

Caderno de Elementos Finitos

Renato Pavanello

Agosto de 2024

Campinas-SP

Introdução

Motivados pela forte concorrência industrial os fabricantes de máquinas e equipamentos tem buscado soluções cada vez mais otimizadas, com o intuito de reduzir custos aumentando segurança, conforto e performance.

Este desafio tem sido confiado as equipes de engenharia que tem se tornado cada vez mais multidisciplinares, sendo formadas não só por engenheiros das diversas modalidades, mas também por economistas, físicos, matemáticos etc.

Dentre muitas ferramentas disponíveis para o cálculo e análise de estruturas mecânicas e meios contínuos, o Método dos Elementos Finitos tem se destacado como sendo uma ferramenta de uso geral, eficaz e de alto desempenho.

Nestas notas pretende-se abordar a utilização do Método dos Elementos Finitos aplicado principalmente ao cálculo estrutural. Todavia, sendo o Método dos Elementos Finitos uma ferramenta geral utilizada para a solução de Equações Diferenciais, é natural que outras disciplinas também sejam abordadas, caracterizando assim a multidisciplinaridade dos problemas de mecânica.

Será dado um enfoque aos conceitos básicos e seus fundamentos matemáticos e às aplicações do Método dos Elementos Finitos. Em todos os casos em que for conveniente serão citadas referências bibliográficas mais especializadas, para que o leitor possa se aprofundar nos fundamentos matemáticos do método.

Apresenta-se nas próximas seções uma descrição geral do Método dos Elementos Finitos, um breve histórico, comentários acerca da bibliografia da área, e finalmente o encadeamento e organização que serão adotados para a apresentação destas notas de aula.

É com certeza uma tarefa difícil dar uma descrição simples e completa para o Método dos Elementos Finitos. Diversos autores tem arriscado neste sentido, e de acordo com suas especialidades pode-se encontrar diferentes definições para o Método. Pode-se adotar uma descrição mais genérica que enfatiza o aspecto computacional do método dada por (Touzot and Dhatt, 1984):

"O Método dos Elementos Finitos é um procedimento numérico para análise de estruturas e meios contínuos"

Por outro lado pode-se enfatizar o aspecto matemático, dando-se a seguinte definição (Cook et al., 2002):

"O Método dos Elementos Finitos é uma técnica utilizada para a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais"

De uma forma global o Método dos Elementos Finitos foi criado com o objetivo de se resolver os problemas de mecânica que não admitem soluções fechadas (de forma analítica). Ele é baseado em aproximações do tipo polinomial nodal em subdomínios, o que implica em processos de discretização dos domínios, que podem ter geometrias irregulares arbitrárias. Na Figura 1 pode ser visto de forma esquemática alguns elementos básicos de um modelo de elementos finitos, e sua nomenclatura.

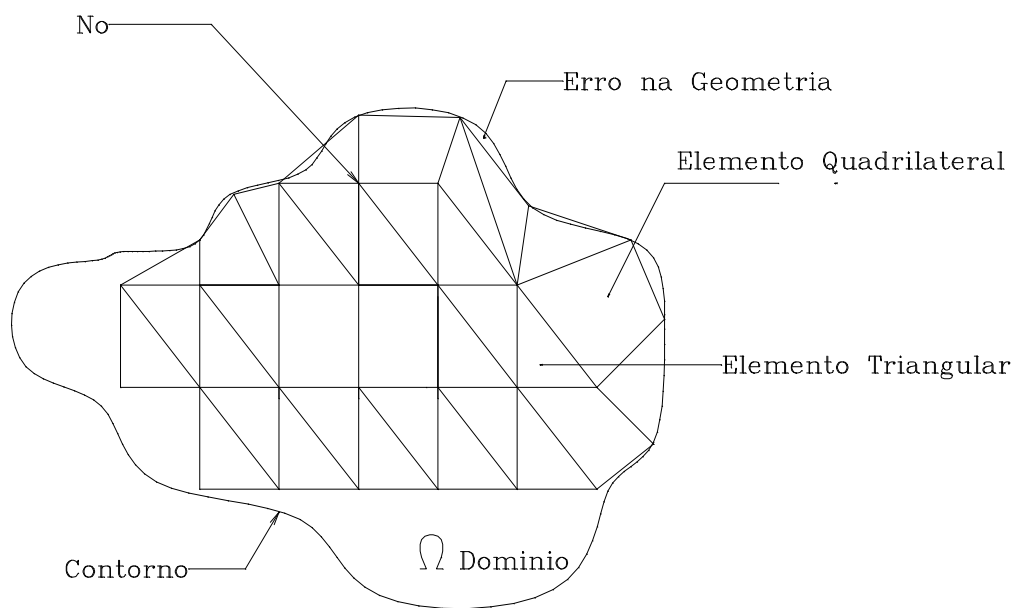


Figura 1: Esquema de um modelo genérico de Elementos Finitos

Pode-se ver no esquema apresentado na Figura 1 que o domínio Ω foi discretizado em Elementos Finitos, de forma triangular ou quadrilateral. Neste caso para cada ponto n , chamado de nós, estão associadas as incógnitas do problema. Trata-se assim de uma discretização clássica de um meio contínuo. Outra aplicação usual do conceito de Elementos Finitos aparece na análise de estruturas, neste caso analisa-se estruturas reticuladas ou em placas e cascas, sendo o domínio previamente discretizado, como pode ser visto na figura 2.

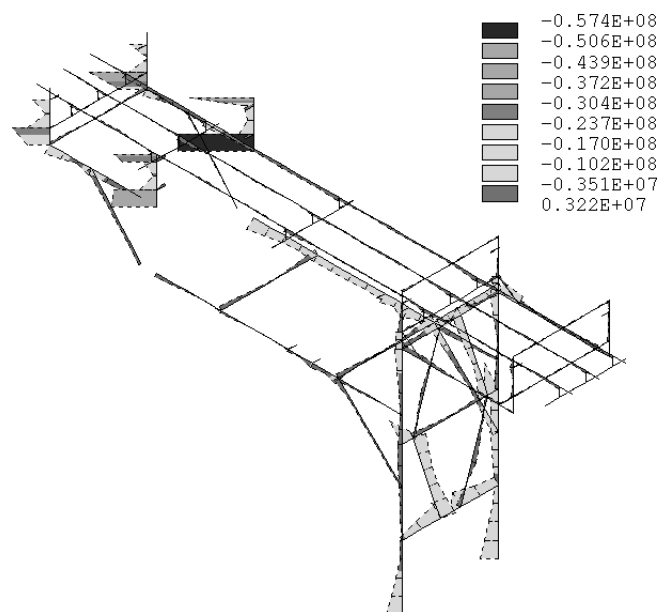


Figura 2: Modelo de Elementos Finitos para uma estrutura Reticulada

A utilização do Método dos Elementos Finitos tem se destacado nas áreas onde a densidade tecnológica é alta. Pode-se citar projetos em: aeroespacial, aeronáutica, nucleares, controle de poluição, Vibroacústica, automobilística, biomecânica, etc.

0.1 Breve histórico do Método

Remontam a 1906 os primeiros princípios¹ que posteriormente seriam consolidados no *Método dos Elementos Finitos*. Nesta época, pesquisadores propuseram um mecanismo de modelagem do contínuo por um modelo de barras elásticas², de tal forma que os deslocamentos nos nós representassem uma aproximação para os deslocamentos do contínuo³.

Courant parece ter sido o primeiro a propor o método dos elementos finitos como é conhecido hoje. Em 1943, foi publicado um trabalho matemático onde

¹Cf. K. Wieghardt, "Über einen Grenzübergang und seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke" in *Verhandlungen des Vereins z. Beförderung des Gewerbfleißes, Abhandlungen*, APUD Cook, Robert Davis, *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Singapore, 1981, pp. 14-15.

²Cf. W. Riedel, "Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion" in *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, APUD Cook, OP CIT, pp. 14-15.

³A. Hrennikoff, "Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method" in *J. Appl. Mech.*, APUD Cook, OP CIT, pp. 14-15.

ele usou o princípio da energia potencial estacionária e a interpolação polinomial por partes sobre subregiões triangulares para estudar o problema de torsão de Saint-Venant⁴. O trabalho de Courant foi ignorado até que engenheiros tivessem independentemente desenvolvido o método de Courant.

Um valor prático baixo era atribuído a estes trabalhos naquela época, pois não haviam computadores capazes de generalizar e resolver grandes conjuntos de equações algébricas simultâneas. Assim, não é acidentalmente que o desenvolvimento dos elementos finitos coincida com o maior avanço dos computadores digitais e linguagens de programação.

Em 1953, engenheiros já haviam escrito equações de rigidez em forma matricial, resolvendo-as em computadores⁵. A maior parte deste trabalho foi utilizado na indústria aeroespacial (na época um problema grande tinha 100 graus de liberdade[GDL]). Também neste ano, na Companhia de Aviação Boeing, Turner sugeriu que elementos planos triangulares fossem usados para modelar a fuselagem de aeronaves⁶. Este trabalho⁷ foi publicado quase simultaneamente a um trabalho similar publicado por Argyris e Kelsey⁸ na Inglaterra, que marcou o início da expansão do uso dos elementos finitos.

O nome **elemento finito** foi consolidado em 1960 por Clough. O valor prático do método era óbvio. Novos elementos para aplicação em análise de tensão foram desenvolvidos, muitas vezes, por intuição e argumentação física. O método ganha credibilidade em 1963, quando foi reconhecido como tendo uma forte base matemática: pôde-se considerá-lo como solução de um problema variacional por minimização de um funcional. Então, o método foi sendo aplicado em todos os problemas em que se podia obter uma forma variacional. Artigos sobre aplicações de elementos finitos a problemas de condução de calor aparecem em 1965.

Um grande número de programas de elementos finitos em computadores emergiu no final das décadas de 60 e 70. Exemplos incluem ANSYS, ABAKUS, COMSOL, ALTER, NASTRAN entre muitos outros. Cada um desses programas inclui diversos tipos de elementos, com potencial para análise estática, dinâmica e transferência de calor. Capacidades adicionais podem ser citadas, como a presença de pré-processadores (para os dados de entrada) e pós-processadores (para avaliação dos resultados). Esses processadores tornam fácil, rápida e barata a análise em

⁴R. Courant, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations" in *Bulletin of American Mathematical Society*, APUD Cook, OP CIT, pp. 14-15.

⁵S. Levy, "Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta-Wings" in *J. Aero. Sci.*, APUD Cook, OP CIT, pp. 14-15.

⁶R. W. Clough, "The Finite Element Method After Twenty- Five Years: A Personal View" in *Computers & Structures*, APUD Cook, OP CIT, pp. 14-15.

⁷M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures" in *J. Aero.Sci.*, APUD Cook, OP CIT, pp. 14-15.

⁸J. H. Argyris and S. Kelsey, *Energy Theorems and Structural Analysis*, APUD Cook, OP CIT, pp. 14-15.

elementos finitos.

Para se ter uma ideia do aumento do interesse neste campo de estudo basta dizer que , em 1961, dez artigos sobre elementos finitos foram publicados, 134 em 1966, 844 em 1971. Em 1976, duas décadas após o início das aplicações em engenharia, o total acumulado de publicações sobre elementos finitos havia excedido 7000, sendo que em 1986 o total era de aproximadamente 20000.

Na figura 3, mostra-se a evolução do número de publicações na área até 1990, aplicadas em estruturas e mecânica dos sólidos. Atualmente, o método está totalmente consolidado como ferramenta para soluções de problemas mecânicos, e é bastante difundido no meio acadêmico e industrial.

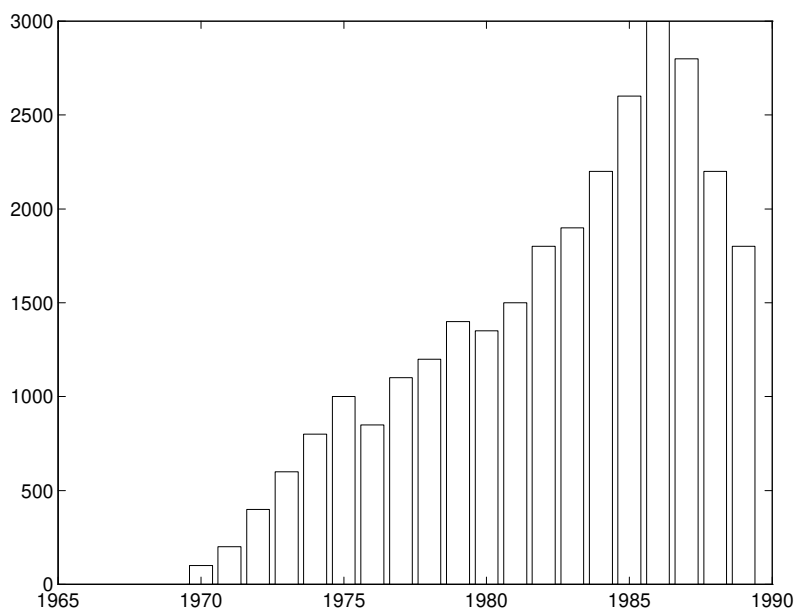


Figura 3: Evolução estimada do número de publicações em Elementos Finitos até 1990.

0.2 Organização do Curso

Estas anotações referem-se a um primeiro curso sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF) para alunos dos últimos anos da graduação e os de pós-graduação em Engenharia Mecânica e áreas afins. O curso é organizado em lições

que envolvem o desenvolvimento dos fundamentos do MEF e a sua implementação para casos simples. A ideia é mostrar os fundamentos e consolidar o aprendizado através da implementação de uma série de tarefas computacionais.

O texto é organizado da seguinte maneira:

- Na Primeira Lição apresenta-se de uma forma genérica o Método dos deslocamentos, e sua utilização para a análise matricial de estruturas, usando-se apenas os conceitos de equilíbrio e as soluções de casos de equilíbrio estrutural que possuem soluções analíticas. Mostra-se também uma primeira implementação do elemento de barra.
- A segunda lição é sobre o método dos Resíduos Ponderados como ferramenta básica utilizada para a modelagem de problemas da Mecânica. Neste capítulo de cunho mais fundamental são apresentados os tipos de equações diferenciais que são comumente utilizadas na representação dos fenômenos Físicos, e sua resolução usando formas integrais.
- Na terceira lição, o Método dos Elementos Finitos é apresentado como uma ferramenta para a aproximação de funções e de equações diferenciais. Uma formulação isoparamétrica é apresentada através de exemplos.
- Na sequência, apresenta-se nas lições 4 até 7 aplicações do Método dos Elementos Finitos em Estruturas Reticuladas.
- Na lição 8 trata-se de modelos Bidimensionais para a Teoria da Elasticidade, que são solucionados usando-se a teoria de Elementos Isoparamétricos e usando-se integração numérica ou usando formas fechadas para elementos retangulares.

Referências

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 4 edition.

Touzot, G. and Dhatt, G. (1984). *The Finite Element Method Displayed*. John Willey and Sons.