

Capítulo 2: Modelagem e determinação dos esforços internos em elementos estruturais isostáticos

Comentários Iniciais

O presente capítulo pretende iniciar uma discussão sobre modelagem de sistemas estruturais bem como realizar uma revisão das técnicas de determinação de esforços internos em elementos estruturais isostáticos.

A modelagem de sistemas estruturais, ou seja, a transformação de um sistema estrutural físico real em um esquema de cálculo, pode ser tarefa bastante complexa. Costumo dizer em sala de aula que esta capacidade de analisar uma situação física, no caso um sistema ou elemento estrutural, e reduzi-la a um esquema de cálculo conveniente, ou ainda, em um modelo da realidade, é uma das características que diferenciam um recém graduado em engenharia de um engenheiro profissional. Não há receita única para a questão da modelagem. É necessário experiência, bom senso e capacidade de julgamento para se retirar de uma situação física um modelo, um esquema de cálculo, capaz de descrever os aspectos da realidade que pretendemos analisar e entender. Na escolha dos elementos e/ou efeitos que devem ou não ser incluídos no modelo reside o âmago da modelagem. O modelo deve ser tão simples quanto possível, mas deve conter os elementos que possibilitem recuperar em sua análise os aspectos físicos mais significativos do problema em apreciação. Modelos simples conduzem a formulações matemáticas mais fáceis de serem solucionadas e analisadas. Por outro lado simplismo exagerado pode não descrever o problema que se deseja analisar.

Neste capítulo abordaremos uma discussão sobre aspectos simples da modelagem de elementos estruturais. Vamos discutir como modelar esforços e vínculos. Pretendemos mostrar que a mesma situação física comporta diferentes modelos de vínculos e esforços dependendo da finalidade da análise a ser realizada. Ao longo do presente texto será feita menção reiterada às dificuldades e limitações dos modelos escolhidos.

O autor está convencido que a ferramenta privilegiada que cientistas e engenheiros possuem para descrever tanto a natureza em si, quanto os sistemas por eles mesmos criados, é a matemática. Somente através dela é possível a descrição de fenômenos físicos complexos. É cada vez mais necessário que o estudante saiba fazer a ligação entre situação física, modelo físico e modelo matemático. Tendo em mente esta finalidade, será feito um esforço para fornecer as expressões matemáticas que caracterizam os tipos de vínculos e esforços dos modelos apresentados. Como poderá ser verificado, a matemática necessária para descrever os modelos aqui presentes é bastante simples. Mas este equacionamento, ainda que simples, irá mostrar-se muito útil e poderoso ao longo do presente texto.

Vínculos, forças e condições de contorno

Nos cursos anteriores de Mecânica Geral ou de Estática as estruturas e os elementos estruturais eram considerados rígidos e para o caso simples de sistemas planos suas partes eram vinculadas ao meio exterior através esquemas, tais com os mostrados na figura 2.1.

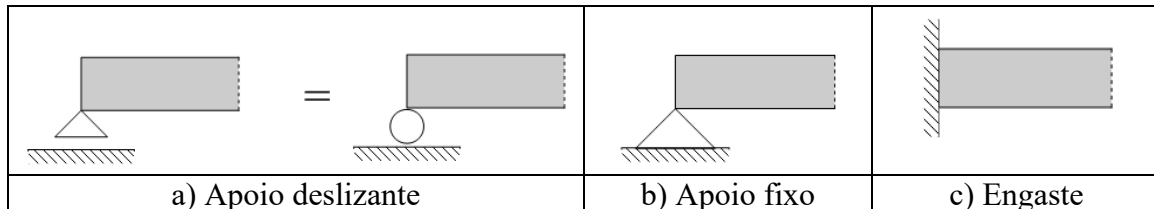


Figura 2.1: Esquemas de vinculação de elementos estruturais para o caso plano

Não temos dúvida, que no início deste curso de Resistência dos Materiais ou de Introdução à Mecânica dos Sólidos, os estudantes entendem perfeitamente o sentido das convenções mostradas na figura 2.1. Vamos, entretanto, tentar ampliar o sentido das convenções acima para podermos, mais adiante, relacionar uma situação da natureza ou da engenharia com os esquemas de vinculação mostrados. Iremos ainda escrever as expressões matemáticas que correspondem aos esquemas de vinculação mostrados na figura 2.1.

Talvez, o início de tudo possa ser colocado em termos do que se chama GRAU DE LIBERDADE de um corpo rígido. Antes, porém, é conveniente escolhermos um sistema de coordenadas e determinemos uma convenção de sentido positivo para eixos coordenados, deslocamentos e esforços. A figura 2.2a mostra um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, indicando o sentido positivo para as grandezas em questão. Os deslocamentos ao longo das direções x, y e z são, respectivamente, u, v e w . As rotações em torno dos mesmos eixos são designadas por θ_x, θ_y e θ_z . Rotações e deslocamentos são freqüentemente chamados de "deslocamentos generalizados". Da mesma forma as forças F_x, F_y, F_z e os momentos M_x, M_y, M_z são chamados de "esforços generalizados". Na figura 2.2b estão mostrados os mesmos elementos para o caso plano. A determinação do sentido positivo das rotações e dos momentos é feita através da conhecida "regra da mão direita", tal como indicado na figura 2.2c.

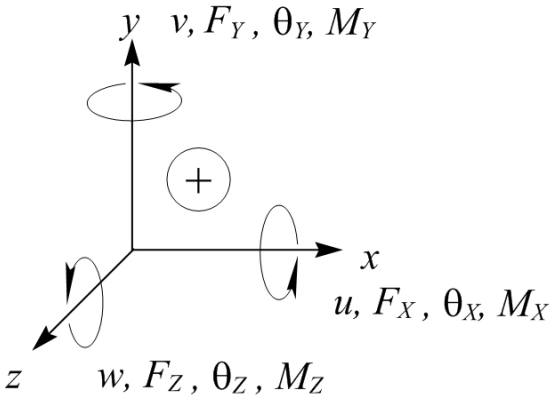
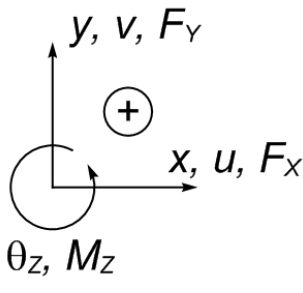
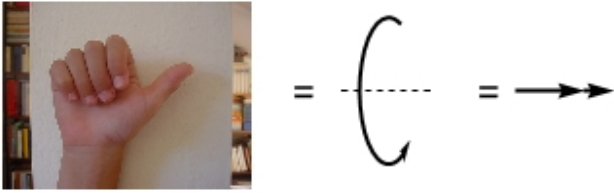
	
a) Caso tridimensional	b) Caso plano
	
c) Regra da "mão direita"	

Figura 2.2: Convenção sentido dos eixos, deslocamentos e rotações.

As unidades adotadas no presente texto são aquelas do Sistema Internacional (SI), ou seja, os deslocamento lineares u, v, w são caracterizados pelo metro [m], os deslocamentos angulares θ_i ($i=x, y, z$) são fornecidos em radianos [rad], as forças F_i ($i=x, y, z$) são dadas em Newtons [N] e os momentos M_i ($i=x, y, z$) em Newton multiplicado por metro [N.m].

Vamos agora analisar os possíveis movimentos de um corpo rígido contido em um plano. A figura 2.3a mostra um corpo prismático situado no plano x - y , cujas extremidades estão caracterizadas pelas letras A e B. Nas figuras 2.3b até 2.3d estão esboçados três movimentos que o corpo rígido pode executar no plano. Uma translação $u_A = u_B$ na direção x (fig. 2.3b), uma translação $v_A = v_B$ na direção y (fig. 2.3c) e ainda uma rotação em torno de algum ponto, no caso, em torno do ponto A, θ_{ZA} (fig. 2.3d). É possível mostrar que todo movimento do corpo rígido AB no plano é uma composição de movimentos como os mostrados, quais sejam, duas translações, por exemplo, u_A, v_A e uma rotação, por exemplo, θ_{ZA} .

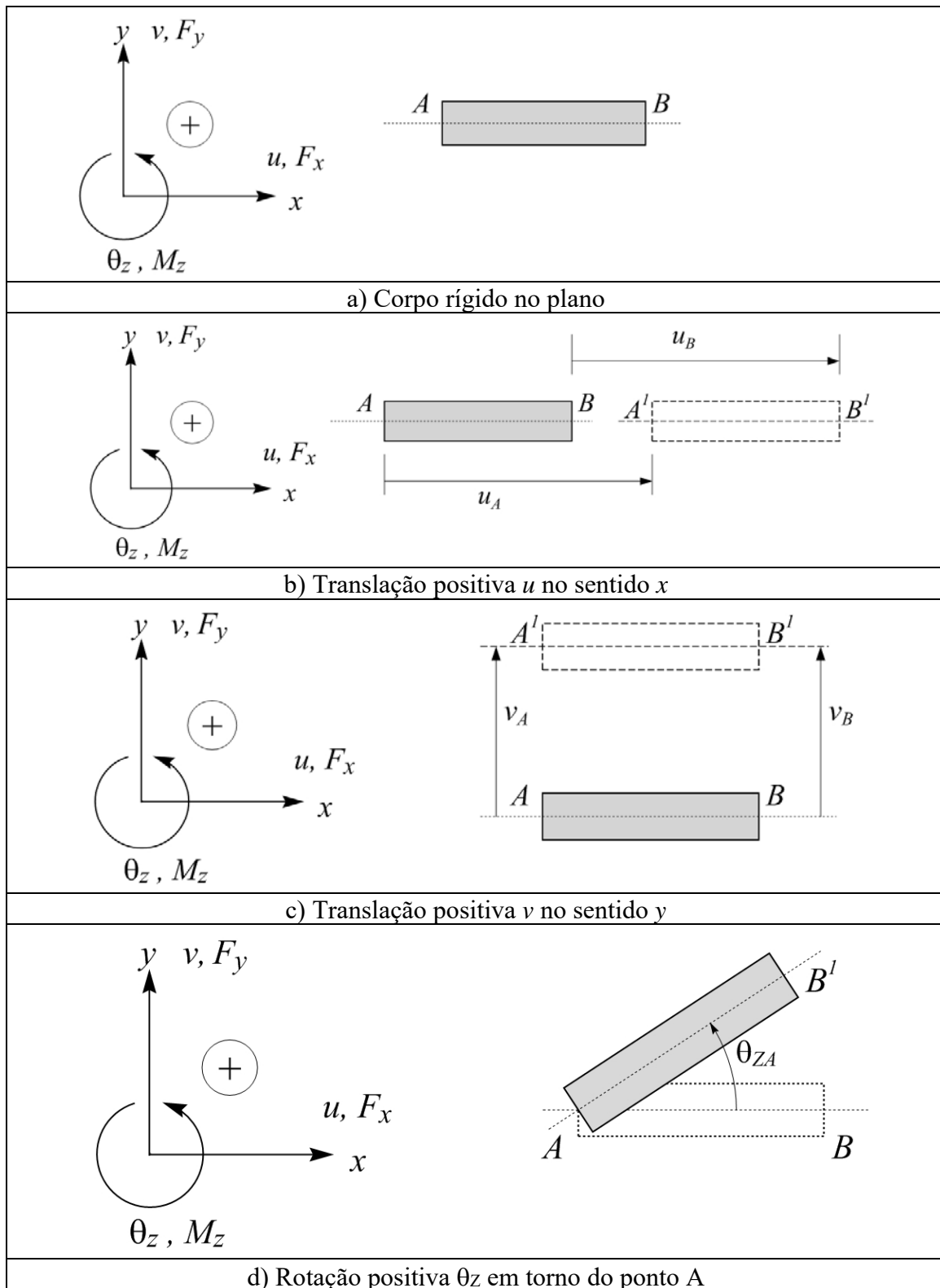


Figura 2.3: Cinemática no plano

As figuras 2.4a e 2.4b ilustram através de dois exemplos, como um movimento de corpo rígido no plano pode ser decomposto em duas translações e uma rotação. Nestas ilustrações a posição inicial do corpo é indicada através das letras (AB). A posição final do corpo é a mesma nas duas figuras e está indicada pelas letras (CD). Chega-se, entretanto, à posição final através de movimentos distintos. Na figura 2.4a o movimento inicia-se com uma translação vertical v_{A1} que leva o corpo para a posição (A^1B^1). Na sequência o corpo é deslocado horizontalmente da distância u_{A1} assumindo a posição indicada por (CB^2), para em seguida ser submetido a uma rotação θ_{ZC} , no sentido positivo, em torno do ponto C. Assim o corpo chega à posição final (CD).

Já no caso da figura 2.4b, o corpo é submetido inicialmente a uma translação horizontal u_{A2} , assumindo a posição (A^1B^1). Uma translação vertical de valor v_{A2} transfere o corpo para a posição (A^2D). A posição final (CD) é atingida após uma rotação θ_{ZD} , no sentido positivo, em torno do ponto D. Estes dois exemplos simples, ilustram que, para descrever o movimento de um corpo rígido no plano, basta conhecer três coordenadas, no caso duas translações e uma rotação.

Uma vez feitas estas considerações sobre a cinemática do corpo rígido, podemos definir com maior precisão o conceito de GRAU DE LIBERDADE, como sendo o número de variáveis de deslocamento generalizado, independentes entre si, que necessitamos para descrever completamente o movimento do corpo ou sistema em questão. Para os exemplos mostrados, conhecendo-se u_{A1} , v_{A1} e θ_{ZC} na figura 2.4a e u_{A2} , v_{A2} e θ_{ZD} na figura 2.4b, descrevemos completamente o movimento do corpo rígido. Assim dizemos que, no plano, um corpo rígido possui três GRAUS DE LIBERDADE.

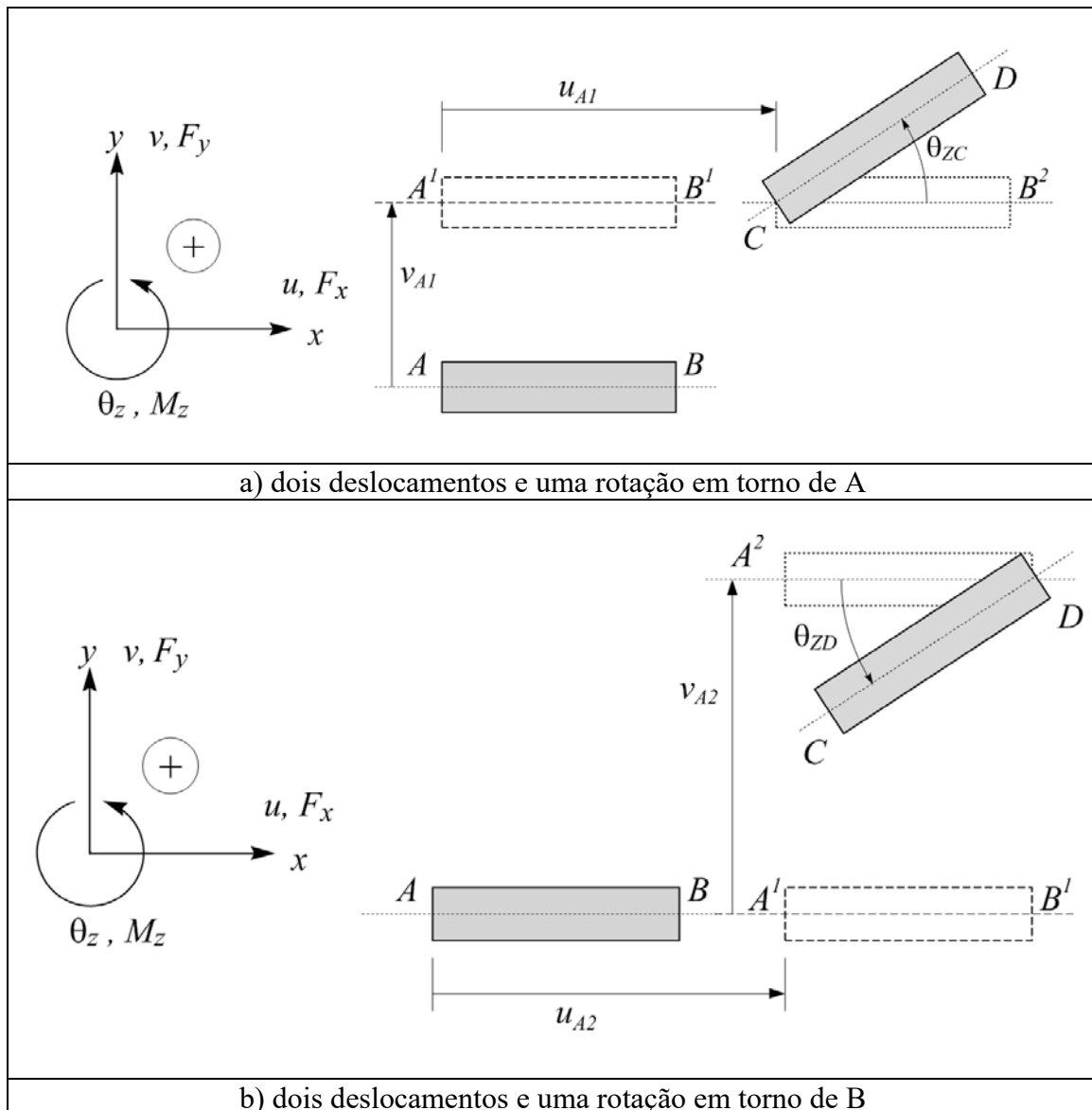


Figura 2.4: Deslocamentos no plano como superposição de 2 deslocamentos e uma rotação - Graus de liberdade de um corpo rígido.

Nosso objetivo nesta seção é relacionar os graus de liberdade de um corpo, ou de *um ponto de um corpo*, com os esquemas de vinculação mostrados nas figuras 2.1. A extremidade ou o *CONTORNO* do corpo, caracterizado pelo ponto A, pode executar 2 translações u_A e v_A e uma rotação θ_{ZA} , como já descrito nas figuras 2.3c a 2.3d,

Notemos agora que as convenções diagramáticas mostradas nas figuras 2.1 dizem respeito aos graus de liberdade do ponto A que são restringidos ou eliminados. Como pode ser observado na figura 2.5a, no ponto A, ou na extremidade caracterizado por este ponto, podem atuar três esforços F_{XA} , F_{YA} , M_{ZA} e existem três deslocamentos possíveis, u_A , v_A , θ_{ZA} . Uma vez colocadas estas definições, podemos discutir as convenções de vinculação.

A figura 2.5b mostra novamente o *apoio deslizando*. O esquema mostrado em 2.5b pretende indicar que a extremidade A pode mover-se livremente na direção x , apresentando um deslocamento não nulo $u_A \neq 0$. Mas o diagrama também quer dizer que não existe nenhum esforço na direção x , que impeça este deslocamento, o que implica em $F_{xA} = 0$, tal como indicado em 2.5c. Quando analisamos o que acontece na direção y , verificamos que não pode haver deslocamento neste sentido, logo $v_A = 0$. Mas como contra-partida o vínculo necessita aplicar uma força vertical $F_{yA} \neq 0$, não nula, para impedir o deslocamento vertical, tal como mostrado em 2.5d. Este tipo de suporte também permite uma rotação livre da seção em torno do ponto A, $\theta_{ZA} \neq 0$. O apoio, por sua vez não desenvolve nenhum momento que impeça esta rotação, implicando que $M_{ZA} = 0$. Isto está mostrado na figura 2.5e.

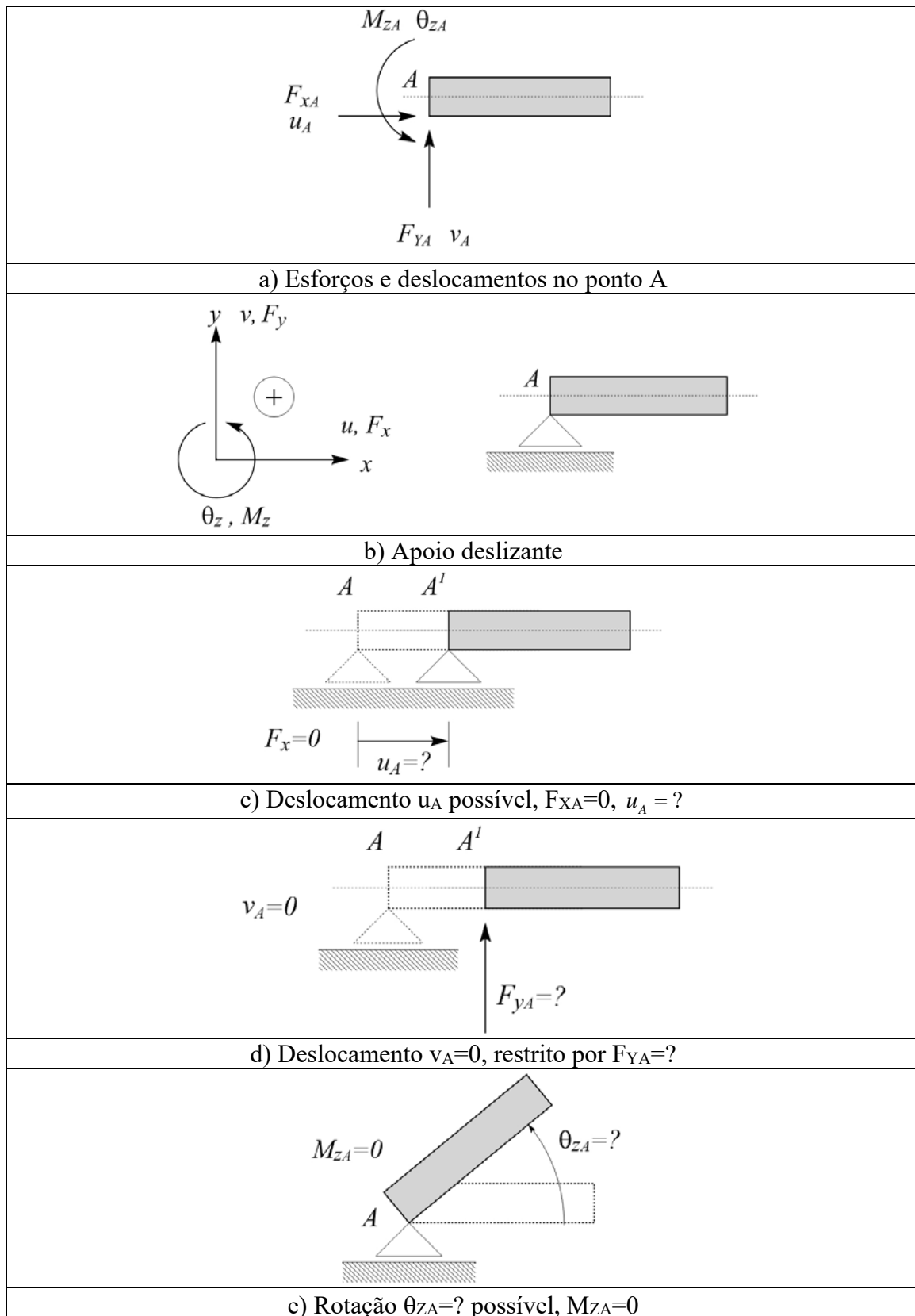


Figura 2.5: Apoio deslizante - esforços e deslocamentos presentes.

Seria importante perceber que existem dois tipos de variáveis associadas a um ponto ou a uma seção de uma estrutura, quais sejam, os deslocamentos e os respectivos esforços. No caso do ponto A, indicado na figura 2.5, na direção x , existe o deslocamento u_A e o esforço F_{XA} . Analogamente na direção y temos v_A e F_{YA} . Em torno do eixo z , que aponta para fora do plano x - y , o esforço e o deslocamento a ele associados são θ_{ZA} e M_{ZA} .

Agora, analise as figuras 2.5 e perceba que existe uma relação entre as variáveis generalizadas e o esquema de vinculação ou a condição de vinculação imposta pelo apoio. Onde se conhece o deslocamento não se conhece o respectivo esforço. E, reciprocamente, onde se conhece o esforço não se conhece o deslocamento. No caso do vínculo 2.5, apoio deslizante, temos:

$$\begin{array}{ll} 1) u_A = ? \text{ (incógnita),} & F_{XA} = 0 \text{ (conhecido)} \\ 2) v_A = 0 \text{ (conhecido),} & F_{YA} = ? \text{ (incógnita)} \\ 3) \theta_{ZA} = ? \text{ (incógnita),} & M_{ZA} = 0 \text{ (conhecido)} \end{array} \quad (2.1)$$

Este simples fato, irá se repetir nos demais tipos de vínculos, como será mostrado adiante. Antes, porém, seria importante mencionarmos que, no caso do apoio deslizante, o entendimento correto da convenção do diagrama indica que os movimentos na direção y são restritos nos dois sentidos, e que o vínculo também desenvolve esforços nos dois sentido para impedir o deslocamento v_A , tal como mostrado na figura 2.6.

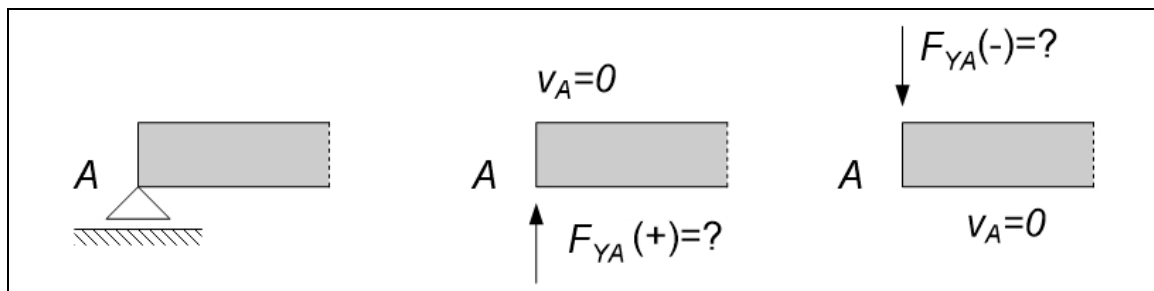


Figura 2.6: Sentido dos esforços desenvolvidos pelo vínculo "apoio deslizante"

Na sequência vamos analisar a vinculação indicada na figura 2.1b e que esta repetida na figura 2.7a. Este vínculo conhecido como *apoio fixo* restringe os deslocamentos nas duas direções x e y , resultando em $u_A = 0$, $v_A = 0$. Para impedir estes deslocamentos o vínculo desenvolve os esforços $F_{XA} \neq 0$ e $F_{YA} \neq 0$ (ver figura 2.7b). Por outro lado este vínculo permite que a seção transversal rotacione livremente em torno do ponto A de um ângulo θ_{ZA} , não havendo nenhum momento em torno do eixo z , que impeça o movimento, consequentemente $M_{ZA} = 0$. Resumindo, para este vínculo temos:

$$\begin{array}{ll} 1) u_A = 0 \text{ (conhecido),} & F_{XA} = ? \text{ (incógnita)} \\ 2) v_A = 0 \text{ (conhecido),} & F_{YA} = ? \text{ (incógnita)} \\ 3) \theta_{ZA} = ? \text{ (incógnita),} & M_{ZA} = 0 \text{ (conhecido)} \end{array} \quad (2.2)$$

Observe que, também para este vínculo, nas direções que conhecemos os deslocamentos, as forças são incógnitas e vice-versa.

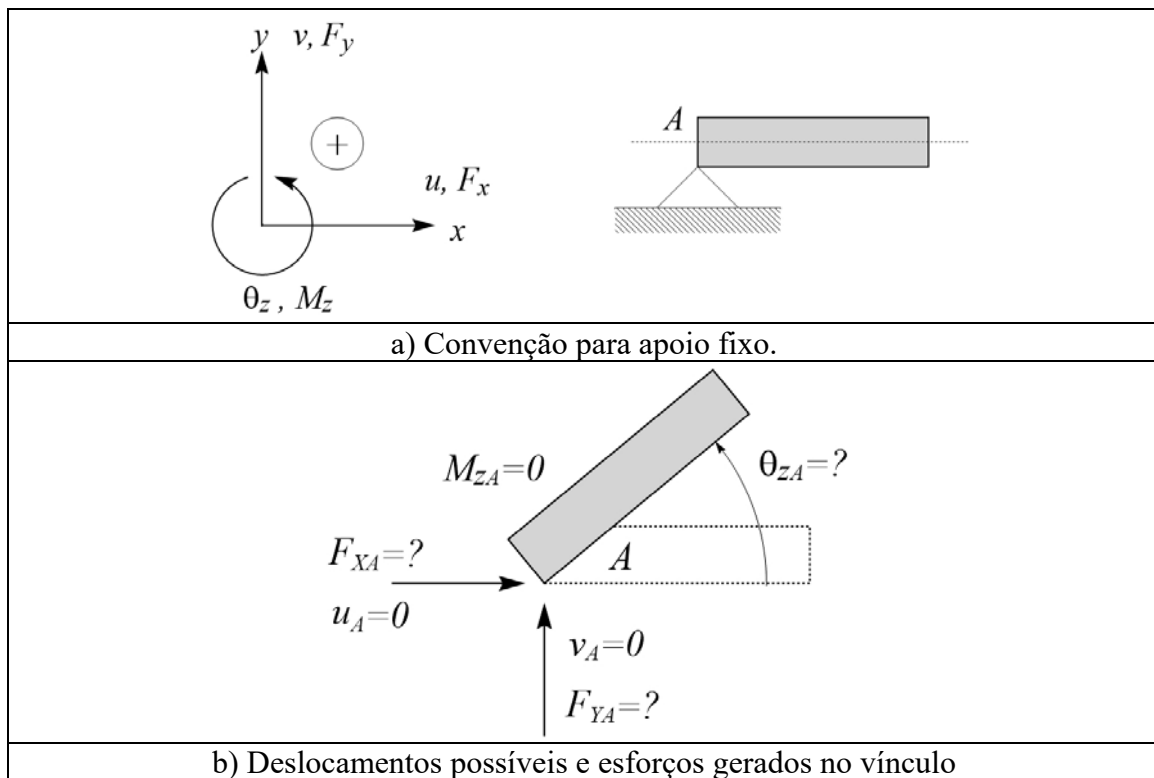


Figura 2.7: Apoio fixo - esforços e deslocamentos presentes.

O terceiro tipo de vínculo, chamado *apoio engastado* ou simplesmente *engaste* foi mostrado na figura 2.1c e está repetido na figura 2.8a. Repare que neste caso o vínculo impede tanto os deslocamentos nas direções x e y , quanto a rotação em torno do eixo z . Para que o vínculo possa impedir o movimento associado aos três graus de liberdade no ponto A , ele deve desenvolver os esforços necessários para restringir os movimentos (ver figura 2.8b). Do ponto de vista matemático podemos escrever as equações que descrevem o apoio engastado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 1) u_A &= 0 \text{ (conhecido),} & F_{xA} &=? \text{ (incógnita)} \\
 2) v_A &= 0 \text{ (conhecido),} & F_{yA} &=? \text{ (incógnita)} \\
 3) \theta_{zA} &= 0 \text{ (conhecido),} & M_{zA} &=? \text{ (incógnita)}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

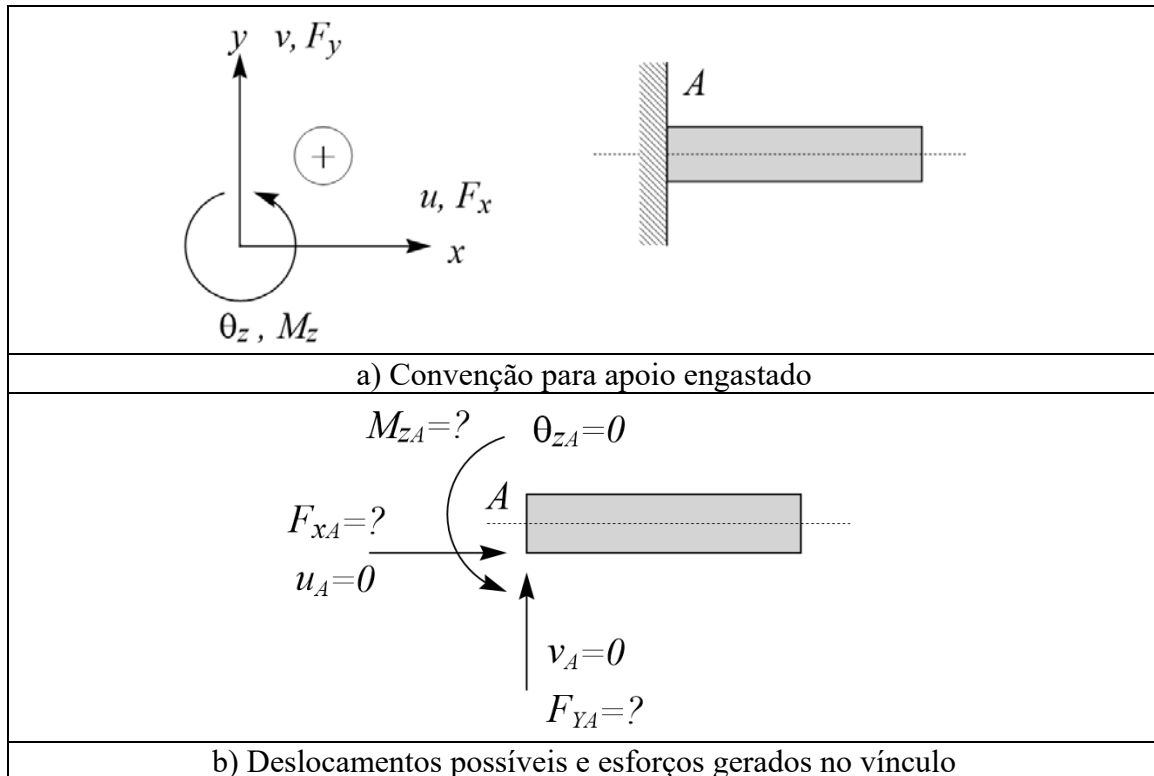


Figura 2.8: Apoio engastado - esforços e deslocamentos presentes.

Os conceitos acima esboçados são bastante simples, mas eles são muito importantes na solução de problemas de engenharia. Vamos enfatizar o que discutimos nos parágrafos precedentes. Nós associamos os esquemas dos vínculos aos graus de liberdade e aos esforços que atuam em certo ponto do corpo. Em um segundo passo fizemos uma descrição matemática dos diversos tipos de vínculos, descrevendo grandezas conhecidas e desconhecidas no vínculo. Por fim notamos que existem dois tipos de grandezas nos vínculos e   possível perceber, no caso dos três vínculos analisados, que onde conhecíamos os deslocamentos, os esforços eram incógnitas. E, reciprocamente, onde os esforços eram dados, os deslocamentos eram incógnitas. A figura 2.9 abaixo mostra de forma resumida os três vínculos analisados e a expressão matemática relacionada com o esquema do vínculo.

Existe ainda um aspecto de vinculação que merece ser mencionado. Os pontos A e B nas figuras acima eram extremidades dos elementos estruturais em análise. Estas extremidades também são conhecidas como *contornos* da estrutura ou do elemento estrutural e as expressões matemáticas de vinculação, fornecidas pelas equações (2.1), (2.2) e (2.3) e também pela figura 9, são conhecidas como *condições de contorno* do problema em análise.

Os problemas de engenharia para os quais é possível escrever condições de contorno, tais como mostradas na figura 2.9, ou seja, aquelas em que se o deslocamento é conhecido o esforço é incógnita, e vice-versa, são conhecidos como *problemas bem colocados* (well-posed problems). Ao se tentar resolver um problema da engenharia, em particular de engenharia estrutural, é importante saber se o problema é bem colocado ou não.

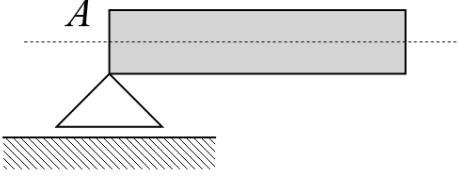
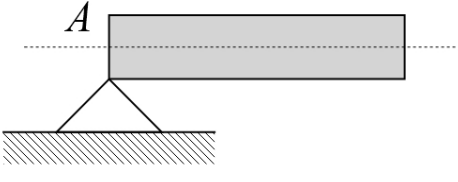
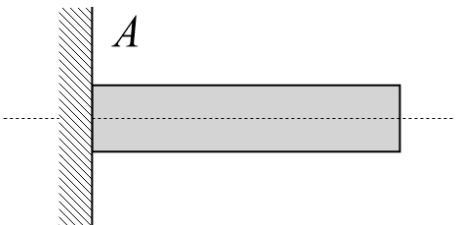
	<p>Apoio deslizante:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $u_A = ?$ $F_{XA} = 0$ 2) $v_A = 0$ $F_{YA} = ?$ 3) $\theta_{ZA} = ?$ $M_{ZA} = 0$
	<p>Apoio fixo:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $u_A = 0$ $F_{XA} = ?$ 2) $v_A = 0$ $F_{YA} = ?$ 3) $\theta_{ZA} = ?$ $M_{ZA} = 0$
	<p>Engaste:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $u_A = 0$ $F_{XA} = ?$ 2) $v_A = 0$ $F_{YA} = ?$ 3) $\theta_{ZA} = 0$ $M_{ZA} = ?$

Figura 2.9: Esquemas de vinculação e expressões para as condições de contorno

Outros vínculos e restrições.

Tanto a natureza em si, como os sistemas e estruturais criados pelo homem, são freqüentemente muito complexos e não é possível descrever sua vinculação através dos esquemas simples indicados na figura 2.1 e analisados nos parágrafos precedentes. Nesta seção vamos indicar alguns outros possíveis tipos de vínculos e suas expressões matemáticas. Mais adiante no texto, faremos uma discussão sobre sistemas reais e a determinação adequada dos seus vínculos ou condições de contorno.

A figura 2.10 mostra um apoio deslizante cujo movimento horizontal u_A está parcialmente restringido por uma mola horizontal cuja constante é k_x . No segundo desenho da mesma figura, pode-se observar o ponto A deslocado para a posição A^1 , devido a um deslocamento u_A , também indicado. Perceba que a mola foi esticada, em relação à sua posição inicial do mesmo valor u_A causando o surgimento de uma força

contrária ao sentido do deslocamento cujo valor é dado por $F_{XA} = -k_X u_A$. O terceiro desenho mostra os esforços existentes neste vínculo.

Perceba que neste caso, a condição de contorno no ponto A, na direção x, não é fornecida pela descrição do deslocamento u_A nem pela força F_{XA} . Neste ponto existe uma associação, uma mistura, destas condições e esta condição de contorno é conhecida como *condição de contorno mista*. As expressões matemáticas que descrevem este vínculo também estão fornecidas no final da figura 2.10.

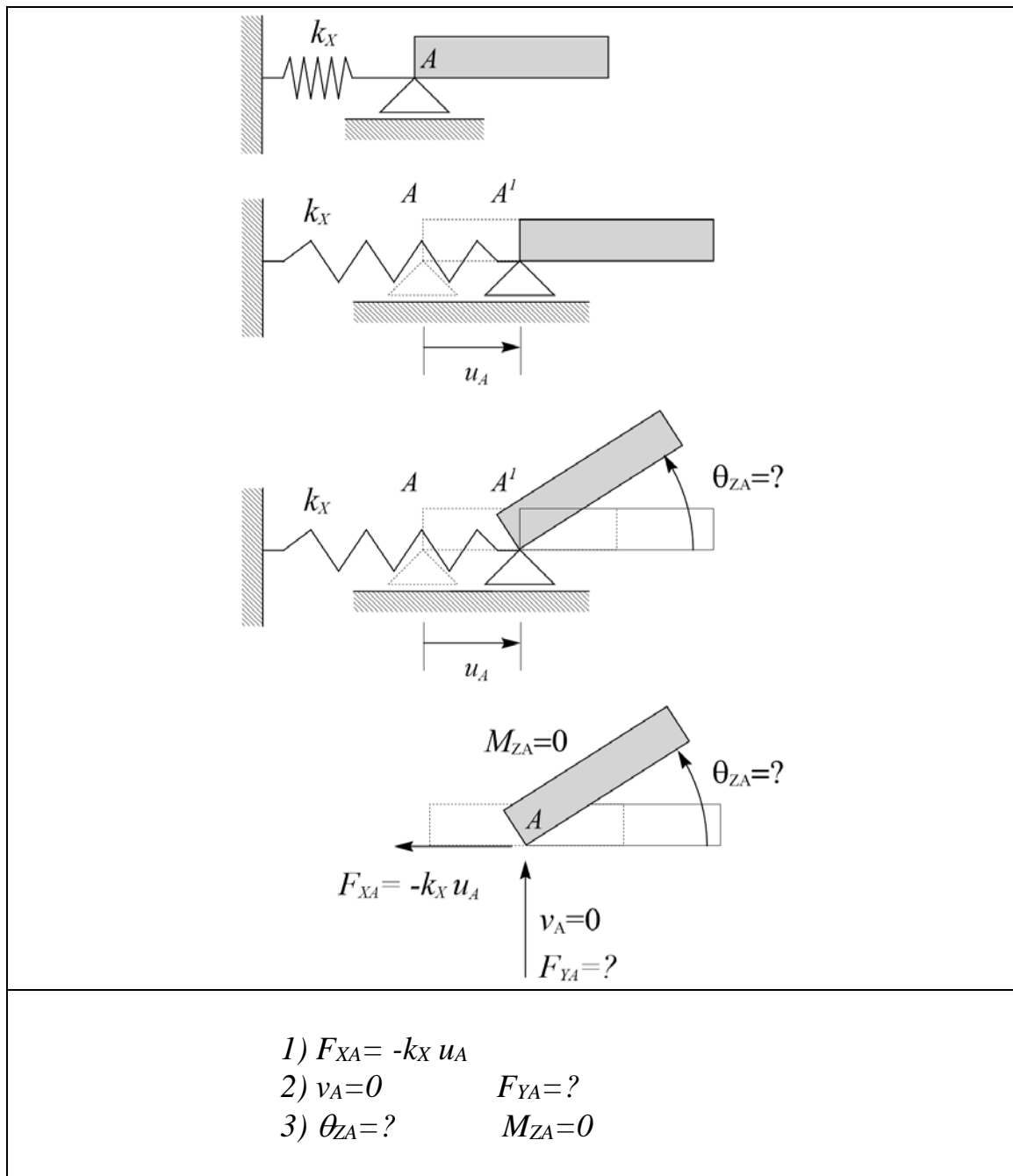


Figura 2.10: Vínculo deslizante com mola do sentido x

Uma outra possibilidade de vinculação, contendo um elemento de mola vertical, com rigidez k_Y encontra-se mostrado na figura 2.11. O raciocínio para a determinação das condições de contorno associadas ao vínculo é muito semelhante ao caso da figura 2.10 e pode ser acompanhado sem dificuldades nas ilustrações da figura 2.11. As expressões matemáticas para a vinculação estão mostradas na parte inferior da figura em questão.

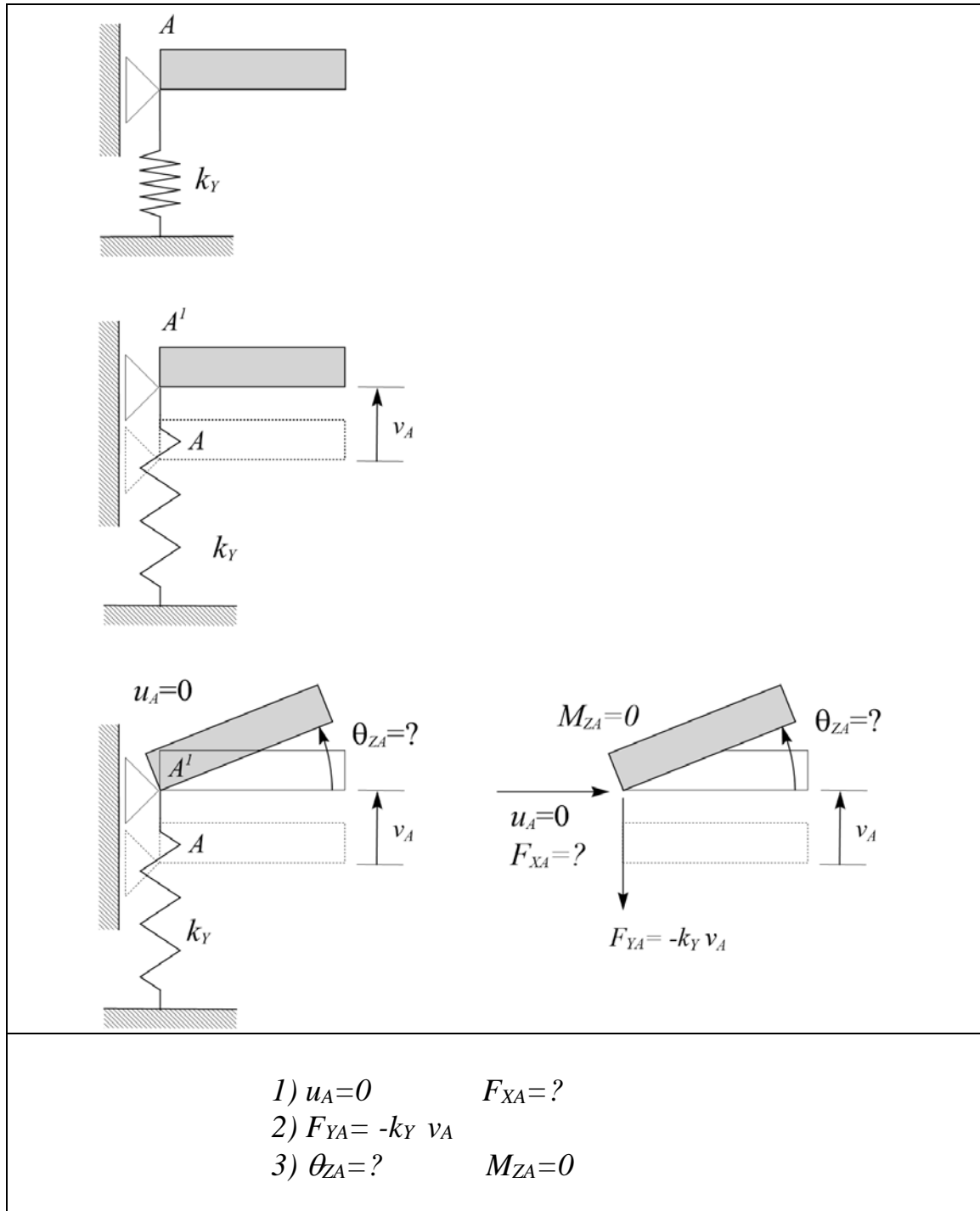


Figura 2.11: Vínculo deslizante com mola do sentido y

Por sua vez, a figura 2.12 mostra um apoio fixo sobre qual atua uma mola rotacional de valor k_θ e que restringe parcialmente a rotação do ponto A em torno do eixo z. Uma rotação de valor θ_{ZA} da seção indicada pelo ponto A induz um momento de resistência também atuando em torno do eixo z e cuja intensidade é $M_{ZA} = -k_\theta \theta_{ZA}$. Os esforços atuantes no vínculo, bem como a expressão matemática das condições de contorno deste vínculo também estão mostradas na figura 2.12.

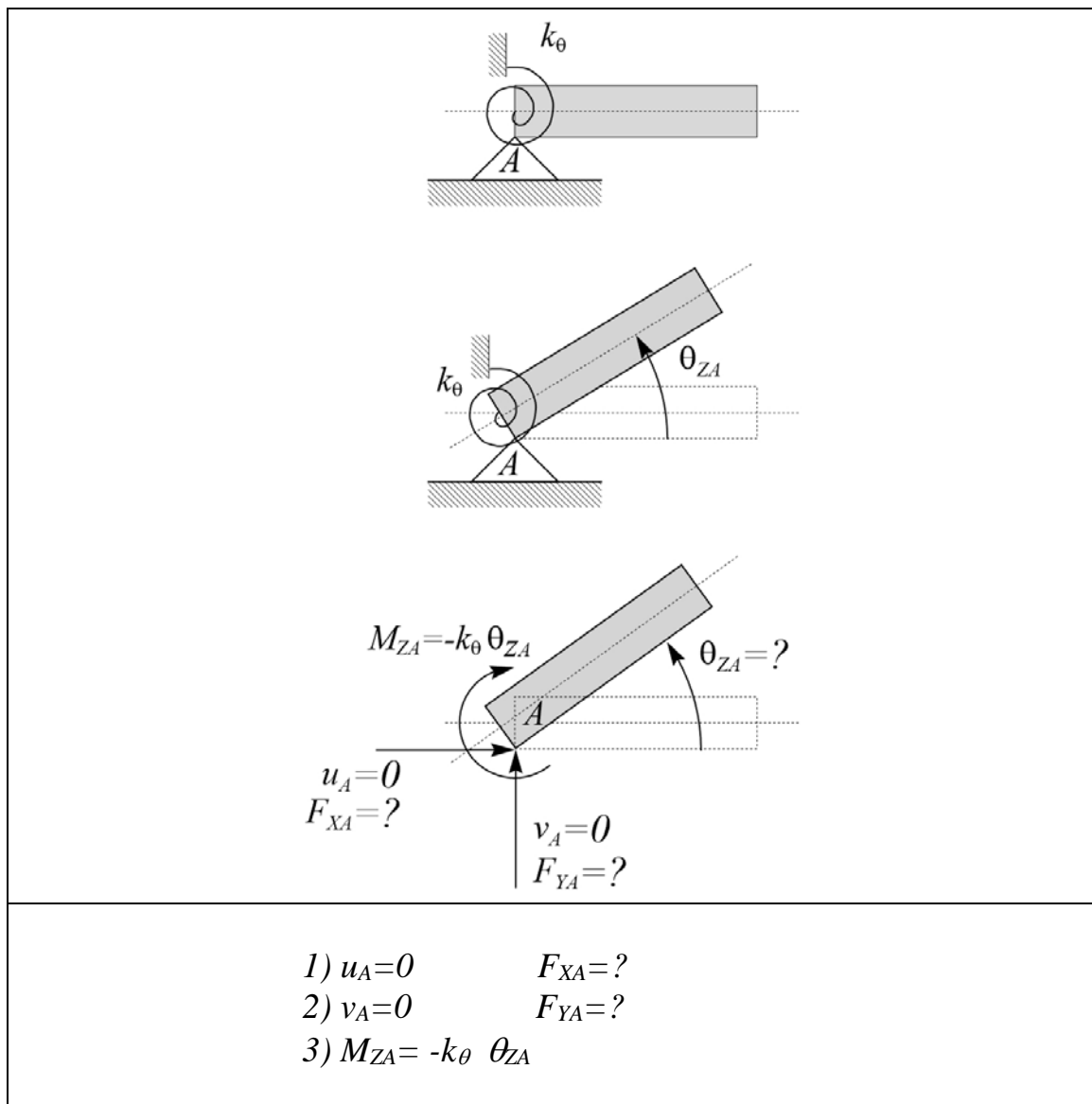


Figura 2.12: Vínculo fixo com mola rotacional em torno do eixo z

Nas figuras acima, apresentamos alguns esquemas de vínculos e descrevemos sua ação ou seu efeito sobre os sistemas através de expressões matemáticas, que chamamos de condições de contorno, envolvendo os deslocamentos e os esforços existentes nos pontos extremos, nos contornos dos elementos estruturais. Nada foi dito sobre o tipo de problema real de engenharia ou situação da natureza que possa ser descrito por estes esquemas de vinculação. Mais adiante, neste texto, vamos discutir com certa ênfase

algumas dificuldades para se escolher o tipo de vinculação associado a um problema real. Esta escolha fará parte do que iremos chamar de *modelagem* do sistema. Por enquanto pedimos ao leitor que fixe estes conceitos, analisando com cuidado os exercícios resolvidos apresentados a seguir e procure resolver aqueles que estão propostos no final do capítulo.

Exercícios resolvidos sobre condições de contorno.

Nesta seção vamos apresentar dois exemplos simples elementos estruturais rígidos e escrever as condições de contorno associadas aos vínculos das extremidades.

Exercício Resolvido 2-ER-1: Condições de contorno para estrutura da figura 2.13

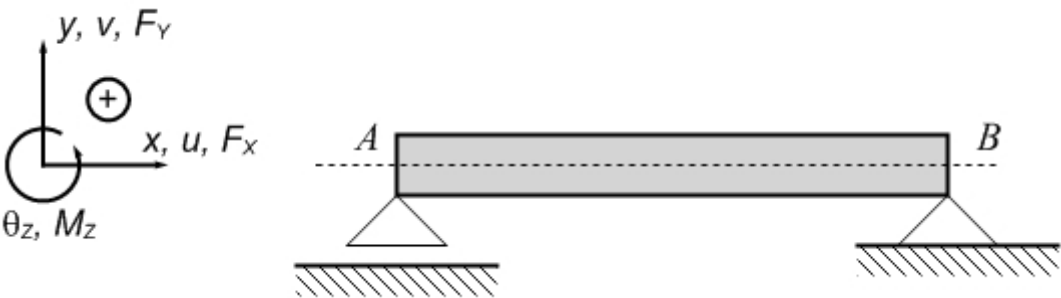
	
Ponto A	Ponto B
1) $u_A = ?$ $F_{XA} = 0$	1) $u_B = 0$ $F_{XB} = ?$
2) $v_A = 0$ $F_{YA} = ?$	2) $v_B = 0$ $F_{YB} = ?$
3) $\theta_{ZA} = ?$ $M_{ZA} = 0$	3) $\theta_{ZB} = ?$ $M_{ZB} = 0$

Figura 2.13: Elemento estrutural e condições de contorno

Exercício Resolvido 2-ER-2: Condições de contorno para estrutura da figura 2.14

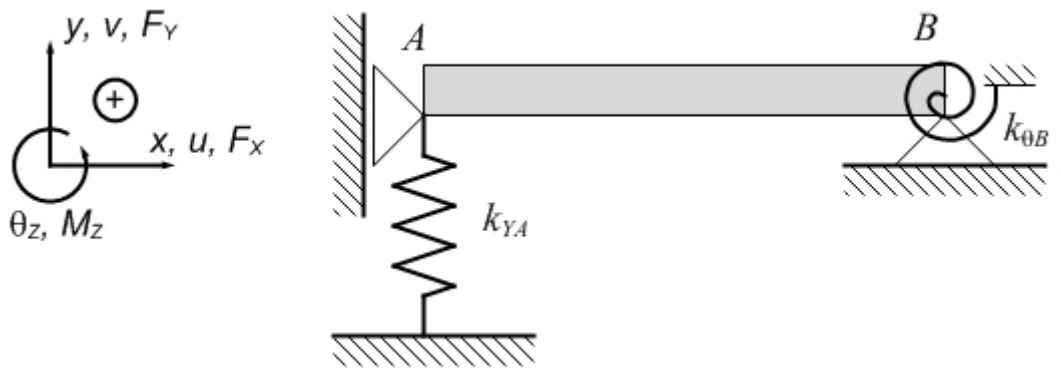
	
Ponto A	Ponto B
1) $u_A = 0$ $F_{XA} = ?$	1) $u_B = 0$ $F_{XB} = ?$
2) $-k_{YA} v_A = F_{YA}$	2) $v_B = 0$ $F_{YB} = ?$
3) $\theta_{ZA} = ?$ $M_{ZA} = 0$	3) $-k_{\Theta B} \theta_{ZB} = M_{ZB}$

Figura 2.14: Elemento estrutural e condições de contorno

Convenções de força aplicadas em elementos estruturais

Nesta seção vamos realizar uma breve discussão sobre os tipos de esforços que atuam sobre os sistemas estruturais e discutir as convenções que utilizamos para descrevê-los. A primeira divisão entre os tipos de esforços que atuam nas estruturas se dá entre os *esforços concentrados* e *esforços distribuídos*.

Nesta seção não vamos nos preocupar com as situações físicas que deram origem aos esforços listados, mas tão somente discutir as possíveis convenções para carregamentos ou esforços, os equivalentes estáticos para o caso de esforços distribuídos e, finalmente, a convenção positiva para o sistema de coordenadas fornecido. No final deste capítulo será discutida a relação entre situação física e esquematização dos esforços, o que consiste em parte essencial da chamada *modelagem* dos sistemas e da natureza.

Vamos iniciar discutindo os *esforços concentrados*. As figuras 2.15 e 2.16 mostram forças concentradas atuando no sentido dos eixos x e y , respectivamente, F_x e F_y . No Sistema Internacional (SI) a unidade destas forças é Newton [N], tal como indicado. Apesar de parecer trivial, o conceito de força concentrada não é tão imediato e, ao longo do presente texto, vamos nos ocupar dele em diversas ocasiões.

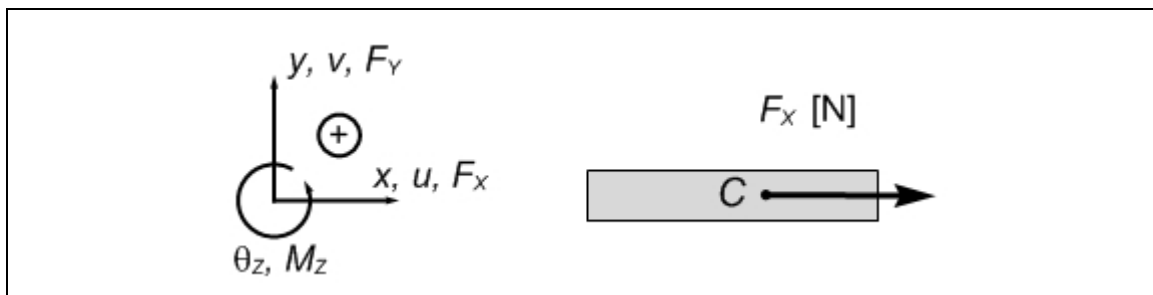


Figura 2.15 Força horizontal concentrada, F_x

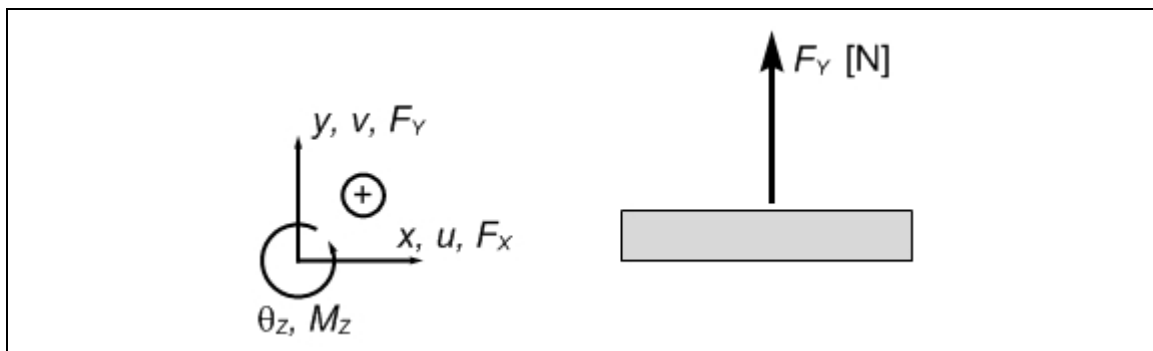


Figura 2.16 Força vertical concentrada, F_y

Por sua vez, as figuras 2.17 e 2.18 mostram momentos concentrados, aplicados no ponto C do croço. Aqui, novamente, nada se falará nada sobre as situações físicas que podem dar origem a esforços tais como os esquematizados nas figuras em questão. A unidade destes momentos é Newton vezes metro [N.m]. É importante reparar que nestas figuras estão mostradas tanto uma visão tridimensional quanto um esquema plano, para o qual foi utilizada a convenção da "regra de mão direita" tal como indicado na figura 2.2c.

Deve ficar claro ao leitor que no presente texto "uma seta com duas pontas" indica um momento concentrado cujo sentido é dado pela regra da mão direita.

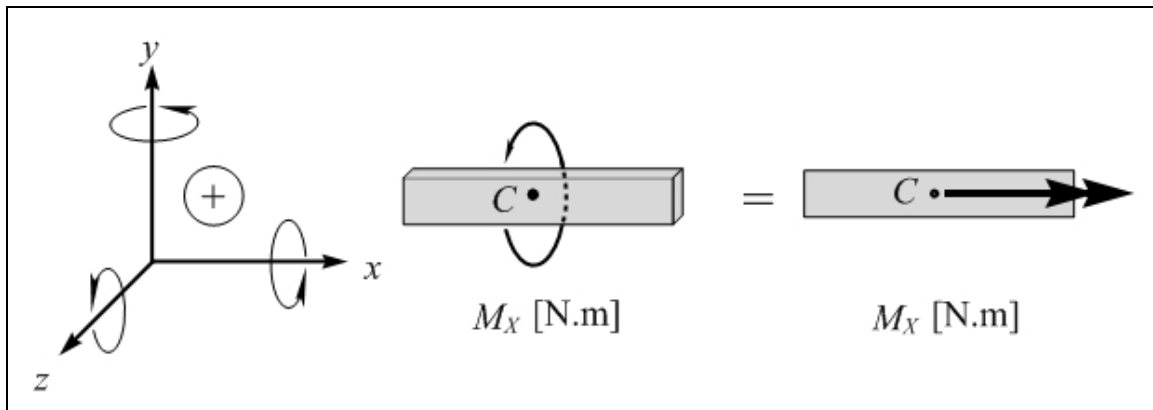


Figura 2.17 Momento concentrado aplicado no ponto C atuando em torno do eixo x , M_x

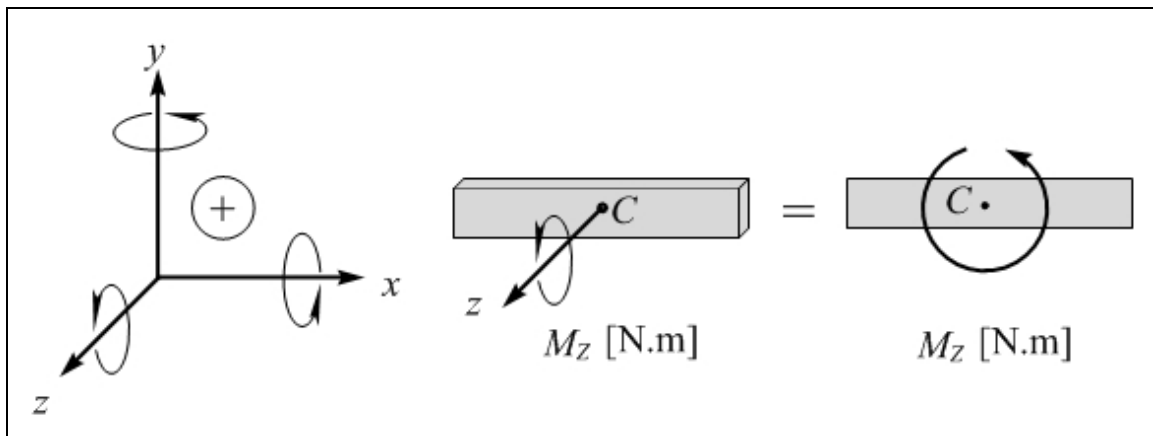


Figura 2.18 Momento concentrado aplicado no ponto C atuando em torno do eixo z , M_z

Na sequência vamos analisar os chamados *esforços distribuídos*. A figura 2.19 mostra um carregamento *uniformemente distribuído* atuando na direção positiva do eixo x , com uma intensidade ou ainda com uma *taxa de carregamento* por unidade de comprimento p_o . Conforme indicado na figura 2.19, o carregamento p_o atua por um comprimento $L=(x_b-x_a)$. A unidade desta taxa de carregamento é Newton por metro, [N/m]. Na mesma figura está também indicado o *equivalente estático* do carregamento distribuído. Sabe-se, dos cursos de estática ou de mecânica geral, que o equivalente estático de um carregamento distribuído possui uma intensidade total resultante igual à área sob a curva do carregamento. No caso da figura 2.19, a força resultante equivalente é: $F_{xeq}=p_o L$. O ponto de aplicação do equivalente estático encontra-se no centro geométrico da área sob o carregamento. Para o caso em o ponto de aplicação encontra-se exatamente no meio dos pontos x_a e x_b , em $L/2$, como indicado.

De forma análoga, a figura 2.20 mostra um carregamento linearmente distribuído $p_x(x)$, também atuando na direção positiva do eixo x . A intensidade máxima do carregamento linear é p_L e ocorre no ponto x_b . A resultante da força estática equivalente é dada pela

área sob a curva do carregamento, ou seja, $F_{x_{eq}} = p_L L/2$. O ponto de aplicação da resultante está no centróide da figura, a uma distância $2L/3$ do ponto x_a , como indicado.

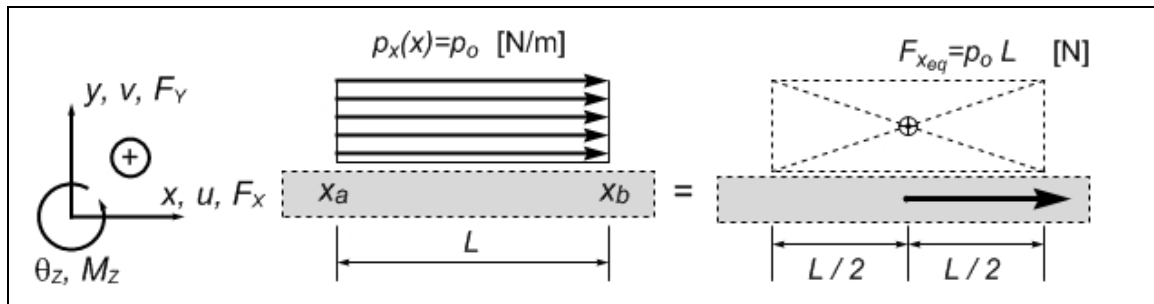


Figura 2.19 Força horizontal uniformemente distribuída ao longo do eixo x , $p_x(x)=p_0$ e seu equivalente estático $F_{x_{eq}}=p_0 L$ - caso plano

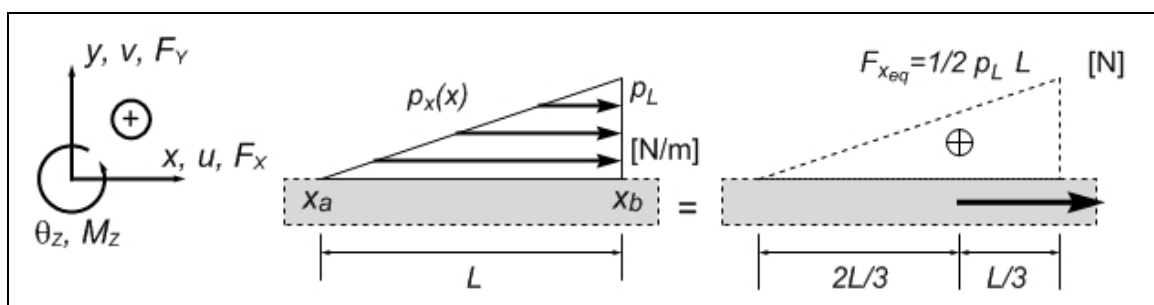


Figura 2.20 Força horizontal distribuída, com variação linear ao longo do eixo x , $p_x(x)$ e seu equivalente estático $F_{x_{eq}}=1/2 p_L L$ - caso plano

Por sua vez a figura 2.21 mostra um carregamento uniformemente distribuído q_0 atuando na direção do eixo y . A unidade de q_0 também é dada também em Newton por metro [N/m]. Aqui também a força estática equivalente possui uma intensidade igual à área do carregamento, $F_{y_{eq}}=q_0 L$ [N]. O ponto de aplicação da resultante está no centróide da área sob o carregamento.

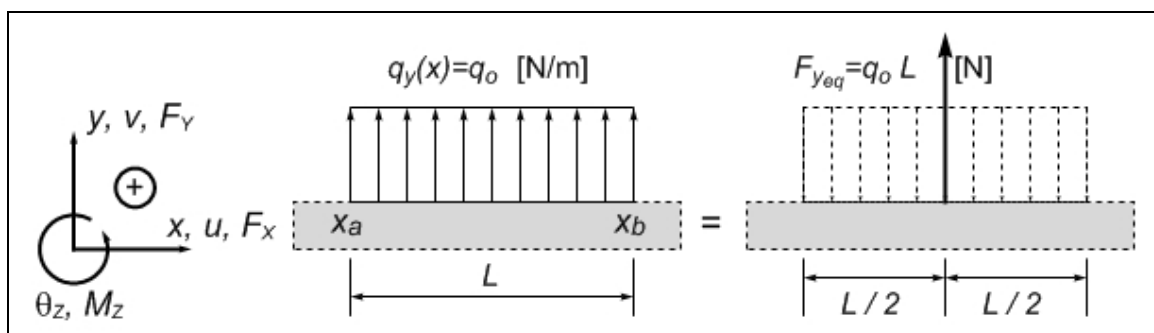


Figura 2.21 Força vertical uniformemente distribuída ao longo do eixo x , $q_y(x)=q_0$ e seu equivalente estático $F_{y_{eq}}=q_0 L$ - caso plano

Analogamente a figura 2.22 mostra um carregamento linearmente distribuído $q_y(x)$ com intensidade máxima q_L [N/m] no ponto $x=x_b$. A força resultante equivalente é dada pela

expressão da área da curva sob o carregamento $F_{Yeq} = q_L L/2$ e seu ponto de aplicação está situado no centróide do triângulo do carregamento, a uma distância $2L/3$ do ponto x_a .

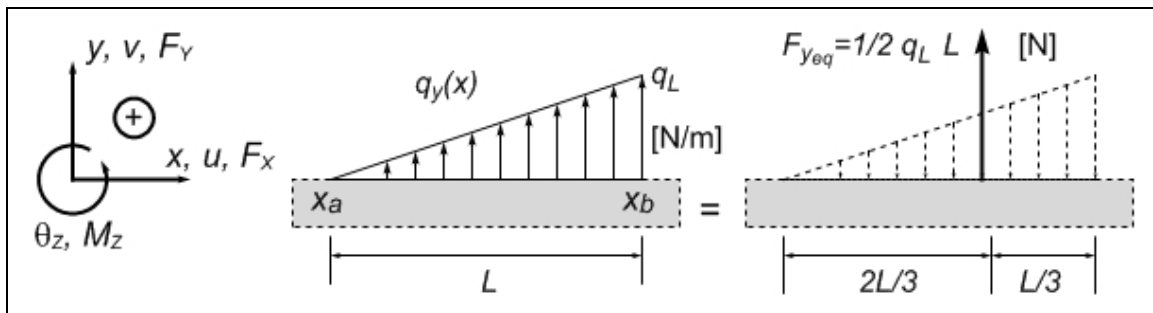


Figura 2.22 Força vertical distribuída, com variação linear ao longo do eixo x , $q_y(x)$ e seu equivalente estático $F_{Yeq} = 1/2 q_L L$ - caso plano

Para o caso de um carregamento arbitrário vertical, tal como mostrado na figura 2.23, a força resultante equivalente é ainda igual à área sob a curva de carregamento. Se a expressão para $q_y(x)$ for conhecida, pode-se determinar a força resultante equivalente F_{Yeq} através da integração do carregamento entre os pontos x_a e x_b ,

$$F_{Yeq} = \int_{x_a}^{x_b} q_y(x) dx \quad (2.4)$$

Por sua vez o ponto de aplicação da força resultante situa-se a uma distância L_{eq} do início do carregamento em x_a (ver figura 2.23) e pode ser determinada pela expressão:

$$L_{eq} = \frac{\int_{x_a}^{x_b} q_y(\zeta)(\zeta - x_a) d\zeta}{\int_{x_a}^{x_b} q_y(x) dx} = \frac{\int_{x_a}^{x_b} q_y(x)(\zeta - x_a) d\zeta}{F_{Yeq}} \quad (2.5)$$

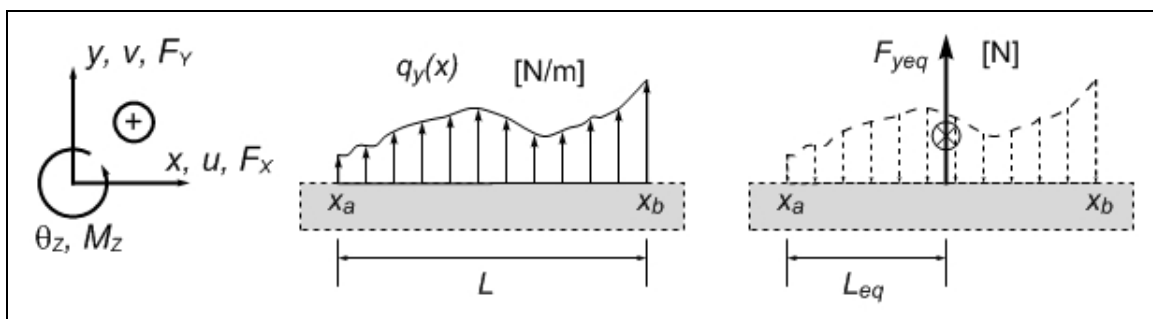


Figura 2.23 Força vertical distribuída com variação arbitrária ao longo do eixo $q_y(x)$ e seu equivalente estático F_{Yeq} - caso plano

Os exercícios resolvidos 2-ER-04 a 2-ER-07 mostram como as expressões (2.4) e (2.5) podem ser usadas para determinação de equivalentes estáticos, tais como os mostrados nas figuras 2.22 e 2.23.

Até o presente momento, esta seção se limitou a discutir as convenções de forças e seus equivalentes estáticos no "caso plano". A figura 2.24 mostra um caso tridimensional de carregamento transversal uniformemente distribuído, com uma "taxa de carregamento" indicada por q_o . Esta taxa de carregamento possui unidade de força sobre área, ou seja $[N/m^2]$. A força estática equivalente é obtida determinando-se o volume sob o carregamento. No presente caso, trata-se da área do retângulo sobre o qual a carga está aplicada ab multiplicada pela altura ou intensidade da carga q_o resultando em um força equivalente $F_{Yeq}=q_o ab$. No presente caso ponto de aplicação da força estática equivalente passa pelo centróide da área carregada, tal como indicado na figura 2.24.

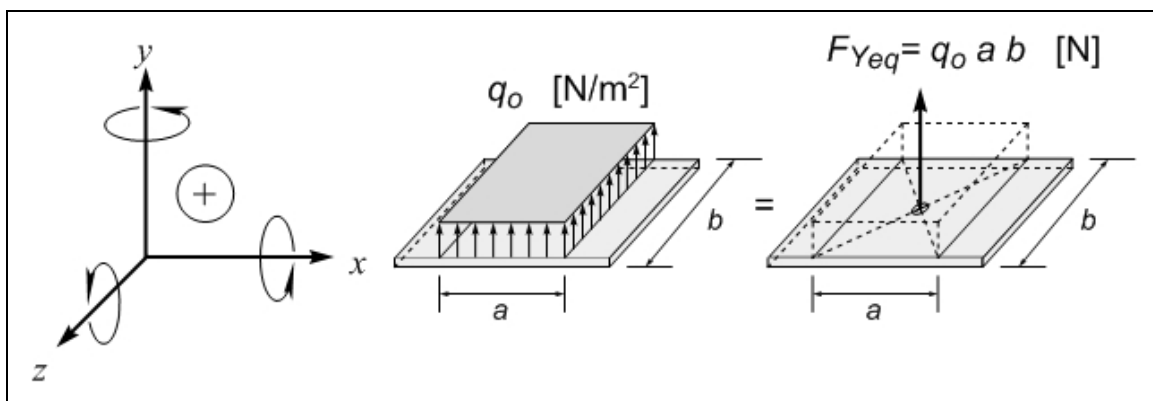


Figura 2.24 Força vertical uniformemente distribuída ao longo do plano x - z , $q_Y(x,z)=q_o$ e seu equivalente estático $F_{Yeq}=q_o ab$ - caso tridimensional

Vamos agora tratar de momentos distribuídos atuando ao longo e em torno do eixo x . A figura 2.17 mostrava um momento concentrado aplicado no ponto C atuando em torno do eixo x , M_x . Existem, entretanto, situações em que os momentos em torno do eixo x são distribuídos em relação a esta mesma direção, x . A figura 2.25 mostra a construção de uma situação onde o esforço resultante obedece às características mencionadas.

Considere na figura 2.25a um elemento estrutural cilíndrico de comprimento L [m], cujo eixo maior está na direção x e sujeito um carregamento uniformemente distribuído f_z [N/m], atuando na direção z , a uma distância R [m] do centro do cilindro. A carga f_z distribuída ao longo do comprimento L , fornece uma força estática equivalente $F_z=f_z L$ cuja unidade é $[N/m.m]=[N]$. Por sua vez a força F_z atua a uma distância R do eixo x , provocando um momento resultante total equivalente igual a $M_x=F_z R$ [N.m].

O momento M_x , por sua vez, é a resultante de um momento distribuído ao longo do comprimento L . Podemos, assim, determinar a uma taxa t_x de momento distribuído em torno e ao longo do eixo x , dividindo o momento resultante M_x [N.m] pelo comprimento do cilindro L [m], resultando $t_x=M_x/L$, cuja unidade é $[N.m/m]$. Uma interpretação alternativa é fornecida pela figura 2.25b. Neste caso o carregamento f_z [N/m] é diretamente multiplicado pela distância R [m] fornecendo também a taxa de

momento distribuído ao longo do eixo x , t_x [N.m/m]. É conveniente não simplificar e expressar a unidade para t_x e deixá-la como sendo "Newton vezes metro, por metro" [N.m/m] para diferenciar a taxa de momento distribuído das forças cuja unidade é Newton [N].

A figura 2.25b também indica, na sua extremidade direita, a convenção que adotaremos para indicar uma taxa positiva t_x de carregamento distribuído ao longo e em torno do eixo x . É importante salientar que esta figura mostra a taxa de carregamento t_x no plano x - y , mas na verdade o momento em torno do eixo x aponta para fora (ou para dentro) do plano em questão (x - y). Ou seja, no presente texto vamos trabalhar com momentos em torno do eixo x , como se fosse um problema do plano x - y , mas na realidade ele não é completamente plano, como indicado nas figuras 2.25.

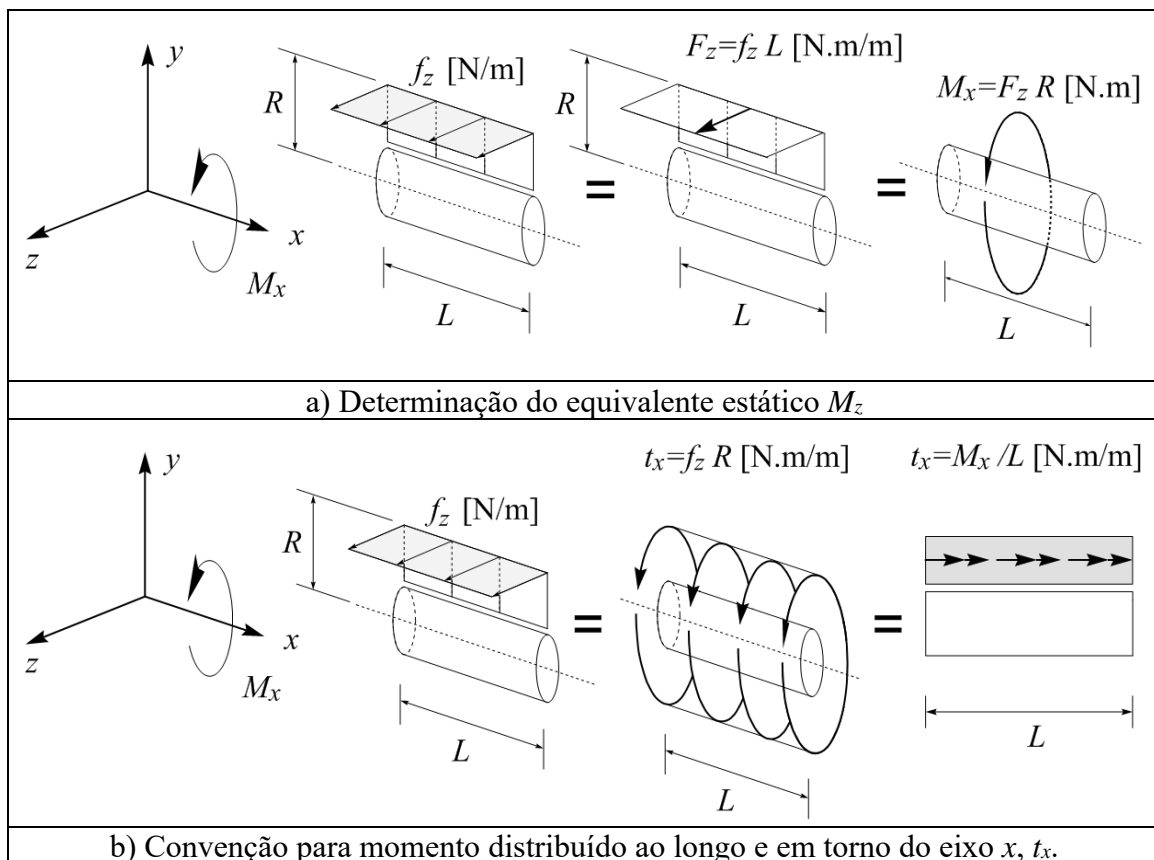


Figura 2.25 Momento distribuído atuando ao longo e em torno do eixo x

Revisão dos Princípios do Equilíbrio Estático

Nesta seção vamos recapitular as noções básicas de equilíbrio estático de corpos ou estruturas rígidas. Discutiremos, brevemente, as equações disponíveis para determinação de esforços em corpos rígidos, cotejando com o número de Graus de Liberdade de um corpo rígido, para enfatizarmos a questão dos sistemas isostáticos e

hiperestáticos. Apresentaremos ainda alguns clássicos casos de sistemas "aparentemente hiperestáticos".

Embora não seja objeto imediato deste texto, é importante que o estudante saiba que a mecânica clássica (aquela que antecedeu a mecânica quântica e a relativista) pode ser formulada sobre princípios de conservação. Dois princípios básicos da mecânica, nos interessam particularmente no presente contexto. São eles o "princípio da conservação da quantidade de movimento linear" e o "princípio da conservação da quantidade de movimento angular". Se assumirmos que estamos tratando de corpos rígidos que não estão sujeitos a acelerações lineares ou angulares significativas, ou seja, estão parados ou sem variação de velocidade, seja linear seja angular, então o princípio da conservação da quantidade de movimento linear nos indica que a soma das forças que atuam sobre o corpo ou sistema é nula, ou ainda:

$$\sum \underline{F} = \underline{0} \quad (2.6)$$

Analogamente o princípio da conservação da quantidade de movimento angular nos diz que a somatória dos momentos atuando sobre um corpo é nulo, ou:

$$\sum \underline{M} = \underline{0} \quad (2.7)$$

As equações (2.6) e (2.7) são equações vetoriais. Se escolhermos uma base cartesiana tridimensional, com versores \underline{e}_x , \underline{e}_y e \underline{e}_z , indicando, respectivamente, as direções x , y e z , podemos escrever as equações (2.6) e (2.7) da seguinte forma:

$$\sum F_x \underline{e}_x + \sum F_y \underline{e}_y + \sum F_z \underline{e}_z = 0 \underline{e}_x + 0 \underline{e}_y + 0 \underline{e}_z \quad (2.8)$$

e

$$\sum M_x \underline{e}_x + \sum M_y \underline{e}_y + \sum M_z \underline{e}_z = 0 \underline{e}_x + 0 \underline{e}_y + 0 \underline{e}_z \quad (2.9)$$

Por sua vez cada uma das equações vetoriais (2.8) e (2.9) podem ser separadas em três equações escalares, resultando em :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

e

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Estas seis equações escalares, expressas por (2.10) e (2.11), são as tradicionais equações que regem o equilíbrio de corpos rígidos tridimensionais sob regime estático. Para o caso de sistemas planos as forças e momentos atuando fora do plano x - y devem ser

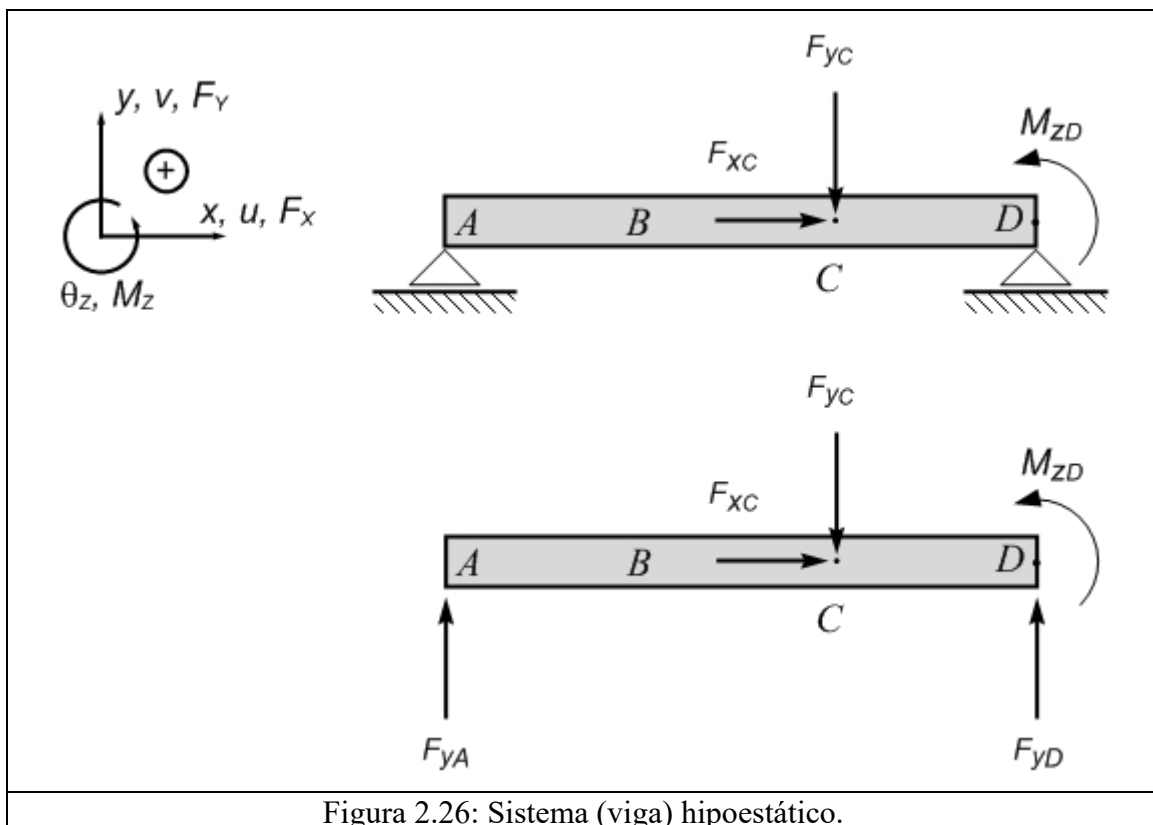
desconsiderados, resultando nas três equações que regem o equilíbrio dos corpos rígidos no plano:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0\end{aligned}\tag{2.12}$$

Estes conceitos já foram apresentados nos cursos de Mecânica Geral ou Estática e a finalidade de re-apresentá-los aqui é somente de relacionar o número das equações de equilíbrio disponíveis com número de esforços que podem ser desenvolvidos nos vínculos dos corpos. Uma análise das equações (2.12) indica que a Estática, ou ainda, que os dois princípios de conservação já mencionados, somente oferecem 03 (três) equações para se determinar os esforços que mantêm um corpo em equilíbrio um corpo no plano x - y .

Em geral (a menos de situações específicas) se um corpo no plano possui vínculos que desenvolvem 03 esforços desconhecidos, podemos determinar estes esforços e o corpo é chamado de "isostático". Analogamente se os esforços gerados pelos vínculos forem maior ou menor número que as equações de equilíbrio disponíveis (03 no caso plano) o corpo é chamado de "hiperestático" ou de "hipoestático", respectivamente.

A figura 2.26 mostra uma viga apoiada em dois "apoios deslizantes" nas extremidades A e D e solicitada por duas forças concentradas F_{yc} e F_{xc} aplicadas no ponto C, bem como um momento concentrado M_{zD} , aplicado no ponto D. Um pouco abaixo, na mesma figura encontra-se o Diagrama de Corpo Livre (DCL), onde os apoios foram substituídos pelas reações de eles podem desenvolver. Uma análise do DCL indica que os apoios fornecem apenas duas reações, a saber, F_{yA} e F_{yD} . Como o número de reações, duas, é menor que o número de equações de equilíbrio disponíveis no plano, três, o sistema é *hipoestático*.



Por sua vez, a figura 2.27 mostra um elemento estrutural isostático. Analisando-se o DCL da estrutura plana, podemos perceber a existência de 3 reações de apoio, quais sejam, F_{xA} , F_{yA} e F_{yD} . Como estas reações não estão todas alinhadas, e elas também não concorrem para um único ponto, estas reações em conjunto com as 3 equações de equilíbrio da estática, determinam o sistema plano isostático.

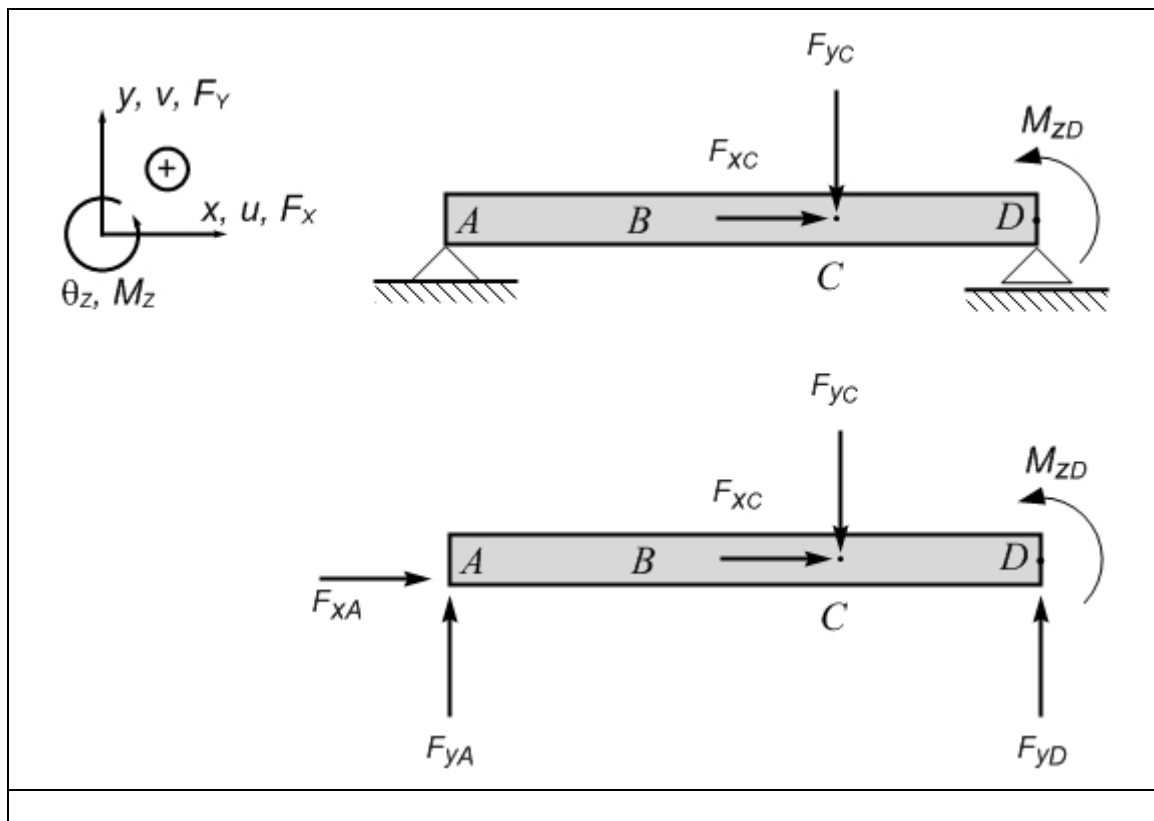


Figura 2-27: Exemplo de viga isostática

A figura 2.28, por sua vez, mostra uma viga hiperestática. A viga está suportada por um apoio fixo em A e por dois apoios deslizantes em B e D. O DCL da estrutura mostra que os vínculos desenvolvem 4 reações de apoio, respectivamente, F_{xA} , F_{yA} , F_{yB} e F_{yD} .

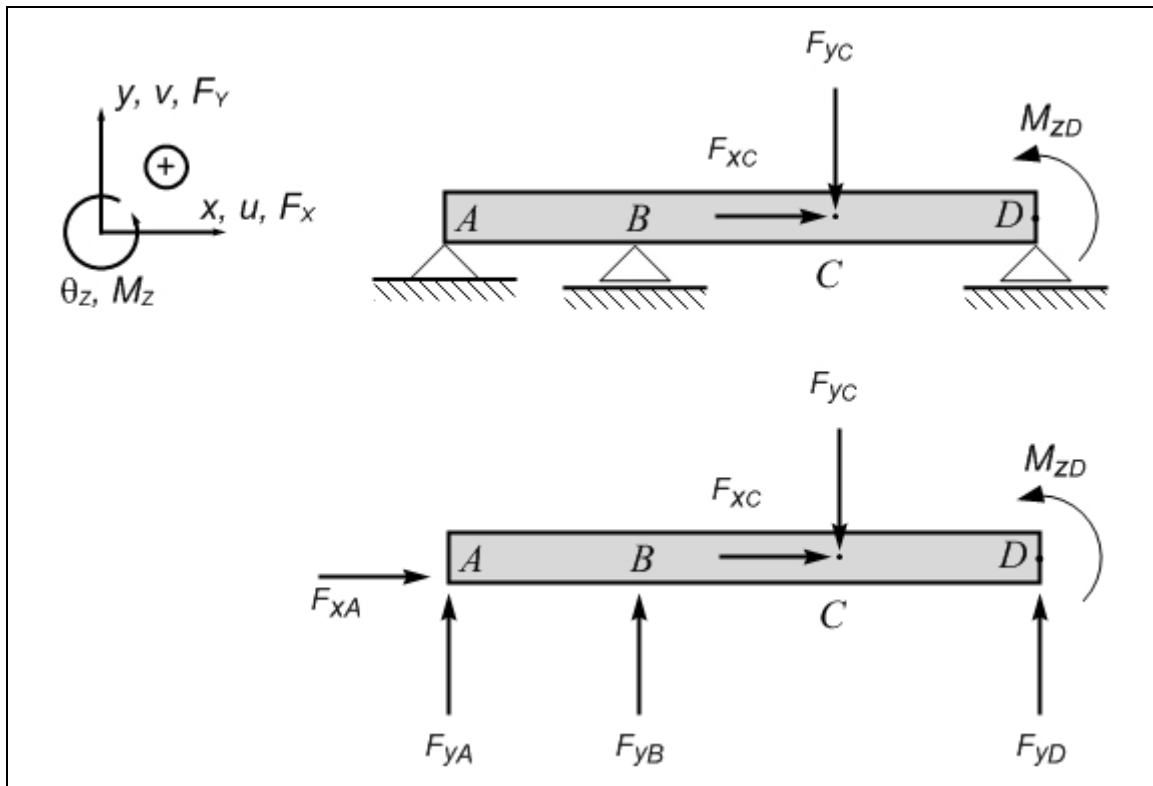


Figura 2-28: Exemplo de viga hiperestática

Neste caso, temos 4 reações de apoio associadas a vínculos externos e somente 3 equações de equilíbrio da estática. Falta uma equação, para podermos determinar as reações de apoio. Como a diferença entre as reações externas incógnitas e equações de equilíbrio é 1, dizemos que o sistema é 1 vez externamente hiperestático.

Sistemas aparentemente hiperestáticos

Na seção anterior baseamo-nos no balanço entre o número de reações externas de apoio e o número de equações de equilíbrio fornecidas pelos princípios da estática no plano (3 equações) para determinar se um sistema era hipo-, iso- ou hiperestático. Existem, porém, situações em que somente o balanço entre reações de apoio e equações de equilíbrio não é suficiente para determinar se o sistema é isostático, ou não.

Vamos discutir três tipos de problemas em que o número de reações de apoio ou incógnitas é maior de 3, o que levaria a classificar o sistema como hiperestático, mas na verdade o sistema é somente “*aparentemente hiperestático*”.

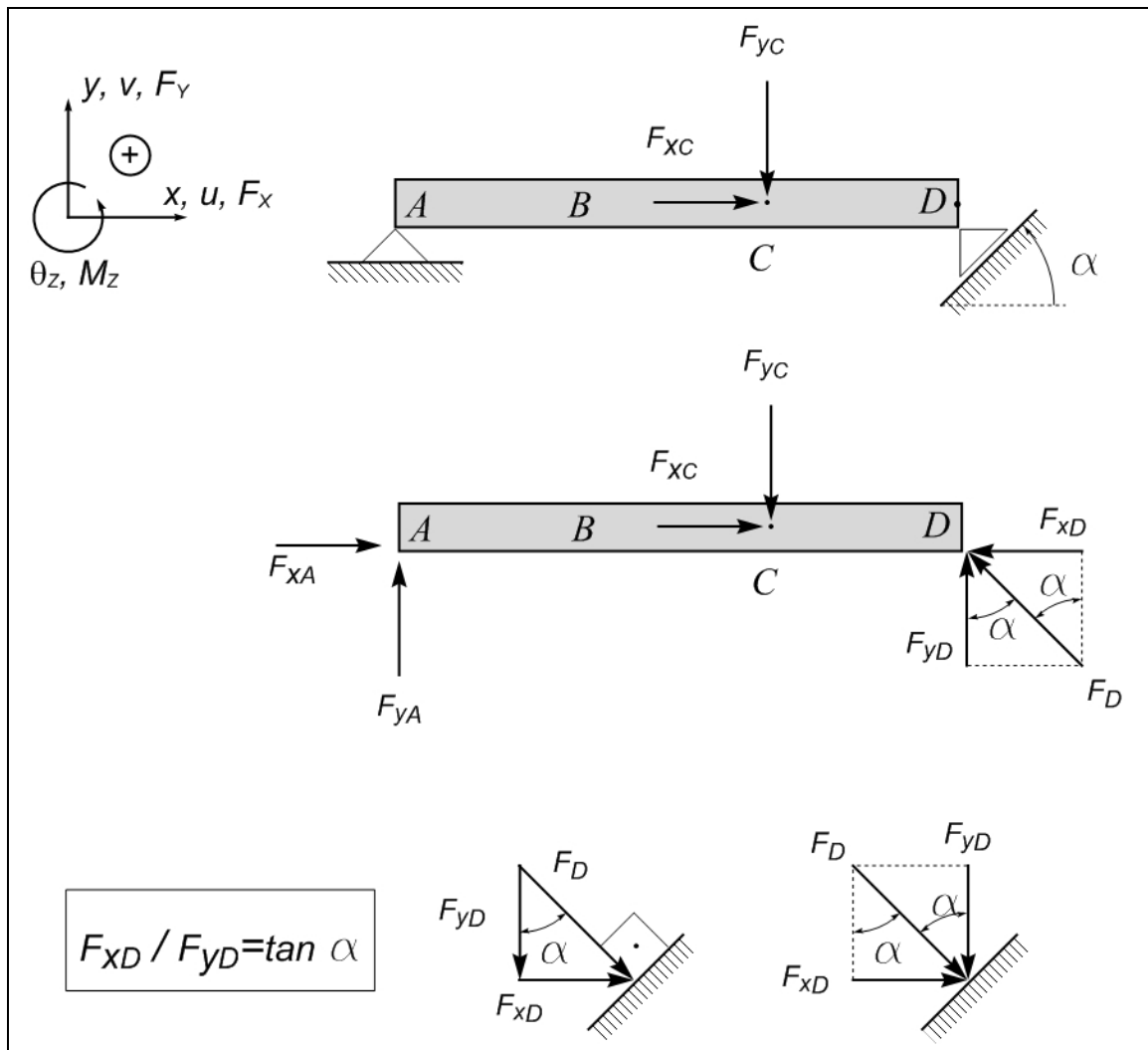


Figura 2.29: Sistema aparentemente hiperestático – Apoio deslizante inclinado

O primeiro destes exemplos está mostrado na figura 2.29. Ele consiste de uma viga suportada por um apoio fixo no ponto A e um apoio deslizante inclinado aplicado no ponto D. Uma análise do DCL indica a existência de 4 reações de apoio, a saber, F_{xA} , F_{yA} , F_{xD} e F_{yD} .

Mas se observarmos com mais atenção o apoio deslizante, veremos que as reações que ele pode desenvolver são normais ou perpendiculares ao plano em que o deslizamento é possível. Na figura 2.29 a reação F_D é a reação total que o vínculo desenvolve e ela é normal ao plano de deslizamento, como indicado na parte inferior da figura. Sabendo a inclinação α do apoio, podemos decompor a resultante F_D segundo suas componentes F_{xD} e F_{yD} nas direções x e y , respectivamente. A figuras 2.29 permitem escrever uma relação entre as componentes F_{xD} e F_{yD} na forma:

$$\frac{F_{xD}}{F_{yD}} = \tan \alpha \quad (2.13)$$

Esta expressão (2.13) fornece uma relação adicional entre as reações de apoio existentes no ponto D. Esta reação adicional em conjunto com as 3 equações de equilíbrio perfazem 4 equações que permitem determinar as 4 reações de apoio, tornando assim o sistema isostático. Na verdade, analisando-se com cuidado o vínculo tipo “*apoio deslizante*” atuando no ponto D, constatamos que existe somente uma reação de apoio, a força F_D , atuando perpendicularmente ao plano de deslizamento. A decomposição desta uma força nas direções x e y é que cria uma incógnita adicional. Mas a própria geometria do apoio fornece uma relação entre as duas componentes F_{XD} e F_{YD} de forma que o grau de vinculação do sistema não é alterado.

Um segundo tipo de sistema aparentemente hiperestático está mostrado na figura 2.30. Na extremidade A o sistema é suportado por um apoio fixo. Na outra extremidade, ponto D, o vínculo com o exterior é realizado através de um pino articulado, que se conecta a uma barra, que por sua vez, está ligada a outro pino articulado no ponto E. Este último pino, no ponto E, está apoiado em um apoio fixo.

Uma análise do DCL também indica a existência de 4 reações de apoio, a saber, F_{XA} , F_{YA} , F_{XD} e F_{YD} . Se simplesmente contarmos as reações de apoio, o sistema que possui 4 reações, seria considerado hiperestático. Mas se analisarmos com cuidado o mecanismo de vinculação da extremidade direita, perceberemos que através dos pinos dos pontos D e E não são transmitidos momentos em relação ao eixo z . Ou seja:

$$M_{zD} = M_{zE} = 0 \quad (2.14)$$

Isto implica que, analogamente às peças de treliças, a barra DE somente desenvolve esforços axiais, na direção dos pontos D e E. Desta forma se conhecermos a geometria do vínculo, em particular, as coordenadas os pontos D e E, determinando, conseqüentemente, o ângulo α , mostrado em 2.30, podemos estabelecer para este vínculo uma relação análoga àquela dada por (2.13). De posse desta equação auxiliar, o sistema passa a dispor de 4 equações para 4 incógnitas, “levantando” então a hiperestaticidade do sistema. O sistema agora é isostático. Perceba que existe uma grande semelhança entre os vínculos mostrados nas extremidades direitas da figura 2.29 e da figura 2.30.

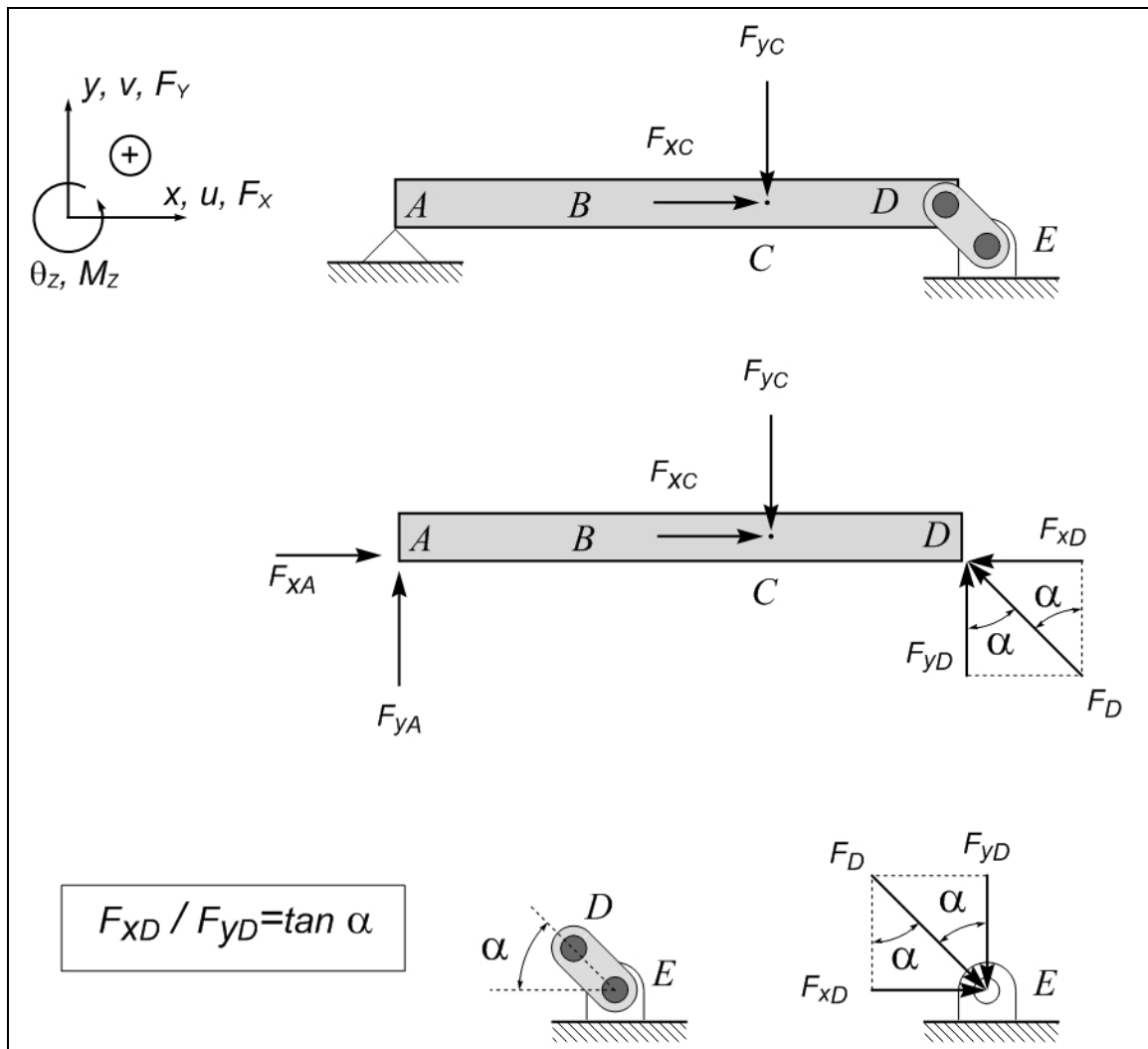


Figura 2.30: Sistema aparentemente hiperestático – ligação por pino articulado em D

Um terceiro tipo de sistema aparentemente hiperestático é constituído por elementos estruturais que possuam rótulas. A figura 31.a, mostra uma viga engastada no ponto A e simplesmente apoiada no ponto D. A viga está sujeita a uma carga concentrada F_{yC} , aplicada em C. No ponto B a viga apresenta uma rótula. Mais adiante no texto vamos dar exemplos e discutir rótulas com mais detalhe. Por agora basta mencionar que a particularidade de uma rótula é que ela não transmite momento, no caso, momento em torno do eixo z. Assim para a rótula podemos escrever:

$$M_{zB} = 0 \quad (2.15)$$

Uma análise do DCL, mostrado na figura 31.b, indica que existem 4 reações de apoio, a saber, F_{xA} , F_{yA} , M_{zA} e F_{yD} . Considerando a existência de 3 equações de equilíbrio, nosso sistema deveria ser considerado hiperestático. Entretanto veremos que a rótula no centro fornece uma equação adicional, no caso (2.15), que levanta a aparente hiperestaticidade do sistema.

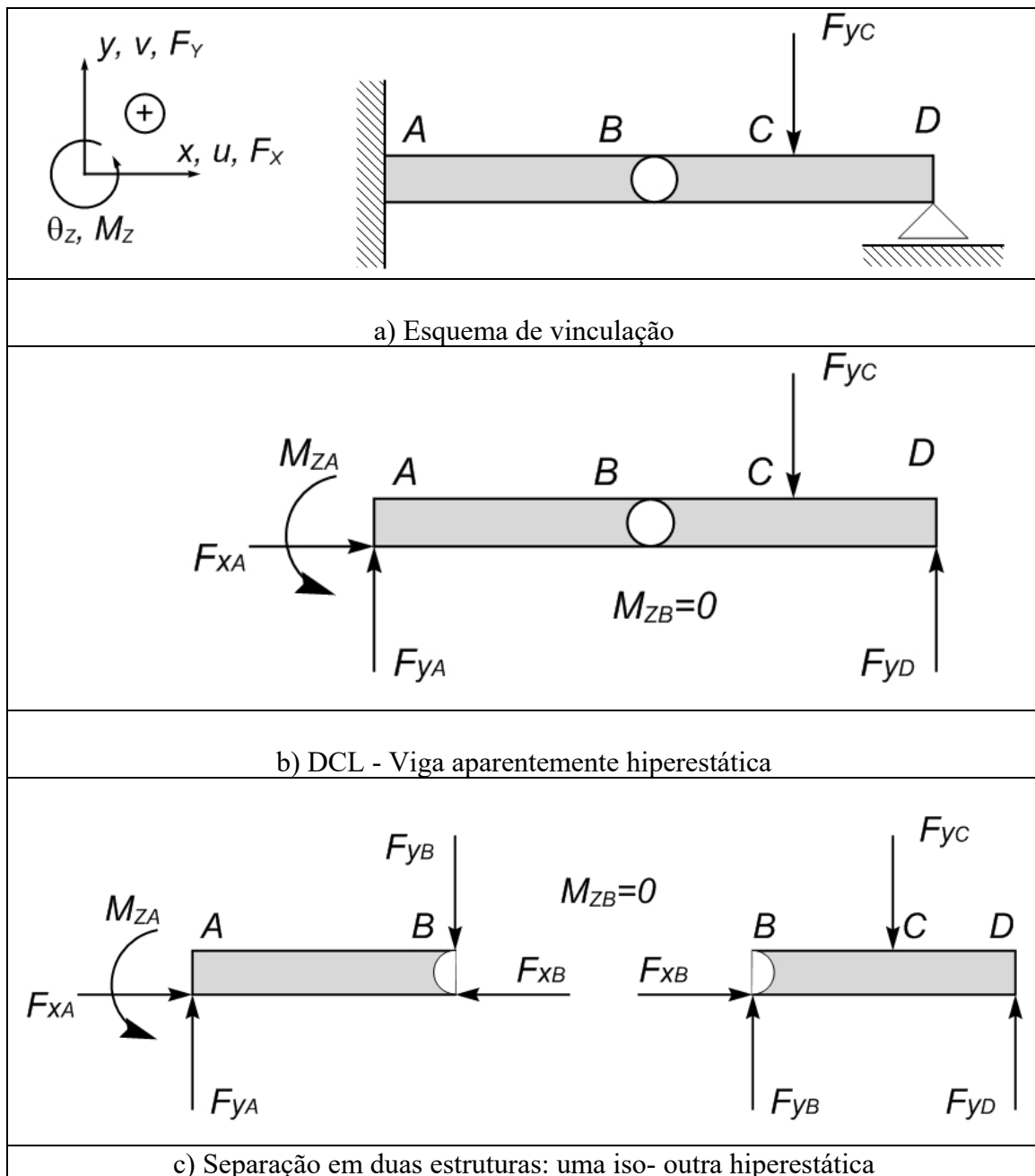


Figura 2.31: Viga aparentemente hiperestática com rótula no centro

Para mostrarmos que o sistema é passível de ser completamente resolvido com as equações de equilíbrio da estática e que, conseqüentemente, ele é um sistema isostático, vamos dividir a viga em duas partes, a partir da rótula B, tal como mostrando na figura 31.c.

Iniciemos a análise da porção BD, a parte direita do corpo na figura. Considerando que a rótula em B não transmite momento em torno do eixo z, sabemos que $M_{ZB}=0$. Logo na parte BD somente existem 3 reações incógnitas, F_{XB} , F_{YB} , e F_{YD} . Ou seja, as reações

desta parte BD podem ser determinadas com auxílio das equações de equilíbrio da estática. Depois das reações da parte BD serem determinadas as forças F_{XB} e F_{YB} são conhecidas.

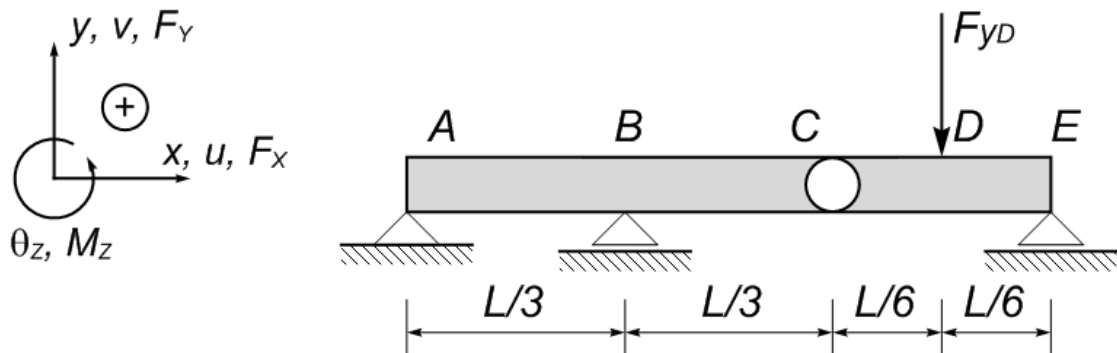
Voltemos agora para analisar a parte AB do corpo. Com F_{XB} e F_{YB} conhecidas, as únicas incógnitas no corpo AB são: F_{XA} , F_{YA} e M_{ZA} . O equilíbrio desta parte AB pode, agora, ser resolvido pelos métodos da estática.

A separação da estrutura em partes a partir da rótula, mostra que o sistema era solúvel com as 3 equações de equilíbrio da estática no caso plano. Uma forma alternativa de solução, e que não requer a separação da estrutura em duas partes, é dada pela aplicação $M_{ZB}=0$ a apenas uma parcela da viga, ou AB ou BD, conforme mostrado abaixo no exercício resolvido 2-ER-3.

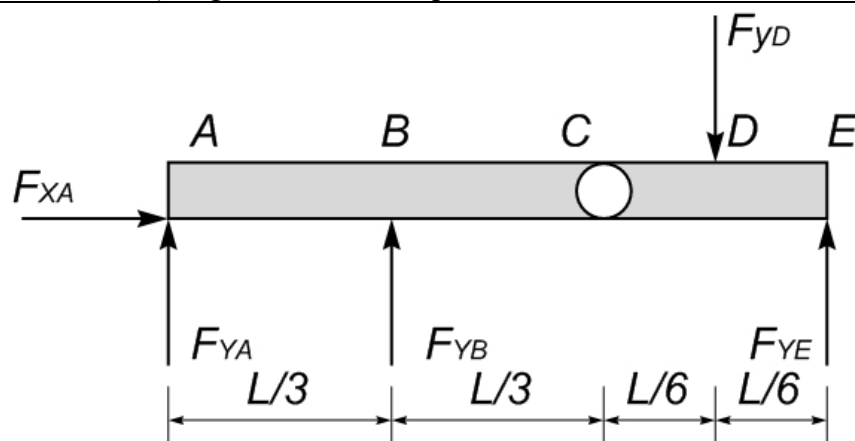
Um aspecto importante, ao qual voltaremos repetidamente neste texto, é o de se fazer balanços entre equações e incógnitas. Estes balanços permitem determinar se o sistema pode ser resolvido ou não.

Exercícios resolvidos sobre sistemas aparentemente hiperestáticos.

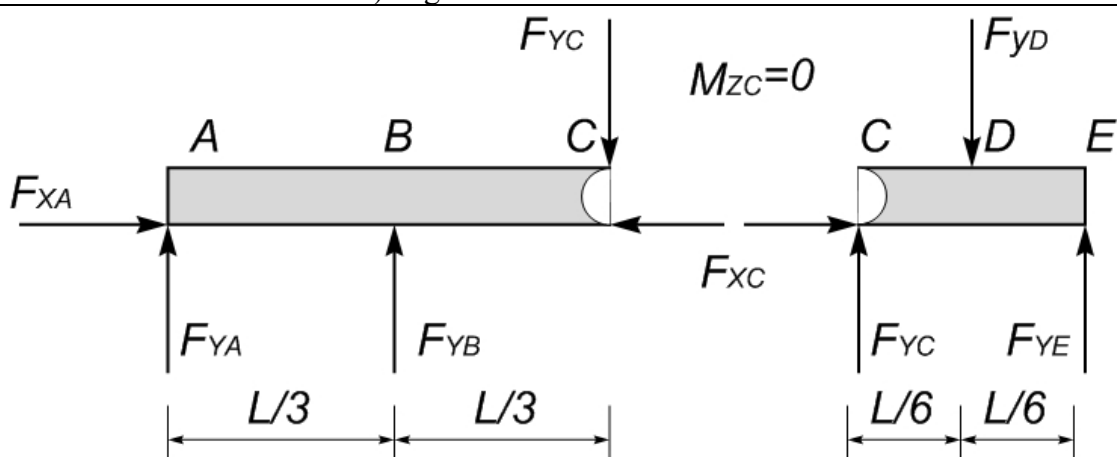
Exercício Resolvido 2-ER-3: Verifique, pelo balanço entre equações e incógnitas, se é possível determinar as reações de apoio da viga mostrada na figura 2.32. Se possível, calcule as reações de apoio.



a) Viga com rótula no ponto C



b) Viga com rótula em C - DCL



c) Determinação das reações de apoio.

Balanço- Equações disponíveis x Incógnitas	
<p>Equações de Equilíbrio no plano:</p> $\Sigma F_X=0 \quad (1)$ $\Sigma F_Y=0 \quad (2)$ $\Sigma M_Z=0 \quad (3)$ <p>Equação de restrição da rótula em C:</p> $\Sigma M_Z(C)=0 \quad (4)$ <p>Total de equações disponíveis: 4</p>	<p>Reações de Apoio:</p> $F_{XA}=? \quad (1)$ $F_{YA}=? \quad (2)$ $F_{YB}=? \quad (3)$ $F_{YE}=? \quad (4)$ <p>Total de reações incógnitas: 4</p> <p>Resultado: 4 incógnitas e 4 equações. Sistema é aparentemente hiperestático e pode ser resolvido pelos métodos da estática.</p>
Montagem do sistema de equações (4x4):	
<p>Equações aplicadas a todo o DCL mostrado na figura b):</p> $\Sigma F_X=0 \Rightarrow +F_{XA}=0 \quad (1)$ $\Sigma M_Z(A)=0 \Rightarrow +F_{BY} \cdot (L/3) - F_{YD} \cdot (5L/6) + F_{YE} \cdot (L)=0 \quad (2)$ $\Sigma M_Z(B)=0 \Rightarrow -F_{AY} \cdot (L/3) - F_{YD} \cdot (3L/6) + F_{YE} \cdot (2L/3)=0 \quad (3)$ <p>Equação de restrição aplicada à parcela CE do corpo mostrado em c):</p> $\Sigma M_Z(C)=0 \Rightarrow -F_{YD} \cdot (L/6) + F_{YE} \cdot (L/3)=0 \quad (4)$ <p>Montando o sistema algébrico a partir das equações (1) a (4) acima:</p> $\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +L/3 & +L \\ 0 & -L/3 & 0 & 2L/3 \\ 0 & 0 & 0 & L/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{XA} \\ F_{YA} \\ F_{YB} \\ F_{YE} \end{Bmatrix} = F_{YD} \begin{Bmatrix} 0 \\ +5L/6 \\ +3L/6 \\ +L/6 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$	
<p>Cuja solução, pode ser facilmente obtida (ver "notebook solução 2-ER-3.nb") :</p> $\begin{Bmatrix} F_{XA} = 0 \\ F_{YA} = \frac{-F_{YD}}{2} \\ F_{YB} = F_{YD} \\ F_{YE} = \frac{F_{YD}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$	
<p>Uma solução alternativa seria escrever a equação de restrição aplicada à parcela AC do corpo mostrado na figura c):</p>	

$$\Sigma M_z(C)=0 \Rightarrow -F_{YA} \cdot (2L/3) - F_{YB} \cdot (L/3) = 0 \quad (5)$$

Podemos agora construir um novo sistema algébrico a partir das equações (1, 2,3) e (5):

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +L/3 & +L \\ 0 & -L/3 & 0 & 2L/3 \\ 0 & -2L/3 & -L/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{XA} \\ F_{YA} \\ F_{YB} \\ F_{YE} \end{Bmatrix} = F_{YD} \begin{Bmatrix} 0 \\ +5L/6 \\ +3L/6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Cuja solução agora é (ver "notebook solução 2-ER-3.nb"):

$$\begin{Bmatrix} F_{XA} = 0 \\ F_{YA} = \frac{-F_{YD}}{2} \\ F_{YB} = F_{YD} \\ F_{YE} = \frac{F_{YD}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Observar que as soluções dos sistemas (2.16) e (2.18), respectivamente mostradas nas equações (2.17) e (2.19) são idênticas. Esta igualdade de soluções indica que é realmente possível resolver a viga aparentemente hiperestática através das duas alternativas acima descritas. O somatório dos momentos em relação ao ponto C , $\Sigma M_z(C)$ é nulo, tanto para a parte AC como para a parte CE do corpo mostrado na figura 3.

Figura 2.31: Exercício resolvido 2-ER-3 - Viga aparentemente hiperestática

CONSIDERAÇÕES SOBRE A MODELAGEM DE VÍNCULOS E ESFORÇOS

MODELAGEM DE VÍNCULOS

APOIO SIMPLES COM DESLIZAMENTO

APOIO SIMPLES SEM DESLIZAMENTO

ENGASTAMENTO

RÓTULAS

DIFICULDADES E ESCOLHAS

MODELAGEM DE ESFORÇOS

FORÇAS CONCENTRADAS

FORÇAS DISTRIBUÍDAS

DIFERENÇAS ENTRE A ESTÁTICA E A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

Nesta seção vamos explorar algumas diferenças entre os objetivos e meios da disciplina da Mecânica Geral conhecida como *Estática* e aqueles da *Resistência dos Materiais* e também da *Mecânica dos Sólidos*. Para tanto será montada uma pequena tabela, cujas implicações serão explicitadas mais abaixo, através de exemplos.

Tabela 1 - Uma comparação entre métodos e objetivos da Estática e Resistência dos Materiais

Item	Quesito (analisado)	Estática	Resistência dos Materiais (Mecânica dos Sólidos)
1	Hipótese sobre o deformabilidade do corpo ou elemento estrutural	Rígido	Corpo Flexível
2	Esforços a serem determinados	Esforços nos vínculos (ou Esforços externos)	Esforços nos vínculos (externos) e distribuição de esforços ao longo do corpo (internos)
3	Vinculação	Isostática	Isostática e Hiperestática

Vamos exemplificar, brevemente, cada um dos quesitos acima mencionados. Para a Estática o corpo é considerado rígido e nos interessamos basicamente pela determinação dos esforços de vinculação, ver figura 2.32a. Já no caso da Resistência dos Materiais, a deformação ou deslocamento que os corpos exibem após serem submetidos a vínculos e esforços, v_B na figura 2.32b, é objeto de estudo.

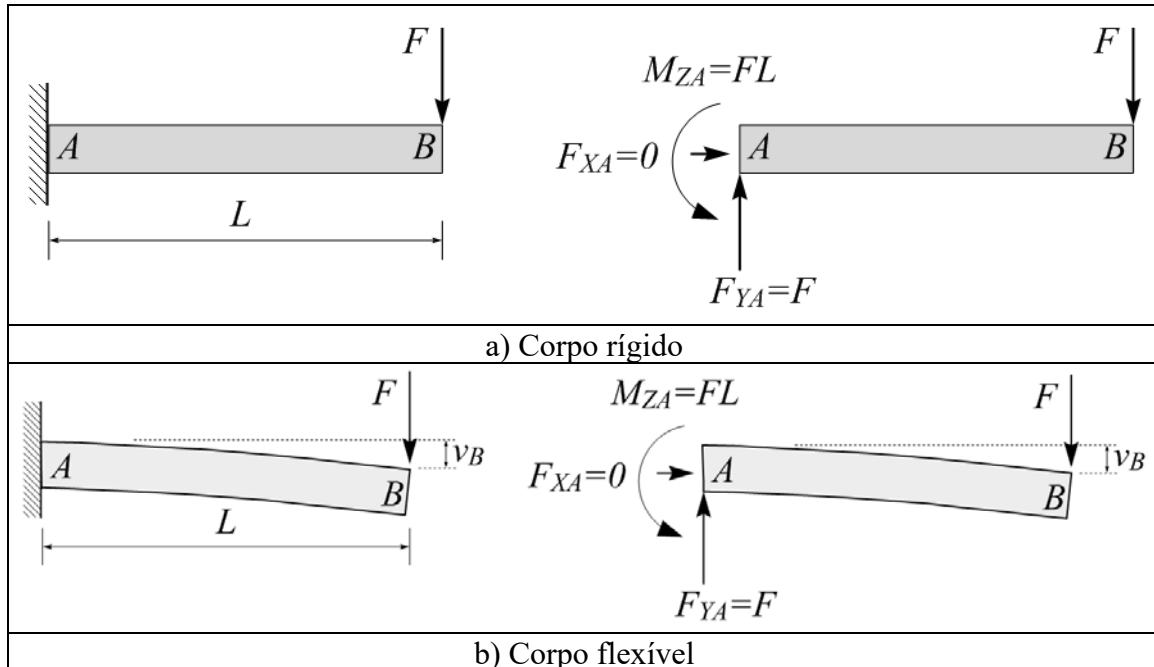


Figura 2.32: Corpo rígido e corpo flexível. Objetos da Estática e Res. Mat.

No quesito esforços a serem determinados, o objeto principal do que chamamos de Estática está relacionado à determinação das forças de vinculação, externas, que atuam sobre o corpo. Do ponto de vista da Resistência dos Materiais ou da Mecânica dos Sólidos a distribuição interna dos esforços é muito importante. Existe uma ligação muito estreita entre a distribuição interna dos esforços e a deformação dos corpos. Este tema é ilustrado nas figuras 2.33a e 2.33b. Percebe-se que as duas estruturas mostradas são iguais e possuem as mesmas reações de apoio. Mas do ponto de vista dos carregamentos e das distribuições internas de esforços, as diferenças são claramente perceptíveis. Enquanto toda a estrutura AC mostrada na figura 2.33a está sujeita a esforços internos (cuja determinação será objeto deste curso), na estrutura mostrada na figura 2.33b, toda a parte CD está isenta de solicitações internas. Assim, se do ponto de vista dos esforços nos vínculos as estruturas 2.33a e 2.33b não se diferenciam, do ponto de vista da Resistência dos Materiais, ou seja, das distribuições dos esforços solicitantes internos, elas são muito distintas.

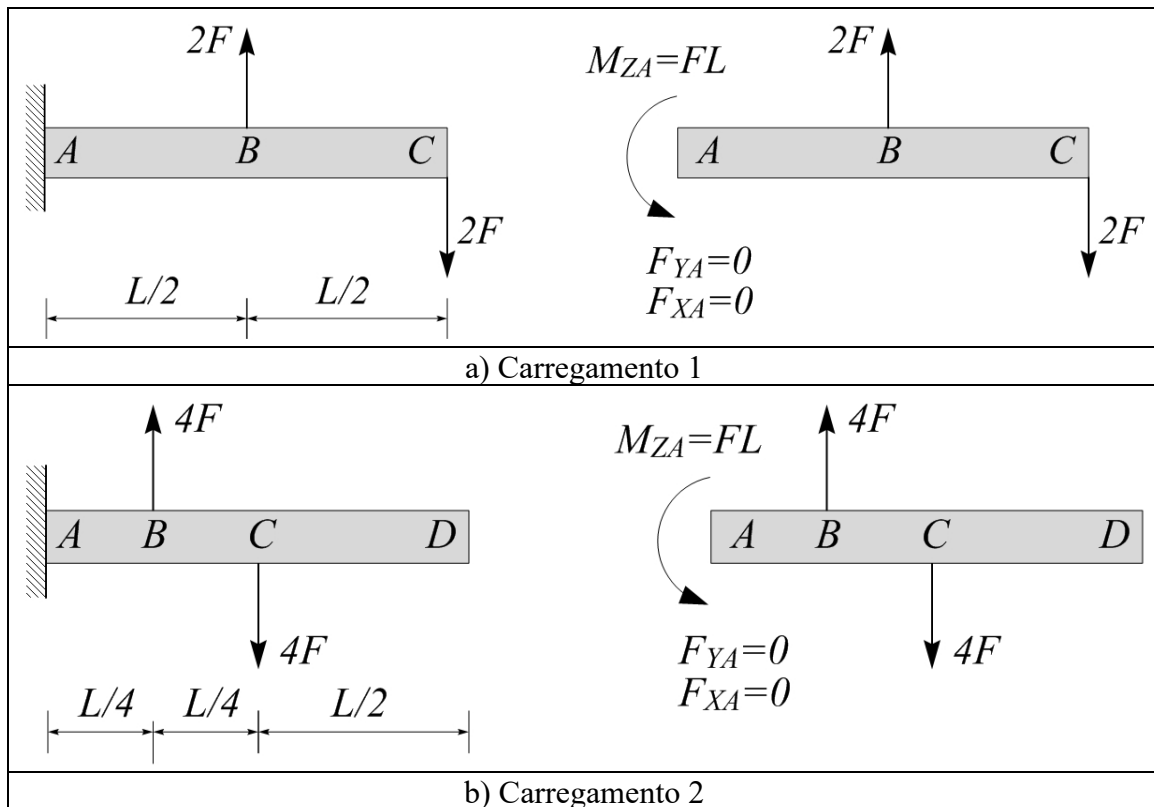


Figura 2.33: Estrutura com esforços externos iguais e internos distintos

A figura 2.34 mostra ainda uma diferença significativa entre os objetos da Estática e aqueles da Res. Mat. Para a Estática, o que interessa são os tipos de vínculos, as relação de distâncias entre os vínculos e os carregamentos aplicados. Na figura 2.34a temos um estrutura carregada com uma carga F aplicada no ponto C e na figura ao lado as reações de apoio provocadas pelos vínculos. Na figura 2.34b temos um corpo completamente distinto da estrutura anterior, mas a posição e o tipo dos vínculos, bem como o carregamento são idênticos ao caso 2.34a. O sistema é isostático e as reações de apoio existentes estão mostradas. Perceba que as reações de apoio em nas figuras 2.34a e 2.34b são idênticas. Mas seguramente, dada a diferença entre os corpos, a distribuição interna destes esforços será muito diferente em cada caso.

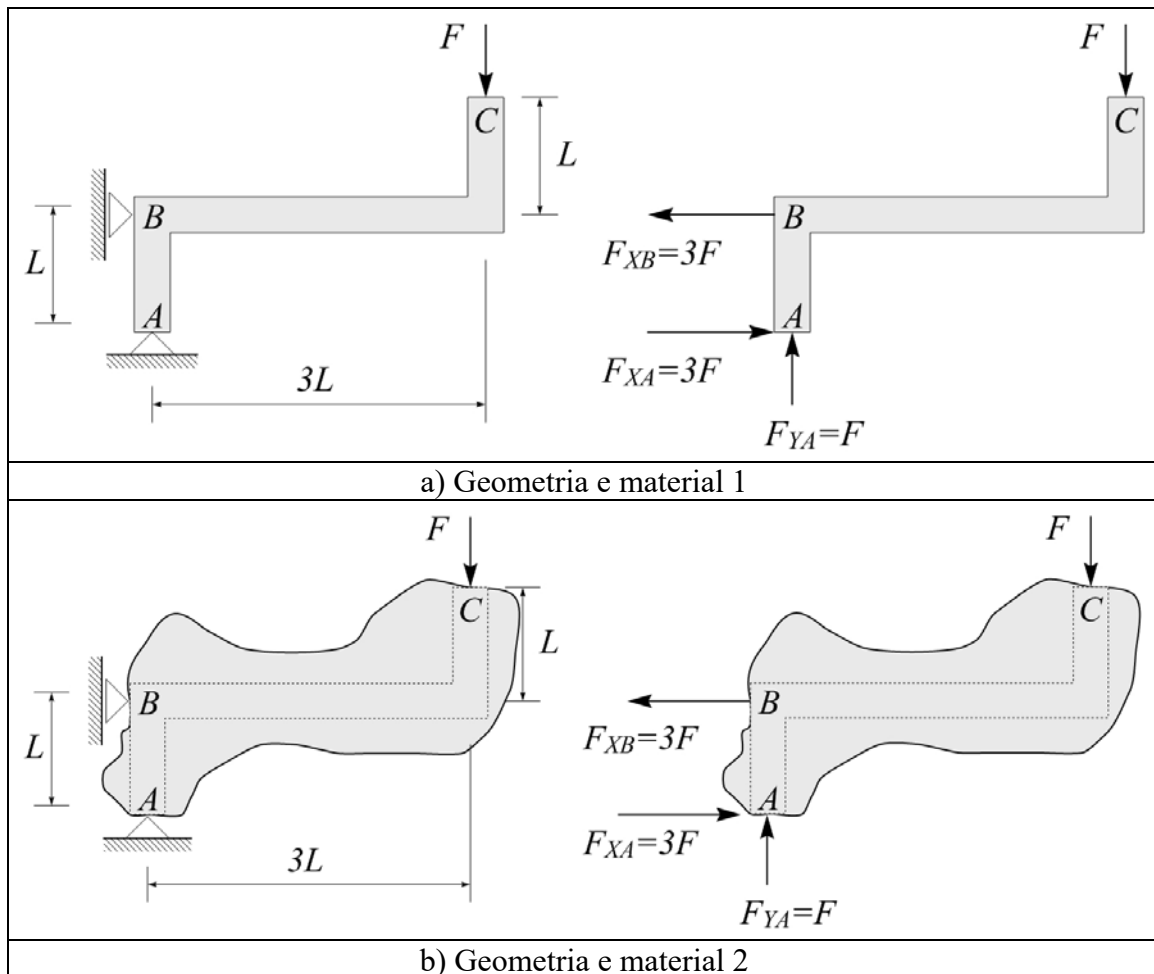


Figura 2.34: Estrutura com esforços externos iguais e internos distintos - papel da geometria da estrutura

No tocante ao item vinculação, a Estática de corpos rígidos somente nos permite determinar os esforços nos vínculos de sistemas isostáticos. Como veremos, ao introduzirmos informações sobre deslocamentos e deformações, a Resistência dos Materiais permitirá a determinação de reações de apoio em sistemas hiperestáticos. Isto está ilustrado na figura 2.35.

Na figura 2.35a está mostrado um sistema estrutural constituído por uma viga AB , que apresenta um suporte fixo na extremidade A e sujeita a uma força concentrada F aplicada na extremidade B . Nos pontos C e D a viga é presa por duas barras verticais, respectivamente CE e DG . Imaginemos inicialmente que todos os componentes são rígidos. A figura 2.35b mostra o Diagrama de Corpo Livre (DCL) para esta estrutura rígida. Uma análise das forças indica que existem 4 incógnitas, respectivamente, F_{YA} , F_{XA} , F_{CE} e F_{DG} , o que caracteriza este sistema plano como sendo hiperestático. Não existe metodologia na Estática, capaz de determinar os esforços no vínculo e nas barras.

Vamos agora adentrar o âmbito da Resistência dos Materiais e considerar que a viga AB permanece rígida, mas que as barras CE e DG são agora flexíveis e que podem ser

modeladas por molas lineares, tal como mostrado na figura 2.35c. As constantes de mola associadas às barras CE e DG são, respectivamente, k_{CE} e k_{DG} . Se a viga AB é rígida e as barras CE e DG são flexíveis, após a aplicação da força F todo o sistema se deformará. No caso a viga rígida AB irá efetuar uma rotação em torno do ponto A . Como consequência os pontos C e D efetuarão um deslocamento vertical para baixo de valores v_C e v_D , tal como mostrado na figura 2.35d. O encurtamento da mola k_{CE} e o alongamento da mola k_{DG} produzirão os esforços F_{CE} e F_{DG} dados por:

$$\begin{aligned} F_{CE} &= k_{CE} v_C \\ F_{DG} &= k_{DG} v_D \end{aligned} \quad (2.20)$$

As forças desenvolvidas pelas molas e aplicadas sobre a viga AB podem ser observadas na figura 2.34e. Uma análise desta estrutura deformada indica que ela também é hiperestática, tal qual aquela mostrada anteriormente em 2.35b. Mas agora, o fato de termos considerado as barras CE e DG flexíveis introduz uma consequência importante. Se os deslocamentos dos pontos C e D não forem muito grandes, então podemos considerá-los como iguais, ou seja:

$$v_D = v_C \quad (2.21)$$

Esta relação (2.21) é nova e é proveniente da flexibilidade introduzida nas barras. A partir da igualdade dos deslocamentos dos pontos C e D , e trabalhando com as relações (2.20) e (2.21), podemos estabelecer uma relação entre as forças F_{CE} e F_{DG} que pode ser escrita como:

$$F_{CE} = \frac{k_{CE}}{k_{DG}} F_{DG} \quad (2.22)$$

A relação (2.22) pode ser, agora, utilizada para resolver o problema hiperestático mostrado em 2.34b e 2.35d. Esta equação (2.22) entre as forças F_{CE} e F_{DG} em conjunto com as 3 equações de equilíbrio de corpos no plano (2.12) são suficientes para solucionar o sistema estrutural hiperestático 2.35a que possui 4 reações de apoio incógnitas.

O exemplo acima discutido é bastante simples. Mas ele possibilita explicitar com clareza uma importante diferença entre os Métodos da Estática e os Métodos da Resistência dos Materiais (e Mecânica dos Sólidos). Ao longo deste curso veremos que a introdução de informação, na forma de equações, sobre o deslocamento ou a deformação dos elementos estruturais, vai criar as condições adicionais que necessitamos para tratar os sistemas hiperestáticos.

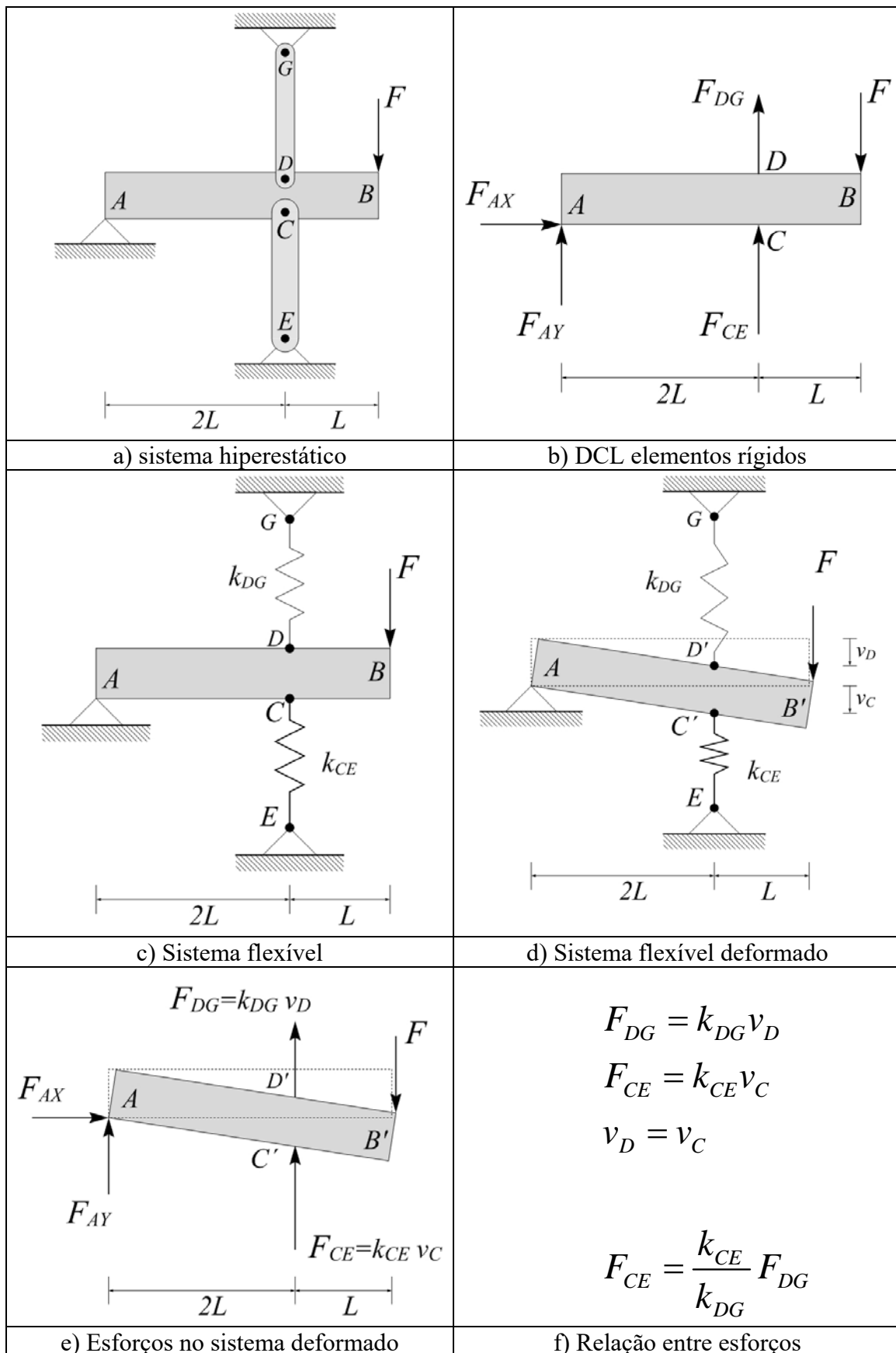


Figura 2.35. Sistemas hiperestáticos rígido e flexível.

CLASSIFICAÇÃO E NOMENCLATURA DE ALGUNS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Até o presente momento utilizamos as expressões *barra* e *viga*, sem termos fornecidos um significado mais preciso a estes termos. Nesta seção vamos discutir alguns termos técnicos utilizados na Resistência dos Materiais e na Análise Estrutural. Os exemplos que se seguem não pretendem esgotar o assunto, mas simplesmente criar uma nomenclatura comum mínima para viabilizar o aprendizado da Res. Mat.

Barras e Vigas. Costuma-se chamar de barra e viga aqueles elementos estruturais que possuem uma dimensão claramente superior às outras duas. As figuras 2.36a mostra um elemento retilíneo de comprimento L e com seção transversal com dimensões B e H , para o qual $L \gg H, B$. Quando o elemento é solicitado *axialmente*, ou seja, na direção de seu comprimento maior, o elemento recebe a denominação de *barra*, ver figura 2.36b. Quando o elemento é solicitado *transversalmente* ao seu maior lado, tal como na figura 2.36c, o elemento é designado *viga*. Uma outra possibilidade de elemento estrutural são as *vigas curvas*, tais como a mostrada na figura 2.36d.

Membranas, placas e cascas. Embora o presente curso tratará basicamente de elementos estruturais do tipo apresentado na figura 2.36, nos parece conveniente mostrar a nomenclatura de outras estruturas idealizadas. Consideremos agora estruturas planas com duas dimensões L_x e L_z bastante maior que a terceira, L_y , ou seja $L_x, L_z \gg L_y$. A figura 2.37a mostra uma estrutura contida no plano x - z e cujo carregamento também atua neste mesmo plano. A estrutura mostrada na figura 2.37a é conhecida como *membrana*.

A figura 2.37b mostra uma estrutura também contida no plano x - z . Mas ao contrário da figura anterior o carregamento neste caso é transversal ao plano x - z , e atua na direção y . Esta estrutura é conhecida como *placa*. Perceba que a espessura L_y é bastante menor que as demais dimensões, L_x e L_z . O leitor deve entender que *membranas* e *placas*, figuras 2.37a e 2.37b, são as generalizações para o caso bidimensional de *barras* e *vigas*, mostradas nas figuras 2.36a e 2.36b.

Na figura 2.37c vemos uma estrutura que possui uma espessura e relativamente pequena quando comparada com as demais dimensões da estrutura, L_x , L_y e L_z . A estrutura agora não está contida no plano x - z , mas é uma estrutura espacial. Este tipo de estrutura é chamada de *casca*.

Estas estruturas, barras, vigas, membranas, placas e cascas, são importantes pois existem teorias específicas para tratá-las. Estas teorias são, como veremos, as chamadas *Teorias Técnicas*. Em nosso curso vamos tratar das teorias técnicas para barras e vigas.

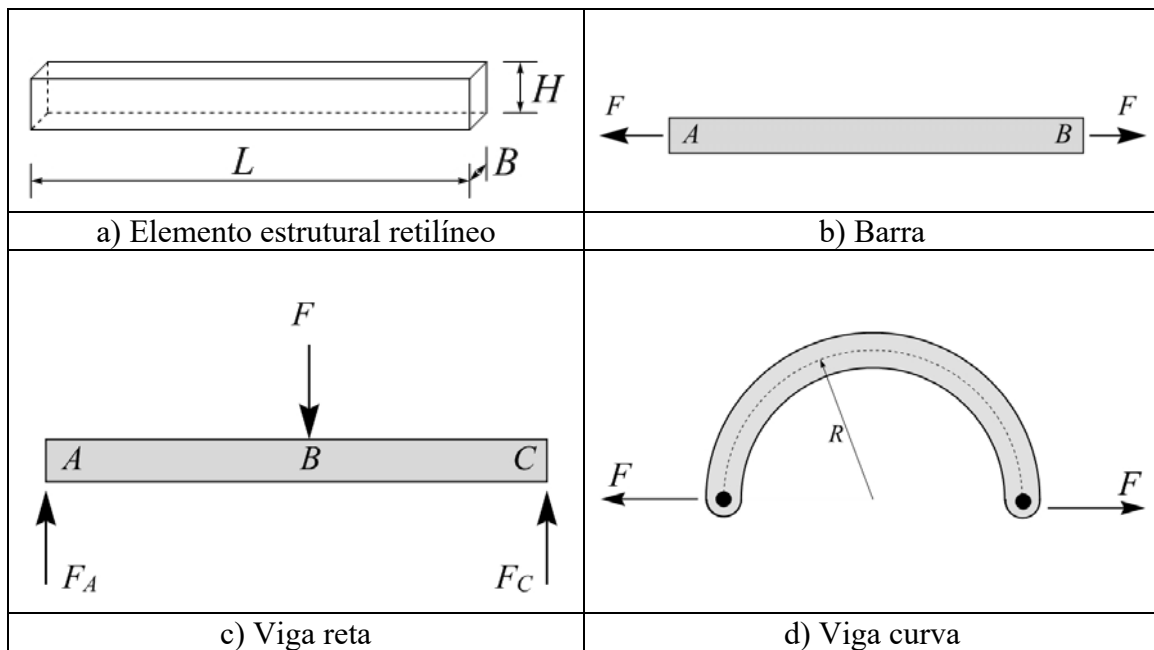


Figura 2.36: Barras e Vigas

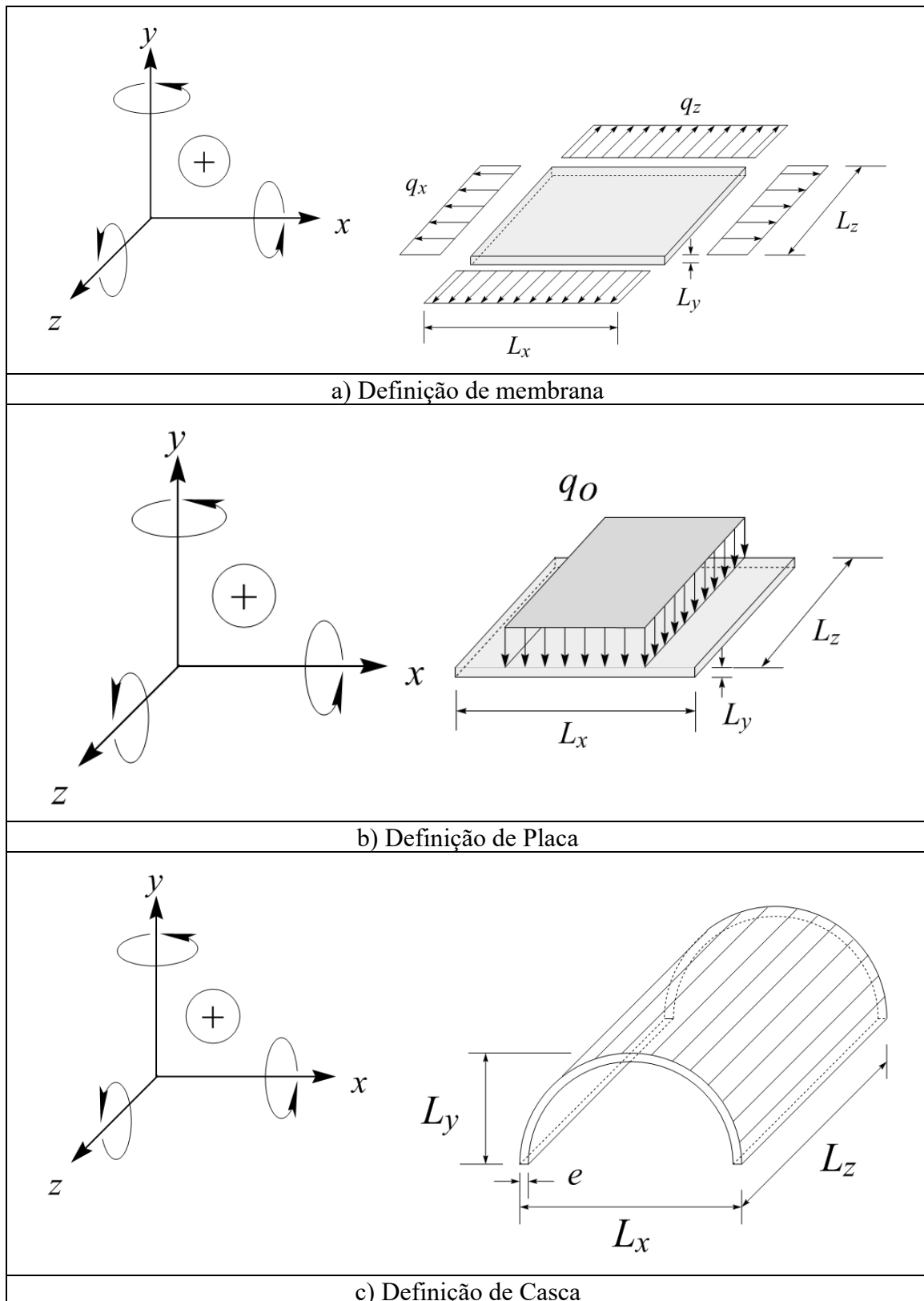


Figura 2.37: Membrana, placa e casca