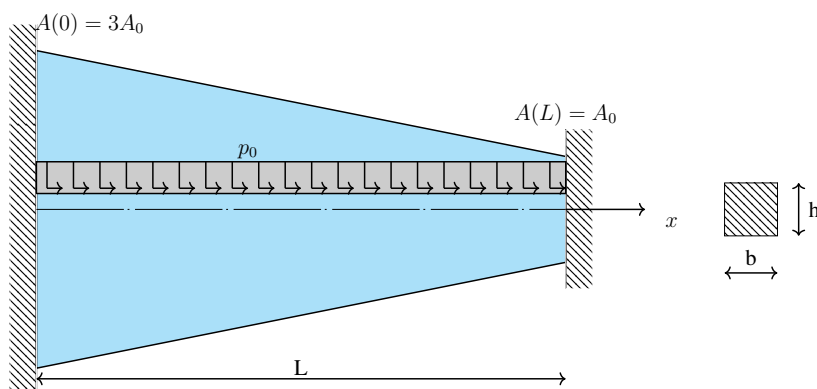


Figura 1.6: Barra com área variando linearmente e carga distribuída constante

- (3) Determinar a forma fraca do problema.
- (4) Determinar o sistema de equações para o elemento finito de 2 nós com aproximação linear.
- (5) Indicar as expressões da matriz de rigidez e do vetor de força nodal equivalente para um elemento finito com 2 nós.
- (6) Desenvolver um código em Matlab que permita resolver o problema com um número arbitrário de elementos. O programa deve calcular: deslocamentos, deformações, tensões e as normas L2 do erro com respeito a solução analítica.
- (7) Usar malhas de 4, 8, 16 e 32 elementos e calcular os erros de aproximação na norma L2. Comentar os resultados.
- (8) Determinar o sistema de equações para o elemento finito de 3 nós com aproximação quadrática usando o espaço isoparamétrico definido entre $[-1, 1]$. Calcular as Matrizes de Rigidez e vetor de carga nodal equivalente. Implementar e comparar com os resultados obtidos com o elemento de 2 nós. Comentar os resultados.
- (9) Considere agora uma carga distribuída variando linearmente ao longo da barra, entre o valor $p(x = 0) = 0$ e $p(x = L) = p_0$. Defina o vetor de carga nodal equivalente para um elemento qualquer da barra.
- (10) Implemente o cálculo do vetor de carga nodal equivalente da estrutura completa, para uma malha com um número arbitrário de elementos. Resolva o sistema e analise as soluções obtidas para deslocamentos, deformações e tensões.

Referências Bibliográficas

- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 4 edition.
- J.S., P. (1985). *Theory of Matrix Structural Analyses*. Dover Publications, New York.
- Popov, E. P. (1998). *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice-Hall International.
- Zienkiewicz, O. C. (1971). *The Finite Element Method*. MacGraw-Hill, New York.
- Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K. (1983). *Finite Elements and Approximations*. Dover - New York.