Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica
IM381 – Elementos Finitos I

Tarefa Computacional I

Análise Matricial de Estruturas

Leonardo Silveira Leite RA: 291646

Campinas - SP
2 de dezembro de 2024

1 RESUMO

Este documento aborda a resolução dos exercícios propostos na Lição I da disciplina de Elementos Finitos I, com foco na Análise Matricial de Estruturas. Os tópicos incluem a solução e a comparação entre métodos analíticos e numéricos para diferentes discretizações, avaliando o erro de aproximação por meio da norma $L2$. A análise é aplicada a problemas de barras com seção constante ou variável, submetidas a carregamentos distribuídos constantes, lineares ou pontuais.

2 RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

2.1 Barra de Seção Constante - Método Direto

(1) Ache a solução analítica do problema da barra de seção constante com carga $q(x) = q_0$ constante, considerando $u(0) = u_a = 0$ e $u(L) = u_b = \overline{u_b}$, valor conhecido constante. Compare a sua solução com a obtida no código 1.8. A barra é feita de aço, a seção é circular com diâmetro 30 mm, e a carga constante de $1kN/m$. Verifique sua resposta para diferentes valores de $\overline{u_b}$, comparando com os resultados obtidos no código 1.8.

$$\text{PVC}\begin{cases} EA\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} = -q_0 \\ \text{sujeito a:} \\ u(0) = 0 \\ u(L) = \overline{u_b} \end{cases} \tag{1}$$

Integrando-se uma vez obtém-se:

$$EA\frac{du(x)}{dx} = -q_0 x + C_1 \tag{2}$$

Integrando-se novamente:

$$EAu(x) = -\frac{q_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2 \tag{3}$$

Com as condições de contorno dadas por $u(0) = 0$ e $u(L) = u_b = \overline{u_b}$, então a solução analítica deste problema é dada por:

$$C_2 = 0 \qquad C_1 = \frac{\overline{u_b}EA}{L} + \frac{q_0 L}{2}$$

$$u(x) = \frac{1}{EA}\left[-\frac{q_0 x^2}{2} + \left(\frac{\overline{u_b}EA}{L} + \frac{q_0 L}{2}\right)x\right] \tag{4}$$

Após determinar a solução analítica do problema de valor de contorno para a barra de carga constante com $u_b = \overline{u_b}$, é possível compará-la com o resultado obtido no código 1.8, na qual o deslocamento na extremidade da barra é dada por $u(L) = 3.3684 \cdot 10^{-6} m$, ilustrado na Figura 1.

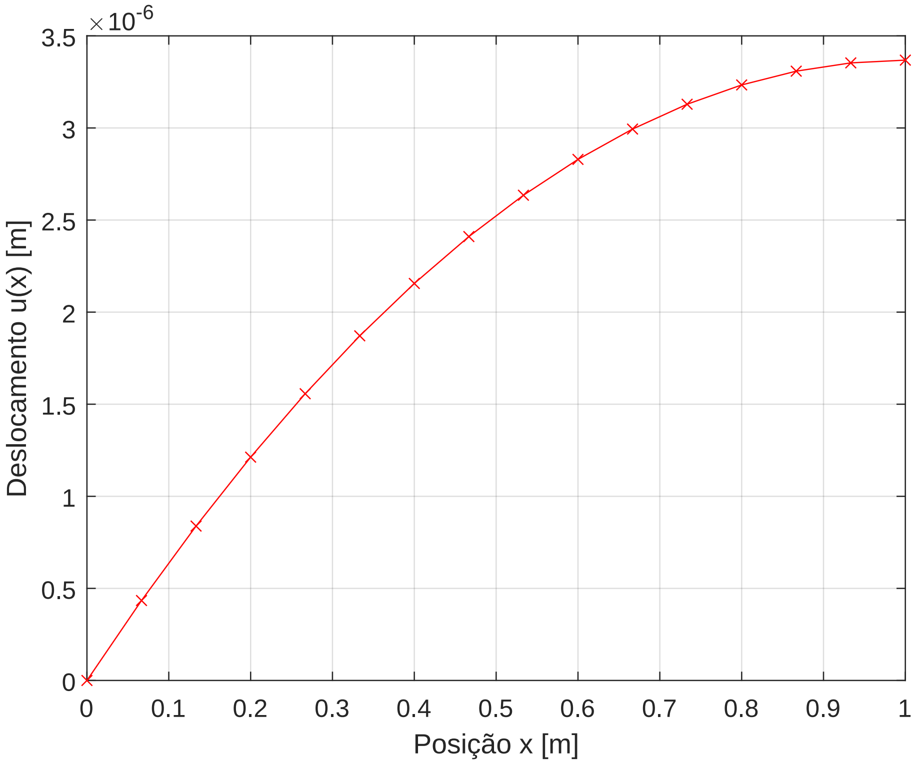

Figura 1 – Solução obtida no código 1.8.

Para a análise do problema de carga constante, foram utilizadas nas soluções os seguintes valores de $\overline{u_b}$: $0m$, $1.2825 \cdot 10^{-6}m$, $3.4312 \cdot 10^{-6}m$ e $5.7895 \cdot 10^{-6}m$. Os diferentes campos de deslocamentos estão representados na Figura 2.

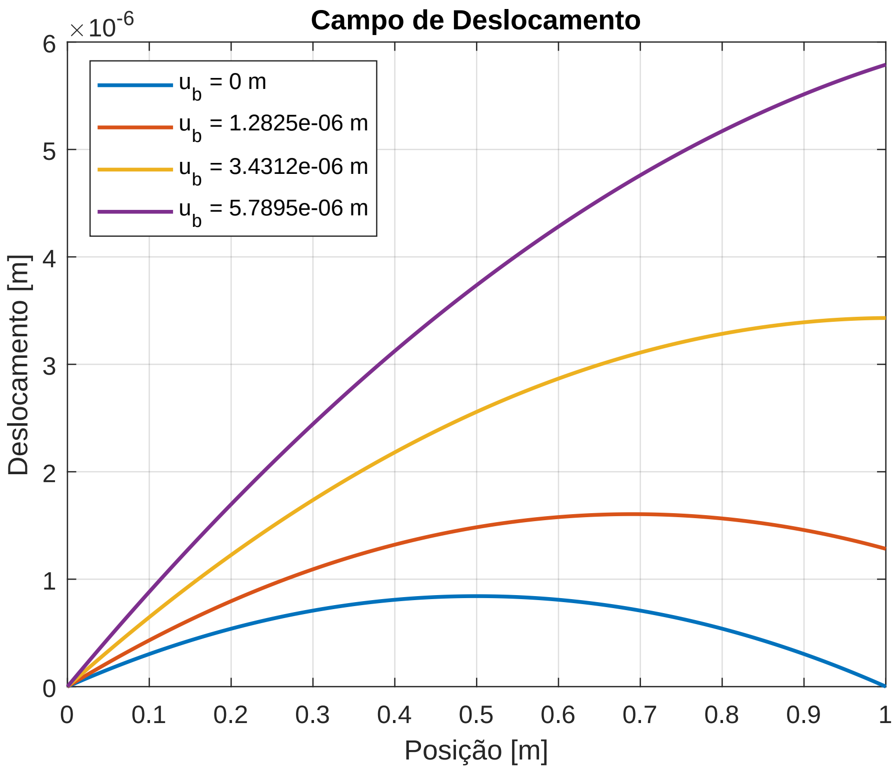

Figura 2 – Resultados para diferentes valores de u_b do problema de carga constante.

(2) Repita o item anterior para o caso de carga variando linearmente $q(x) = \dfrac{q_0 x}{L}$.

$$\text{PVC}\begin{cases} EA\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} = \dfrac{-q_0 x}{L} \\ \text{sujeito a:} \\ u(0) = 0 \\ u(L) = \overline{u_b} \end{cases} \tag{5}$$

Integrando-se uma vez obtém-se:

$$EA\frac{du(x)}{dx} = \frac{-q_0 x^2}{2} + C_1 \tag{6}$$

Integrando-se novamente:

$$EAu(x) = -\frac{q_0 x^3}{6} + C_1 x + C_2 \tag{7}$$

Com as condições de contorno dadas por $u(0) = 0$ e $u(L) = u_b = \overline{u_b}$, então a solução analítica deste problema é dada por:

$$C_2 = 0 \qquad\qquad C_1 = \frac{\overline{u_b}EA}{L} + \frac{q_0 L}{2}$$

$$u(x) = \frac{1}{EA}\left[-\frac{q_0 x^3}{6} + \left(\frac{\overline{u_b}EA}{L} + \frac{q_0 L^2}{6}\right)x\right] \tag{8}$$

Para a análise do problema de carga linear, foram utilizados os mesmos valores de $\overline{u_b}$ adotados no item anterior. A Figura 3 apresenta os diferentes campos de deslocamentos.

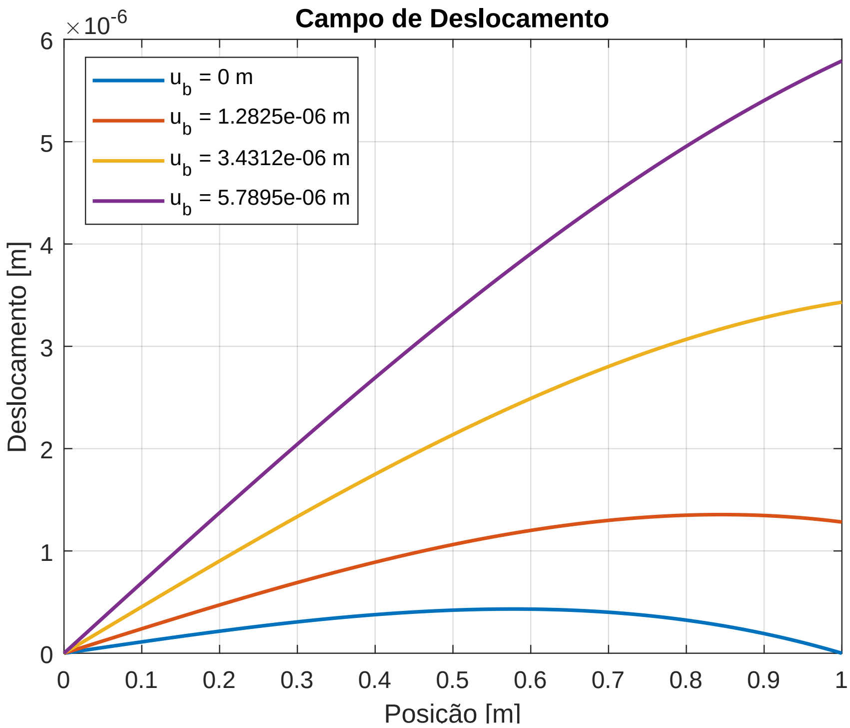

Figura 3 – Resultados para diferentes valores de u_b do problema de carga linear.

(3) Usando o programa desenvolvido previamente em sala de aula, que resolve o problema da barra com carga constante pelo método dos Elementos Finitos, pede-se:

- Para a barra de seção constante compare as soluções numéricas com as analíticas para diferentes discretizações (5, 10, 20 e 40 elementos). Faça um gráfico comparando as soluções analíticas e numéricas. Faça um gráfico dos erros em porcentagem calculados em cada ponto. Calcule e informe a norma euclidiana dos erros obtidos. Repita o procedimento para cada discretização adotada e faça uma análise de convergência usando a escala logarítmica. Comente e justifique os resultados.

Para o problema de carga constante, foram considerados os seguintes parâmetros: $E = 200 \cdot 10^9 Pa$, $A = 3.1415 \cdot 10^{-4} m^2$, $L = 2m$, e $q_0 = 3kN/m$. A comparação analítica e numérica sem a imposição de u_b é ilustrada na Figura 4, equanto na Figura 5 é apresentada a comparação arbitrando $u_b = 1.2825 \cdot 10^{-4} m$.

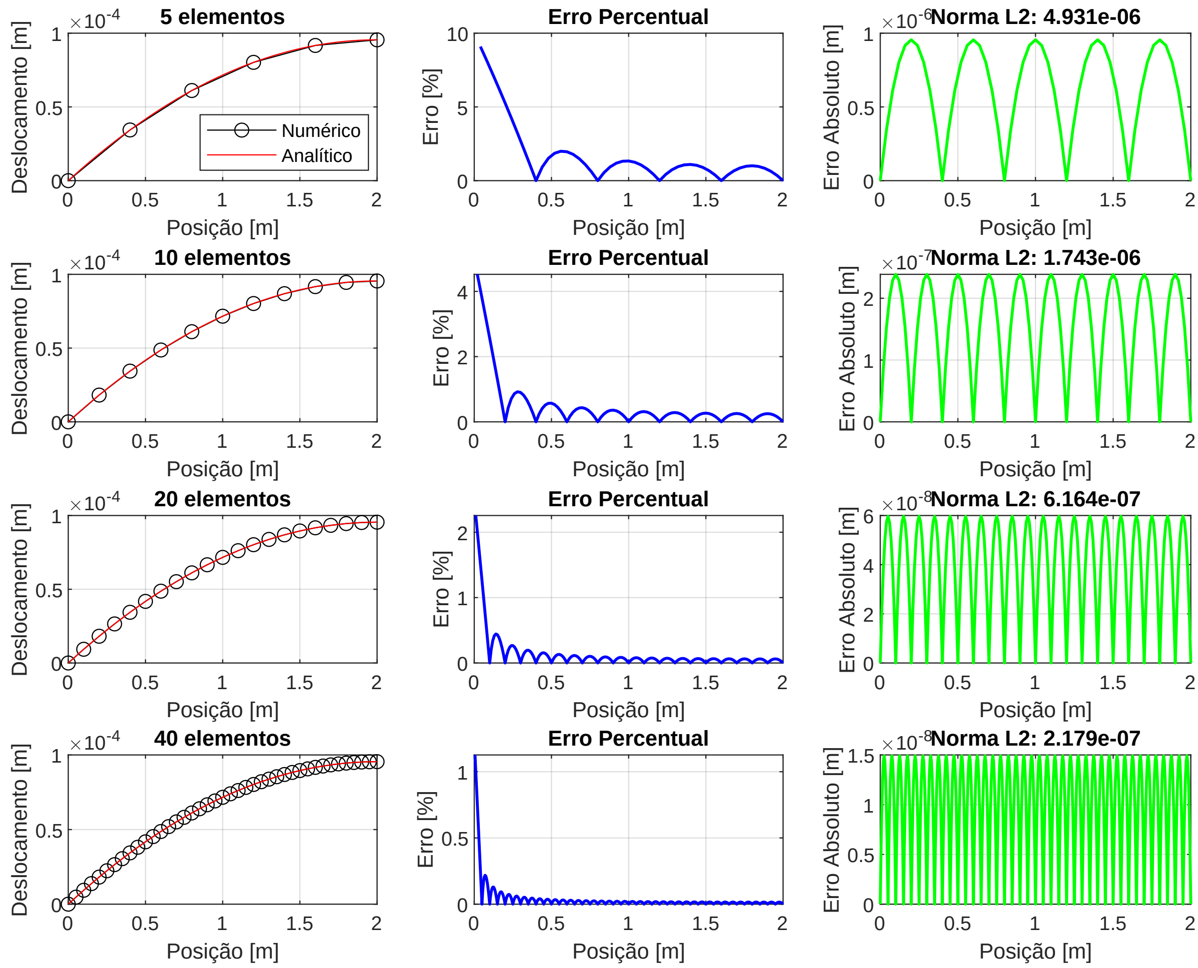

Figura 4 – Soluções analíticas e numéricas de carga constante com erro percentual e absoluto.

A avaliação da função erro foi realizada através do cálculo da norma L2 do erro, dada pela Equação 9. (PAVANELLO, 2024).

$$\|e(x)\|_{L2} = \sqrt{\int_0^L e(x)^2 \, dx}, \qquad \text{onde} \quad e(x) = u(x) - \overline{u}(x) \tag{9}$$

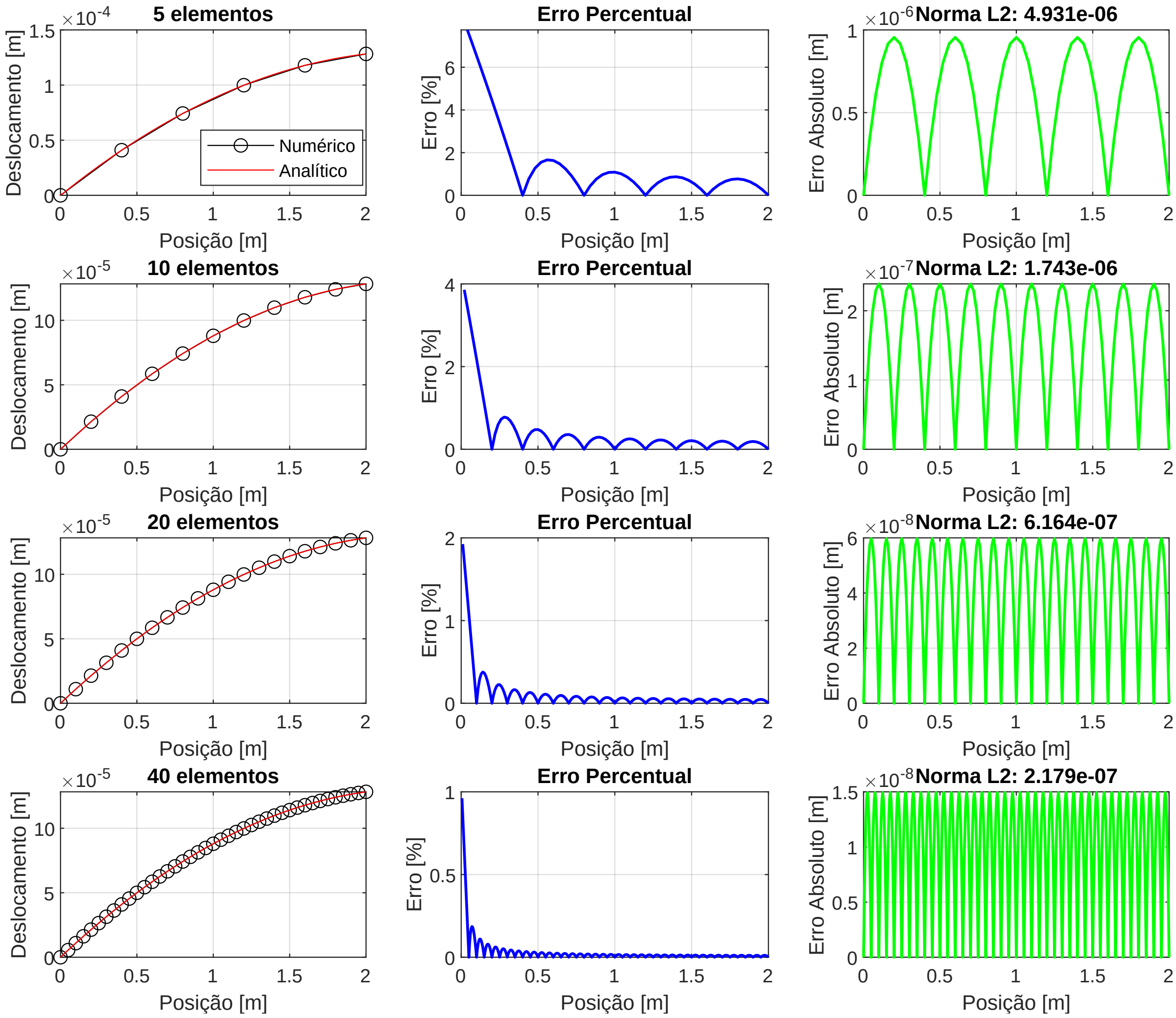

Figura 5 – Soluções analíticas e numéricas de carga constante para $u_b = 1.2825 \cdot 10^{-4}\, m$ com erro percentual e absoluto.

A análise de convergência dos erros euclidianos para o problema de carga constante livre é apresentada na Figura 6. Além disso, a Figura 7 ilustra os resultados para o valor de $u_b = 1.2825 \cdot 10^{-4}\, m$ com diferentes discretizações, utilizando uma escala logarítmica.

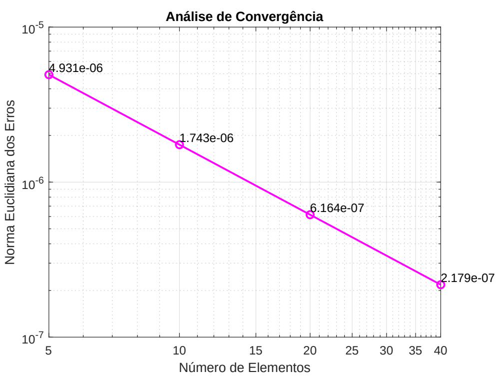

Figura 6 – Análise de convergência da barra de carga constante livre para diferentes discretizações.

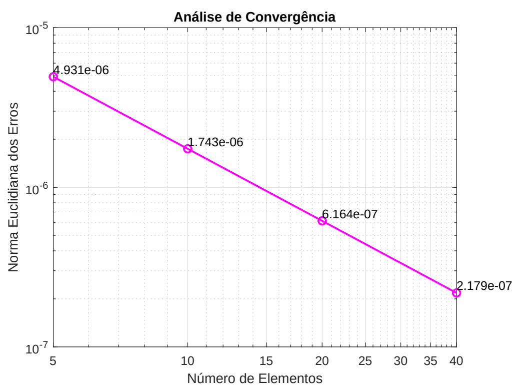

Figura 7 – Análise de convergência da barra de carga constante com imposição de u_b para diferentes discretizações.

Comentários: A análise da barra sob carga constante foi realizada com discretizações de 5, 10, 20 e 40 elementos. As comparações entre soluções analíticas e numéricas mostram que, com o aumento de elementos, a solução numérica converge para a analítica. A norma $L2$ dos erros diminui com o refinamento, indicando que a precisão depende da discretização, enquanto a condição de contorno - u_b imposto ou livre - não afeta significativamente o resultado. A análise de convergência confirma a redução do erro à medida que o número de elementos cresce.

- Repita o item anterior para a barra com carga distribuída linear.

Seguindo a mesma abordagem aplicada à barra de seção constante, foi realizada a análise de uma barra submetida a uma carga distribuída que varia linearmente. As discretizações empregadas - 5, 10, 20 e 40 elementos - foram as mesmas utilizadas no item anterior.

Neste problema de carga linear, os parâmetros adotados foram: $E = 68 \cdot 10^9 Pa$, $A = 7.85 \cdot 10^{-3} m^2$, $L = 2m$, e $q_0 = 3kN/m$. A comparação analítica e numérica sem a imposição de u_b é ilustrada na Figura 8, equanto na Figura 9 é apresentada a comparação arbitrando $u_b = 3.4312 \cdot 10^{-6} m$.

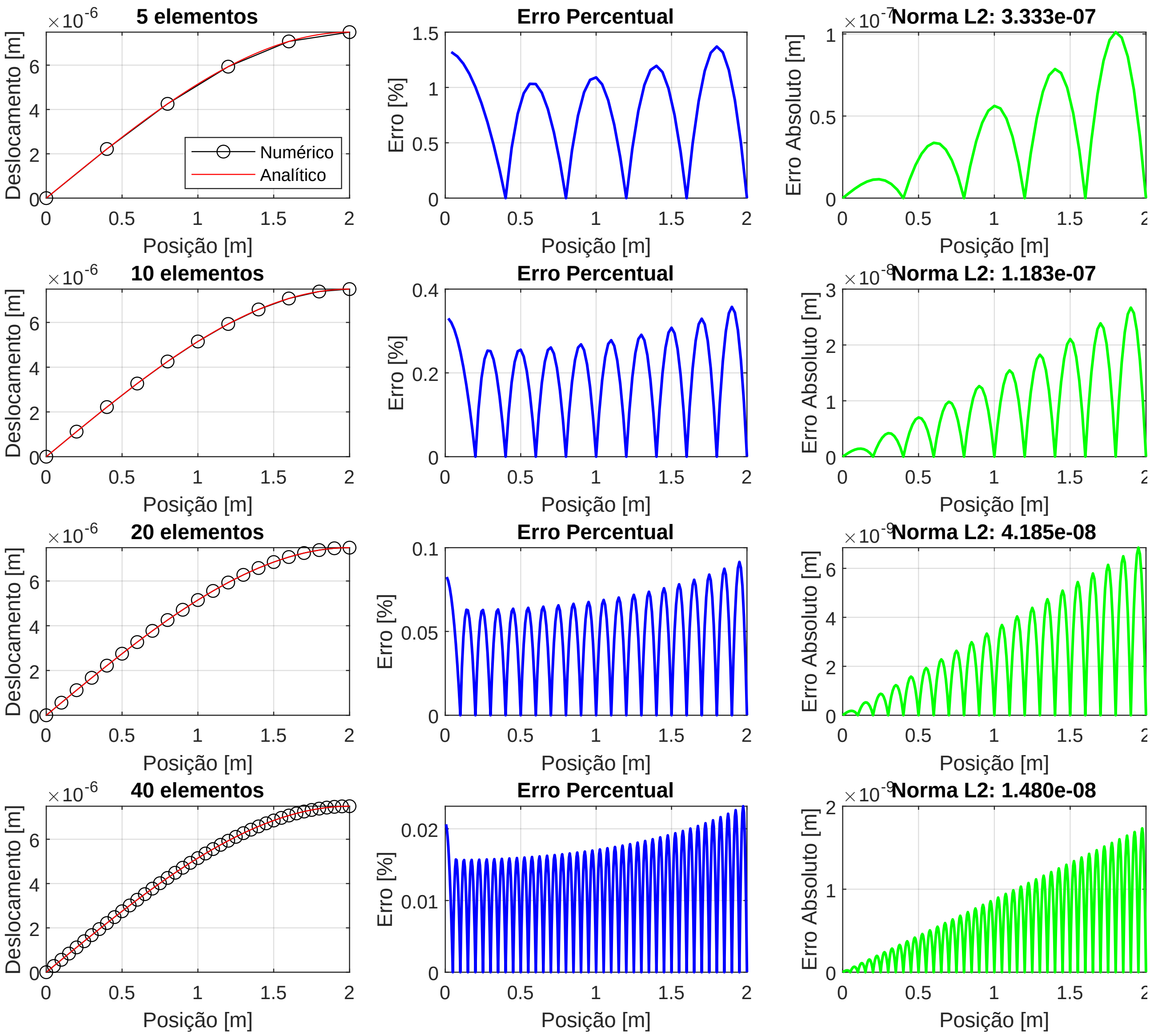

Figura 8 – Soluções analíticas e numéricas de carga linear com erro percentual e absoluto.

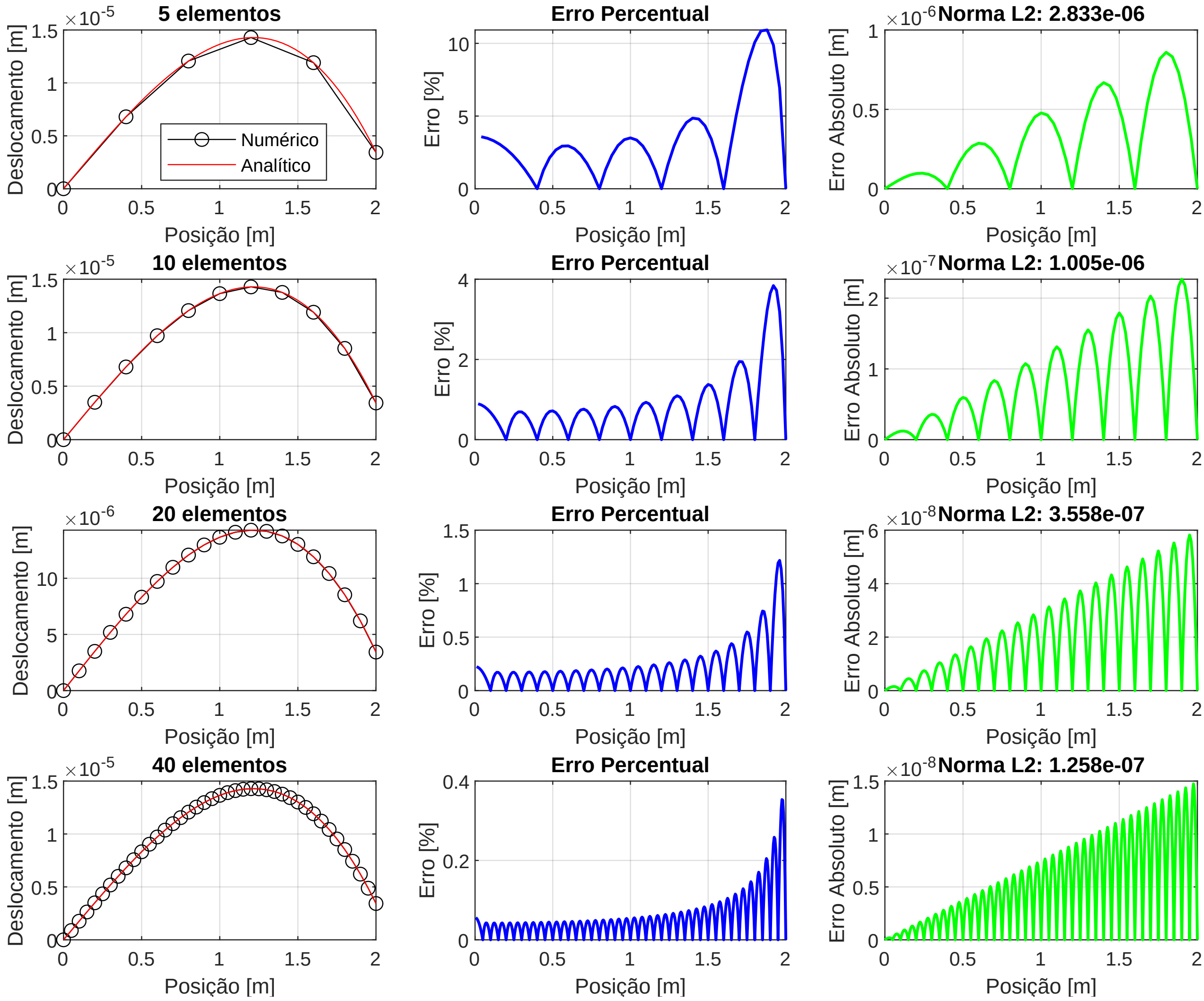

Figura 9 – Soluções analíticas e numéricas de carga linear para $u_b = 3.4312 \cdot 10^{-6} m$ com erro percentual e absoluto.

A análise de convergência dos erros euclidianos para o problema de carga linear livre é apresentada na Figura 10. Além disso, a Figura 11 ilustra os resultados para o valor de $u_b = 3.4312 \cdot 10^{-6} m$ com diferentes discretizações, utilizando uma escala logarítmica.

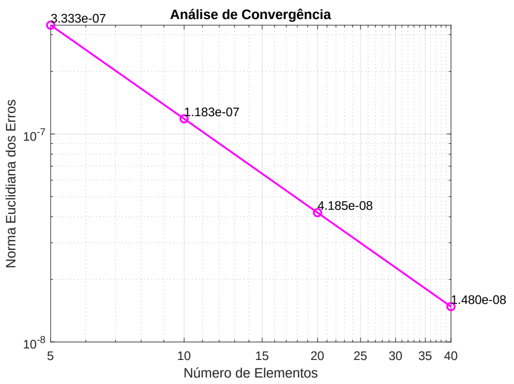

Figura 10 – Análise de convergência da barra de carga linear livre para diferentes discretizações.

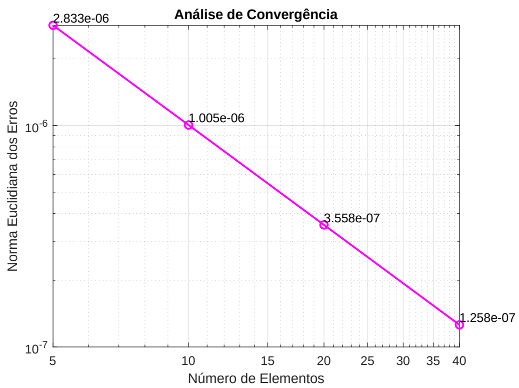

Figura 11 – Análise de convergência da barra de carga linear com imposição de u_b para diferentes discretizações.

Comentários: A análise do problema da barra com carga linear foi realizada de maneira similar ao problema de carga constante, utilizando discretizações de 5, 10, 20 e 40 elementos. As comparações entre as soluções analíticas e numéricas foram feitas com um valor de deslocamento na extremidade da barra (u_b) e com a barra livre. Os resultados mostraram um comportamento análogo ao do problema de carga constante: à medida que o número de elementos aumenta, a solução numérica se aproxima cada vez mais da solução analítica, enquanto a condição de contorno - u_b imposto ou livre - não afeta significativamente o resultado. A convergência observada é consistente com o comportamento previamente registrado no problema de carga constante.

2.2 Barra de Seção Constante com Carga Variável

O problema de uma barra de seção constante A, constituída de material com módulo de elasticidade E, de comprimento L submetida a um carregamento $q(x) = \frac{q_0 x}{L}$ pode ser definido com o sendo: achar o campo de deslocamentos $u(x)$ tal que:

$$\text{PVC}\begin{cases} EA\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} = \dfrac{q_0 x}{L} \\ \text{sujeito a:} \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

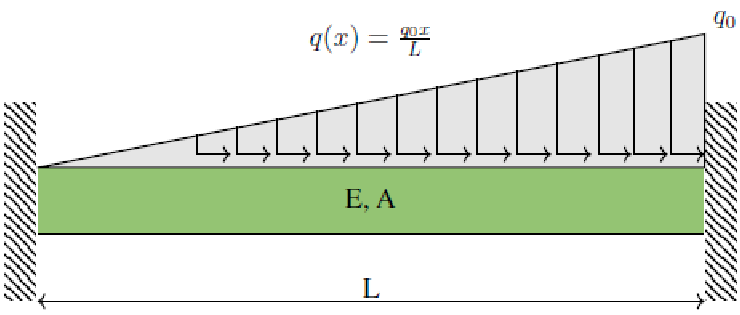

Figura 12 – Barra com carga variando linearmente. (PAVANELLO, 2024).

Se E, A, L são constantes, com as condições de contorno dadas por $u(0) = 0$ e $u(L) = 0$, então a solução analítica deste problema é dada pela Equação 11. (PAVANELLO, 2024).

$$u(x) = \frac{q_0}{6EAL}\left(L^2 x - x^3\right) \tag{11}$$

Para este caso pede-se:

(1) A barra é feita de aço com $E = 210GPa$, com seção circular de diâmetro 30 mm e a carga linear com $q_0 = \dfrac{1kN}{m}$ e $L = 10m$. Calcule e faça um gráfico da solução analítica em deslocamento e em tensão. Lembrando que neste caso a tensão pode ser calculada por $\sigma_x = \dfrac{N_x(x)}{A}$.

A tensão pode ser obtida a partir da solução analítica do campo de deslocamento fornecida no enunciado. Para isso, divide-se a força interna $N_x(x)$ pela área A, onde $N_x(x)$ é calculado como o produto entre a derivada do campo de deslocamento $u(x)$, o módulo de elasticidade E, e a área A. (PAVANELLO, 2024)

$$N_x(x) = EA\frac{du(x)}{dx}$$

Ainda,

$$N_x(x) = EA\frac{d}{dx}\left(\frac{q_0}{6EAL}\left(L^2x - x^3\right)\right) \tag{12}$$

Substituindo $N_x(x)$ na formulação da tensão,

$$\sigma_x = \frac{\frac{q_0}{6L}(L^2 - 3x^2)}{A}$$

Portanto,

$$\sigma_x = \frac{q_0}{6AL}(L^2 - 3x^2) \tag{13}$$

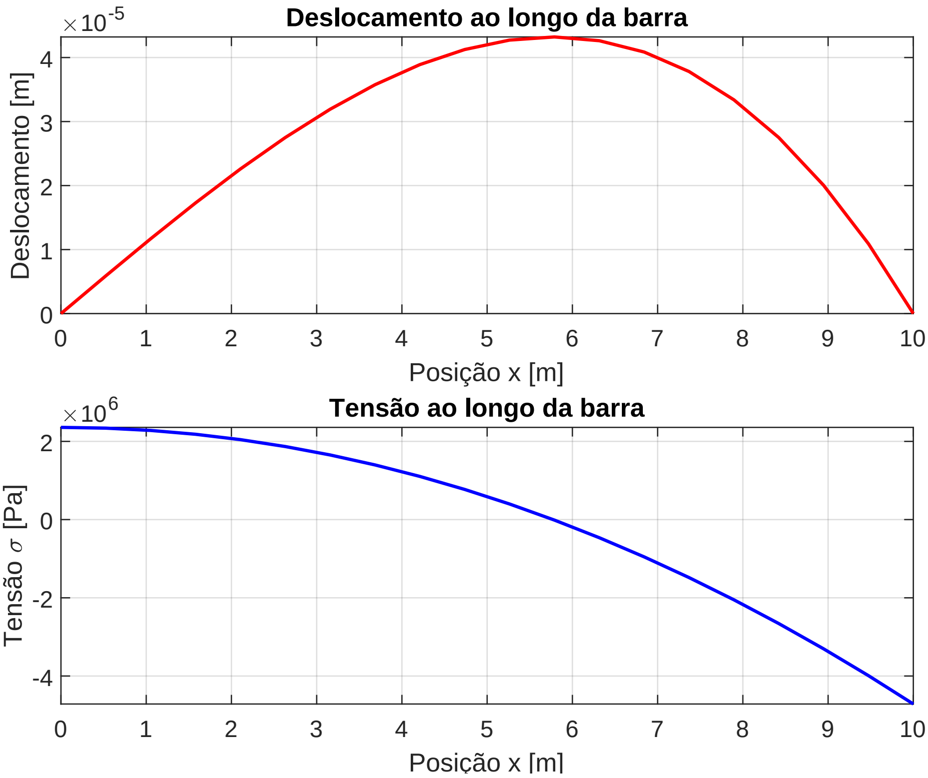

Figura 13 – Campo de deslocamento e campo de tensão ao longo da barra com carga linear.

(2) Usando a análise matricial de estruturas, desenvolva um código para o caso de carga variando linearmente. Compare as soluções numéricas obtidas com as analíticas para diferentes discretizações (5, 10, 20 e 40 elementos). Faça um gráfico comparando as soluções analíticas e numéricas em deslocamentos e em tensão. Faça um gráfico dos erros em porcentagem calculados

em cada nó. Calcule e informe a norma euclidiana dos erros obtidos. Repita o procedimento para cada discretização adotada. Comente os resultados.

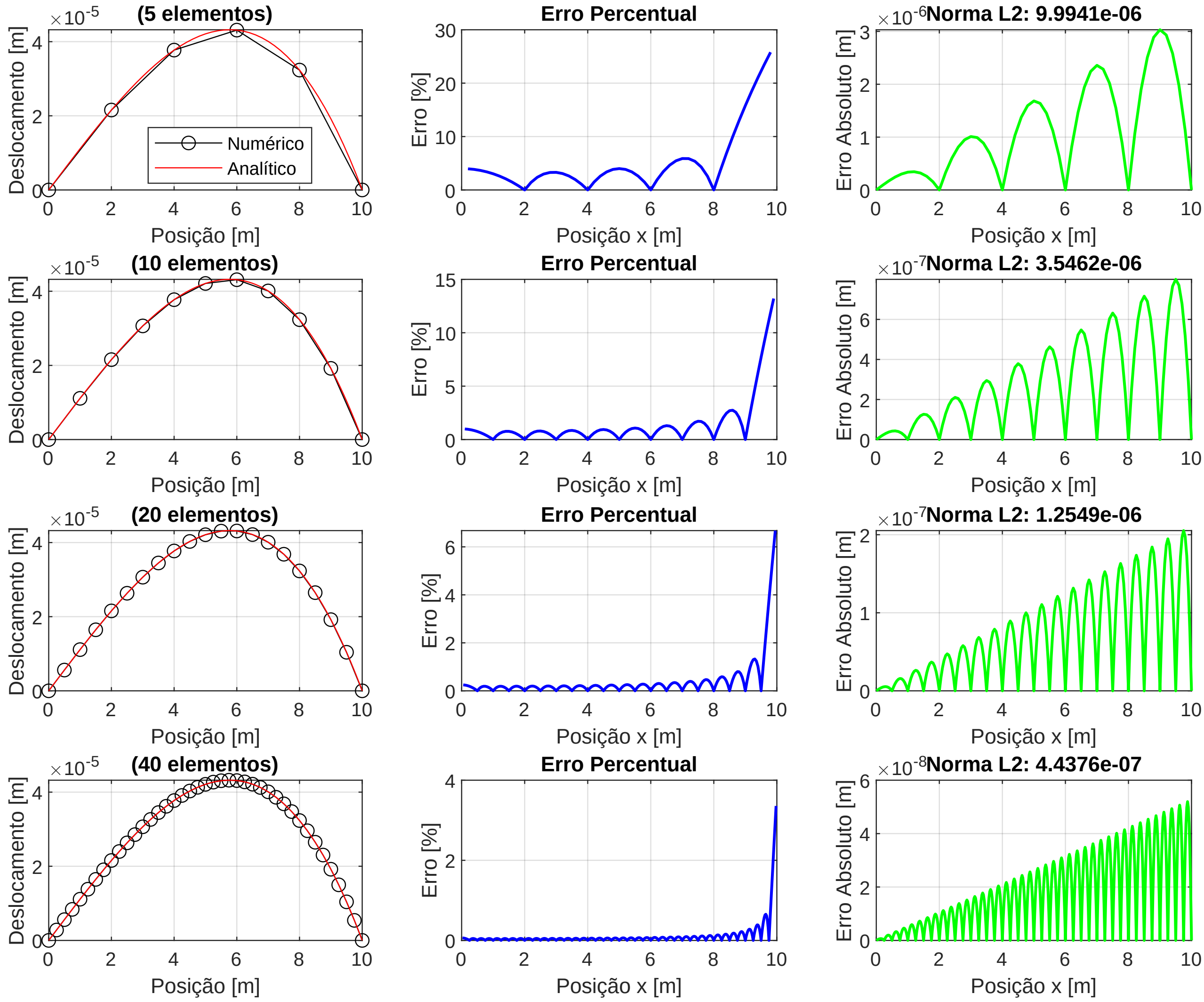

Figura 14 – Comparação analítica e numérica do campo de deslocamento com erro percentual e absoluto.

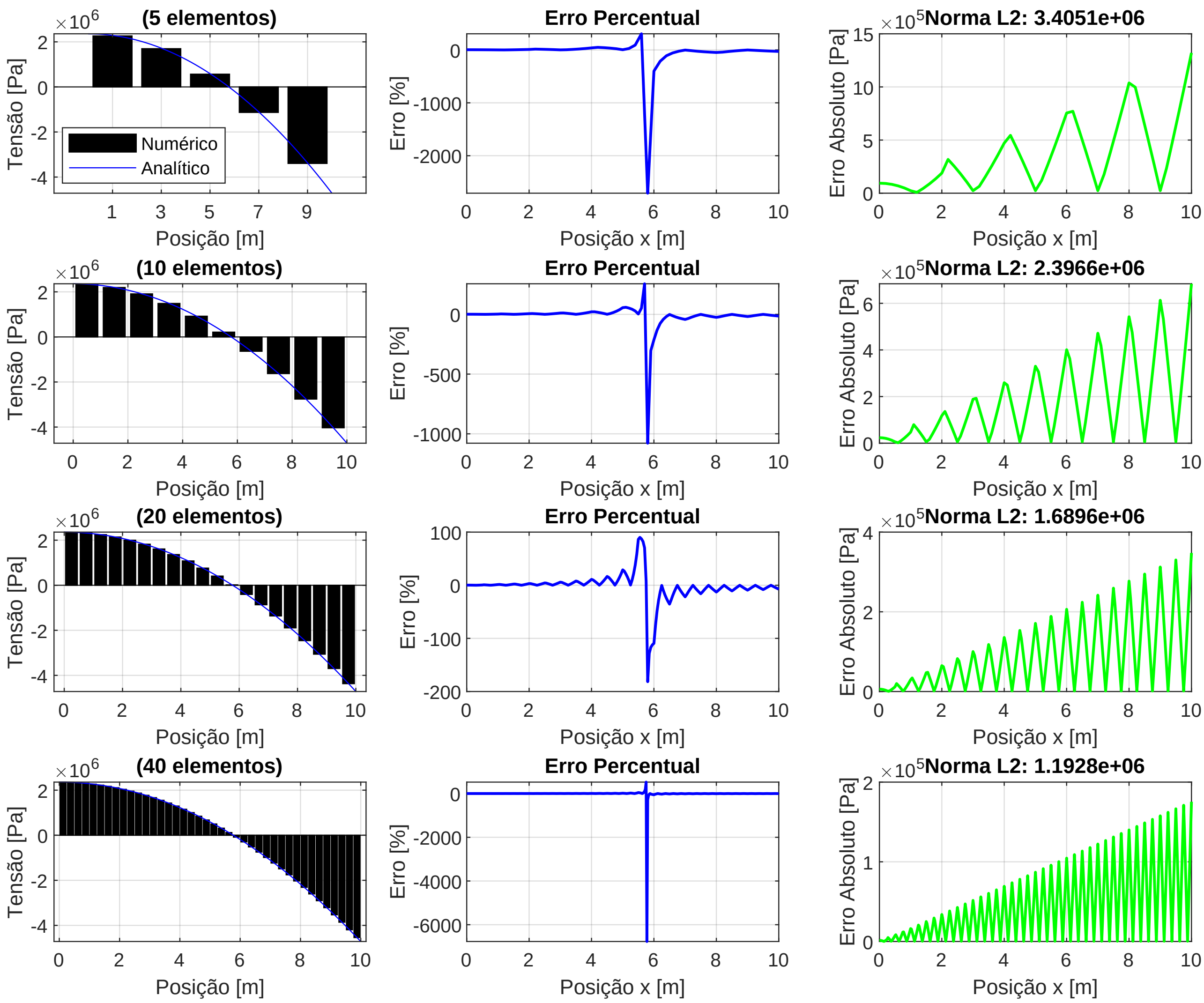

Figura 15 – Comparação analítica e numérica do campo de tensão com erro percentual e absoluto.

Comentários: É importante notar que o erro percentual na tensão de um pulso é elevado, pois essa região possui uma tensão analítica igual a zero. Qualquer desvio em relação a zero resulta em um erro percentual que tende ao infinito. Contudo, ao observar o gráfico do erro absoluto, percebemos que os valores do erro não são significativos, mesmo com a alta porcentagem. Além disso, o gráfico do erro absoluto da tensão exibe valores nulos no início e no final, já que nessas áreas não há resultados provenientes da análise numérica. Isso acontece porque a análise começa na metade do primeiro elemento e se estende até a metade do último.

2.3 Barra de Seção Variável com Condição de Neumann

O problema de uma barra de seção variável $A(x)$, constituída de material com módulo de elasticidade E, de comprimento L submetida a uma força pontual na extremidade $x = L$ pode ser definido com o sendo: achar o campo de deslocamentos $u(x)$ tal que:

$$\text{PVC}\begin{cases} E\dfrac{d}{dx}\left(A(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right) = 0 \\ \text{sujeito a:} \\ u(0) = 0 \\ \dfrac{du(L)}{dx} = \dfrac{F}{EA(L)} \end{cases} \tag{14}$$

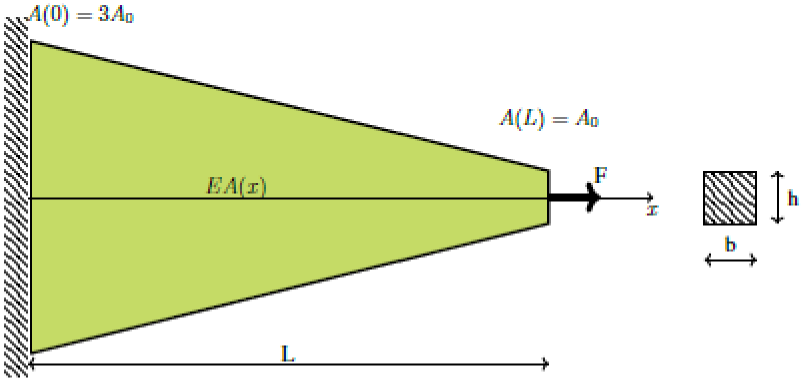

Figura 16 – Barra com seção variando linearmente. (PAVANELLO, 2024).

Para este caso pede-se:

(1) Encontre a solução analítica do problema PVC.

$$A(x) = A_0\left(3 - \frac{2x}{L}\right)$$

$$E\frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0 \tag{15}$$

Integrando-se uma vez obtém-se:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{C_1}{EA(x)} \tag{16}$$

Integrando-se novamente:

$$u(x) = \int \frac{C_1}{EA_0\left(3 - \frac{2x}{L}\right)} dx + C_2$$

$$u(x) = -\frac{C_1 L}{2A_0 E} ln\left(3 - \frac{2x}{L}\right) + C_2 \tag{17}$$

Com as condições de contorno dadas por $u(0) = 0$ e $\dfrac{du(L)}{dx} = \dfrac{F}{EA(L)}$, então a solução analítica deste problema é dada pela Equação 18. (PAVANELLO, 2024).

$$u(x) = -\frac{FL}{2A_0E}\left[ln\left(1-\frac{2x}{3L}\right)\right] \tag{18}$$

(2) A barra é feita de aço com $E = 210GPa$, com seção retangular com $b = 30mm$ e $h = 40mm$ para o ponto $x = L$, o comprimento é $L = 10m$. Faça um gráfico da solução analítica em deslocamento e em tensão. Lembrando que neste caso a tensão pode ser calculada por $\sigma_x = \dfrac{Nx(x)}{A}$.

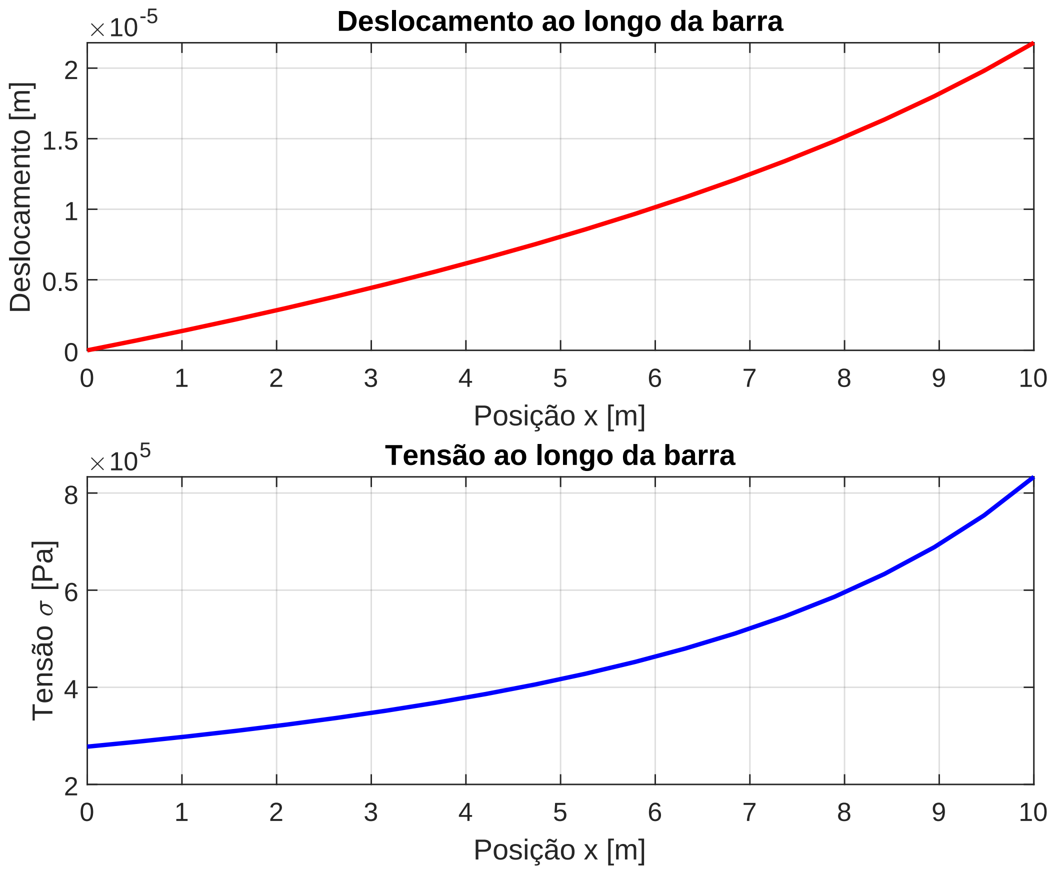

Figura 17 – Campo de deslocamento e campo de tensão ao longo da barra com seção variando linearmente.

(3) Desenvolva um código usando a análise matricial de estruturas e considerando a área variando linearmente, com a condição de Neumann em $x = L$. Compare as soluções numéricas obtidas com as analíticas para diferentes discretizações (5, 10, 20 e 40 elementos). Faça um gráfico comparando as soluções analíticas e numéricas em deslocamentos e em tensão. Faça um gráfico dos erros em porcentagem calculados em cada nó da malha. Calcule e informe a norma euclidiana dos erros obtidos. Repita o procedimento para cada discretização adotada. Comente os resultados.

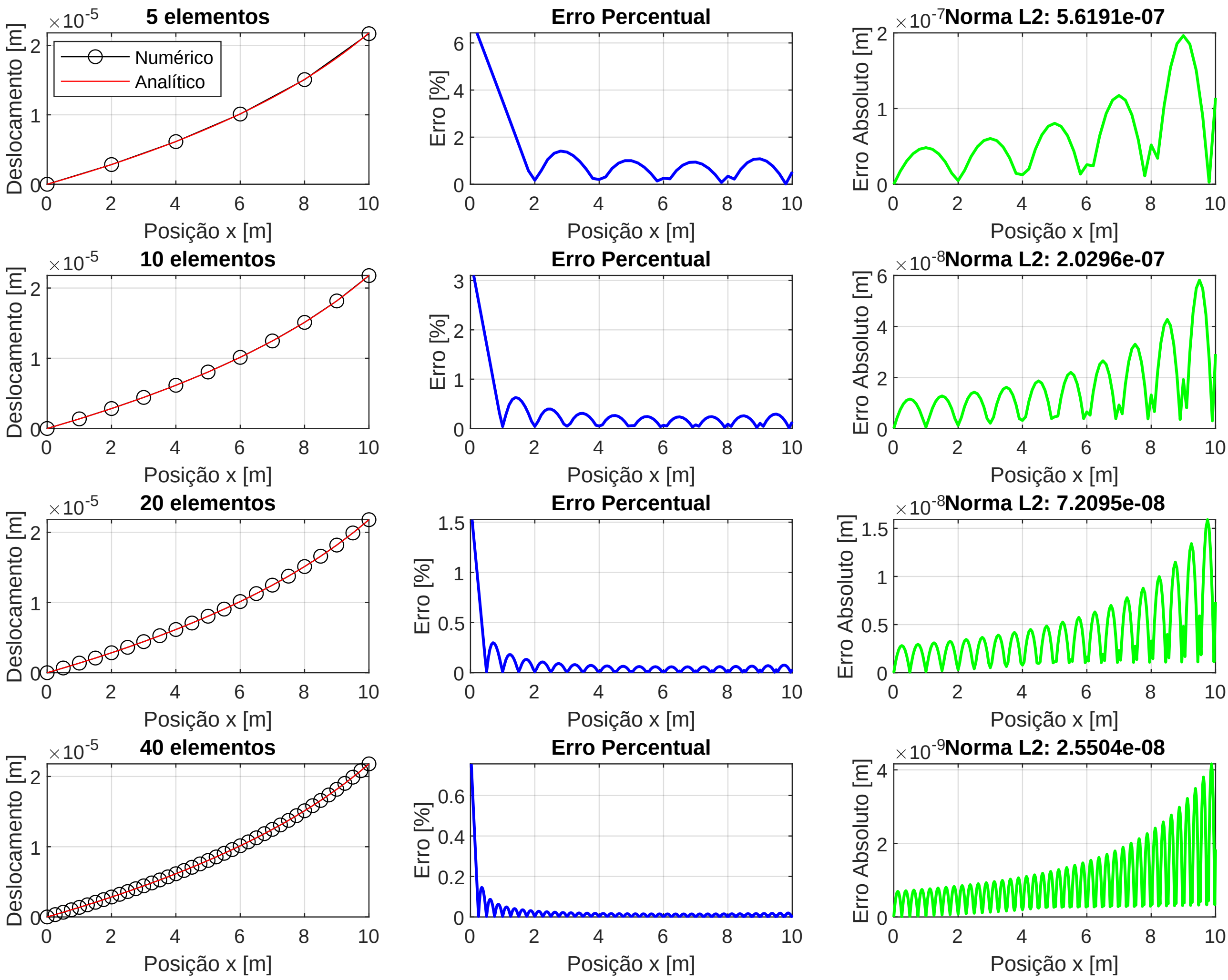

Figura 18 – Soluções analíticas e numéricas de deslocamento da seção variando linearmente com erro percentual e absoluto.

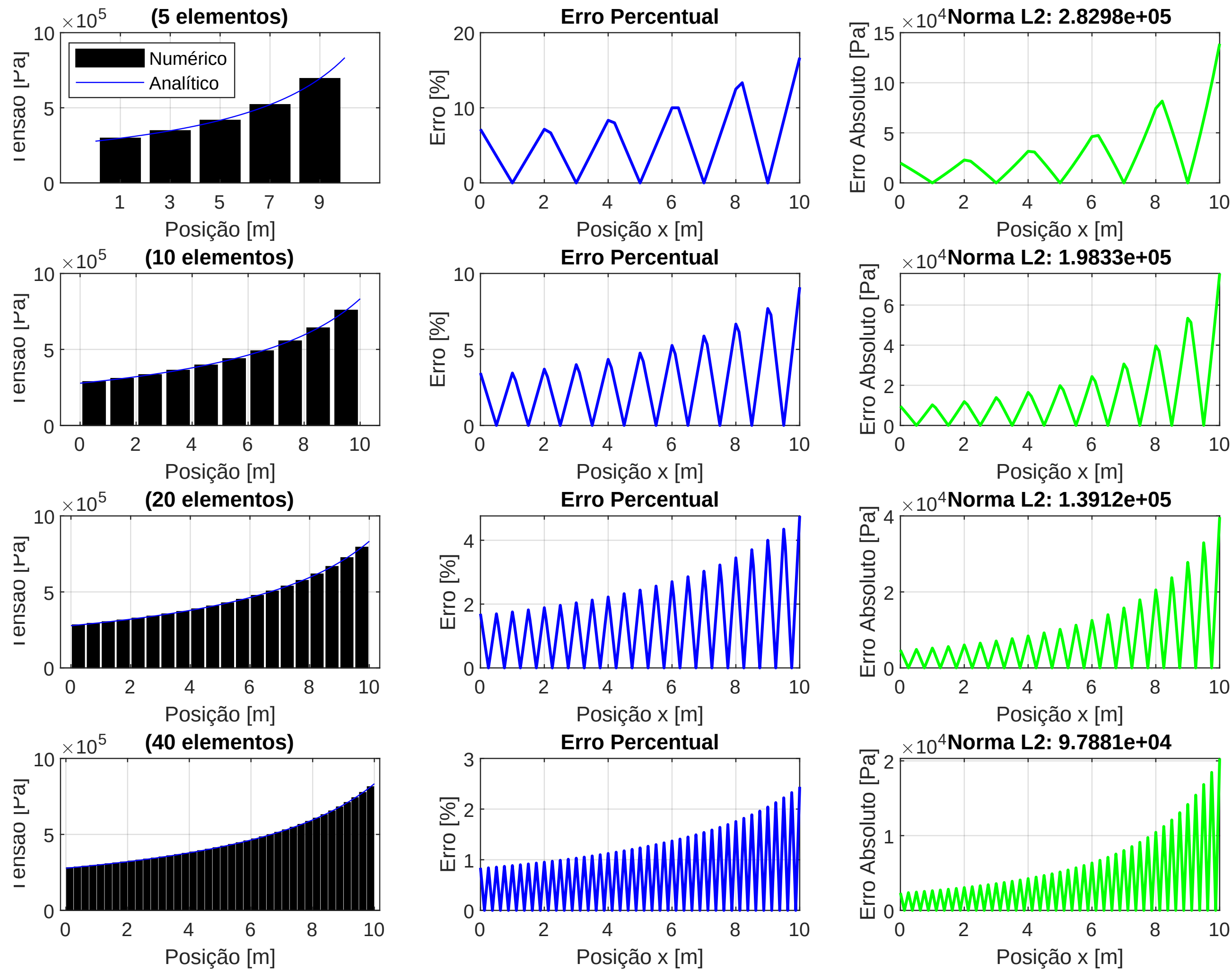

Figura 19 – Soluções analíticas e numéricas de tensão da seção variando linearmente com erro percentual e absoluto.

Comentários: Observa-se que, à medida que o número de elementos aumenta - 5, 10, 20 e 40, a solução numérica se aproxima mais da solução analítica, evidenciado pela diminuição do erro percentual e da norma $L2$, o que demonstra a maior precisão dos resultados com o refinamento da malha. No caso do deslocamento, a convergência é rápida, com o erro percentual tornando-se quase nulo para 40 elementos. Já para a tensão, a convergência é mais lenta, especialmente nas extremidades, onde o erro percentual é mais elevado.

3 CONCLUSÃO

O presente estudo investiga a resolução de problemas de barras através do Método Analítico e da Análise Matricial de Estruturas - Numérico, considerando três cenários distintos: barras com seção constante e carga constante, barras com seção constante e carga variável, e barras de seção variável sob condições de contorno de Neumann.

Os resultados mostram que, à medida que o número de elementos utilizados no modelo numérico aumenta, as soluções, tanto de deslocamento quanto de tensão, tendem a convergir para as soluções analíticas correspondentes. Esse comportamento é evidenciado pela redução da norma euclidiana - norma L_2 - dos erros e do erro percentual em cada nó da malha, especialmente em malhas mais refinadas, como as de 40 elementos, conforme demonstrado nas análises de convergência realizadas. O estudo ressalta a importância do refinamento da malha para melhorar a precisão das soluções numéricas, demonstrando que, nos casos analisados, essa estratégia leva a uma aproximação maior dos valores exatos nos diferentes tipos de cargas e seções.

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. [S.l.]: Wiley, 1989.

LOGAN, D. L. *A First Course in the Finite Element Method*. [S.l.]: University of Wisconsin–Platteville, 2007.

PAVANELLO, R. *Caderno de Elementos Finitos*. [S.l.], 2024.