



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica
IM381 – Elementos Finitos I



Tarefa Computacional II

Elementos Finitos para Estruturas Unidimensionais de Barra

Leonardo Silveira Leite

RA: 291646

Campinas - SP
3 de dezembro de 2024

1 RESUMO

Este documento apresenta a resolução dos exercícios propostos na Lição II da disciplina de Elementos Finitos I, com foco na Elementos Finitos para Estruturas Unidimensionais de Barra. O objetivo é explorar diferentes aproximações numéricas, destacando as formulações com funções de interpolação linear e quadrática. Os problemas abrangem barras com seções tanto constantes quanto variáveis, além de considerar cargas distribuídas que podem ser constantes ou variáveis. O estudo busca também comparar as soluções aproximadas por elementos finitos com as soluções analíticas, apresentando o erro da aproximação pela norma $L2$.

2 INTRODUÇÃO

Considere inicialmente uma barra de seção variável, fixa nas duas extremidades e submetida a uma carga distribuída constante de intensidade p_0 ao longo de seu comprimento. Pede-se:

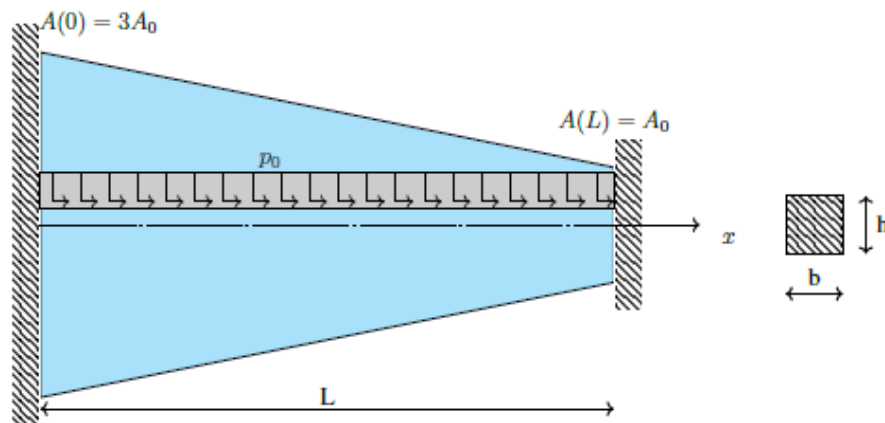


Figura 1 – Barra com área variando linearmente e carga distribuída constante.(PAVANELLO, 2020).

- (1) Achar a solução analítica para o deslocamento axial, deformação e tensão da barra.
- (2) Indicar a forma forte do problema, usando o método dos resíduos ponderados.
- (3) Determinar a forma fraca do problema.
- (4) Determinar o sistema de equações para o elemento finito de 2 nós com aproximação linear.
- (5) Indicar as expressões da matriz de rigidez e do vetor de força nodal equivalente para um elemento finito com 2 nós.
- (6) Desenvolver um código em MATLAB que permita resolver o problema com um número arbitrário de elementos. O programa deve calcular: deslocamentos, deformações, tensões e as normas $L2$ do erro com respeito a solução analítica.
- (7) Usar malhas de 4, 8, 16 e 32 elementos e calcular os erros de aproximação na norma $L2$. Comentar os resultados.

- (8) Determinar o sistema de equações para o elemento finito de 3 nós com aproximação quadrática usando o espaço isoparamétrico definido entre $[-1, 1]$. Calcular as matrizes de rigidez e vetor de carga nodal equivalente. Implementar e comparar com os resultados obtidos com o elemento de 2 nós. Comentar os resultados.
- (9) Considere agora uma carga distribuída variando linearmente ao longo da barra, entre o valor $p(x = 0) = 0$ e $p(x = L) = p_0$. Defina o vetor de carga nodal equivalente para um elemento qualquer da barra.
- (10) Implemente o cálculo do vetor de carga nodal equivalente da estrutura completa, para uma malha com um número arbitrário de elementos. Resolva o sistema e analise as soluções obtidas para deslocamentos, deformações e tensões.

3 RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO

O problema de valor de contorno deste problema é dado por:

$$\text{PVC} \begin{cases} E \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = -p_0 \\ \text{sujeito a:} \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

A solução exata deste problema de valor de contorno é obtida fazendo-se inicialmente um ajuste para a equação da área:

$$A(x) = \beta_1 + \beta_2 x$$

com $A(0) = 3A_0$ e $A(L) = A_0$, o que permite escrever:

$$A(x) = A_0 \left(3 - \frac{2x}{L} \right)$$

Integrando-se a equação diferencial da Equação 1 uma vez obtém-se:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{p_0 x + C_1}{EA_0 \left(3 - \frac{2x}{L} \right)} \quad (2)$$

Integrando-se novamente:

$$u(x) = -\frac{p_0 L^2}{4A_0 E} \left[\left(3 - \frac{2x}{L} \right) - 3 \ln \left(3 - \frac{2x}{L} \right) \right] - \frac{C_1 L}{2EA_0} \ln \left(3 - \frac{2x}{L} \right) + C_2 \quad (3)$$

Com as condições de contorno dadas por $u(0) = 0$ e $u(L) = 0$, então a solução analítica do deslocamento deste problema é dada por:

$$C_1 = \frac{3p_0 L}{2} - \frac{p_0 L}{\ln(3)} \quad C_2 = \frac{p_0 L^2}{4EA_0}$$

$$u(x) = -\frac{p_0 L^2}{4A_0 E} \left[\left(3 - \frac{2x}{L} \right) - 3 \ln \left(3 - \frac{2x}{L} \right) \right] - \frac{\left(\frac{3p_0 L}{2} - \frac{p_0 L}{\ln(3)} \right) L}{2EA_0} \ln \left(3 - \frac{2x}{L} \right) + \frac{p_0 L^2}{4EA_0} \quad (4)$$

Derivando a função de deslocamento acima, tem-se a deformação da barra. Portanto:

$$\epsilon_{xx}(x) = \frac{du(x)}{dx} = -\frac{p_0 L^2}{4A_0 E} \left(-\frac{2}{L} + \frac{6}{L \left(3 - \frac{2x}{L} \right)} \right) - \left(\frac{3p_0 L}{2} - \frac{p_0 L}{\log(3)} \right) \frac{L}{2A_0 E} \left(-\frac{2}{L \left(3 - \frac{2x}{L} \right)} \right) \quad (5)$$

Multiplicando a deformação obtida pelo módulo de elasticidade E , obtém-se a tensão ao longo da barra, ou seja:

$$\sigma_{xx}(x) = \epsilon \cdot E = \left(-\frac{p_0 L^2}{4A_0} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6}{L \left(3 - \frac{2x}{L} \right)} \right) - \left(\frac{3p_0 L}{2} - \frac{p_0 L}{\log(3)} \right) \frac{L}{2A_0} \left(-\frac{2}{L \left(3 - \frac{2x}{L} \right)} \right) \quad (6)$$

A forma forte deste problema é dada por:

$$\langle R(\varphi_{(x)}), W_l \rangle = \int_0^L \left(E \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) + p_0 \right) W_l dx = 0 \quad (7)$$

Ainda:

$$\langle R(\varphi_{(x)}), W_l \rangle = \int_0^L EA_0 \frac{d}{dx} \left[\left(3 - \frac{2x}{L} \right) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right] W_l dx + \int_0^L p_0 W_l dx = 0 \quad (8)$$

Integrando por partes a Equação 8, obtém-se a forma fraca deste problema:

$$EA_0 \left(2 \frac{d\varphi}{dx} W_l \right) - EA_0 \int_0^L \left[\left(3 - \frac{2x}{L} \right) \frac{d\varphi}{dx} \frac{dW_l}{dx} \right] dx + p_0 \int_0^L W_l dx \quad (9)$$

A escolha das funções de ponderação será baseada no Método Galerkin. Portanto, a Equação 9 fica da seguinte forma:

$$EA_0 \left(2 \frac{d\varphi}{dx} N_l \right) - EA_0 \int_0^L \left[\left(3 - \frac{2x}{L} \right) \frac{d\varphi}{dx} \frac{dN_l}{dx} \right] dx + p_0 \int_0^L N_l dx \quad (10)$$

As funções de forma e suas derivadas, para a aproximação linear de um elemento de 2 nós, deste problema são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} & \frac{dN_1(x)}{dx} &= -\frac{1}{L} \\ N_2(x) &= \frac{x}{L} & \frac{dN_2(x)}{dx} &= \frac{1}{L} \end{aligned}$$

A matriz de rigidez para um elemento finito é dada por:

$$[K] = E \int_0^L A_0 \left(3 - \frac{2x}{L} \right) \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \cdot \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} dx \quad (11)$$

Ou seja:

$$[K] = EA_0 \int_0^L \left(3 - \frac{2x}{L} \right) \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \cdot -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \cdot -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx \quad (12)$$

Ainda:

$$[K] = \frac{2EA_0}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

A distribuição da força é constante e de valor p_0 , tem-se portanto:

$$\{F_e\} = p_0 \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{Bmatrix} dx \quad (14)$$

$$\int_0^L N_1(x) dx = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx = \left[x - \frac{x^2}{2L} \right]_0^L = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L N_2(x) dx = \int_0^L \frac{x}{L} dx = \left[\frac{x^2}{2L} \right]_0^L = \frac{L}{2}$$

Portanto:

$$\{F_e\} = p_0 \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Ainda:

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} \frac{p_0 L}{2} \\ \frac{p_0 L}{2} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Ao montar o sistema de equações para o elemento finito de 2 nós, tem-se:

$$\frac{2EA_0}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_0 L}{2} \\ \frac{p_0 L}{2} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Para representar a matriz de rigidez e do vetor de força nodal equivalente para um elemento finito com 2 nós, deste problema, os seguintes parâmetros foram adotados: $E = 210 \cdot 10^9 Pa$, $A_0 = 1 \cdot 10^{-3} m^2$, $A_I = 3 \cdot A_0$, $L = 3m$, e $p_0 = 2kN/m$.

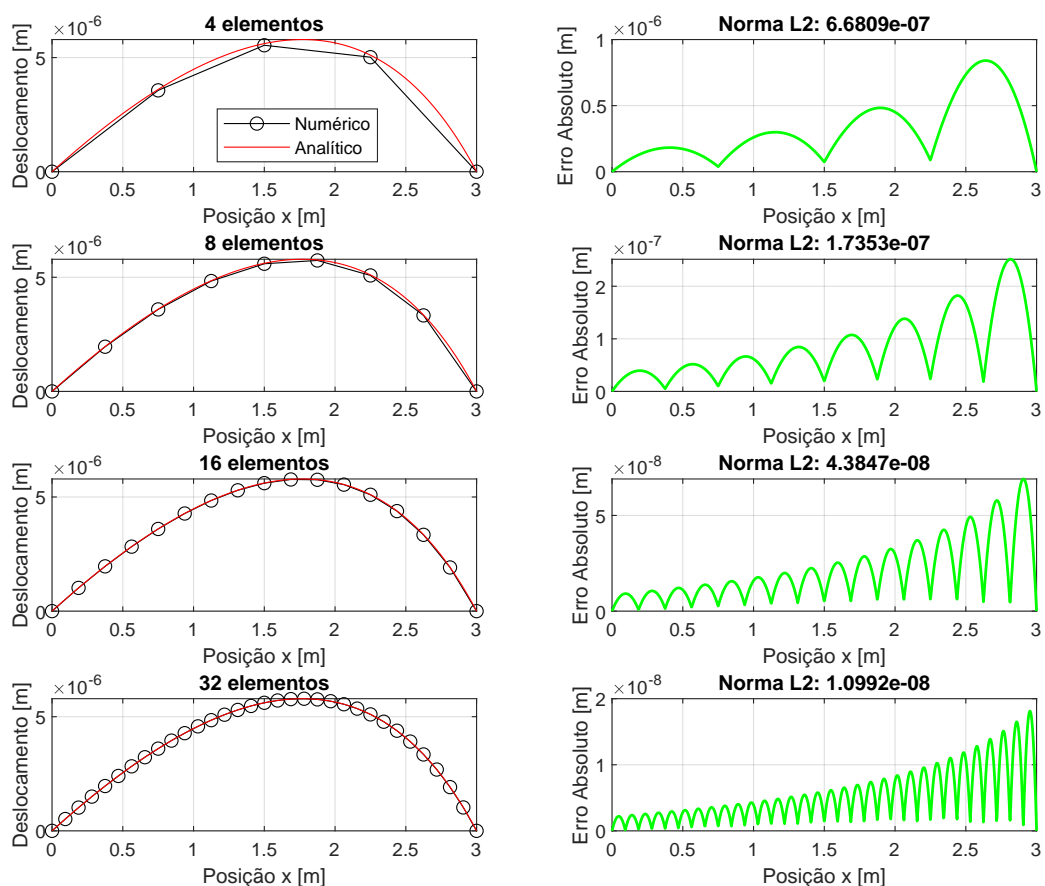


Figura 2 – Deslocamento ao longo da barra de seção variável.

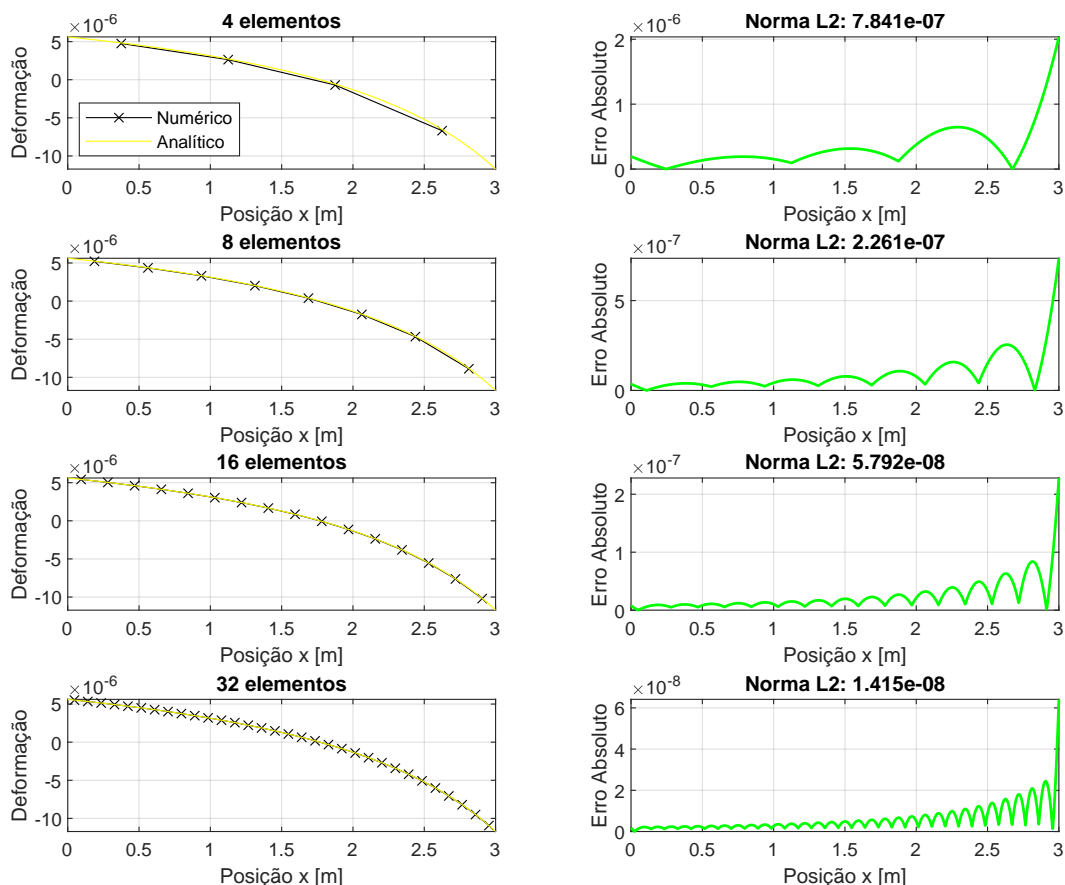


Figura 3 – Deformação ao longo da barra de seção variável.

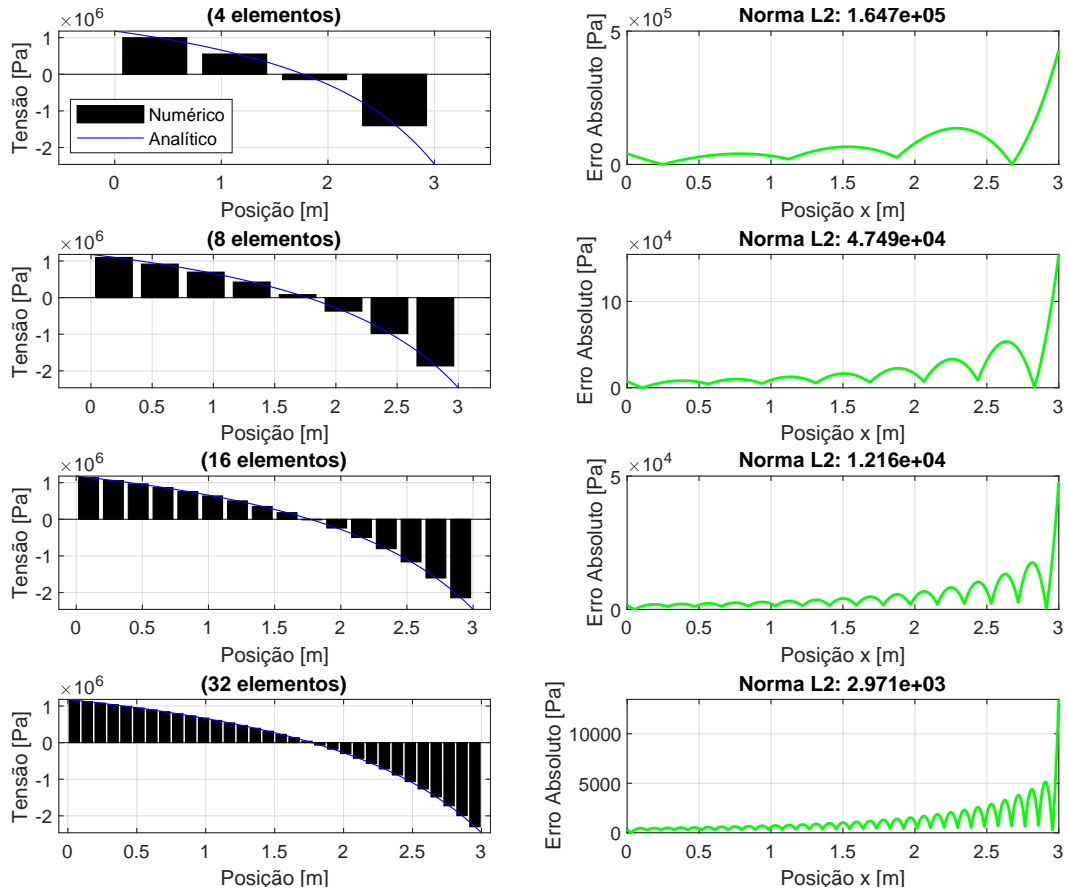


Figura 4 – Tensão ao longo da barra de seção variável.

Comentários: É evidente que, com o aumento do número de elementos na malha, os erros de aproximação na norma L_2 diminuem consistentemente nas três análises realizadas: deslocamento, deformação e tensão.

Utilizando a aproximação quadrática para um elemento de três nós, tem-se:

$$u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

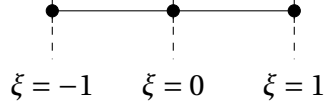
Ao separar nas discretizações ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , tem-se:

$$\begin{aligned} u(\xi = \xi_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \\ u(\xi = \xi_2) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \\ u(\xi = \xi_3) &= \begin{bmatrix} 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Utilizando a Equação 19 em 18, obtém-se:

$$u(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) & N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Portanto, as funções de forma para o elemento finito de três nós com aproximação quadrática usando o espaço isoparamétrico definido entre $[-1, 1]$ são dadas por:



$$N(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{-\xi+\xi^2}{2} & \frac{\xi+\xi^2}{2} & 1-\xi^2 \end{bmatrix}, \quad \frac{dN(\xi)}{d\xi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \xi & \frac{1}{2} + \xi & -2\xi \end{bmatrix}$$

$$\frac{dNi}{dx} = [J]^{-1} \frac{dNi}{d\xi} \quad x(\xi) = \frac{L}{2}\xi \quad \frac{dNi}{dx} = \frac{2}{L} \frac{dNi}{d\xi} \quad [J] = \frac{L}{2}$$

Portanto, a matriz de rigidez é dada por:

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 EA(x) \left(\frac{2}{L} \frac{dNi}{d\xi} \right) \left(\frac{2}{L} \frac{dNj}{d\xi} \right) J d\xi = \int_{-1}^1 \frac{4EA(x)}{L^2} \frac{dNi}{d\xi} \frac{dNj}{d\xi} \frac{L}{2} d\xi \quad (21)$$

Ainda:

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 \frac{2EA_0}{L} \left(3 - \frac{2x}{L} \right) \frac{dNi}{d\xi} \frac{dNj}{d\xi} d\xi \quad (22)$$

Ao montar o sistema de forma matricial, tem-se:

$$[K_{ij}] = \frac{2EA_0}{L} \int_{-1}^1 \left(3 - \frac{2x}{L} \right) \begin{bmatrix} 4\xi^2 - 4\xi + 1 & 4\xi^2 - 1 & -8\xi^2 + 4\xi \\ 4\xi^2 - 1 & 4\xi^2 + 4\xi + 1 & -8\xi^2 - 4\xi \\ -8\xi^2 + 4\xi & -8\xi^2 - 4\xi & 16\xi^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (23)$$

Substituído o x para o referencial ξ , tem-se:

$$[K_{ij}] = \frac{2EA_0}{L} \int_{-1}^1 (3 - 2\xi) \begin{bmatrix} 4\xi^2 - 4\xi + 1 & 4\xi^2 - 4\xi - 2 & -8\xi^2 + 4\xi \\ 4\xi^2 - 4\xi - 2 & 4\xi^2 + 4\xi + 1 & -8\xi^2 - 4\xi \\ -8\xi^2 + 4\xi & -8\xi^2 - 4\xi & 16\xi^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (24)$$

Ainda:

$$[K_{ij}] = \frac{2EA_0}{L} \left[(3\xi - \xi^2) \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\xi^3 - 2\xi^2 + \xi & \frac{4}{3}\xi^3 - \xi & -\frac{8}{3}\xi^3 + 2\xi^2 \\ \frac{4}{3}\xi^3 - \xi & \frac{4}{3}\xi^3 + 2\xi^2 + \xi & -\frac{8}{3}\xi^3 - 2\xi^2 \\ -\frac{8}{3}\xi^3 + 2\xi^2 & -\frac{8}{3}\xi^3 - 2\xi^2 & \frac{16}{3}\xi^3 \end{bmatrix} \right]_{-1}^1 \quad (25)$$

Portanto, a matriz de rigidez é dada por:

$$[K_{ij}] = \frac{EA_0}{L} \begin{bmatrix} 4.67 & 0.667 & -5.33 \\ 0.667 & 4.67 & -5.33 \\ -5.33 & -5.33 & 10.67 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Com a aproximação quadrática, o vetor de carga nodal é dada por:

$$\{F_i\} = \int_{-1}^1 N(\xi)^T p(x(\xi)) J d(\xi) \quad (27)$$

Ou seja:

$$\{F_i\} = p_0 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} \frac{-\xi+\xi^2}{2} \\ \frac{\xi+\xi^2}{2} \\ 1-\xi^2 \end{Bmatrix} d(\xi) \quad (28)$$

Ainda:

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} \frac{p_0 L}{6} \\ \frac{p_0 L}{6} \\ \frac{2p_0 L}{3} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Ao montar o sistema de equações para o elemento finito de 3 nós com funções quadráticas, tem-se:

$$\frac{EA_0}{L} \begin{bmatrix} 4.67 & 0.667 & -5.33 \\ 0.667 & 4.67 & -5.33 \\ -5.33 & -5.33 & 10.67 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_0 L}{6} \\ \frac{p_0 L}{6} \\ \frac{2p_0 L}{3} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Portanto, a Figura 5 e a Figura 6 apresentam a aproximação linear com 2 nós e a aproximação quadrática com 3 nós no espaço isoparamétrico [-1,1], respectivamente. Ambas as análises possuem malha com 10 elementos e utilizam os mesmos parâmetros citados anteriormente.

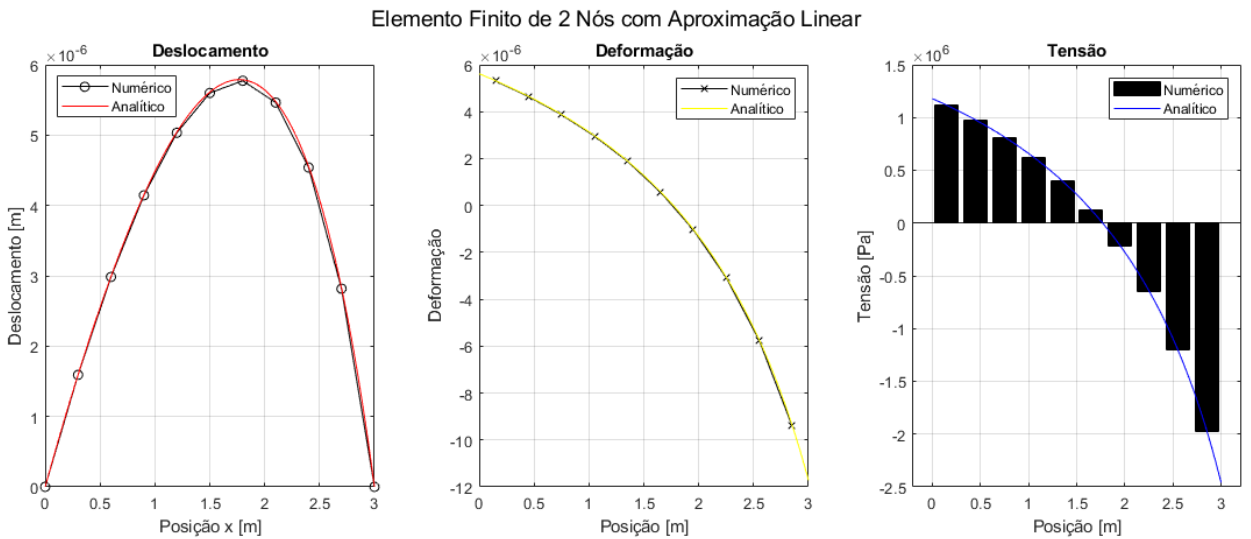


Figura 5 – Elemento finito de 2 nós com aproximação linear.

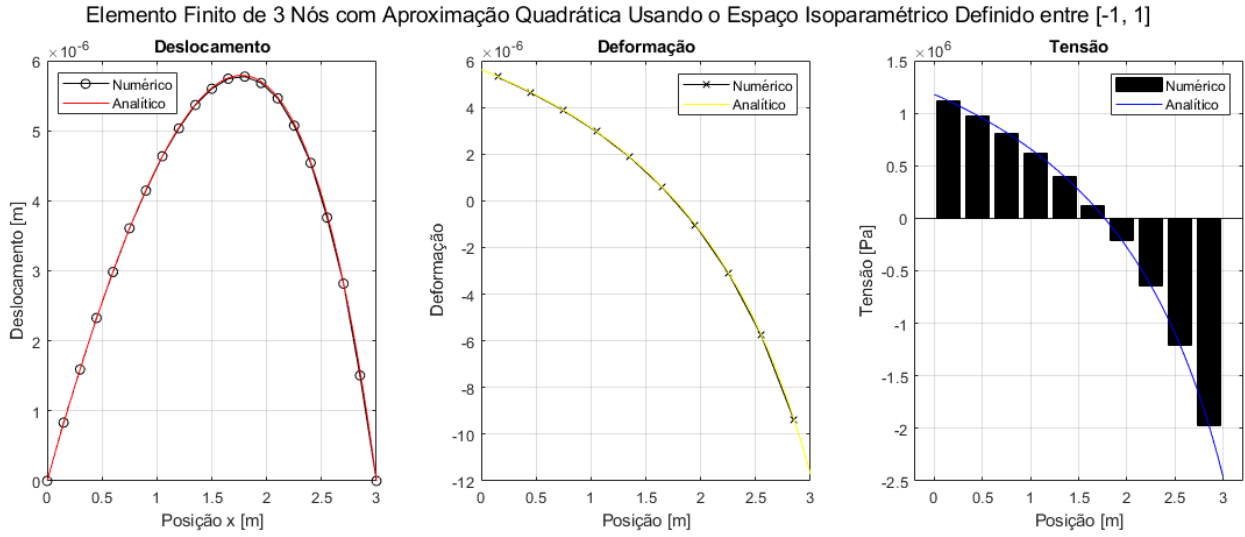


Figura 6 – Elemento finito de 3 nós com aproximação quadrática.

Comentários: Os gráficos mostram que a aproximação quadrática com 3 nós apresenta maior precisão em todas as análises estudadas - principalmente no deslocamento - devido à maior capacidade de interpolação, resultando em excelente concordância com a solução analítica. Já a aproximação linear com 2 nós, apresenta pequenas discrepâncias, especialmente na tensão e deformação, onde os valores numéricos são constantes por elemento e não capturam perfeitamente a variação contínua da solução exata.

Segundo (LOGAN, 2007), ao supor uma carga distribuída linearmente $p(x=0) = 0$ e $p(x=L) = p_0$, o vetor de carga nodal equivalente para um elemento é dado por:

$$\{F_e\} = \int_0^L \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}^T \{p(x)\} dx \quad (31)$$

Aplicando as funções de forma obtidas anteriormente, tem-se:

$$\{F_e\} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \left\{ \frac{p_0 x}{L} \right\} dx \quad (32)$$

Ainda:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{p_0}{L} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \right]_0^L \\ \frac{p_0}{L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_0}{L} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3L} \right) \\ \frac{p_0}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{p_0 L}{2} - \frac{p_0 L}{3} \\ \frac{p_0 L}{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_0 L}{6} \\ \frac{p_0 L}{3} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

Com essa abordagem, é possível implementar um novo vetor de carga nodal equivalente e resolver o sistema de deslocamento, deformação e tensão para o problema de uma barra com seção e carga variável. Neste caso, a malha é composta por 15 elementos.

A solução analítica deste problema é dada por:

$$u(x) = \left(\frac{p_0 L^2}{16 A_0 E} \right) \left(\frac{\left(3 - \frac{2x}{L} \right)^2}{2} - 6 \left(3 - \frac{2x}{L} \right) + 9 \ln \left(3 - \frac{2x}{L} \right) \right) - \frac{\left(-\frac{p_0 L^2}{\log(3)} + \frac{9 p_0 L^2}{8} \right)}{2 E A_0} \ln \left(3 - \frac{2x}{L} \right) + \frac{11 p_0 L^2}{32 E A_0} \quad (34)$$

O sistema de equações com a carga variando linearmente é dado por:

$$\frac{2 E A_0}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_0 L}{6} \\ \frac{p_0 L}{3} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Esta análise utiliza os mesmos parâmetros citados anteriormente. Portanto:

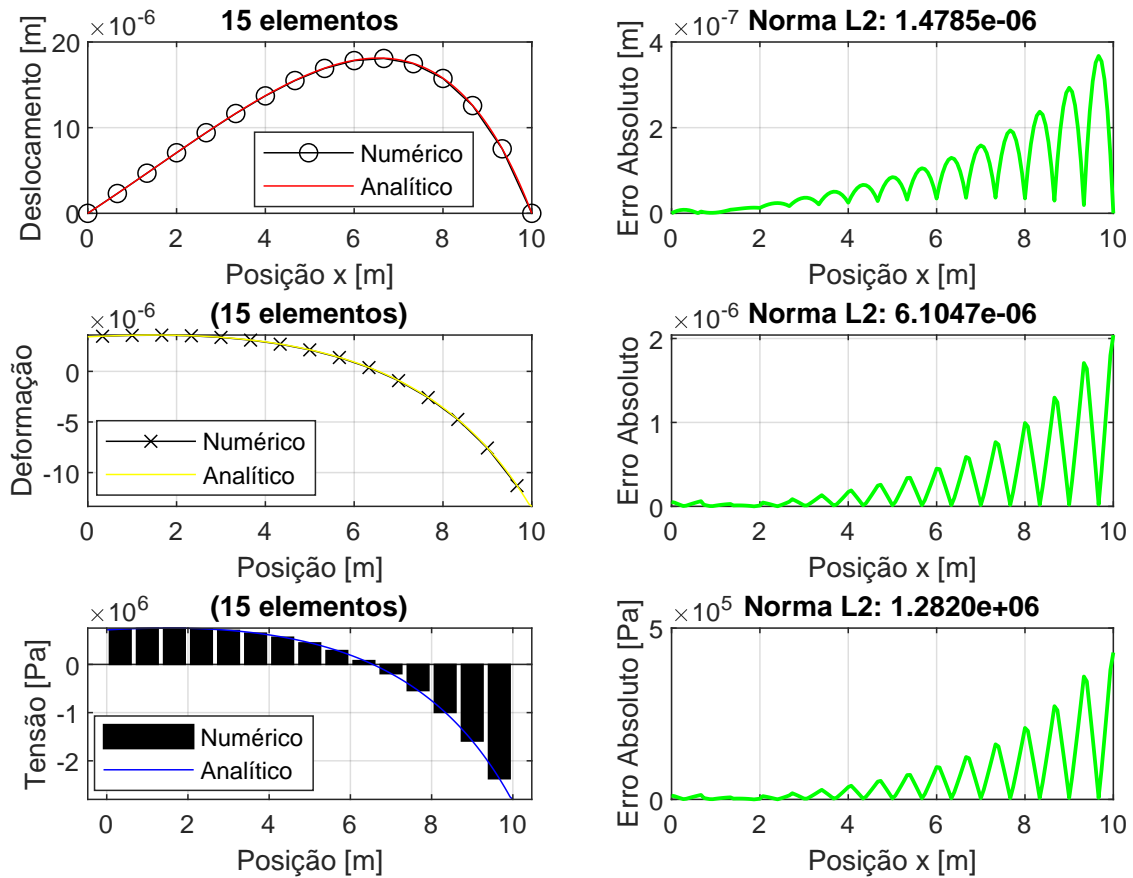


Figura 7 – Deslocamento, deformação e tensão ao longo da barra submetida a carga linear.

4 CONCLUSÃO

O estudo aborda a resolução de problemas envolvendo estruturas unidimensionais de barra por meio do método dos elementos finitos, utilizando tanto funções de interpolação linear quanto quadrática. Os resultados destacam que o refinamento da malha reduz significativamente os erros na norma L2, melhorando a precisão das análises de deslocamento, deformação e tensão. Além disso, a aproximação quadrática com elementos de três nós mostrou maior exatidão em relação à interpolação linear, evidenciando a eficiência desse método para capturar variações contínuas.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. [S.l.]: Wiley, 1989.

LOGAN, D. L. *A First Course in the Finite Element Method*. [S.l.]: University of Wisconsin–Platteville, 2007.

PAVANELLO, R. *Caderno de Elementos Finitos*. [S.l.], 2020.